مقاله

ریاضیات زیباتر و جذاب‌تر خواهد بود، اگر...

یوسف احمدی
دبیر ریاضی شهرستان بابل و عضو شورای اجرایی انجمن معلمان ریاضی استان مازندران

کلیدواژه‌ها: کتاب درسی، آنالیز، حساب دیفرانسیل، انتگرال، روش تدریس، سری همگرا، سری واگرا.

مقدمه

استادان و معلمان ریاضی غالباً با داوری‌هایی به صورت زیر، نسبت به ریاضیات، از طرف بسیاری، به‌ویژه دانش‌آموزان و حتی تعدادی از شهروندان، مواجه هستند.

«زیبا و جذاب نیست»، «خشک و بی‌روح است»، «محض و مجرد است»، «لذت‌بخش نیست»، انتزاعی است»، «زیاد فهمیدنی است کاش کمی هم حفظ کردنی بود»، «کاربرد آن محسوس و مملوس نیست»، «سخت و دشوار است»، و... اگر چه ریشه بعضی از این داوری‌ها، به شیوه تدریس، هنر معلمی، فنون آموزش و ابزارهای کمک‌آموزشی برمی‌گردد و تعدادی هم ریشه در عوامل بیرونی، نظیر ساختارهای آموزشی، اجتماعی، فرهنگی، اقتصادی و جایگاه و اهمیت ریاضیات در جامعه دارند ولی باید بپذیریم که بعضی از آن‌ها به محتوا و متون کتاب‌های درسی برمی‌گردند. اگرچه نگارش و تألیف همه کتاب‌ها و مفاهیم درسی به شیوه‌ای که عموم فراگیران بتوانند به سادگی آن‌ها را درک کنند و لذت ببرند کار ساده‌ای نیست ولی می‌توان با لحاظ نمودن موضوعات متنوعی نظیر تاریخ ریاضیات، فلسفه پیدایش، حکایت‌های تاریخی، کاربردهای عینی و مملوس، معماها، ضرب‌المثل‌ها، مسئله‌های فکری، پارادوکس‌ها و... بر جذابیت آن افزود و آن را از حالت خشک و بی‌روح خارج نمود. گرچه لحاظ نمودن تمامی این موارد برای همه موضوعات ریاضی در سطوح بالاتر نه لازم است و نه مقدور، ولی می‌توان غالب موارد فوق را برای موضوعات و مباحث ریاضیات دبیرستانی و پیش‌دانشگاهی مدنظر قرار داد. در ادامه سعی شده است این

توصیه‌ها برای بحثی از مباحث ریاضی تحت عنوان «سری همساز» لحاظ شود.

۱- معرفی و علت نامگذاری

به سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$ سری هارمونیک[۱] با سری همساز یا سری توافقی گویند. علت نامگذاری «همساز» برای سری فوق آن است که طول موج‌های حاصل از ارتعاشات یک تار مرتعش با نسبت‌های ۱ و $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ و... متناسب‌اند. اگرچه جمعک‌های سری فوق به کندی در حال افزایش است ولی مقدار آن به بی‌نهایت می‌رود و سری واگراست.

۲- واگرایی سری همساز

روش‌های متعددی برای اثبات واگرایی سری همساز وجود دارد که به نظر می‌رسد دو روش زیر نسبت به بقیه ساده‌تر باشند. (روش کتاب درسی حساب دیفرانسیل و انتگرال مبتنی بر روش ۱ است)

روش ۱: چنانچه $S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ داریم:

$$S_{2^n}=1+(\frac{1}{2})+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8})+\cdots+(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^n})$$

$$>1+(\frac{1}{2})+(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{8})+\cdots(\frac{1}{2^n}+\cdots+\frac{1}{2^n}),$$

که مقدار هر یک از پرانتزها $\frac{1}{2}$ می‌شود و تعدادی آن‌ها n تا است پس

$$S_{2^n}>1+\frac{n}{2},$$

در نتیجه $\lim_{n\to\infty}S_{2^n}=\infty$ یعنی سری واگراست. [۱]

روش ۲: (برهان خلف): فرض کنیم سری همگرا و $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=S$ داریم:

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n})>\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=S$$

$$\Rightarrow S>S$$

اگرچه نگارش و تألیف همه کتاب‌ها و مفاهیم درسی به شیوه‌ای که عموم فراگیران بتوانند به سادگی آنها را درک کنند و لذت ببرند کار ساده‌ای نیست ولی می‌توان با لحاظ نمودن موضوعات متنوعی نظیر تاریخ ریاضیات، فلسفه پیدایش، حکایت‌های تاریخی، کاربردهای عینی و مملوس، معماها، ضرب‌المثل‌ها، مسأله‌های فکری، پارادوکس‌ها و ... بر جذابیت آن افزود و آن را از حالت خشک و بی‌روح خارج نمود

که یک تناقض است. [۲]

۳- سری همساز و معمای عبور از کویر

مسافری با وسیله نقلیه سواری به جاده کویری رسیده که ابتدای آن شهری است با یک جایگاه سوخت‌گیری، ولی در مسیر این جاده که طول آن ده هزار کیلومتر است جایگاهی برای سوخت‌گیری وجود ندارد. جوانمردان شهر که تعداد آن‌ها بسیار زیاد بود و هر کدام وسیله نقلیه سواری هم داشتند، تصمیم گرفتند که مسافر را به انتهای کویر برسانند و در عین حال به شهر خود بازگردند، آیا موفق شده‌اند؟! چگونه؟!

اگر مسافت طی شده با یک باک بنزین توسط یک سواری را یک واحد فرض کنیم در این صورت یکی از جوانمردان با وسیله نقلیه خود می‌تواند مسافر را به اندازه $1+\frac{1}{3}$ واحد انتقال دهد و در عین حال به شهر خود بازگردد، اگر دو جوانمرد با وسیله نقلیه خود مسافر را همراهی کنند می‌توانند به اندازه $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$ واحد مسافر را انتقال دهند و در عین حال به شهر خود برگردند. پس اگر n جوانمرد مسافر را با وسیله نقلیه خود همراهی کنند به اندازه $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}$ واحد از مسیر طی می‌شود و در عین حال جوانمردان به شهر خود برمی‌گردند.

امّا $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}>\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ و با توجه به اینکه

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=\infty$ پس $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ به ازای مقدار معین n از ده ه زار بیشتر می‌شود، یعنی مسیر طی شده توسط مسافر به اتمام رسیده و مسافر به مقصد می‌رسد. [۱]

۴- سری همساز و یک مسئله فکری

یک روز علی به ذهنش رسید که جملات دنباله مجموع جزیی سری همساز را تا آنجا که می‌تواند حساب کند و با استفاده از ماشین حساب دید که:

$$S_1=1$$
$$S_2=1+\frac{1}{2}=1.5$$
$$S_3=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\approx 1.8333$$
$$S_4=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\approx 2.08333$$
....

....
$$S_{20}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{20}\approx 3.59773965$$

البته علی رایانه هم می‌دانست و با استفاده از رایانه شروع کرد به ادامه محاسبه و رسید به $S_{25\ldots}$ و ملاحظه نمود که $S_{25\ldots}\approx 13.006433861$. [۳]

آنچه که بیشتر از بقیه ذهن علی را مشغول نمود عدد طبیعی نشدن S_nها بود (به استثنا S_1 و بدین ترتیب مسئله‌ای به صورت زیر مطرح گردید:

مسئله: اگر $n\geq 2$ آنگاه S_n هیچوقت عدد طبیعی نمی‌شود.

حل: می‌دانیم که هر عدد طبیعی نمایش منحصر به فردی به صورت $2^i\times(2k+1)$ دارد که در آن i و k اعدادی حسابی‌اند، بین مخرج کسرهای تشکیل‌دهنده S_n آن که از همه بزرگ‌تر و به n نزدیک‌تر و توان عامل ۲ در آن ماکسیمم باشد را m می‌نامیم پس $m=2^l\times(2k+1)$ (l ماکسیمم و ضمناً منحصر بفرد است).

بنابراین

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}+\cdots+\frac{1}{n}$$
$$=\frac{2k_1+2k_2+\cdots+2k_{m-1}+(2k+1)+2k_{m+1}+\cdots+2k_n}{2^l\times q}$$

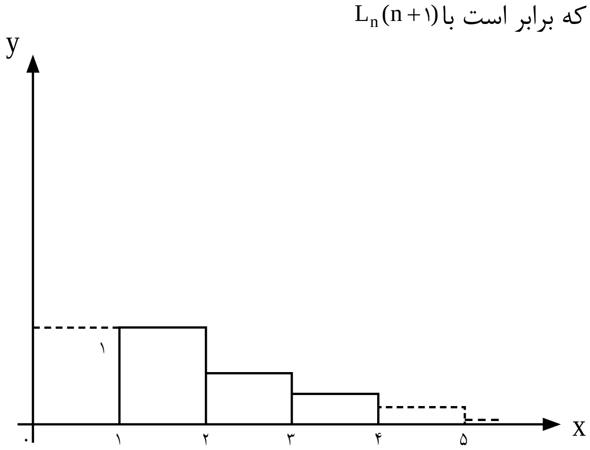
که در آن، صورت عددی فرد و مخرج عددی زوج است که هیچ وقت عددی طبیعی نمی‌شود. [۴]

۵- سری همساز و یک دنباله همگرا و یک مسئله باز[۲]

شکل زیرنمودار تابع $y=\frac{1}{x}$ می باشد. مطابق شکل داریم

$S_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=$ مجموع مساحت های n تا از مستطیل‌ها

و مساحت واقعی از $x=1$ تا $x=n+1$ برابر است با $\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx$ که برابر است با $L_n(n+1)$



حال اگر $a_n=S_n-L_n(n+1)$

بدیهی است که $a_n>0$

و ضمناً:

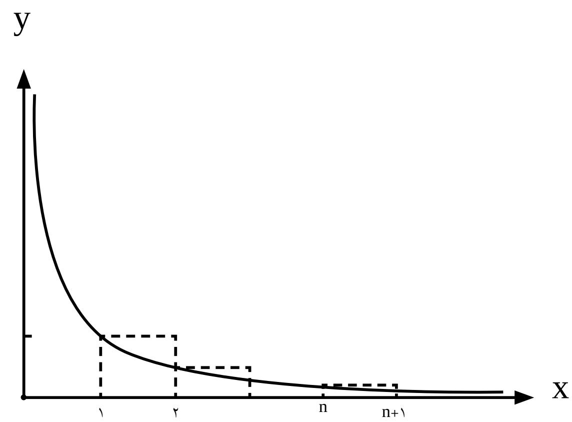
$$a_{n+1}-a_n=S_{n+1}-\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx-S_n+\int_1^{n}\frac{1}{x}dx$$
$$=(S_{n+1}-S_n)-(\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx-\int_1^{n}\frac{1}{x}dx)$$
$$=\frac{1}{n+1}-\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx<0$$

پس دنباله $\{a_n\}$ از پایین کراندار و نزولی است، پس بنا به قضیه بولتسانو همگراست و حد آن عددی است که به ثابت اویلر مشهور است و آن را به γ نمایش می‌دهند $(\gamma\approx 0.5772)$

هنوز ثابت نشده است که ثابت اویلر عددی گویا یا اصم است. [۵]

۶- سری همساز و یک پارادوکس (باطل‌نما)

طول یک ضلع از مستطیل‌های شکل (۲) برابر با ۱ و طول ضلع دیگر جملات دنباله $a_n = \frac{1}{n}$ می‌باشند پس مجموع مساحت‌ها برابر است با:



$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

که یک سری همساز است و مقدار آن بینهایت می‌شود.

حال اگر مستطیل‌ها را حول محور xها دوران دهیم استوانه‌های به‌دست می‌آیند که مجموع حجم‌های آن‌ها برابر است با: (در اینجا از این واقعیت که $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ استفاده شده است.)

$$v=\pi+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{9}+\frac{\pi}{16}+\cdots=\pi\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right)=\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^3}{6},$$

یعنی از سطحی با مساحت بی‌کران پس از دوران شکلی با حجم کراندار به‌وجود آمده است!![۶]

۷- نتیجه‌گیری

با توجه به گذشت بیش از ده سال از تألیف و تدوین بسیاری از کتاب‌های درسی، این کتاب‌ها غالباً از جذابیت کافی چه از نظر ظاهری و چه از نظر محتوا برخوردار نیستند، و اکثراً با شعارهای ریاضی بخصوص شعارِ عمومی کردن ریاضیات، همخوانی ندارند. باید متون و محتوای کتاب‌های درسی و ظاهر آن‌ها به‌گونه‌ای تنظیم شوند که بخشی از آن‌ها حتی‌الامکان توسط خود فراگیران قابل درک بوده و لذت‌بخش باشد. می‌توان با لحاظ کردن مطالبی مشابه آنچه که در مورد «سری همساز» دیدیم به جذابیت موضوعات ریاضی افزود و بدین طریق به قسمتی از اهداف متعالی دست یافت.

با توجه به گذشت بیش از ده سال از تألیف و تدوین بسیاری از کتاب‌های درسی، این کتاب‌ها غالباً از جذابیت کافی چه از نظر ظاهریِ و چه از نظر محتوا برخوردار نیستند، و اکثراً با شعارهای ریاضی بخصوص شعارِ عمومی کردن ریاضیات، همخوانی ندارند

پی‌نوشت

1. Harmonic
2. Open problem

منابع

۱. گزارش انجمن ریاضی ایران، شماره ۱۴، خرداد ۱۳۸۲، چاپ سیاوش صفحه ۴.

۲. رشد آموزش ریاضی شماره ۸۹، دفتر انتشارات کمک آموزشی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.

3. www.danshnameh roshd.ir

۴. رشد آموزش ریاضی شماره ۱۰، دفتر انتشارات کمک آموزشی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش صفحه ۵۷.

۵. آپوستل، تام، م. حساب دیفرانسیل و انتگرال. ترجمه علیرضا ذکایی، علی‌اکبر عالم‌زاده، مهدی رضایی و فرخ فیروزان، تهران، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۰ صفحات ۵۰۲-۵۰۳.

۶. رشد آموزش ریاضی شماره ۱۸، دفتر انتشارات کمک آموزشی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش صفحه ۴۵.