

مسائل مسابقه ریاضی اسکاتلند در سال ۲۰۰۲-۲۰۰۱



ترجمه و تألیف: هوشنگ شرقی

مقدمه

مسابقات ریاضی در تمام کشورهای عضو جامعه بریتانیای کبیر (انگلستان، اسکاتلند، ایرلند و ولز) سال‌هاست که برگزار می‌شوند. در این کشورها مسابقه‌های ریاضی در سطوح گوناگونی برگزار می‌شوند. مسابقات المپیادهای ریاضی برای آمادگی و انتخاب تیم المپیاد بین‌المللی این کشورها نیز از سال‌ها پیش انجام می‌شود. درباره المپیاد ریاضی انگلستان قبلاً مطالبی داشته‌ایم و کتاب مجموعه مسائل آن قبلاً به قلم نگارنده ترجمه و از سوی انتشارات مدرسه منتشر شده است.

به جز کشور انگلستان، سایر کشورهای این جزیره بزرگ، حضور چندانی در المپیادهای بین‌المللی نداشته‌اند و به جز کشور ایرلند، دیگر کشورها و از جمله اسکاتلند به‌طور مستقل در المپیاد ریاضی بین‌المللی حاضر نشده‌اند. اما مسابقات ریاضی در این کشورها به‌طور منظم در جریان است. یکی از این مسابقه‌ها، مسابقه ریاضی دانش‌آموزی در کشور اسکاتلند است که در دو سطح مقدماتی و پیشرفته برگزار می‌شود. در این جا مسائل سطح پیشرفته این مسابقات را در سال تحصیلی ۲۰۰۲-۲۰۰۱ آورده‌ایم.

سطح سؤال‌ها چنانچه خواهید دید، خیلی بالانگیز است و به مسائل المپیاد ریاضی شباهت زیادی ندارند، اما مسائل سطحی و پیش‌پاافتاده‌ای هم نیستند و می‌توانند مورد توجه اقشار بیش‌تری از دانش‌آموزان قرار گیرند و بعضی از آن‌ها از جمله مسئله ۳ واقعاً تفکربرانگیز و جالب توجه‌اند. توصیه همیشگی‌ام این است که قبل از دیدن راه‌حل‌ها خودتان را بیازمایید و سعی کنید مسائل را با تفکر خودتان حل کنید و بدانید که حتماً از این کار لذت خواهید برد.

هیچ طرفشان سیاه نیست؟ یک وجهشان سیاه است؟ دو وجهشان سیاه است؟ سه وجهشان سیاه است؟ چهار وجهشان سیاه است؟ پنج وجهشان سیاه است؟ هر شش وجهشان سیاه است؟

۲. کامیون‌های غذا باید سر ساعت ۳ بعدازظهر وارد یک بندر آزاد شوند. اگر آن‌ها با سرعت ۶۰ مایل در ساعت حرکت کنند ساعت ۲ وارد بندر می‌شوند و اگر با سرعت ۴۰ مایل در ساعت حرکت کنند، ساعت ۴ بعدازظهر وارد می‌شوند. طول مسیر مسافرت آن‌ها چند مایل است و با چه سرعتی باید حرکت کنند تا سر ساعت ۳ بعدازظهر به مقصد برسند.

۳. در زمان جنگ دوم جهانی، خانواده‌ها مجبور بودند پنجره‌هایشان را استتار کنند. آقای براون یک پنجره‌ی مربع شکل به ابعاد ۱۲۰ در ۱۲۰ سانتی‌متر داشت. اما تنها چیزی که برای این کار داشت یک ورقه‌ی تخته‌سولایی به ابعاد ۱۶۰ سانتی‌متر در ۹۰ سانتی‌متر بود، با مساحتی برابر مساحت پنجره ولی با شکلی متفاوت. او با رسم تعدادی خط راست روی این ورقه و برش دادن آن به دو شکل یکسان و وصل کردن آن‌ها به هم توانست مربعی دقیقاً با همان ابعاد بسازد. او چگونه این کار را کرد؟



صورت مسائل

۱. فرض کنید هر شش رویه‌ی خارجی یک مکعب بزرگ را به رنگ سیاه نقاشی کرده‌ایم. این مکعب را به n^3 مکعب کوچک برش می‌زنیم. چه تعداد از این مکعب‌ها:

کلیدواژه‌ها:

مسابقات

ریاضی، المپیاد

ریاضی، مثلث

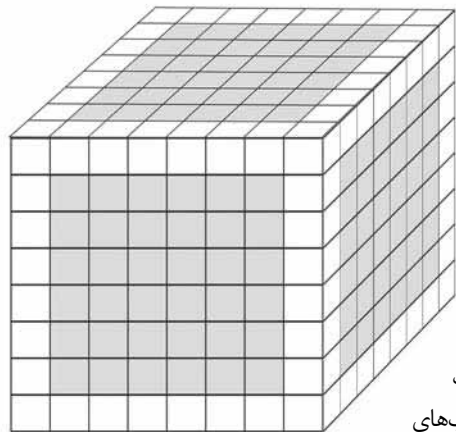
متساوی‌الاضلاع.

فقط یک ششم آن‌ها و فقط نصف بقیه‌ی شهروندان لایق، این پول را قبول کردند. بالاخره جو، مبلغ ۱۳۸۷۴۸۳ پوند پول دارد، اما هنوز هم ثروتمند است! او به هر مدیر شهر نار کیا چه قدر پول داد؟



۱. این یک مسئله‌ی ساده، اما مهم از نظر توجه به هندسه‌ی فضایی و داشتن دید دقیق و سه بعدی است. بدیهی است که اگر هر ضلع مکعب را به n قسمت مساوی تقسیم کنیم و از محل‌های تقسیم، برش‌هایی موازی ابعاد مکعب بزنیم، مکعب اصلی به n^3 مکعب کوچک تقسیم می‌شود.

از این مکعب‌های کوچک، آن‌هایی که درون مکعب اصلی هستند، یعنی هیچ‌وجه آن‌ها منطبق بر وجه‌های خارجی مکعب اصلی نیست از هیچ‌طرف رنگ نمی‌خورند. تعداد این مکعب‌ها چندتا است؟ خیلی ساده است، کافی است از هر طرف مکعب، دو لایه‌ی رویی را حذف کنیم، یک مکعب دیگر به ابعاد $n-2$ به وجود می‌آید که از هیچ‌طرف رنگ نمی‌خورد. بنابراین تعداد مکعب‌هایی که هیچ‌وجه آن‌ها رنگ سیاه ندارد، مساوی $(n-2)^3$ است. اما کدام مکعب‌ها فقط یک وجه سیاه رنگ دارند؟



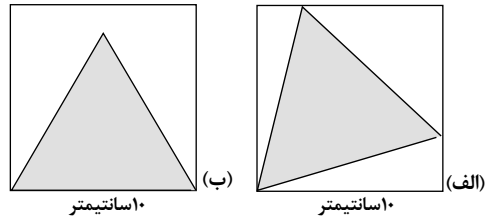
در شکل، این‌گونه مکعب‌ها مشخص شده‌اند، کافی است از وجه رویی مکعب اصلی که n^2 مربع دارد، $(n-2)^2$ مربع را که در وسط قرار دارند انتخاب کنیم. مکعب‌های کوچکی که این مربع‌ها یک وجه آن‌ها هستند فقط یک وجه سیاه رنگ دارند و لذا تعداد این‌گونه مکعب‌ها $6(n-2)^2$ است. بدیهی است که مکعب‌های گوشه‌ای تنها مکعب‌های هستند که سه وجه آن‌ها رنگ می‌شود و تعداد آن‌ها

۸ تا است و هیچ مکعبی هم دارای ۴ یا ۵ یا ۶ وجه رنگ شده نخواهد بود. اما چند مکعب داریم که دارای دو وجه سیاه رنگ هستند؟ این مکعب‌ها فقط آن‌هایی هستند که روی یال‌های مکعب اصلی (و نه در رأس‌ها) هستند. پس تعداد آن‌ها برابر است با: $12(n-2)$

$$n^3 = [(n-2) + 2]^3 = (n-2)^3 + 6(n-2)^2 + 12(n-2) + 8$$

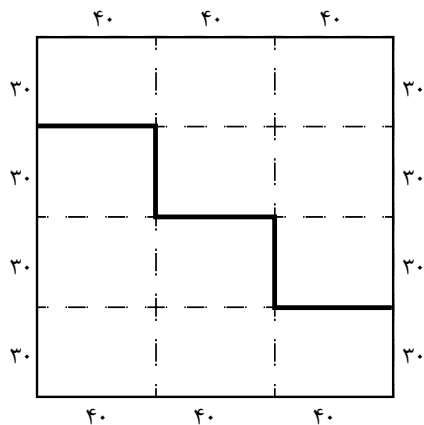


۴. مربعی به ضلع ۱۰ سانتی‌متر داده شده است. دو روش زیر برای محاط کردن یک مثلث متساوی‌الاضلاع را درون این مربع در نظر بگیرید. کدام مثلث بزرگ‌تر است و چه قدر؟

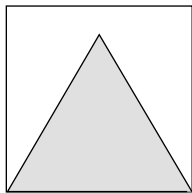


۵. شهر نار کیا، ۱۲۳۱۳۶ نفر جمعیت دارد. یکی از این شهروندان به نام جو پانتر در یک قرعه‌کشی عمومی پول زیادی را برنده شد. وقتی او پس از شنیدن این خبر به حال عادی خود بازگشت، متوجه شد که نمی‌داند با این پول چه کند، اما او یک چیز را می‌دانست و آن این‌که نمی‌خواهد از این پول به هیچ‌یک از آن‌ها که از او درخواست پول کنند، چیزی بدهد. به هر حال فقط ۲۰۳۵۹ نفر از شهروندان نار کیا از این دسته بودند. سرانجام او تصمیم گرفت بقیه‌ی شهروندان را لایق دریافت یک هدیه بدانند، و آن‌ها را به دو دسته تقسیم کرد: مدیران شهر نار کیا (البته به استثنای خودش) و شهروندان عادی. آقای پانتر تصمیم گرفت مبلغ معینی پول به هر مدیر لایق شهر نار کیا و ۲۷ پوند به هر یک از شهروندان عادی لایق دریافت هدیه، بدهد. تعداد مدیران لایق دریافت هدیه زیاد نبود ولی یک عدد دورقمی می‌شد. به دلایلی که هنوز معلوم نیست،

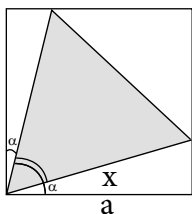
حال از کنار هم قرار دادن دو قطعه‌ی حاصل (که یکسان نیز هستند) مربع ۱۲۰×۱۲۰ کاملاً پوشیده می‌شود.



۴. این یک مسئله‌ی محاسباتی بسیار ساده است. کافی است با توجه به دستور $S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ که مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a را به ما می‌دهد، مساحت‌های دو مثلث را جداگانه محاسبه کنیم:



$$a = 10 \text{ cm} \Rightarrow S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 10^2 = 25\sqrt{3}$$



$$\alpha = \frac{90-60}{2} = 15^\circ \quad \cos \alpha = \frac{a}{x} = \frac{10}{x}, \quad \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{10}{x} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \Rightarrow x = \frac{40}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{40(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{6 - 2}$$

$$= 10(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \Rightarrow S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 100(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2$$

$$= 25\sqrt{3}(6 + 2 - 4\sqrt{3}) = 25(8\sqrt{3} - 12)$$

و می‌توان ثابت کرد که $\sqrt{3} > 12 - 8\sqrt{3}$ (یا $\sqrt{3} > \frac{12}{8}$). پس با مقایسه‌ای ساده مشخص است که $S_2 > S_1$ و مقدار این اختلاف نیز



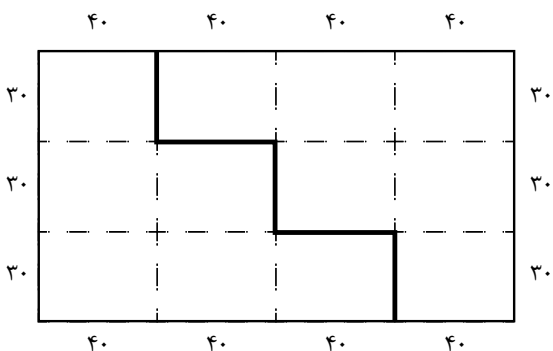
۲. این یک مسئله‌ی آسان از مدل‌سازی ریاضی است. دو مجهول اصلی داریم: مسافت مسیر کامیون‌ها و زمان طی این مسیر. اگر این مسافت را x و زمان حرکت کامیون با سرعت ۶۰ مایل در ساعت را t در نظر بگیریم، زمان حرکت کامیون با سرعت ۴۰ مایل در ساعت مساوی $t+2$ است و با توجه به رابطه‌ی سرعت - مسافت - زمان داریم: $(V = \frac{x}{t})$

$$60 = \frac{x}{t}, \quad 40 = \frac{x}{t+2} \Rightarrow 60t = 40(t+2)$$

$$\Rightarrow 20t = 80, \quad t = 4 \text{ hr}, \quad x = 240 \text{ mile}$$

یعنی طول مسیر ۲۴۰ مایل است، حال اگر کامیون‌ها بخواهند سر ساعت ۳ بعدازظهر به مقصد برسند، زمان طی مسیر آن‌ها یک ساعت بیش‌تر از وقتی است که سرعت آن‌ها ۶۰ مایل در ساعت است، یعنی ۵ ساعت و در نتیجه سرعت آن‌ها برابر است با: $V = \frac{240}{5} = 48 \text{ m/h}$ ؛ یعنی باید با سرعت ۴۸ مایل بر ساعت حرکت کنند تا به موقع به مقصد برسند.

۳. به نظر من این مسئله، زیباترین و تفکربرانگیزترین مسئله‌ی این آزمون است که خودم هم برای حل آن مدت نسبتاً زیادی مشغول شدم! برای رسیدن به پاسخ مسئله ایده‌های زیادی را آزمودم تا به این راه‌حل رسیدم. مستطیل ۹۰ در ۱۶۰ سانتی‌متری را به ۱۲ مستطیل ۳۰×۴۰ تقسیم می‌کنیم، به این ترتیب که طول مستطیل را به ۴ قسمت ۴۰ سانتی‌متری و عرض آن را به سه قسمت ۳۰ سانتی‌متری تقسیم و نقاط تقسیم را با خطوطی موازی به هم وصل می‌کنیم. سپس روی این خطوط، برش‌هایی به صورت زیر می‌زنیم:



برابر است با:

$$\begin{cases} a + b = 102776 \\ \frac{1}{6}ax + \frac{1}{2}b(27) = 1387483 \end{cases}$$

با ضرب معادله‌ی پایین در ۶ و معادله‌ی بالا در (-۸۱) خواهیم

داشت:

$$\begin{cases} -81a - 81b = -8324856 \\ ax + 81b = 8324898 \end{cases}$$

$$a(x - 81) = 42$$

و با توجه به این که a یک عدد طبیعی دو رقمی است، نتیجه

می‌شود که:

$$a = 42, \quad x - 81 = 1 \Rightarrow x = 82$$

یعنی هر یک از مدیران لایق شهر نارکیا ۸۲ پوند پول گرفته‌اند

و عده‌ی آن‌ها (قبل از دریافت پول) ۴۲ نفر بوده است که فقط ۷ نفر

آن‌ها پول را قبول کرده‌اند.

$$S_7 - S_1 = 25(8\sqrt{3} - 12 - \sqrt{3}) = 25(7\sqrt{3} - 12) \approx 3 / \text{cm}^2$$

۵. اگر تعداد شهروندان نالایق دریافت هدیه و خود جو پانتر را از

مجموع شهروندان کم کنیم، شهروندان لایق دریافت هدیه مشخص

می‌شوند:

$$123136 - 20359 - 1 = 102776$$

حال فرض می‌کنیم a نفر از این افراد مدیران لایق باشند و به

هر یک از آن‌ها x پوند هدیه تعلق گیرد و b نفر از این افراد نیز سایر

شهروندان لایق دریافت هدیه باشند و هر یک ۲۷ پوند هدیه بگیرند.

با توجه به این که فقط $\frac{1}{6}$ مدیران لایق و فقط نصف شهروندان عادی

هدیه‌ی خود را قبول کرده‌اند و با توجه به مجموع پولی که پانتر داده

است، به معادله‌های زیر می‌رسیم:

اسم وبگاه: Free Math Help

در صفحه اصلی این وبگاه، قسمتی وجود دارد که کاربر می‌تواند با ارائه سوالات و مسائلی از جبر به دریافت پاسخ آن‌ها به صورت گام‌به‌گام نائل آید. در ضمن، یکی از ویژگی‌های این وبگاه، ارائه یک مسئله روزانه به همراه پاسخ آن برای کاربر است.

صفحه اصلی وبگاه Free Math Help، دربرگیرنده عنوان‌های زیر است:

- جبر (Algebra)
- هندسه (Geometry)
- مثلثات (Trigonometric)
- حساب دیفرانسیل و انتگرال (Calculus)
- آمار (Statistics)
- موضوعات بیشتر (More Subjects)