برد پرتابه در یک ظرف آب

اسداله مرادخانی؛ کارشناس ارشد آموزش فیزیک،
دبیر آموزش‌وپرورش شهرستان آبدانان، مدرس دانشگاه آزاد اسلامی
فاطمه احمدی؛ استادیار گروه فیزیک دانشگاه شهید رجایی تهران

چکیده

محاسبهٔ بُرد آب در فشار مایعات و عمق‌های گوناگون موضوع جالبی است. بر پایهٔ سرعت خروج آب، می‌توان بُرد آن را همانند بُرد پرتابه‌ای افقی محاسبه کرد. با دانستن فشار ناشی از یک مایع در عمق معین، به‌کارگیری معادلهٔ برنولی، و بهره‌مندی از تکانه، سرعت خروج آب محاسبه می‌شود. محاسبه بُرد پرتابهٔ افقی، رابطه‌ای را به دست می‌دهد که بر پایهٔ آن می‌توان بُرد بیشینه و کمینهٔ عمودی را دریافت.

کلیدواژه‌ها: فشار مایعات، بُرد پرتابهٔ افقی، ارتفاع، بُرد بیشینهٔ عمودی، بُرد کمینهٔ عمودی، سرعت خروج.

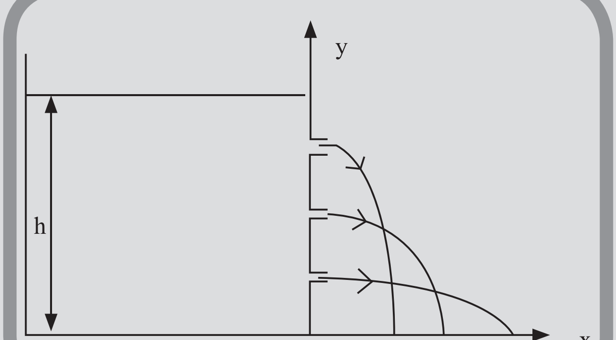
مقدمه

در کتاب فیزیک سال دوم متوسطه رشته‌های علوم تجربی و ریاضی در فعالیت ۵-۱۸ صفحهٔ ۱۲۳ آمده است:

یک قوطی خالی را انتخاب و آن را در عمق‌های مختلف سوراخ کنید. سپس آن را پر از آب کنید. مشاهده‌های خود را توجیه کنید [۱].

متأسفانه در بعضی از کتاب‌های کمک‌آموزشی و در پاره‌ای از موارد حتی بعضی از همکاران پاسخ این پرسش را چنین می‌دهند:

چون فشار در مایعات به عمق بستگی دارد، هر سوراخی که در عمق بیشتری قرار داشته باشد، برد آب (یعنی فاصله افقی بین محل

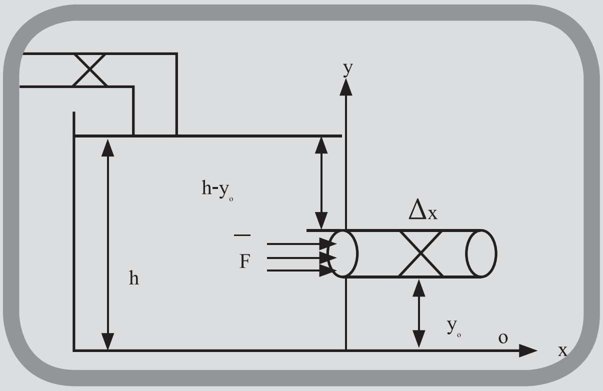


شکل ۱

پرتاب آب و محل برخورد با زمین) برای آن بیشتر است و شکل یک را رسم می‌کنند.

همان‌طور که می‌دانیم این شکل نادرست است.

در این مقاله می‌کوشیم تا ابتدا سرعت خروج آب از ظرف و سپس برد آب را بیابیم و ثابت می‌کنیم برد آب برای سوراخی که در ارتفاع $\frac{h}{2}$ است بیشینه و مقدار آن R=h است و هم‌چنین اگر به یک اندازه از ارتفاع $\frac{h}{2}$ بالا یا پایین رویم، برد برای این دو نقطه برابر است.



محاسبهٔ سرعت خروج آب

شکل ۲ را در نظر بگیرید که در آن به ارتفاع h درون ظرفی آب ریخته‌ایم، فرض کنید وقتی شیرهای ورودی و خروجی را باز می‌کنیم، میزان آب ورودی و خروجی یکسان باشد به‌طوری که ارتفاع آب درون ظرف، h، همیشه ثابت باشد.

می‌دانیم نیروی وارد بر هر سطح در یک مایع ساکن همیشه بر سطح عمود است و به جهت‌گیری سطح بستگی ندارد [۲]. بنابراین مطابق شکل ۲ نیروی $\vec{F}$ بر سطح S (مساحت سطح مقطع لولهٔ خروجی) عمود است. و اندازهٔ آن با توجه به تعریف کلی فشار و فشار ناشی از یک مایع در عمق $h-y_0$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید. [۳]

$$\left.\begin{array}{l} P=\frac{F}{S} \\ P=\rho g(h-y_0) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{F}{S}=\rho g(h-y_0) \rightarrow F=\rho g(h-y_0)S \quad (1)$$

چون F ثابت است بنابراین $\bar{F}=F$ و Δx به صفر میل می‌کند چون طبق معادلهٔ برنولی و این‌که سطح مقطع لوله یکسان، جریان آب پایا، و ارتفاع لوله از یک سطح مبنا ثابت است، سرعت حرکت آب لوله یکسان است. [۴]

فرض کنیم وقتی شیر خروجی باز می‌شود آب با سرعت V خارج می‌شود درنتیجه تغییر سرعت آب $\Delta v = v - 0 = v$ و سرعت متوسط خروج آب $\bar{v}=\frac{V+0}{2}=\frac{V}{2}$ است حال با توجه به بیان قانون دوم نیوتون براساس تعریف تکانه داریم. [۵]

$$\bar{F}=F=\frac{\Delta P}{\Delta t}=\frac{m\Delta v}{\Delta t}=\frac{mv}{\Delta t} \quad (2)$$

$$\rho=\frac{m}{v}\Rightarrow \begin{array}{l} m=\rho V \\ V=S\Delta X \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} m=\rho S\Delta X \\ \Delta X=\bar{v}\Delta t \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} m=\rho S\bar{v}\Delta t \\ \bar{v}=\frac{V}{2} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow m=\rho S\frac{v}{2}\Delta t \quad (3)$$

حال رابطهٔ (۳) را در (۲) قرار می‌دهیم:

$$F=\frac{(\rho S\frac{v}{2}\Delta t)v}{\Delta t}\Rightarrow F=\frac{1}{2}\rho Sv^2 \quad (4)$$

از مقایسهٔ رابطه‌های (۱) و (۴) داریم:

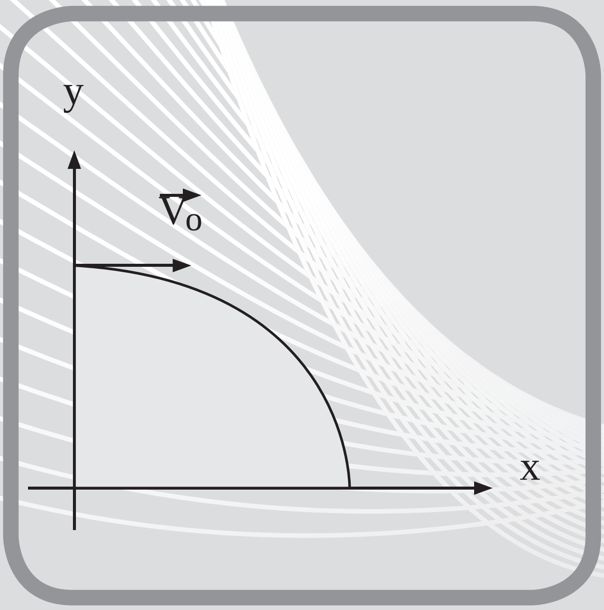
$$\rho g(h-y_0)S=\frac{1}{2}\rho Sv^2\Rightarrow v^2=2g(h-y_0)\Rightarrow v=\sqrt{2g(h-y_0)}$$

پس سرعت خروج آب برابر $\sqrt{2g(h-y_0)}$ است.

محاسبهٔ برد پرتابه

از این‌جا به بعد می‌توانیم مسئله را به‌صورت زیر مطرح کرد:

از ارتفاع y_0 بالای سطح زمین پرتابه‌ای با سرعت $V_0=\sqrt{2g(h-y_0)}$ در راستای افق پرتاب می‌شود برد پرتابه (R) را محاسبه کنید.



با توجه به معادله‌های حرکت پرتابی که در کتاب فیزیک ۱ پیش‌دانشگاهی رشته ریاضی آمده است داریم [۶]:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{در راستای } x & X=V\times t=V_0t\rightarrow t=\frac{x}{V_0} \\ \text{در راستای } y & y=-\frac{1}{2}gt^2+V_{0y}t+y_0 \end{array}\right\}\rightarrow y=\frac{-gx^2}{2V_0^2}+y_0$$

در سطح زمین X=R و y=0 است. حالا این مقادیر را در رابطهٔ بالا قرار می‌دهیم:

$$0=\frac{-gR^2}{2V_0^2}+y_0 \to R=V_0\sqrt{\frac{2y_0}{g}} \to R=\sqrt{g(h-y_0)}(\sqrt{\frac{2y_0}{g}})$$

$$\to R=2\sqrt{y_0(h-y_0)}$$

به‌دست آوردن برد بیشینه (R_{max})

اگر بخواهیم ببینیم به‌ازای چه ارتفاعی (y_0) برد بیشینه یا کمینه است باید از R نسبت به y_0 مشتق گرفته و مشتق را برابر صفر قرار دهیم.

$$\frac{dR}{dy_0}=0 \to \frac{dR}{dy_0}=\frac{h-2y_0}{\sqrt{y_0(h-y_0)}}=0 \to h-2y_0=0 \to y_0=\frac{h}{2}$$

حالا اگر بخواهیم ببینیم به ازای $y_0=\frac{h}{2}$ برد کمینه یا بیشینه است $\frac{d^2R}{dy_0^2}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{d^2R}{dy_0^2}=\frac{-\left[4y_0(h-y_0)+(h-2y_0)^2\right]}{2\left[y_0(h-y_0)\right]^{3/2}}<0$$

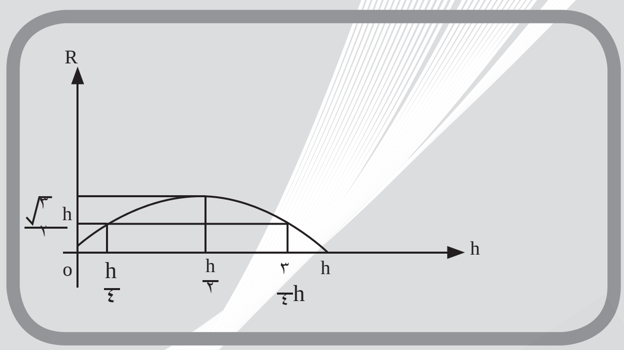
چون $\frac{d^2R}{dy_0^2}<0$ است بنابراین جهت تقعر نمودار R برحسب y_0 به سمت پایین است یعنی منحنی بیشینه دارد که این بیشینه در $y_0=\frac{h}{2}$ است.

y	o	$\frac{h}{2}$	h
	+	o	-
R	o ↗	h	↘ o

$y_0=0$ و $y_0=h \to R=0$

$$y_0=\frac{h}{2} \to R=2\sqrt{\frac{h}{2}(h-\frac{h}{2})}=h$$

نمودار R برحسب h به‌صورت زیر است:



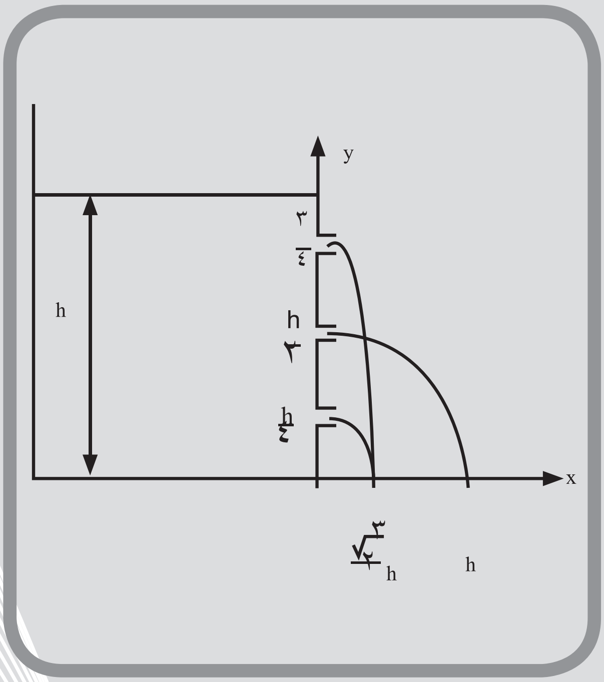
حالا فرض کنید که به یک اندازه مثلاً $\frac{h}{4}$ از ارتفاع یک‌بار بالا و یک‌بار پایین رویم، داریم:

$$y_0=\frac{h}{2}+\frac{h}{4}=\frac{3}{4}h \to R=2\sqrt{\frac{3}{4}h(h-\frac{3}{4}h)}=2\sqrt{\frac{3}{4}h(\frac{h}{4})}=\frac{h\sqrt{3}}{2}$$

$$y_0=\frac{h}{2}+\frac{h}{4}=\frac{h}{4} \to R=2\sqrt{\frac{h}{4}(h-\frac{h}{4})}=2\sqrt{\frac{h}{4}(\frac{3}{4}h)}=\frac{h\sqrt{3}}{2}$$

پس اگر از وسط ظرف یعنی ارتفاع $\frac{h}{2}$ به یک اندازه بالا یا پایین برویم برد برای این دو نقطه برابر است. همین نکته در نمودار ۲ نیز نشان داده شده است.

سرانجام شکل ۱ را به صورت شکل ۳ می‌توان تصحیح کرد:



منابع

۱. فیزیک ۲ و آزمایشگاه (۱۳۸۷). دفتر تألیف و برنامه‌ریزی کتب درسی.
۲. فیزیک ۱ پیش‌دانشگاهی رشتهٔ ریاضی (چاپ چهارم ۱۳۷۷). دفتر تألیف و برنامه‌ریزی کتب درسی.
۳. پزشپور، محمدعلی و خلیلی بروجنی، روح‌الله (۱۳۸۱). «کتاب کار و راهنمای مطالعهٔ دانش‌آموز فیزیک ۲ و آزمایشگاه». تهران مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی.
۴. فیزیک ۱ پیش‌دانشگاهی رشتهٔ تجربی (۱۳۸۹). دفتر تألیف و برنامه‌ریزی کتب درسی.
۵. فقیه، حسین و گنجی، مصطفی. (۱۳۸۱). «از مدرسه تا دانشگاه فیزیک ۲». تهران: انتشارات مدرسه برهان.
۶. فیزیک ۱ پیش‌دانشگاهی رشتهٔ ریاضی (۱۳۸۹). دفتر تألیف و برنامه‌ریزی کتب درسی.