

مخمسین گام علم‌شناسی ریاضیات

مروری بر کتاب ریاضیات از کجا سرچشمه می‌گیرد؟

مانی رضائی

اشاره

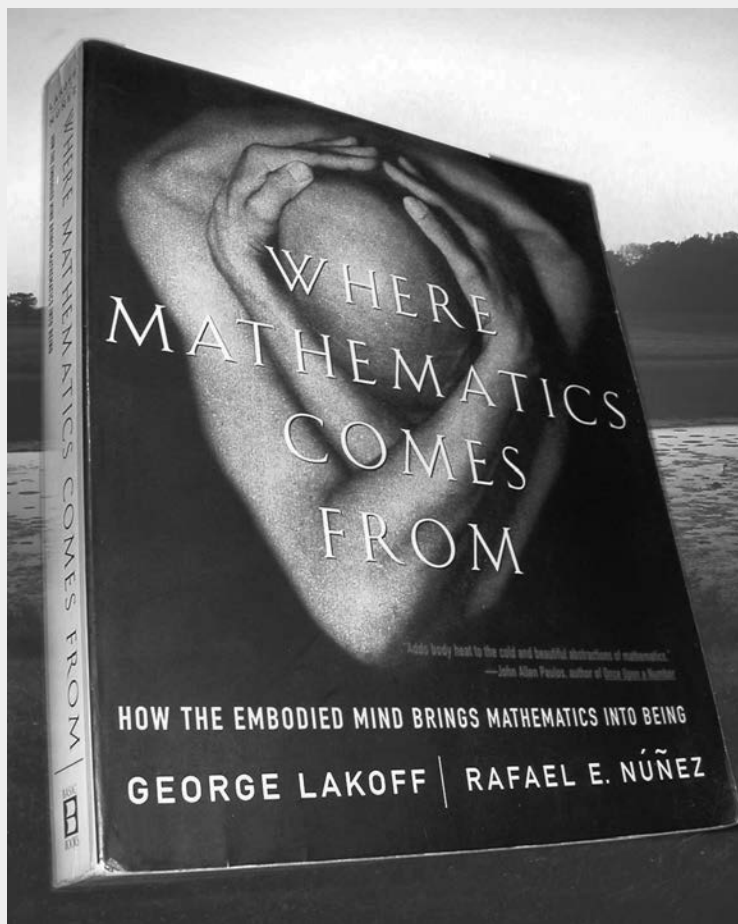
بیش از ده سال از انتشار کتاب «ریاضیات از کجا سرچشمه می‌گیرد؟» می‌گذرد. انتشار کتاب در سال ۲۰۰۰ با صف‌آرایی مخالفان و موافقان دیدگاه فلسفی کتاب به نگارش نقدهای تند و جنجالی انجامید. اکنون و پس از فراز و فرودهای طرح این موضوع، بررسی این اثر و تبعات آموزشی آن در این مقاله کوتاه مرور شده است.

کلیدواژه‌ها: علم‌شناختی، سرچشمه ریاضیات، فلسفه، استعاره، نقد کتاب، ریاضیات تجسم‌یافته

نگاهی خارج از حوزه ریاضیات به آن

جورج لگف (زبان‌شناس) و رافائل نونز (روان‌شناس شناختی) در کتاب «ریاضیات از کجا سرچشمه می‌گیرد؟»^۱، به بررسی

منشأ وجود مفاهیم ریاضی می‌پردازند. آنان معتقدند از طریق بحث‌هایی در حوزه علوم شناختی، منشأ ریاضیات را می‌توان با نگاهی بیرون از ریاضیات، مورد مطالعه قرار داد، و تأکید دارند: «نتایج تحقیق ما، عمدتاً نتایج ریاضی نیست، بلکه نتایج مربوط به علم شناختی ریاضیات است. نتایجی است درباره نظام مفهومی انسان که طرح اندیشه ریاضی را ممکن می‌سازد و ریاضیات در آن معنا پیدا می‌کند. اما این نتایج، نتیجه تفکر خودآگاه ریاضی‌دانان نیست، بلکه نشان‌دهنده نظام مفهومی ناخودآگاه کسانی است که ریاضیات را انجام می‌دهند. نتایج ما به هیچ‌وجه تغییری در ریاضیات پدید نمی‌آورد، اما شاید در روش ادراک ریاضی و بیان معنای نتایج ریاضی، تحولی اساسی ایجاد کند.» (ص. ۸) و در جایی دیگر، می‌نویسند: «این یک حرکت آموزشی است. ما معتقدیم ریاضیات کلاسیک با دیدگاه شناختی به بهترین وجه می‌تواند آموزش داده شود. معتقدیم



که آموزش مفاهیم ریاضی و توضیح این که چرا حقایق ریاضی از این مفاهیم پیروی می کنند، اهمیت دارد. ... این کتاب را اولین گام در طرح علم شناختی ریاضیات می دانیم.» (ص. ۱۱) آشکار شدن ساختار شناختی ریاضیات، دسترسی و درک آن را بیش تر ممکن می سازد. نویسندگان کتاب، با بهره گیری از پیشرفت های سال های اخیر در علوم شناختی، این درک جدید از ریاضیات را معرفی می کنند. آنان ادعا می کنند که در دوران قدیم (دهه های ۶۰ و ۷۰)، علوم شناختی حتی تصور چنین نگرشی ممکن نبوده است. عمیق ترین یافته های این سال ها، در سه بخش معرفی شده اند:

(۱) **شکل گیری ذهن.** ویژگی های جسمی بدن ما، مغز ما، و فعالیت های روزمره ما در دنیا، مفاهیم انسان و استنتاج های نوع انسان را می سازند. این موارد شامل مفاهیم ریاضی و استنتاج های ریاضی نیز می شود.

(۲) **ناخود آگاه شناختی.** بیش تر تفکر ما ناخود آگاه است - نه به آن معنی که فروید معرفی می کند بلکه از این جنبه که به طور مستقیم به درون نگری آگاهانه دسترسی نداریم.

ما نمی توانیم به طور مستقیم به نظام های مفهومی و فرایندهای سطح زیرین تفکرمان بنگریم. این موارد شامل بخش عمده ای از تفکر ریاضی نیز می شود.

(۳) **تفکر استعاره ای.** در بسیاری از موارد، انسان مفاهیم انتزاعی را بر اساس واقعیت مفهوم سازی می کند، این کار با استفاده از مفاهیم و وجود استدلال های مبتنی بر نظام حسی - حرکتی انجام می شود. روشی که با آن، مفاهیم انتزاعی بر حسب واقعیت ها درک می شوند، استعاره مفهومی نامیده می شود. از استعاره ها می توان به عنوان جلوه ای از بیان نام برد. از استعاره های مفهومی در تفکر ریاضی نیز استفاده می شود.

ساز و کار مغز و تفکر ناخود آگاه

در بررسی ذهن و ساز و کار مغز با سؤالی علمی روبه رو هستیم: دقیقاً کدام ساز و کار مغز انسان به او امکان فرمول بندی اندیشه های ریاضی و استدلال ریاضیاتی را می دهد؟ هدف این سؤال آن است که دریابیم اندیشه های ریاضی از کجا می آیند و از لحاظ شناختی، چگونه باید تحلیل شوند، به عقیده لگف و نونز، پاسخ این پرسش را علوم شناختی، علم میان رشته ای ذهن، باید بدهد. این یک سؤال صرفاً تجربی نیست که در محدوده ریاضیات بررسی شود. اما به عنوان سؤالی مربوط به علوم تجربی، نمی توان آن را با فلسفه های پیش از این یا با خود ریاضیات جواب داد. پاسخ به این سؤال نیاز به

درک فرایندهای شناختی انسان و مغز انسان دارد. برای پاسخ به این سؤال در جست‌وجوی آن هستیم که کدام ساز و کارهای شناختی طبیعی انسان در خلق و درک اندیشه‌های ریاضی به کار می‌روند. بعد از بررسی ساز و کار مغز انسان، در سراسر کتاب ضمن بیان استعاره‌های مفهومی، با این سؤال روبه‌رو می‌شویم. بدین ترتیب، این کار به طرح روش‌هایی برای تحلیل اندیشه‌های ریاضی منجر می‌شود.

استعاره‌ها

ریاضیات یکی از عمیق‌ترین و زیباترین کندوکاوهای تخیل است که انسان تاکنون درگیرش شده است. اما بسیاری از زیبایی‌های آن برای کسانی که دست‌اندرکار ریاضیات نیستند، غیرقابل دسترسی است، زیرا بخش عمده ساختار شناختی ریاضی توصیف نشده است. نویسندگان کتاب معتقدند که علوم شناختی در بسیاری از موارد می‌توانند پرده‌های رمز و راز را کنار بزنند تا شکوه این مفاهیم به روشنی نمایان شوند. برای این کار باید آشکار شود که ریاضیات چگونه در تجربه‌های جسمانی ریشه دارند و چگونه استعاره‌های مفهومی، اندیشه‌های ریاضی را بنا می‌کنند. با این دیدگاه، ریاضیات به عنوان مجموعه‌ای از استعاره‌ها است که بر روی استعاره‌های دیگر (که قبلاً تعریف شده‌اند) معرفی می‌شود. بدین ترتیب، یک مفهوم ریاضی با یک دو جین استعاره همراه است، و کار دانشمند علوم شناختی آن است که این لایه‌ها را از هم باز کند به طوری که ساختار شناختی آن‌ها آشکار شود. این کار اهمیت علمی دارد، اما از آن مهم‌تر می‌تواند نقش اساسی در آموزش ریاضی داشته باشد.

به اعتقاد لگت و نونز، بسیاری از سردرگمی‌ها، معماها، و پارادکس‌های ریاضیات بدان علت پیدا می‌شود که استعاره‌های مفهومی، که بخشی از ریاضیات است، نه استعاره بلکه واقعی در نظر گرفته شده‌اند. زمانی که خصلت استعاره‌ای مفاهیم ریاضی آشکار شود، این قبیل سردرگمی‌ها و پارادکس‌ها نیز از میان می‌روند.

استعاره‌های پایه

بنیادی‌ترین استعاره‌ها، استعاره‌های پایه^۲ هستند. این استعاره‌ها به ما توانایی آن را می‌دهند که تجربه‌های روزمره را بر مفاهیم مجرد تصویر کنیم. استعاره‌های پایه شامل، مجموعه‌سازی، رده‌بندی، شمارش، و... هستند و این امکان پدید می‌آید که انسان بیش از چیزی که با آن به دنیا آمده است و شمارش می‌کند^۳، حساب را توسعه دهد.

برای مثال: کپه کردن اشیا (تجربه‌ای روزمره) و روی هم قرار دادن کپه‌ها (تجربه‌ای دیگر)، تصور (مفهوم مجرد) عمل جمع را ممکن می‌سازد.

استعاره‌های ارتباطی

در مفاهیم مجردتر به استعاره‌های ارتباطی^۴ نیاز داریم. این دسته از استعاره‌ها، حساب را به سایر شاخه‌های ریاضی مانند هندسه مرتبط می‌کند. استعاره گروه دوران؛ استعاره بول؛ استعاره منطق گزاره‌ای؛ استعاره منطق صوری؛ استعاره کانتور و... نمونه‌هایی از چنین استعاره‌هایی هستند. شاید استعاره بنیادی بینهایت، مهم‌ترین استعاره این کتاب باشد. در این کتاب سعی شده با استفاده از این استعاره امکان کار کردن با مجموعه‌های نامتناهی، و کوچک‌ترین کران بالا، بینهایت کوچک، نقطه در بینهایت، و... فراهم شود.

معنای استعاره مفهومی

استعاره مفهومی ساز و کار شناختی‌ایی است که به ما امکان آن را می‌دهد که درباره نوعی از اشیا، طوری استدلال کنیم که انگار از نوع دیگری‌اند. این بدان معنی است که استعاره صرفاً پدیده‌ای زبانی ساده نیست، بلکه ساز و کاری شناختی است که به قلمروی تفکر تعلق دارد. استعاره‌های مفهومی معنای تخصصی دارند: استعاره مفهومی، نگاشت میان حوزه‌ای استنتاج نگه‌دار^۵ ساز و کار عصبی است که به ما امکان می‌دهد ساختار

نویسندگان کتاب، در نقد افسانه‌های ریاضیات آن‌ها را داستان‌هایی زیبا در مورد ریاضیات می‌دانند و از این داستان‌ها به عنوان بخشی از باورهای مردم در فرهنگ بومی آنان نام می‌برند، و اضافه می‌کنند که تأثیر این داستان‌ها چندان مثبت نیست

استنتاجی یک حوزه مفهومی (مثلاً هندسه) را برای استدلال دربارهٔ یک حوزه دیگر (مثلاً حساب) به کار بندیم. چنین استعاره مفهومی به ما امکان می‌دهد از آن‌چه دربارهٔ شاخه‌ای از ریاضیات می‌دانیم، برای استدلال دربارهٔ شاخه‌ای دیگر استفاده کنیم. آشکار شدن ساختار شناختی ریاضیات، دسترسی به ریاضیات و درک آن را بیش‌تر میسر می‌کند، زیرا استعاره‌ها براساس تجربه‌های معمولی شکل می‌گیرند. بیش‌تر مفاهیم ریاضی مبتنی بر آن‌ها به زبان عادی قابل درک می‌شوند.

چگونه می‌توان این واقعیت را توجیه کرد که دانشمندان توانسته‌اند صورت‌هایی از ریاضیات پیدا کنند (یا بسازند) که بسیاری از نمودهای دنیای فیزیکی را به دقت مشخص کند یا حتی به دقت پیش‌گویی کند؟

اثبات کنند، در محدودهٔ نظام مفهومی ریاضیاتی انسانی است، که توسط مغز انسان و نظام مفهوم‌سازی انسان و نیز ارتباط‌های انسانی و فرهنگ شکل می‌گیرد. تمام دانش ریاضیاتی که ما داریم، یا می‌توانیم داشته باشیم، دانشی در محدودهٔ ریاضیات انسانی است. پس هیچ راهی نداریم که بفهمیم قضیه‌هایی که انسان‌های ریاضی‌دان اثبات می‌کنند، در عالم ورای نوع بشر (یا سایر انواع) حقیقت عینی دارند یا نه.

ریاضیات تجسم‌یافته در مقابل ریاضیات متعالی

مسیر اصلی استدلال چنین است:

(۱) بحث علمی در مورد وجود ریاضیات افلاطونی ممکن نیست. خیلی خوش‌بین باشیم، این موضوع مسئله‌ای اعتقادی مانند ایمان به روح است. یعنی ریاضیات افلاطونی، مانند روح، از طریق جسم و ذهن انسان قابل مشاهده و درک نیست.

(۲) مانند تصویری که از روح داریم، آن‌چه از انسان برمی‌آید، درک ریاضیات برحسب استطاعت و مغز و ذهن انسان است. تنها مفهوم‌سازی ریاضی که از ما برمی‌آید، مفهوم‌سازی انسانی است. بنابراین ریاضیاتی که ما می‌دانیم و می‌آموزیم، تنها می‌تواند ریاضیات ساخته و پرداخته انسان باشد.

(۳) این که ریاضیات انسانی چیست، سؤالی مربوط به علوم تجربی است، نه سؤالی ریاضی یا از فلسفه پیشینی.

(۴) بنابراین فقط از طریق علوم شناختی می‌توانیم جواب چنین سؤالی را پیدا کنیم: ماهیت تنها ریاضیاتی که انسان می‌داند یا می‌تواند بداند چیست؟

(۵) پس اگر ماهیت ریاضیات را به عنوان یک سؤال علمی مطرح کنیم، آن‌گاه این ریاضیات عبارت است از ریاضیاتی که برای انسان با استفاده از ساز و کارهای شناختی مغز متصور است.

نظریه و فلسفه ریاضیات تجسم‌یافته

در بخش پنجم کتاب، و در دو فصل پربار آن، لُگف و نونز به بیان دیدگاه‌های نظری و فلسفه چیزی می‌پردازند که آن را ریاضیات تجسم‌یافته نامیده‌اند. آنان می‌گویند ریاضیاتی که ما می‌شناسیم با مغز انسان و ظرفیت‌های ذهنی انسان ساخته شده و محدود به آن است. تنها ریاضیاتی که ما می‌شناسیم یا می‌توانیم بشناسیم، ریاضیات مبتنی بر مغز و ذهن است. با یافته‌های علوم شناختی و عصب‌شناسی دربارهٔ مغز و ذهن انسان، معلوم شده که مغز انسان ابزاری همه‌کاره نیست، مغز و بدن طوری با هم تکامل یافته‌اند که مغز مناسب‌ترین کارکرد را برای بدن ایجاد کند. بخش اعظم کار مغز صرف بینایی، حرکت، درک فضایی، تعامل بین انسان‌ها، هماهنگی، عواطف، زبان و تعقل روزمره می‌شود. دریافت‌های انسان و زبان انسان اتفاقی یا اختیاری نیست، بلکه به دلیل محدودیت‌های ساختار مغز، اندام‌ها و جهان اطراف، کاملاً محدود و سازمان‌یافته است. سؤال دیگر، سؤالی فلسفی است آیا ریاضیات مبتنی بر مغز و ذهن، تمام آن چیزی است که ریاضیات نامیده می‌شود؟ یا ریاضیاتی متعالی (چنان‌چه افلاطونیان گفته‌اند) وجود دارد که ورای تمام کالبدها و ذهن‌ها و ساختار عالم (این عالم و هر عالم ممکن) است؟ پاسخ لُگف و نونز به این سؤال سر راست است: قضیه‌هایی که انسان‌ها می‌توانند

۶) ممکن است برخی، ماهیت ریاضیات را نه یک سؤال علمی، بلکه بحثی فلسفی یا اعتقادی در نظر بگیرند. در این صورت زحمت ارایه دلیل علمی به عهده کسانی است که مدعی اند ریاضیات افلاطونی متعالی وجود دارد و آن قضیه‌هایی که در ریاضیات انسانی اثبات می‌شوند، خارج از وجود هر موجود یا نظام مفهومی، بشری یا غیربشری، دارای حقیقتی عینی‌اند. البته، در حال حاضر، راهی برای اثبات علمی چنین مطالبی سراغ نداریم.

به اعتقاد لُگف و نونز، بسیاری از سردرگمی‌ها، معماها، و پارادکس‌های ریاضیات بدان علت پیدا می‌شود که استعاره‌های مفهومی، که بخشی از ریاضیات است، نه استعاره بلکه واقعی در نظر گرفته شده‌اند. زمانی که خصلت استعاره‌ای مفاهیم ریاضی آشکار شود، این قبیل سردرگمی‌ها و پارادکس‌ها نیز از میان می‌روند

متعالی افلاطونی، به واکنش برانگیخته شوند. هم‌چنین، نویسندگان کتاب، در نقد افسانه‌های ریاضیات^۶ آن‌ها را داستان‌هایی زیبا در مورد ریاضیات می‌دانند و از این داستان‌ها به عنوان بخشی از باورهای مردم در فرهنگ بومی آنان نام می‌برند، و اضافه می‌کنند که تأثیر این داستان‌ها چندان مثبت نیست. آن‌ها، مردم را مرعوب می‌کنند. اگر کسی این داستان‌ها را عمیقاً باور کند، ممکن است در بخشی از جهان‌بینی وی، به غلط، این داستان‌ها جای درک علمی را بگیرد.

ریاضیات تجسم‌یافته در مقابل ریاضیات افسانه‌ای

لُگف و نونز با چنین نگرشی از بین ریاضیات مبتنی بر ساز و کارهای شناختی مغز از یک سو، و ریاضیات افسانه‌ای افلاطونی از سوی دیگر، مرز پررنگی ترسیم می‌کنند. البته این مرزبندی با فلسفه‌های ریاضی دیگر نیز مطرح شده است. این استدلال ناشی از فلسفه‌ای پوزیتیویستی نیست. در حقیقت ریاضیات تجسم‌یافته را می‌توان فلسفه‌ای جدید برای ریاضیات قلمداد کرد که چالش‌های جدیدی برای آموزش ریاضی ایجاد کرده است. با آن‌که تا پیش از بخش پنجم (فصل ۱۵)، نقد جدی نسبت به دیدگاه‌های فلسفی دیگر انجام نشده است، اما در بحث‌ها و بررسی‌های انجام شده، سؤال‌های متعددی در نقد دیدگاه‌های مختلف مطرح شده است. ویژگی برجسته بخش پنجم کتاب، بیان شفاف و موضع‌گیری آشکار نسبت به دیدگاه‌های فلسفی دیگر و بیان نقطه‌نظرهای نویسندگان در مورد آنان است. با وجود آن‌که روند عمومی ریاضی و گفتمان مسلط بر ریاضیات، افلاطونی است، اما در حال حاضر تعداد مدافعان دیدگاه افراطی افلاطونی اندک هستند. نویسندگان کتاب، نگاه افلاطونی (به شکل افراطی آن) را مطرود می‌دانند. لُگف و نونز، نظریه خود را در تقابل با ریاضیات متعالی (فرا تجربی افلاطونی) قرار می‌دهند و مدعی هستند نمی‌توان به ریاضیات موجودیتی مستقل از انسان داد. این نقد موجب شده، بخش عمده‌ای از مدافعان آشکار و پنهان ریاضیات

افسانه‌های ریاضیات

عمده‌ترین این افسانه‌ها چنین‌اند:

- ریاضیات از اجزای مهم جهان است، اشیای ریاضی واقعی‌اند، ریاضیات حقیقت مسلم و دقیق جهان است.
- باور انسان در مورد ریاضیات، اثری بر واقعیت آن ندارد. ریاضیات مستقل از انسان یا هر موجودی است.
- ریاضیات غایت علوم است و نه تنها در این جهان فیزیکی، بلکه در هر جهان دیگری حقیقت مطلق است.
- چون منطقی می‌تواند با منطق ریاضی صورت‌بندی شود، به‌طور طبیعی هر توصیف ریاضیات معقول است.
- تعریف‌های معقول مختص انسان است و ریاضیات عالی‌ترین قالب عقلانیت انسان است.
- بنابراین ریاضیات شایسته آن است که در «برج عاج» و در رأس ظرفیت‌های فکری انسان قرار گیرد.
- ریاضی فیزیک، در دل پدیده‌های فیزیک جای دارد. «کتاب طبیعت را با ریاضیات نوشته‌اند».
- و بالاخره، ریاضیات ملکه علوم است.

میزان پذیرش این افسانه‌ها نزد مردم متفاوت است. این افسانه‌ها در نوشته‌ها و حرف‌های روزمره دربارهٔ ریاضیات بیان می‌شود، و بیش‌تر آن‌ها در لابه‌لای کتاب‌ها و درس‌های ریاضی نوشته می‌شود و به همان نسبت هر روز در بحث‌های

مربوط به ریاضی گفته می‌شود. لُگف و نونز می‌نویسند: شاید شما هم به این نکته پی برده باشید که برخی از ریاضی‌دانان هیچ‌یک از این افسانه‌ها را باور ندارند و این موضوع را آشکارا بیان می‌کنند. با این همه، هنوز این افسانه‌ها جزیی از اعتقاد مردم ما است و تصریح می‌کنند که ریاضیات بخشی از فرهنگ ما است.

ریاضیات و پست‌مدرنیسم

گرچه لُگف و نونز خاطر نشان می‌کنند که بخش مهمی از ریاضیات، محصول حافظهٔ تاریخی، ویژگی‌های تاریخ، فرهنگ و اقتصاد است، اما تأکید دارند که این وجه ساده شدهٔ آن است. شناختی که ما از این حقیقت داریم، با فلسفه‌ای که پست‌مدرنیست‌ها در این باره می‌گویند، تفاوت دارد. پست‌مدرنیسم ریاضیات را صرفاً مصنوع فرهنگ می‌داند. نظریهٔ ریاضیات تجسم یافته، شکل‌های مختلف ریاضیات را به یک اندازه به رسمیت می‌شناسد، ولی هر یک را در حوزهٔ خود تصدیق می‌کند. در واقع، ریاضیات تجسم‌یافته برای ویژگی‌های حقیقی ریاضیات، دلایلی ارائه می‌کند که نسبیت‌گرایی فرهنگی افراطی آن‌ها را یا رد می‌کند یا آن‌ها را نادیده می‌گیرد؛ ویژگی‌های پایداری عقلی؛ پایداری استدلال؛ دقت؛ سازگاری؛ قابلیت تعمیم؛ قابلیت کشف کردن، قابلیت محاسبه؛ و کاربری واقعی در توصیف جهان.

بخش اعظم کار مغز صرف بینایی، حرکت، درک فضایی، تعامل بین انسان‌ها، هماهنگی، عواطف، زبان و تعقل روزمره می‌شود. دریافت‌های انسان و زبان انسان انفاقی یا اختیاری نیست، بلکه به دلیل محدودیت‌های ساختار مغز، اندام‌ها و جهان اطراف، کاملاً محدود و سازمان‌یافته است. سؤال دیگر، سؤالی فلسفی است آیا ریاضیات مبتنی بر مغز و ذهن، تمام آن چیزی است که ریاضیات نامیده می‌شود؟

ریاضیات تجسم‌یافته رهیافتی متفاوت

کتاب سعی دارد تا روشن کند ریاضیات انسانی، که از طریق مغز و ذهن انسان مفهوم‌سازی می‌شود، چیست. با توجه به وضع فعلی و قابل پیش‌بینی دانش علمی ما، ریاضیات همان ریاضیات انسانی است. مفاهیم ریاضی، همان مفاهیم ریاضیات انسانی است.

لُگف و نونز می‌نویسند: امیدواریم که این موضوع برای شما، با هر عقیده و فلسفه‌ای که برای وجود ریاضیات متعالی دارید، جالب باشد. چگونه می‌توان این واقعیت را توجیه کرد که دانشمندان توانسته‌اند صورت‌هایی از ریاضیات پیدا کنند (یا بسازند) که بسیاری از نمونه‌های دنیای فیزیکی را به دقت مشخص کند یا حتی به دقت پیش‌گویی کند؟

پاسخ به بیان ساده چنین است: آنچه بین ریاضیات و جهان واقعی «جور درآمده»، در ذهن دانشمندانی می‌گذرد که جهان را به دقت مشاهده کرده‌اند، ریاضیات مناسب با آن را خوب فراگرفته‌اند (یا ساخته‌اند) و بعد عقل‌هایشان را روی هم گذاشته‌اند و این‌ها را (اغلب با موفقیت) با هم جور کرده‌اند. ریاضیات تجسم‌یافته، با هیچ‌یک از فلسفه‌های پیشینی ریاضی، افلاطون‌گرایی، شهودگرایی یا صورت‌گرایی، یا با تعبیرهای جدید پست‌مدرنیستی از ریاضیات سازگار نیست.

نتایج این کتاب، رهیافتی کاملاً متفاوت به فلسفه ارائه می‌کند. نویسندگان کتاب معتقدند فلسفهٔ ریاضی باید با یافته‌های علمی دربارهٔ تنها ریاضیاتی سازگار باشد که انسان می‌داند و می‌تواند بداند. در بخش عمده‌ای از کتاب، به کمک استعاره‌های مطرح شده، موضوع‌های مختلف ریاضی مفهوم‌سازی شده است. هر استعارهٔ ریاضی به نوبهٔ خود، بر پایهٔ طرحوارهٔ «منشأ-مسیر-هدف» معرفی شده است.

ریاضیات جاری در کتاب

کتاب شامل فهرست بلندبالایی از استعاره‌های مفهومی است که هر یک به کمک این طرح‌واره و آمیزه‌های مفهومی، معرفی شده‌اند. بدین ترتیب نقشه مفهومی وسیعی در سراسر کتاب دیده می‌شود که پایه‌ای برای تعریف استعاره‌های بعدی را فراهم می‌کند. در این میان،

ممکن است به برخی مباحث کتاب، از دید یک ریاضی‌دان متخصص در یکی از شاخه‌های

ریاضی، ایرادهایی وارد باشد، اما ریاضیات جاری در کتاب در سطح قابل قبول و حتی بیش از انتظار است، و البته خالی از اشتباه نیست (که در سایت کتاب^۲ به برخی از این اشتباه‌ها نیز اشاره شده است). با این همه، این موضوع از ارزش تحلیل همه‌جانبه کتاب در حوزه‌های گوناگون ریاضیات نمی‌کاهد. موضوعی که در بیشتر نقدهای کتاب نیز مورد توجه قرار گرفته است.

نقدهایی بر کتاب

در نقدهایی که بر این کتاب نوشته شده، بسیاری از نقدکنندگان به کنکاش جزئیات ریاضی آن پرداخته‌اند. اما در عین حال، در بیشتر نقدهای نوشته شده، بر نقش و اهمیت این نگرش بر آموزش ریاضی و حتی فلسفه تأکید شده است. پذیرش دیدگاهی که لگف و نونز آن را ریاضیات تجسم‌یافته می‌نامند، می‌تواند مبنای برنامه‌ریزی مجدد آموزش ریاضی قرار گیرد. در عین حال، طرح موضوع‌های متنوع در این نگرش، امکان تحقیق و مطالعه در

ریاضیات یکی از عمیق‌ترین و زیباترین کندوکاوهای تخیل است که انسان تاکنون درگیرش شده است. اما بسیاری از زیبایی‌های آن برای کسانی که دست‌اندرکار ریاضیات نیستند، غیر قابل دسترسی است، زیرا بخش عمده ساختار شناختی ریاضی توصیف نشده است

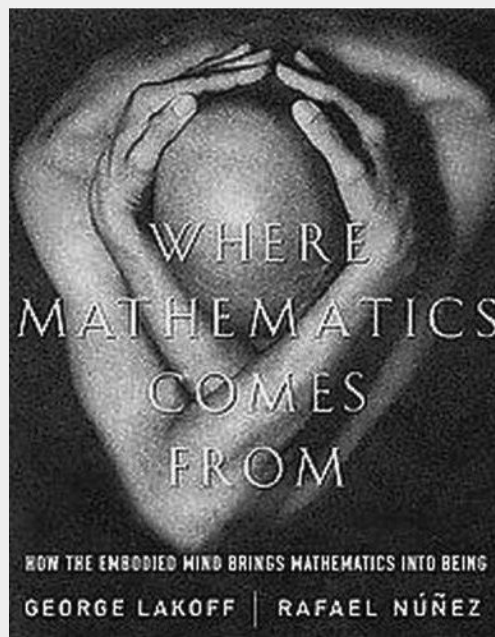
مورد ریاضیات را فراهم می‌کند. تحقیق در مورد پایه‌های شناختی مفاهیم ریاضی و معرفی استعاره‌های بیش‌تر (و بازنگری دقیق‌تر) ممکن است برخی از کاستی‌هایی که در مورد بخش‌های ریاضی این کتاب به چشم می‌خورد، فرو کاسته شود.

نقد اول: معتقد به ریاضیات متعالی

و مشکوک به نظریه

به اعتقاد جوزف اوسلاندر، دانشگاه مریلند، نظریه مطروحه در این کتاب با موضعی که روبن هرش در کتاب «واقعاً ریاضیات چیست»^۸ دارد، سازگار است. ولی در ادامه، حتی فراتر از آن است. اوسلاندر معتقد است: احکام ریاضی نامفهوم و مشکوک بسیار و حتی اشتباهات مشخص در کتاب دیده می‌شود. منتقد کتاب ادامه می‌دهد: اشتباه جدی دیگر در آخرین بخش کتاب در مورد تساوی $e^{it} + 1 = 0$ رخ

می‌دهد. وی می‌افزاید «همان‌طور که مؤلفان خاطر نشان می‌کنند، لازم است توضیح داده شود که مقصود از این که عددی حقیقی به توان مختلط می‌رسد، چیست. مؤلفان پس از یک سیر سریع در هندسه تحلیلی و مثلثات و نیز بحث درباره عدد e واحد موهومی i و حساب دیفرانسیل، به رابطه مهم $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ می‌رسند. این تساوی را به این صورت «ثابت می‌کنند» که نشان می‌دهند مشتقات دو طرف از همه مرتبه‌ها در صفر یکی است (بنابر سری تیلور آن‌ها یکی است). اما این استدلال یک دور باطل است



زیرا e^{ix} تعریف نشده است. راه صحیح این است که e^{iy} را از طریق سری تیلور تابع‌نمایی تعریف کنند (که در این صورت، رابطه فوری از مقایسه ضرایب سری‌های تیلور نتیجه می‌شود). البته، اوسلاندر معتقد است کتاب در پایه‌گذاری یک رشته علوم شناختی برای ریاضیات موفق است. وی می‌نویسد: احتمال دارد که استعاره در صورت‌بندی مفاهیم پیشرفته‌تر نقش اساسی نداشته باشد، یا اگر هم داشته باشد، ماهیتی متفاوت با آنچه در ریاضیات مقدماتی‌تر دارد، داشته باشد. وی ادامه می‌دهد: مفاهیم ریاضی، وقتی شکل می‌گیرند، نوعی حیات مستقل کسب می‌کنند و آن‌گاه می‌توان به آن‌ها به‌طور مستقیم برخورد کرد. برای من دشوار است که استعاره‌ای برای به‌توان مختلط رساندن یک عدد حقیقی تصور کنم؛ اگر چنین استعاره‌ای وجود دارد، قطعاً مشتاق شنیدن آن هستیم.

نقد دوم: معرفی و بررسی کتاب...

نقد دیگری از این کتاب در مجله معتبر تحقیقات آموزش ریاضی (Journal for Research in Mathematics Education) به قلم نورما پریمسگ، دانشگاه ایالتی الینویز آمریکا، آمده است. پریمسگ بعد از مروری کوتاه بر مشخصات کتاب، نویسندگان آن را معرفی و سپس چارچوب کتاب را بررسی کرده است. منتقد مجله در جمع‌بندی می‌نویسد: آنان (لگف و نونز) با اشتیاق و شور به شناسایی استعاره‌های پایه و استعاره‌های ارتباطی و آمیزه‌های مفهومی می‌پردازند که ایده‌های ریاضی را تشکیل می‌دهند. اما لگف و نونز چیزی را که استعاره‌های فرعی می‌نامند، کم‌ارزش می‌دانند (ص ۵۳). این‌ها گاهی استعاره‌هایی فردی هستند که ریاضی‌دان‌ها یا دانشجویان ممکن است در جریان تجربیات آموزشی خود جداگانه بسازند و برای به‌دست آوردن حسی از تجربیات آنان سودمند است. در واقع، لگف و نونز خود نیز از استعاره‌های فرعی استفاده کرده‌اند. استفاده از مفهوم دوران در

در بررسی ذهن و ساز و کار مغز با سؤالی علمی روبه‌رو هستیم: دقیقاً کدام ساز و کار مغز انسان به او امکان فرمول‌بندی اندیشه‌های ریاضی و استدلال ریاضیاتی را می‌دهد؟

توصیف تقارن دوطرفه (ص ۲۴۲) یکی از این مثال‌ها است. خواه این استعاره‌ها فردی باشد یا نه، نتیجه آموزش و یادگیری هستند و در این حوزه نمی‌توان نقش آن‌ها را نادیده گرفت.

نقد سوم: سخت‌گیرانه ولی منصفانه

جان الن پالوس، دانشگاه تمپل آمریکا، با ظرفیت عنوان ریاضیات در ۳۷ (دمای بدن)، را برای نقد خود بر این کتاب انتخاب است. وی معتقد است: کتاب‌های فلسفه ریاضی و آموزش ریاضی معمولاً تا حدی ملال‌آورند، زیرا عموماً به بازگویی مواضع متعارف می‌پردازند و اگر خواننده شانس‌بیاورد یکی دو نکته ظریف در آن‌ها می‌بیند و اضافه می‌کند: کتاب ریاضیات از کجا سرچشمه می‌گیرد در این میان استثناست. هم از نظر رهیافت روشن‌گرانه، و هم از نظر نتیجه‌گیری‌های جذاب و بعضاً سنت‌شکنانه آن. لگف زبان‌شناس و نونز روان‌شناس مفاهیم مجرد را تا سرچشمه مادی و انسانی آن‌ها دنبال کرده و ادعا می‌کنند که ریاضیات از فرایندهای شناختی عادی نشأت می‌گیرد. به این ترتیب ضربه‌ای کاری به بدنه دیدگاه افلاطونی درباره ریاضیات وارد کرده‌اند و به‌طور غیرمستقیم راه‌های وسیع نوینی را در تحقیقات آموزشی گشوده‌اند. وی می‌نویسد: بررسی دقیق استعاره‌های مفهومی که به مفاهیم ریاضی معنی می‌بخشند، قاعدتاً باید از نظر آموزشی بسیار مفید واقع شوند، و در این حوزه است، نه در فلسفه ریاضی، که این کتاب بیش‌ترین تأثیر را خواهد داشت. آگاهی بهتر نسبت به سرچشمه‌های معمولاً پیش‌پافتاده و گاهی ناخودآگاه ایده‌های پیچیده، ضرورتاً به یاددهی و یادگیری ما کمک خواهد کرد. در مجموع، این کتاب گرمایی جسمانی به انتزاع سرد و زیبایی ریاضیات می‌افزاید.

چهره ریاضیات

جمع‌بندی پایانی را با بازنویسی مطلبی زیر عنوان «چهره ریاضیات» در آخر فصل ۱۶، به پایان می‌بریم. در این بخش

از کتاب، نظریهٔ ریاضیاتِ تجسم‌یافته از نگاه نویسندگان کتاب، مرور شده است:

● ریاضیات بخش طبیعی هستی انسان است که از جسم ما، مغز ما و تجربیات روزمرهٔ ما در جهان برخاسته است. فرهنگ هر نقطه‌ای، چیزی از ریاضیات دارد.

● هیچ چیز اسرارآمیز، عرفانی، سحرآمیز، یا متعالی در مورد ریاضیات وجود ندارد. این موضوعی مهم در مطالعهٔ علوم است. ریاضیات پیامد تکامل تاریخ، اعصاب زیستی، ظرفیت شناختی و فرهنگ انسان است.

● ریاضیات یکی از بزرگ‌ترین محصولات ناشی از قدرت تخیل مشترک انسان است. این محصول مشترک توسط میلیون‌ها تن از مردم متعهد طی بیش از هزاران سال تولید شده است و توسط صدها هزار مربی و معلم و مردمی نگه‌داری می‌شود که هر روز از آن استفاده می‌کنند.

● ریاضیات، نظام مفهومی انسانی است که با استفاده از ابزارهای معمولی شناختی به تولید چیزهایی فوق‌العاده پرداخته است. این چیزها دارای قابلیت پایداری، دقت، تعمیم، نمادگذاری، محاسبه‌پذیری، سازگار با هر موضوع، و با قابلیت دسترسی در همه جا است که در مفهوم‌سازی دقیق بخش بزرگی از سیمای جهان و تجربهٔ ما از جهان مؤثر است.

● اثربخشی ریاضیات در جهان، به قدردانی از تکامل و فرهنگ است. تکامل شکل بدن و مغز ما به گونه‌ای است که وارث ظرفیت‌های عصبی برای پایه‌های عددی و برای روابط فضایی اولیه است. احتمالاً از میلیون‌ها مشاهدهٔ هوشمندانهٔ طبیعت، هم‌چنین هزاران هزار سعی و خطا، توسعه و گذر بیش‌تر و بیش‌تر ابزارهای ریاضیات پیشرفته فرهنگ ساخته شده است - این ابزارها به شکلی است که مشاهدات ما را توصیف می‌کنند. هیچ اسراری در مورد اثربخشی ریاضیات در

نویسندگان کتاب، با بهره‌گیری از پیشرفت‌های سال‌های اخیر در علوم شناختی، این درک جدید از ریاضیات را معرفی می‌کنند. آنان ادعا می‌کنند که در دوران قدیم علوم شناختی (دهه‌های ۶۰ و ۷۰)، حتی تصور چنین نگرشی ممکن نبوده است

توصیف جهانی که ما تجربه کرده‌ایم وجود ندارد: این اثربخشی از ترکیب دانش ریاضیات و اتصال با جهان نتیجه شده است. اتصال بین ایده‌های ریاضیات و تجربه‌ای که انسان از جهان در ذهن خود دارد. این انسان کسی است که مارپیچ‌های لگاریتمی و فرکتال‌ها را خلق می‌کند، کسی که مارپیچ لگاریتمی حلزون‌ها و فرکتال‌ها را در برگ خرما دیده است.

● در ذهن میلیون‌ها نفر از کسانی که ریاضیات نگه داشته و توسعه داده‌اند، مفاهیم ریاضیات ابداع شده و در تطابق با جهان، درک و مفهوم‌سازی شده است. این امری محتمل است، زیرا ایده‌های مفهومی مانند تغییر، تناسب، اندازه، دوران، احتمال، روابط بازگشتی، روابط تکرار شونده، و صدها نمونهٔ دیگر، هر روز ریاضی‌وار بیان می‌شوند. ریاضی‌وار شدن ایده‌های معمولی انسان، اقدام جسورانهٔ معمول انسان است.

● به دلیل گذشت بیش از هزار سال از توسعهٔ نظام‌های نگارشی، فرهنگ امکان داشتن نظام‌های ملی ریاضیات را دارد. و به علت آن که نظام فکری انسان، مستعد دقت فکری و نمادگذاری است، ریاضیات توانای توسعهٔ نظام‌های دقیق محاسبه و اثبات را دارد. استفاده از استعاره‌های خلاقانه، باعث شده که ایده‌های ریاضیات بیش‌تر و بیش‌تر مستعد دقت فکری و محاسباتی است. این توانایی انسان برای استعارهٔ فکری است که امکان دقت ریاضی‌وار و بعضی مواقع حتی محاسبهٔ مفاهیم روزمره را می‌دهد، مفهومی مانند مجموعه‌ها؛ بعد؛ تقارن؛ روابط علی مستقل و وابسته؛ و بسیاری دیگر.

● هر چیزی در ریاضیات سازگار است - لاقلاً در اصول. چون سازگاری با استفاده از توانایی‌های عمومی فکری انسان ساخته می‌شود، این ساختار فکری می‌تواند تحلیل‌گر و یادگیرندهٔ روابط معنی‌دار باشد.

● با بررسی ذهن دریافته‌ایم که هوش انسان چندگانه است و این که برای بسیاری از صورت‌های هوش، فرهنگ انسانی اهمیت دارد. هوش ریاضی یکی از آنها است - نه بیشتر و نه کم‌تر از هوش موسیقایی، هوش هنری، هوش ادبی، هوش اجتماعی و هیجانی و مانند آن.

● ریاضیات خلاق و باز - پایان است. با مزیتی که استفاده از استعاره‌های مفهومی و آمیزه‌های مفهومی در ریاضیات حاضر دارد، می‌توان با وارد کردن ساختار یک شاخه ریاضی به شاخه‌ای دیگر و پیوند دادن ایده‌های ریاضیات در شاخه‌های مختلف، شکل‌های جدیدی را توسعه داد و آنها را خلق کرد.

● نظام مفهومی انسان، سخت و انعطاف‌ناپذیر نیستند. ما روایت‌های مختلف مفاهیم را مجاز می‌دانیم و دورنمای استعاره‌ای متعدد بیش‌تر آنها (نه به معنی همه آنها!) جنبه‌های مهم زندگی ما را تشکیل می‌دهند. هر جزء نظام مفهومی از بخش دیگر آن به لحاظ مفهومی ریاضیات غنی‌تری دارد. به علاوه برای بینش‌ها و روایت‌های مفهومی مختلف، ریاضیات مجاز است. تنها یک نماد بینهایت وجود ندارد بلکه نمادهای متعدد دارد، یک منطق صوری نیست بلکه ده‌ها هزار است، یک مفهوم برای عدد نیست بلکه انواع و اقسام آن است، یک نظریه مجموعه یا هندسه یا آمار نیست بلکه طیف وسیعی از آن است - و تمام ریاضیات چنین است.

● ریاضیات مثالی باشکوه از زیبایی، غنا، پیچیدگی، تنوع، و اهمیت ایده‌های انسان است. این گواه شگفت‌آوری از ذهن معمول تجسم‌یافته انسان طی هزاران سال و حاصل تلاش‌های خلاق میلیون‌ها نفر است.

● جوهر هستی انسان بانی خلق ریاضیات است و ما مسئول نگه‌داری و توسعه آن هستیم.

این چهره ریاضیات، چهره‌ای انسانی است.

چه نتایج آموزشی "می‌تواند" متصور شود...

ترسیم چنین چهره‌ای برای ریاضیات، می‌تواند نتایج آموزشی دیگری نیز به همراه داشته باشد.

● بخشی از فرهنگ (هرجایی) را ریاضیات تشکیل می‌دهد، از سوی دیگر فرهنگ، بر صورت‌های مختلف هوش (منجمله هوش ریاضی) مؤثر است. ارتباط بین ریاضیات و فرهنگ دوطرفه است.

● ریاضیات انسانی است و حاصل تجربه جمعی بشر در طول تاریخ است. بنابراین آموزش ریاضیات نیز می‌تواند بر مبنای بازتولید ریاضی، و در برخی موارد، حتی تکامل آن استوار شود.

● برنامه آموزش ریاضی، می‌تواند با تلاش برای الگویی پدیده‌ها و ساختن استعاره‌های مفهومی (یا استعاره‌های فرعی) جدید و برقراری ارتباط بین شاخه‌های مختلف ریاضی همراه شود.

● تغییر نگرش از «پذیرش وجود مستقل اشیا ریاضی و تلاش برای کشف آنها» به «باور امکان تولید و ابداع ریاضیات»، می‌تواند حرکت از «آموزش منفعل و ماندن در وضعیت دریافت‌کننده اطلاعات» به «آموزش فعال و مالک دانش تولیدشده» را نتیجه دهد.

● این چهره از ریاضیات می‌تواند آن را از قاب مقدسش خارج کند و به کار گیرد، و در جریان کاربردها ارتقا دهد. چنین نگرشی برای ریاضیات، با روح خلاق انسان سازگارتر به نظر می‌رسد.

● ریاضیات زمینی (در مقابل ریاضیات متعالی) می‌تواند امکان فراگیری و حتی توسعه ریاضیات برای همه را فراهم کند.

● این تغییر نگرش می‌تواند (و باید) بر روش‌های تدریس اثری ژرف داشته باشد و امکان نمایش جلوه‌هایی از زیبایی، غنا و تنوع ریاضیات را فراهم می‌کند.

پی‌نوشت

1. Where Mathematics Comes From?
2. Grounding Metaphors
3. Subitizing
4. Linking Metaphors
5. Inference-preserving cross-domain mapping
6. Romance of Mathematic
7. <http://www.unifr.ch/perso/nunez/>
8. What is Mathematics, Really