

آشنایی با بسته نرم افزاری متمتیکا

دکتر محمدعلی فریبرزى عراقى

عضو هیات علمی گروه ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی

مقدمه

مبحث حسابان از جمله مباحث پایه‌ای و اساسی در ریاضیات دوره دبیرستان است. در کتاب حسابان سال سوم دبیرستان و کتاب‌های ریاضی دوره پیش‌دانشگاهی، مباحث حد، مشتق، انتگرال و کاربردهای آنها مورد بررسی قرار گرفته‌اند. بسته نرم‌افزاری متمتیکا قابلیت بالایی در محاسبه ساده حد، مشتق، انتگرال معین و نامعین توابع دارد. در این قسمت دستورالعمل‌های مربوط به محاسبه حد توابع معرفی می‌شود.

کلیدواژه‌ها:

متمتیکا،
حد چپ و راست،
مجانِب قائم،
مجانِب افقی،
مجانِب مایل،
عدد نپر،
صورت‌های مبهم.

معرفی دستورالعمل L

این دستور با قالب کلی زیر مقدار حد عبارت داخل کروشه را وقتی به . میل کند مشخص خواهد کرد. در این حالت می‌تواند یک عدد یا بی‌نهایت باشد.

L [, عبارت →]

به عبارت دیگر، دستور فوق حاصل $L \rightarrow$ را در صورت وجود، زمانی که عبارت مفروض ضابطه تابع f باشد، مشخص می‌کند. در این دستور حرف L در ابتدای L باید بزرگ تایپ شود. همچنین برای وارد کردن علامت $\rightarrow$ از پنجره $B \rightarrow$ استفاده می‌کنیم و در این پنجره روی علامت $\rightarrow$ کلیک می‌کنیم. برای اجرای این دستور به‌طور هم‌زمان دکمه‌های E را فشار می‌دهیم.

مثال ۱: حاصل $L \rightarrow \frac{5-32}{3-8}$ را به دست آورید.

حل:

L [5-32 3-8 → 2]
20
3

همچنین با به‌کارگیری پنجره I $c M$ و B کلیک روی نمادهای کسر و توان می‌توان عبارت فوق را وارد و حاصل حد را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$L \rightarrow \frac{5-32}{3-8} = \frac{20}{3}$$

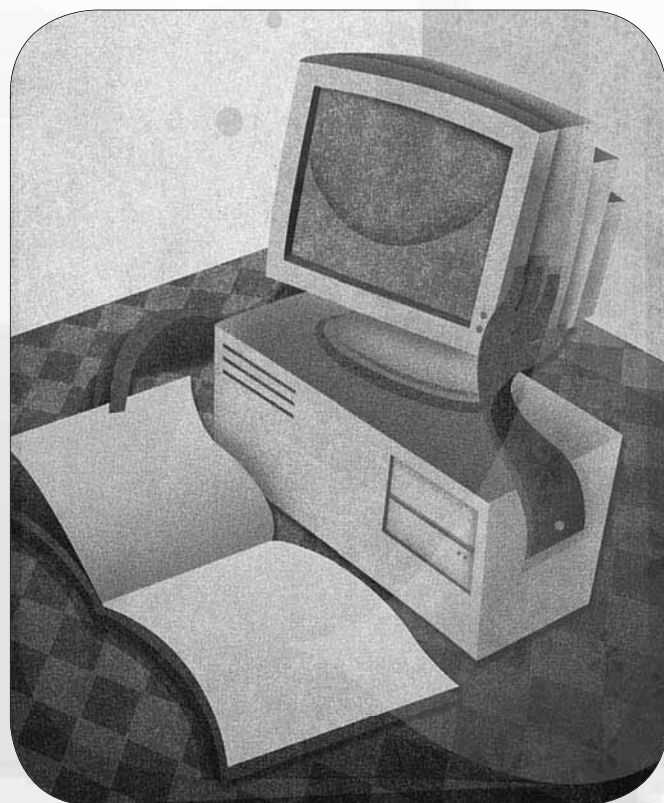
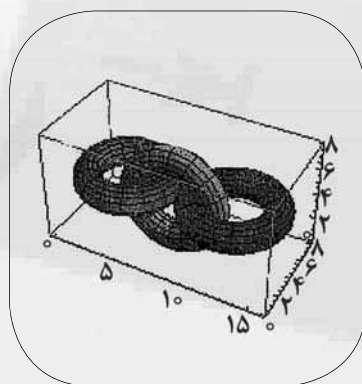
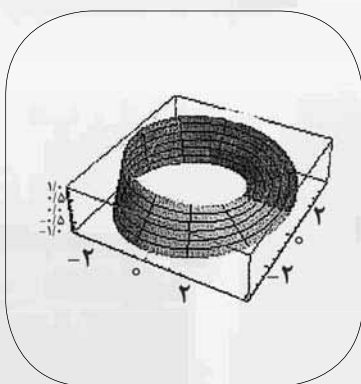
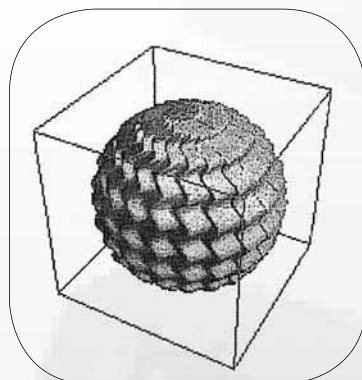
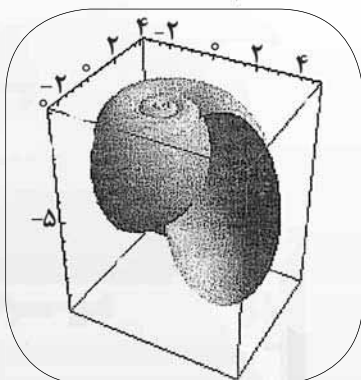
توجه داشته باشیم که در این مثال حالت مبهم $\div$ پدید می‌آید که با استفاده از دستور L حاصل حد پس از رفع ابهام مشخص خواهد شد.

نکته ۱: می‌دانیم یک تابع در یک نقطه دارای حد است، هرگاه مقادیر حد چپ و حد راست تابع در آن نقطه موجود و برابر باشند.

در متمتیکا برای محاسبه حد چپ، عبارت $1 \rightarrow D \ c$ و برای محاسبه حد راست، عبارت $1 \rightarrow D \ c$ در دستورالعمل L اضافه می‌شود:

L [1 → D c , عبارت →]
L [1 → D c , عبارت →]

دستور اول حاصل $L \rightarrow$ و دستور دوم حاصل $L \rightarrow$ را وقتی همان عبارت مفروض باشد، مشخص



مثال ۲: ضابطه تابع علامت به صورت $\begin{cases} 1 & > 0 \\ 0 & = 0 \\ -1 & < 0 \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم.

آیا این تابع در $= 0$ دارای حد است؟

حل: در دستوره‌های زیر، حدود چپ و راست این تابع در

$= 0$ محاسبه شده‌اند:

$$L \left[\begin{array}{ccc} \rightarrow 0 & D & c \rightarrow 1 \end{array} \right]$$

-1

$$L \left[\begin{array}{ccc} \rightarrow 0 & D & c \rightarrow -1 \end{array} \right]$$

1

بنابراین، تابع فوق در $= 0$ دارای حد نیست.

مثال ۲: حاصل $L \frac{-3}{-3} \rightarrow 3^-$ و $L \frac{-3}{-3} \rightarrow 3^+$ را به دست آورید.

حل: در متمتیکا به منظور محاسبه قسمت صحیح یک عدد

حقیقی مثبت از دستور I استفاده می‌شود.

برای مثال $3 = \lceil 3/1 \rceil$ و $2 = \lceil 2/9 \rceil$ I

می‌کند. گفتنی است در متمتیکا مبنای محاسبه حد راست است و نوشتن عبارت $1 \rightarrow D \ c$ در محاسبه حد راست لزومی ندارد. بنابراین، دستور، $\rightarrow$ ، عبارت L مقدار حد راست عبارت مفروض را وقتی به میل می‌کند مشخص خواهد کرد. در این حالت، اگر عبارت در $= 0$ دارای حد باشد، مقدار حاصل از اجرای این دستور همان حد عبارت مفروض در $= 0$ خواهد بود.

مثال ۲: حاصل $L \frac{1}{-} \rightarrow$ و $L \frac{1}{+} \rightarrow$ را به دست آورید.

حل:

$$L \left[\frac{A}{-} \rightarrow 0 \right]$$

1

$$L \left[\frac{A}{-} \rightarrow 0 \ D \ c \rightarrow 1 \right]$$

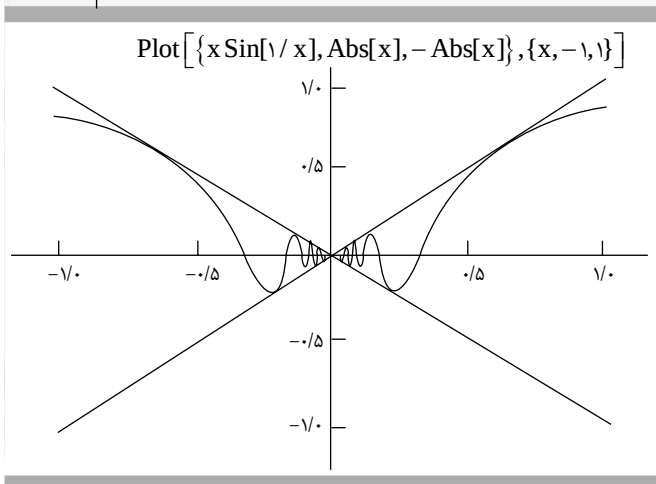
-1

ملاحظه می‌شود که در دستور اول حاصل حد راست برابر

با 1 و در دستور دوم حاصل حد چپ برابر با -1 به دست آمده

است. بنابراین، تابع f با ضابطه $\frac{1}{-}$ در $x=0$ حد ندارد.

برای ملاحظه رفتار تابع f با ضابطه $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ در حومه $x=0$ با استفاده از دستور Plot به طور همزمان تابع فوق و توابع با ضابطه‌های $|x|$ و $-|x|$ در زیر رسم شده‌اند:



نکته ۴: به منظور محاسبه خط مجانب افقی یک تابع باید رفتار تابع را وقتی $x \rightarrow +\infty$ یا $x \rightarrow -\infty$ مورد بررسی قرار داد. برای مثال تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ را در نظر می‌گیریم. برای وارد کردن نماد ∞ می‌توان واژه Infinity را پس از علامت $\rightarrow$ تایپ یا در پنجره Basic Math Input روی علامت ∞ کلیک کرد. حد تابع f وقتی x به $+\infty$ و $-\infty$ میل می‌کند به ترتیب به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\text{Limit}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}, x \rightarrow \text{Infinity}\right]$$

۱

$$\text{Limit}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}, x \rightarrow -\text{Infinity}\right]$$

-۱

به این ترتیب، خطوط $y=1$ و $y=-1$ مجانب‌های افقی این تابع به حساب می‌آیند.

نکته ۵: برای محاسبه حد یک تابع، می‌توان ضابطه تابع مفروض را جداگانه تعریف کرد و سپس حد تابع را بدون نیاز به تایپ ضابطه در داخل کروشه با استفاده از دستور L یافت. به این منظور، ضابطه تابع مفروض را وارد و در انتهای ضابطه

با استفاده از این دستور حاصل حد چپ و حد راست عبارت $\frac{[x]-3}{x-3}$ به صورت زیر به دست می‌آید. توجه شود که حروف I و P باید در این دستور بزرگ تایپ شوند.

$$\text{Limit}\left[\frac{\text{Integer Part}[x]-3}{x-3}, x \rightarrow 3, \text{Direction} \rightarrow 1\right]$$

.

$$\text{Limit}\left[\frac{\text{Integer Part}[x]-3}{x-3}, x \rightarrow 3, \text{Direction} \rightarrow 1\right]$$

∞

در این حالت، حاصل حد راست صفر شده، در حالی که حاصل حد چپ $+\infty$ به دست آمده است. (در متمتیکا $+\infty$ به صورت ∞ اعلام می‌شود). بنابراین، تابع فوق در $x=3$ دارای حد نیست.

نکته ۲: اگر $x=a$ خط مجانب قائم تابع f باشد، می‌توان با محاسبه حد چپ و حد راست f در $x=a$ به این امر پی برد. در این حالت، حاصل این حدود $+\infty$ یا $-\infty$ خواهد بود. برای مثال، می‌دانیم $x=-1$ مجانب قائم تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x+1}$ است. حال اگر حدود چپ و راست این تابع در $x=-1$ محاسبه شود، خواهیم داشت:

$$\text{Limit}\left[\frac{1}{x+1}, x \rightarrow -1, \text{Direction} \rightarrow 1\right]$$

$-\infty$

$$\text{Limit}\left[\frac{1}{x+1}, x \rightarrow -1\right]$$

∞

نکته ۳: در صورتی که $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ قابل محاسبه نباشد و به عبارت دیگر این حد وجود نداشته باشد، با پیغام خاص این امر در صفحه نمایان می‌شود. برای مثال، می‌دانیم $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ وجود ندارد. رفتار این تابع در هسایگی صفر به شکل نوسانی بین -۱ و ۱ مشاهده می‌شود. در این حالت، حاصل حد قابل محاسبه نیست و متمتیکا پیغامی به صورت زیر را آشکار می‌کند:

$$\text{Limit}\left[\sin\left[\frac{1}{x}\right], x \rightarrow 0\right]$$

$$\text{Interval}[-1, 1]$$

ویژگی کران‌دار بودن تابع فوق کمک می‌کند تا حاصل حد

عبارتی چون $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ در $x=0$ موجود باشد و برابر با صفر شود. این حقیقت را با اجرای دستور زیر می‌توان دید:

$$\text{Limit}\left[x \times \sin\left[\frac{1}{x}\right], x \rightarrow 0\right]$$

.

نکته ۶: در مثال اول نمونه‌ای از محاسبه حد در حالت مبهم $\frac{0}{0}$ را ملاحظه کردیم. در متمتیکا تمام حالات مبهم $\frac{0}{0}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ و $\infty - \infty$ قابل بررسی هستند و حاصل حد تابع در هر حالت به دست می‌آید. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۵: حاصل هر یک از حدود زیر را به دست آورید:

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 - \tan x}}$

ب) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x})$

ج) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (x - \frac{\pi}{4}) \tan 2x$

حل:

الف) این مثال نمونه‌ای از حالت مبهم $\frac{0}{0}$ است که حاصل آن عبارت است از:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin[x]}{\sqrt{1 + \tan[x]} - \sqrt{1 - \tan[x]}}, x \rightarrow 0 \right]$$

۱

ب) این مثال نمونه‌ای از حالت مبهم $\infty - \infty$ است که به طور جداگانه حاصل حد را وقتی $x \rightarrow +\infty$ و $x \rightarrow -\infty$ به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x})$$

-۲

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x})$$

۲

ج) این مثال نمونه‌ای از حالت مبهم $0 \times \infty$ است که حاصل آن عبارت است از:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left[\tan[2x] \times (x - \frac{\pi}{4}), x \rightarrow \frac{\pi}{4} \right]$$

$-\frac{1}{2}$

مثال ۶: با استفاده از دستورالعمل $\lim$ می‌توان حاصل صورت‌های مبهم نمایی نظیر $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ را نیز به دست آورد. می‌دانیم $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ ؛ این حقیقت را می‌توان با محاسبه حد این تابع به صورت زیر در متمتیکا مشاهده کرد. با اجرای دستور $\lim$ حاصل حد به صورت e (عدد نپر) در سلول خروجی درج می‌شود:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x, x \rightarrow \infty$$

e

علامت $\frac{0}{0}$ را درج می‌کنیم. سپس در خط بعدی دستور $\lim$ را تایپ می‌کنیم. در این حالت، داخل کروشه فقط $f[x]$ تایپ می‌شود. فرض کنید که می‌خواهیم مجانب‌های افقی و قائم تابع هموگرافیک f با ضابطه $f(x) = \frac{2x+1}{3x-4}$ را به دست آوریم. در این حالت، باید حاصل حد تابع f را وقتی $x \rightarrow \infty$ بررسی کنیم هم‌چنین رفتار تابع f را در همسایگی ریشه مخرج یعنی $x = \frac{4}{3}$ بررسی می‌کنیم. نتایج در زیر مشخص شده‌اند.

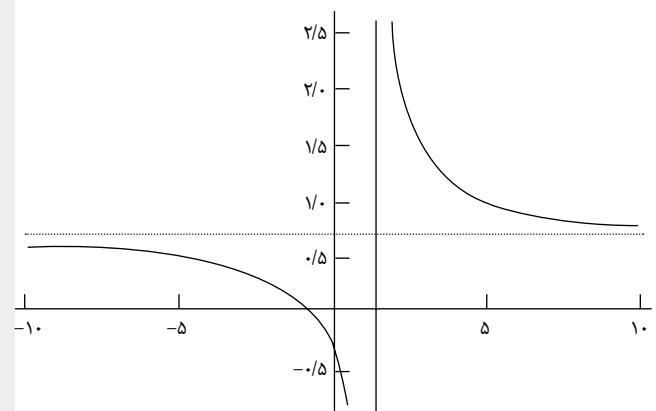
$$f[x] = \frac{2x+1}{3x-4};$$

$$\lim[f[x], x \rightarrow \infty]$$

$\frac{2}{3}$

$$\lim\left[f[x], x \rightarrow \frac{4}{3}\right]$$

$$\text{Plot}\left[\left\{f[x], x = \frac{4}{3}\right\}, \{x, -10, 10\}\right]$$



به‌منظور اجرای دستورالعمل‌های فوق ابتدا باید سلول حاوی

ضابطه تابع f با فشار هم‌زمان دکمه‌های Shift+Enter اجرا

شوند. سپس دستورهای بعدی مربوط به محاسبه $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ و

$\lim_{x \rightarrow \frac{4}{3}} f(x)$ اجرا شوند. دستور Plot نیز برای مشاهده منحنی

تابع f و خطوط مجانب‌های آن در یک شکل اجرا شده است. در

این مثال، خط $x = \frac{4}{3}$ مجانب قائم و خط $y = \frac{2}{3}$ مجانب افقی

تابع f به حساب می‌آیند.

نکته ۸: حالت سننتی نمایش حد تابع f وقتی $\rightarrow$ را می توان با اجرای دستور زیر مشاهده کرد:

$$L \quad [\quad \rightarrow \quad] \quad T$$

$$L \rightarrow$$

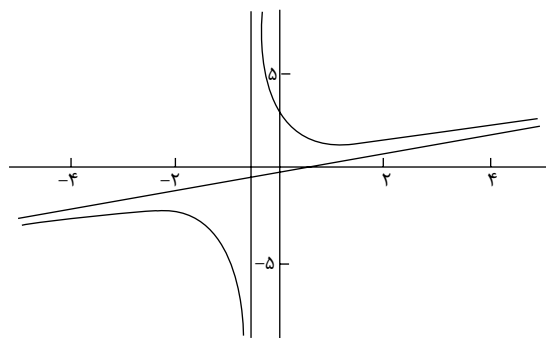
با اجرای این دستور در سلول خروجی عبارت $L \rightarrow$ مشخص می شود که همان صورت رایج نمایش حد تابع f وقتی $\rightarrow$ است. در این حالت هر ضابطه ای جای قرار گیرد و هر مقداری به نظیر شود، در نمایش رایج مذکور جایگزین می شود.

نکته ۹: با استفاده از دستور L می توان مجانب های مایل یک تابع مفروض را در صورت وجود یافت. می دانیم اگر خط مجانب مایل تابع باشد، ضرایب و به صورت زیر به دست

$$\text{می آیند: } = L_{\rightarrow \infty} - \text{ و } = L_{\rightarrow \infty}$$

برای مثال، مجانب مایل تابع با ضابطه $\frac{2+3}{2+1}$ را به صورت زیر به دست می آوریم. در این حالت، حاصل حدود به و تخصیص داده شده و در دستور با معلوم بودن و به طور هم زمان نمودار تابع و خط مجانب مایل آن در بازه $[-5, 5]$ رسم شده است. توجه شود که این تابع مجانب قائم $= \frac{-1}{2}$ را نیز دارد.

$$\begin{aligned} &= \frac{2+3}{2+1} \quad 2+1 \\ &= L \quad [\quad \rightarrow I \quad] \\ &\frac{1}{2} \\ &= L \quad [\quad - \quad \rightarrow I \quad] \\ &-\frac{1}{4} \\ &[\{ \quad + \} \{ -5 \ 5 \}] \end{aligned}$$



در زیر مثال هایی از حالات مبهم نمایشی مطرح و اجرا شده اند:

مثال ۷: حاصل $L_{\rightarrow \infty} \frac{1}{2}, L_{\rightarrow \infty} \frac{1}{2}, L_{\rightarrow \infty} \frac{1}{2}$ و $L_{\rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}$ را بیابید.

حل:

$$(\frac{\infty}{\infty} \text{ حالت مبهم})$$

$$L \rightarrow I$$

$$\frac{1}{2}$$

$$(\text{حالت مبهم} :)$$

$$L \rightarrow 0$$

$$\frac{1}{2}$$

$$(\text{حالت مبهم} :)$$

$$L \rightarrow 0$$

$$0$$

$$(\text{حالت مبهم} : \infty)$$

$$L \left[T \rightarrow \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\frac{1}{2}$$

$$(\text{حالت مبهم} : \infty)$$

$$L \left[\frac{2+3}{2+1} \rightarrow 1 \right]$$

$$\frac{2}{2}$$

$$(\text{حالت مبهم} : \infty)$$

$$L \left[1+ \rightarrow 0 \right]$$

$$\sqrt{}$$

توجه می کنیم که در محاسبه حد راست نیازی به تایپ عبارت $D \rightarrow c$ نیست و در متمتیکابه صورت حد راست محاسبه می شود.

مثال ۸: حاصل $L_{\rightarrow \pm \infty} \frac{1}{2} +$ را بیابید.

حل:

$$L \left[E + 1 \rightarrow \infty \right]$$

$$e$$

$$L \left[E + 1 \rightarrow -\infty \right]$$

$$1$$

منابع.....

۱. کتاب حسابان سال سوم آموزش متوسطه ۱۳۸۹
 ۲. کتاب حسابان دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی، ۱۳۸۹
- M c
E D
c
Mc G H

مثال ۹: مقدار a را طوری بیابید که تابع f با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 1}{3x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

پیوسته باشد.

حل: در این حالت باید حاصل حد تابع f وقتی $x \rightarrow 0$ وجود

داشته باشد و برابر با $\frac{1}{3}$ شود. لذا $a = \frac{1}{3}$

$$L \left[\frac{x^2 + x - 1}{3x} \rightarrow 0 \right]$$

$$\frac{1}{3} + L - 2$$

مثال ۱۰: حاصل $L \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} \right]$ را بیابید.

حل:

$$L \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} \right] = L \left[\frac{1}{x} \right] - L \left[\frac{1}{x-1} \right] = -1 - (-1) = 0$$

$$L \left[\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{x} \rightarrow 0 \right]$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ملاحظه می کنیم که حاصل حد یک عبارت در حالت پارامتری هم در متمتیکا قابل محاسبه است. در این مثال متغیر و یک ثابت مفروض (با فرض $x > 0$) در نظر گرفته می شود. در این حالت، حاصل حد یعنی $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ همان مشتق تابع با ضابطه $\sqrt{x}$ در است. در قسمت بعد دستورالعمل های مربوط به محاسبه مشتق در متمتیکا معرفی خواهند شد.

اسم وبگاه:

صفحه اصلی این وبگاه دربرگیرنده عنوان های متعدد زیر است که هر یک از این عناوین شامل پیوندها و زیرعنوان های گوناگونی می باشد.

■ کتابها B

■ ریاضی برای کودکان M K

■ بازی های ریاضی M G

■ معلمان T c

■ والدین

■ درس های ریاضی M L

■ تمرین ریاضی M c c

■ لغت نامه ریاضی M D c

■ منابع هندسه/مثلثات

G T c

■ جبر مقدماتی

■ جبر A

■ حسابان مقدماتی/حسابان c c

■ معماها

■ هنر هندسی G A

احسان یارمحمدی