مقاله

نویسنده: **تالیا بن‌زیو**
ترجمه و تلخیص: **سپیده چمن‌آرا**
معلم ریاضی راهنمایی منطقهٔ ۲ تهران

منشأ خطاهای دانش‌آموزان

زمانی که دانش‌آموزان در خطای ریاضی، «درست» عمل کرده‌اند!

اشاره

مطلب حاضر، خلاصه‌ای از فصل ۵ کتاب «ماهیت تفکر ریاضی»[1] با عنوان زمانی که تفکر ریاضی نادرست دقیقاً «درست» است: اکسیمورون خطاهای منطقی[2] می‌باشد.

این فصل، به منشأ خطاهای دانش‌آموزان در حل مسائل ریاضی می‌پردازد و آن دسته از خطاهایی را بررسی می‌کند که در واقع در اثر تعمیم یا تخصیص بیش از حد یک قانون درست، حاصل شده‌اند و لذا «منطقی» هستند! لزوم آشنایی معلمان ریاضی با این مقوله، در مقدمهٔ مقاله به خوبی آشکار است.

مقدمهٔ مقاله، عیناً ترجمه شده است، لیکن ادامهٔ مطلب، به صورت برداشت آزاد توسط مترجم آماده شده است.

کلیدواژه‌ها: تفکر ریاضی، خطاهای منطقی، بدفهمی.

مقدمه

دانش‌آموزان بسیار مبتکرند. وقتی با مسئله‌ای مواجه می‌شوند که نمی‌دانند چگونه آن را حل کنند، الگوریتم‌هایی ابداع می‌کنند و برای حل آن مسئله به‌کار می‌برند اگرچه اغلب این الگوریتم‌ها، به پاسخ‌های نادرست منتهی می‌شوند. مثلاً در فرآیند یادگیری عمل تفریق، اکثر دانش‌آموزان، اشتباه معروفِ «کوچک‌تر از بزرگ‌تر کم کن» را مرتکب می‌شوند[3].

یا این‌که دانش‌آموزانی که جمع کسرها را یاد می‌گیرند، اغلب به اشتباه صورت‌ها را با هم و مخرج‌ها را نیز با هم جمع می‌کنند.

این الگوریتم‌های نادرست و الگوریتم‌های مشابه آن‌ها، تصادفی نیستند، بلکه نظام‌مند هستند و براساس قوانین درست شکل گرفته‌اند. از این‌رو، آن‌ها را، «خطاهای منطقی» می‌نامند. واژهٔ «منطقی» در این عبارت، معنای بسیار خاصی دارد و به

فرآیندی اشاره می‌کند که در آن، دانش‌آموز ابتدا یک قانون نادرست را استنتاج می‌کند و پس از آن، به روشی که به لحاظ منطقی سازگار است، آن را «به درستی» ادامه می‌دهد.

سؤال مهمی که در این جا مطرح می‌شود این است که «منشأ این خطاهای منطقی چیست»؟ قطعاً معلمان این الگوریتم‌های نادرست را به دانش‌آموزان یاد نمی‌دهند، و این در حالی است که در پاسخ‌های دانش‌آموزان به مسائل ریاضی، دائماً چنین خطاهایی دیده می‌شود. برخی اصرار دارند از این امر نتیجه بگیرند که دانش‌آموزان در فرآیند یادگیری ریاضی، قوانین شخصی خویش را خلق می‌کنند. اما با وجود ابداعات شخصیِ دانش‌آموزان، به نظر می‌رسد شکلِ فعلی نظام آموزش ریاضی، دقیقاً محرک و مشوق تولید خطاهای منطقی توسط دانش‌آموزان است. آیا بخشی از خطاهای منطقی می‌تواند حاصل واقعیت مدرسه‌هایی باشد که در آن‌ها، دانش‌آموزان، «به‌خوبی» ریاضی را یاد می‌گیرند؟ در مقاله‌ای[۴] در سال ۱۹۸۸ میلادی، شونفیلد به این نکته اشاره نمود که آموزشی که در آن معلمان بر حفظیات طوطی‌وار تأکید دارند، منجر به شکل‌گیری بدفهمی‌هایی در دانش‌آموزان می‌شود که به نمونه‌هایی از آن‌ها در ابتدای این مقدمه اشاره شد. در این خصوص، سؤال جالب توجه این است که آیا این خطاها، در اثر «بیش یادگیری[۵]» مطالب قبلی توسط دانش‌آموزان به‌وجود می‌آیند؟ مثلاً دانش‌آموزانی که خطای «تفریق کوچک‌تر از بزرگ‌تر» را در تفریق ستونی مرتکب می‌شوند، همیشه بدون توجه به موقعیت ارقام، عدد کوچک‌تر را از عدد بزرگ‌تر کم می‌کنند. چنین خطایی ممکن است در اثر آموزشی که در تفریق اعداد یک رقمی پیش از این دیده است و تأکیدی که آن‌جا بر کم کردنِ عدد کوچک‌تر از عدد بزرگ‌تر می‌شده، باشد. در واقع، دانش‌آموزی که مرتکب خطای «تفریق عدد کوچک‌تر از عدد بزرگ‌تر» می‌شود، آموزش قبلی خود را بیش از حد تعمیم[۶] داده است!

در مثال جمع کسرها که دانش‌آموزان به اشتباه، صورت‌ها را با هم جمع می‌کنند و مخرج‌ها را با هم، سیلور (۱۹۸۶) توضیح می‌دهد که شاید منشأ این خطا، شیوهٔ سنتی آموزش کسرها با استفاده از بازنمایی‌های تصویری باشد زیرا معلمان و کتاب‌های درسی، اغلب کسرها را با استفاده از نمودارهای دایره‌ای (یا امثال آن) نمایش می‌دهند. به عنوان مثال، مرسوم است که «$\frac{۱}{۲}$» به عنوان یک قسمت از دو قسمتِ دایره تدریس شود. زمانی که دانش‌آموز می‌خواهد کسرها را جمع بزند، ممکن است چنین استدلال کند که «خوب! اگر $\frac{۱}{۲}$ دارم، یعنی یک قطعه از دو قطعهٔ دایره را دارم؛ می‌خواهم $\frac{۱}{۳}$ را اضافه کنم که آن هم یک قطعه از سه قطعهٔ دایره است. پس دو قطعه خواهم داشت و در کل نیز ۵ قطعهٔ دایره را دارم. پس جواب $\frac{۲}{۵}$ است.» چنین خطایی که برای دانش‌آموز معنا دار است، این حقیقت را آشکار می‌کند که بازنمایی کسرها با استفاده از شکل‌های هندسی (مثل دایره و مستطیل و...) اغلب به صورت طوطی‌وار تدریس می‌شود و از طرف دیگر، دانش‌آموزان برای حل مسائل، به دنبالِ قوانین نظام‌مندی هستند که ممکن است موجب ناکامی آن‌ها در آن مسئله شود.

مثال دیگری که نشان می‌دهد دانش‌آموزان نسبت به دانش قبلی خود بیش یادگیری دارند، توسط فن لین (۱۹۸۶) گزارش شده است. فن لین نشان داد که دانش‌آموزانی که چگونگی انتقال در تفریق را تنها در تفریق ستونی اعداد دو رقمی آموزش می‌بینند، ممکن است بعدها در حل تفریق‌های ستونی چند رقمی، تنها عمل انتقال را در ستونِ یکان انجام دهند. هم‌چنین، شونفیلد (۱۹۹۱) کلاسی را توصیف کرد که در آن، دانش‌آموزان تفریق را تنها با حل مسائلی از نوع «n-?=m» که در آن $n > m$، یاد گرفته بودند. دانش‌آموزان این کلاس، به سرعت فهمیده بودند که چنین مسائلی با کم کردن m از n، حل می‌شود. بنابراین، هنگامی که نوع جدیدی از مسائل مثلاً به صورتِ ۳-?=۷ به آن‌ها داده شد، به اشتباه جواب دادند «۴». به دلیل این‌که این نوع خطاها قانون‌مند و نظام‌مند هستند، جزو خطاهای منطقی به‌شمار می‌آیند، هرچند که با ویژگی‌های اساسی تفریق (مثل عدم وجود جابه‌جایی در آن) تناقض دارند.

بعضی از الگوریتم‌ها و قوانین شخصی که دانش‌آموزان ابداع

می‌کنند، در مقابل یا در تضاد با چیزی است که معلمان در کلاس‌ها آموزش می‌دهند. اگرچه این دانش‌آموزان، آن‌چه را که معلم آموزش داده است خوب یادگرفته‌اند، اما گاهی به‌نظر می‌رسد که آموزش‌های معلم را «زیادی خوب» یاد گرفته‌اند! زیرا آن را زیادی تعمیم می‌دهند و بدین سبب در حل مسایل، مرتکب خطا می‌شوند که چون پس از خطای اولیه، باقی مسیر را- طبق آن خطا- به درستی ادامه می‌دهند، «خطاهای منطقی» نامیده می‌شوند.

توجه کنیم که برای استفاده‌های عملی در آموزش، همان‌قدر که شناخت چگونگی یادگیری ریاضی توسط دانش‌آموزان اهمیت دارد، فهمیدن ریشه‌های خطاهای دانش‌آموزان نیز از اهمیت برخوردار است.

نویسنده پس از این مقدمه در مورد خطاهای منطقی، بر روی چهار سازوکارمکانیزم که به استناد یافته‌های پژوهشی، در اکتساب تفکر ریاضی صحیح نقش دارند، تمرکز کرده و ضمن بررسی آن‌ها، به شرایطی که موجب می‌شود این سازوکارها، مولد خطاهای منطقی باشند، اشاره کرده است. این چهار سازوکار عبارتند از: استقرا از مثال‌ها[۷]، تفکر قیاسی[۸]، تفکر طرحواره مدار[۹]، و تفکر همبسته[۱۰] که همگی با یکدیگر هم‌پوشانی دارند.

ماهیت استقرایی تفکر ریاضی

شواهد فراوانی نشان می‌دهد که دانش‌آموزان، مراحل یک رویه یا روش حل یک مسئله را از روی مثال‌های حل شده استنتاج می‌کنند و سپس آن را در موارد دیگر، تخصیص یا تعمیم می‌دهند. این نوع تعمیم یا تخصیص، یکی از روش‌های یادگیری ریاضی است. به عنوان مثال، دانش‌آموزان با دیدن نمونه‌هایی ازتجزیه چند جمله‌ای‌ها به صورتِ

$$x^۲+۵x+۶=(x+۲)(x+۳)$$

می‌توانند قانونِ نهفته در پَسِ این تجزیه‌ها را که به صورت

$$x^۲+ax+b=(x+c)(x+d)$$

$$cd=b \quad , \quad c+d=a$$

است، منتزع کنند و خودشان نمونه‌های دیگر را تجزیه کنند.

یکی از انوع تفکر استقرائی، تفکر قیاسی است که در مطالعات شناختی به‌طور کلی و در بررسی تفکر ریاضی به طور خاص، تمرکز ویژه‌ای بر آن شده است. در بخش بعدی، به بررسی این سازوکار می‌پردازیم.

ماهیت قیاسی تفکر ریاضی

برای حل یک مسئله با استفاده از تفکر قیاسی، دانش‌آموز در مواجه شدن با یک مسئله جدید (مسئله «هدف[۱۱]») به دنبال مسئله‌ای مشابه با آن می‌گردد (مسئله «منبع[۱۲]») و سپس بین اجزای مسئله هدف و مسئله منبع، تناظر برقرار می‌کند تا براساس راه‌حل مسئله منبع، مسئله هدف را حل کند. در این فرآیند، در واقع طرحواره‌ای شکل می‌گیرد که ویژگی‌های اساسی (یا در واقع ساختار عمیق[۱۳]) و رویه حل مسئله را دربر می‌گیرد و این طرحواره در حل مسائل مشابه، به کار می‌آید.

برای مثال، دو مسئله زیر را در نظر بگیرید:

مسئله۱. بیماری دارای یک غده بدخیم است. برای از بین بردنِ این غده، باید از اشعه استفاده کرد ولیکن اشعه‌ای که شدّت آن برای از بین بردنِ غده، لازم است، نسوج سالم را نیز تخریب می‌کند. برای از بین بردن غدّه توسط اشعه، چه راهی پیشنهاد می‌کنید؟

مسئله ۲. [در یک عملیات جنگی] برای فتح یک قلعه باید از جاده‌هایی گذشت که مین‌گذاری شده‌اند. مین‌ها در اثر عبور تعداد زیادی از افراد از روی آن‌ها به‌طور همزمان، منفجر می‌شوند. لیکن اگر تعداد افرادی که از روی آن‌ها عبور می‌کنند، کم باشد، مین‌ها منفجر نمی‌شوند.

ژنرالی که فرمانده عملیات فتح این قلعه است، چگونه می‌تواند از این جاده‌ها عبور کند و قلعه را فتح کند؟

هر دو مسئله، اشاره به استفاده از «تعداد زیادی نیروی کم» دارند (در مثالِ غده، تاباندن چندین اشعه با شدّت کم به غدهٔ بدخیم که به نسوج سالم تخریبی وارد نکند و مجموع شدّت

آنها با شدت مورد نیاز برای تخریب سلول‌های بدخیم برابری کند؛ و در مثالِ فتح قلعه با اعزام تعداد زیادی سپاه با نفراتِ کم از جاده‌های متعدد به سوی قلعه) و با وجود این که ساختار سطحی[۱۴] آن‌ها با یکدیگر متفاوت است، لیکن ساختار عمیق مسائل در واقع یکی است. به این ترتیب، تفکر قیاسی، یکی از ابزارهای مهم در حل مسئله است.

یکی از دلایلی که حل مسئله با کمک قیاس به شکست منجر می‌شود این است که فرد مسئله حل کن، تنها با استفاده از شباهت‌های سطحی (ساختار سطحی)، مسئلهٔ منبع را انتخاب می‌کند. مثلاً در مسائل مربوط به شمارش یا احتمال، ظاهر مسئله (در مورد تاس یا در مورد سکه بودنِ مسئله) ملاک انتخاب مسئله حل کن باشد.

دلیل دیگر این است که با وجود این که مسئله حل کن، مسئله منبع را به درستی انتخاب کرده است، نتواند میان اجزای مسئله هدف یا مسئله منبع، تناظر درستی برقرار کند تا از راه‌حلِ مسئله منبع، به حل مسئله هدف دست یابد. این مشکل، همان مشکلِ تطبیق[۱۵] است که در ادبیات مربوط به تفکر جبری و گذر از تفکر عملیاتی صرف به تفکر جبری ساختاری نیز به اهمیت آن اشاره شده است. مثال زیر را در نظر بگیرید:

مسئله منبع:

$$۳\times x+۳\times ۵=۳(x+۵)$$

مسئله هدف که با تناظر نادرست بین اجزای دو مسئله، به نادرستی حل شده است:

$$۳x+۵=۳(x+۵)$$

تفکر طرحواره مدار

در بخش قبل اشاره شد که دانش‌آموزان در حل مسئله‌ها، از قیاس استفاده می‌کنند و به این ترتیب، با استفاده از مسئله منبع، طرحواره‌ای می‌سازند که جنبه‌های اساسی آن مسئله و روند حل آن را دربر می‌گیرد. هم در علوم شناختی و هم در بررسی حافظه، طرحواره به عنوان یک سازوکار ذهنی مفید که اطلاعات کسب شده از محیط و تجربه‌ها را سازمان‌دهی می‌کند، پذیرفته شده است، لذا در بررسی چگونگی یادگیری ریاضی و تفکر ریاضی نیز بسیار اهمیت دارد.

تحقیقات فراوان نشان می‌دهند که دانش‌آموزان ابتدایی برای حل مسائل کلامی، از طرحواره‌هایی که برای انواع خاصی از مسئله‌ها ساخته‌اند، استفاده می‌کنند. حتی آموزش معلمان ابتدایی- و گاهی دوره‌های بالاتر- به‌گونه‌ای است که سعی می‌کنند برای هر یک از انواع مسائل، سرنخ‌هایی را برای دانش‌آموزان، مشخص کنند. مثلاً به دانش‌آموزان یادداده می‌شود که «با» به معنی جمع‌کردن، «از» تفریق کردن، «در» ضرب کردن و «بر» تقسیم کردن است، پس در مسایل کلامی، مفید است که به دنبال این سرنخ‌ها بگردند.

یک دسته از مسائل، نیاز به یک طرحوارهٔ جزء- کل دارند که دانش‌آموز با تشخیص جزء و کل در آن، بتواند آن را حل کند. کلمات کلیدی مانند « در ابتدا»، «روی هم» و «بیشتر» در بازیابی طرحواره مناسب، به دانش‌آموز کمک می‌کند. لیکن زمانی که چنین طرحواره‌هایی به صورت طوطی‌وار شکل گرفته باشد، استفادهٔ انعطاف‌ناپذیر از آن‌ها یا استفاده از یک طرحوارهٔ درست در یک زمینهٔ نادرست، موجب بروز خطاهای منطقی می‌گردد.

در آموزش جبر، خطاهایی از نوع اخیر به وفور دیده می‌شود. به عنوان مثال، استفاده از قوانین حل معادلات درجه ۱ در حل معادله‌های درجه بالاتر، استفاده از قوانین حل معادله‌های درجه۲ در حل نامعادله‌های درجه۲، استفاده از قوانین پخشی یک عمل نسبت به عمل دیگر در زمینه‌های نابه‌جا مانند:

$$(A\pm B)^۲=A^۲\pm B^۲$$

$$\sqrt{A\pm B}=\sqrt{A}\pm\sqrt{B} \quad \text{یا}$$

نمونهٔ بسیار رایج دیگر، استفاده از تجزیهٔ چند جمله‌ای‌ها برای حل معادلاتی است که یک طرف آنها صفر است:

$$(x-n)(x-m)=۰\Rightarrow x-n=۰ \text{ یا } x-m=۰$$

$$\Rightarrow x=n \text{ یا } x=m$$

و استفاده از طرحوارهٔ مرتبط با آن در زمینهٔ نادرست معادلاتی

که سمت دیگر آنها، عدد غیر صفر است:

$$(x-n)(x-m)=k \Rightarrow x-n=k \ \text{یا}\ x-m=k$$

$$\Rightarrow x=k+n \ \text{یا}\ x=k+m$$

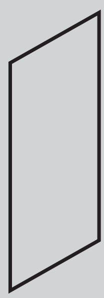
تفکر همبسته

در بخش قبل، به تفکر طرحواره‌مدار در حل مسائل ریاضی اشاره شد. یکی از انواع طرحواره‌ها که دانش‌آموزان می‌سازند، «طرحوارهٔ عملگر[۱۶]» است. این طرحواره، توسط دانش‌آموزان و ضمن دیدن مثال‌های کتاب‌های درسی یا مثال‌های معلم ضمن تدریس و در اثر وجوه همبستگی فراوان میان چند جنبهٔ خاص در آن مسائل و مثال‌ها با اعمالی که برای حل آنها استفاده می‌شود، فتح می‌شوند و مورد استفاده قرار می‌گیرند. به عنوان مثال، در حل مسائل هندسه که مرتبط با همنهشتی مثلث‌ها هستند، مسائلی که از راه «ض‌زض» حل می‌شوند، همواره حاوی اطلاعاتی در مورد دو ضلع و یک زاویه از مثلث هستند.

این نوع طرحواره‌ها، سازوکارهایی قوی برای حل مسائل هستند. لیکن اگر در مثال‌هایی که در یک متن آموزشی نوشته شده یا مثال‌هایی که معلم ضمن تدریس ارایه و حل می‌کند، جنبه‌های نامربوطی نیز دایم تکرار شوند به‌طوری که با آن نوع از مسائل، همبستگی کاذب زیادی به‌وجود آورند، دانش‌آموزی که تفکر همبسته دارد، این همبستگی کاذب را به صورت یک قانون منتزع می‌کند و به کار می‌برد و در عمل، موجب خطا می‌شود. مثلاً کسرهای خاصی که همیشه در مثال‌های محاسباتی مورد استفاده قرار می‌گیرند یا شکل‌های خاصی که در حل مسائل هندسی مورد استفاده قرار می‌گیرند، می‌توانند موجب این خطاها شوند.

یکی از مواردی که دانش‌آموزان از مثال‌ها منتزع می‌کنند، جنبه‌های ناوردای موجود در آن مثال‌هاست. در واقع، به قول گیبسون، «تشخیص ناورداها، یکی از مکانیزم‌های مهم در حل مسئله مفهومی در ریاضی است.» لیکن در صورتی که مثال‌های یک کتاب درسی دارای ناورداهای نامربوط باشد، این سازوکار در عمل موجب بروز خطاهای منطقی توسط دانش‌آموزان می‌گردد. این موضوع، هم برای معلمان و هم برای مؤلفان کتاب‌های درسی و کمک آموزشی، نکات هشداردهنده‌ای دارد!

شکل۱. استفاده از شکل خاصی از متوازی‌الاضلاع در مسائل هندسی:
در صورتی که متوازی‌الاضلاع به صورت زیر ترسیم شود، می‌تواند موجب بروز خطا در دانش‌آموز گردد:



مدل جدید برای بررسی خطاهای منطقی دانش‌آموزان

آن‌چه تاکنون گفته شد، همگی برگرفته از کارهای براون و فن لین و نظریهٔ تعمیری[۱۷] آنها و فرضیهٔ استقرائی[۱۸] فن لین بود. ظاهراً این نظریه، به حوزهٔ خاصی از خطاها مربوط است. نیاز به یک توصیف جامع‌تر از خطاهای منطقی که علاوه بر دربرگرفتن سازوکارهای تولید خطا در حوزه‌های خاص ریاضی، بتواند بر وجوه مشترک خطاهای منطقی که بین حوزه‌های مختلف ریاضی مشترکاً اتفاق می‌افتد نیز تأکید کند، تلاش برای رده‌بندی جدیدی از خطاهای منطقی در تفکر ریاضی را ایجاب کرده است که حاصل آن، مدلِ REASON است.

REASON در واقع مخففِ عبارتِ:

Rational Errors as Sources of Novelty

به معنای «خطاهای منطقی به عنوان منابع بدایع» است که توسط بن‌زیو ارایه شده است.

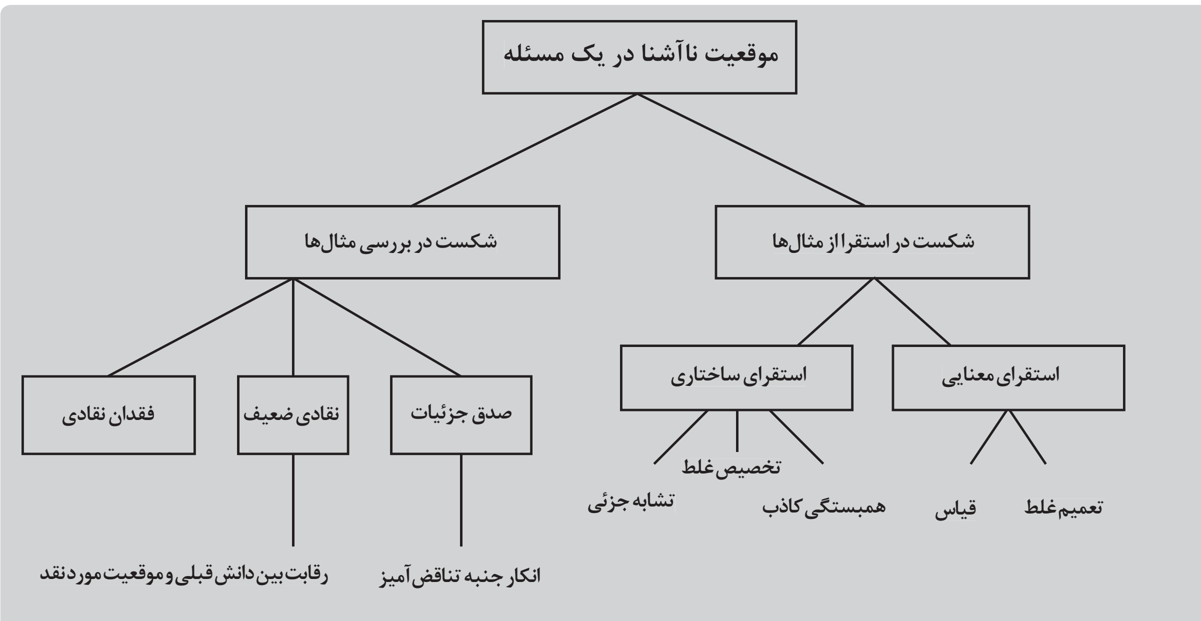
در این مدل، خطاهای منطقی به دو دسته تجزیه می‌شوند:

– خطاهای ناشی از شکست در بازبینی مثال‌ها؛

– خطاهای ناشی از شکست در استقرا از مثال‌ها.

هر دسته، خود شامل زیر دسته‌هایی است که در نمودار زیر نمایش داده شده است:

خطاهای مرتبط با شکست در استقرا از مثال‌ها، همان چهار مکانیزم قبلی را دربر می‌گیرد. برای آشنایی بیشتر با این مدل جدید، می‌توانید به منبع اصلی مراجعه کنید.



پی‌نوشت

1. When Erroneous Mathematical Thinking is Just as “Correct”: The Oxymoron of Rational Errors, pp55-78.

در این عنوان، واژه اکسیمورون Oxymoron به معنای استعمال کلمات مرکب ضد و نقیض است و علت استفاده از آن در این مقاله این است که از **درستی** و **نادرستی** با هم استفاده شده است.

2. The Nature of Mathmatical Thinking

که ویراستاران ارشد آن استرنبرگ و بن‌زیو هستند.

۳. مثلاً در تفریقی مانند ۲۹- ۶۳، چنین عمل می‌کنند:

۶۳
−۲۹
۴۶

۴. عنوان مقاله چنین است

“When Good Teaching Leads to Bad Results: The Disasters of “Well-Taught” Mathematics Courses.

5. Over learning
6. Overgeneralizing
7. Induction from Examples
8. Analogical Thinking
9. Schema- based Thinking
10. Correlational Thinling
11. Target
12. Sowce
13. Deep Structwe
14. Surface Structure
15. Adaptation
16. Operator Schema

بحث طرحواره‌های شکل گرفته برای حل نوع خاصی از مسایل، شبیه مفهوم chunk است که شونفیلد در کتاب حل مسئله ریاضی در برر سی رفتار مسئله حل کن خبره (مانند شطرنج‌بازان حرفه‌ای) مطرح می‌کند. م.

17. Repair Theory
18. Induction Hypothesis

منبع اصلی

R.J. Sternberg, R.J.d Ben-zeev, T. (Eds) (1996).The Nature of Mathematical Thinking. Lawrence Erlbaum Associates Publishers.