اتحادهای مثلثاتی ۱

برای دانش‌آموزان سال سوم

احمد قندهاری

کلیدواژه‌ها: اتحادهای مثلثاتی، برگشت‌پذیری.

تعریف: هر برابری بین یک یا چند نسبت مثلثاتی که به ازای جمیع مقادیر متغیر یا متغیرهای تعریف شـده در آن همواره برقرار باشد، یک اتحاد مثلثاتی نامیده می‌شود.

روش اثبات اتحادهای مثلثاتی

روش اول: یـک طرف اتحاد مثلثاتی را که شـامل عبارت‌های بزرگ‌تر و مفصل‌تر است با استفاده از فرمول‌ها و روابط مثلثاتی آن‌قدر ساده می‌کنیم تا برابر طرف دیگر اتحاد مسئلهٔ موردنظر شود.

مثال ۱: درسـتی اتحاد $\frac{۱}{\cos^{۴}\alpha}-۱-\tan^{۴}\alpha=۲\tan^{۲}$ را ثابت کنید.

حل: عبارت سـمت چپ را سـاده می‌کنیم تا به عبارت سمت راست برسیم:

$$\text{عبارت سمت چپ}=\frac{۱}{c\ ^{۲}\alpha}^{۲}-۱-\ ^{۴}\alpha=۱+\ ^{۲}\alpha\ ^{۲}-۱-\ ^{۴}\alpha$$

$$\text{عبارت سمت چپ}=۱+\ ^{۴}\alpha+۲\ ^{۲}\alpha-۱-\ ^{۴}\alpha$$

$$=۲\ ^{۲}\alpha$$

روش دوم: فرض می‌کنیم که تساوی اتحاد درست باشد. در این صورت دو طرف تساوی را به کمک فرمول‌ها و روابط مثلثاتی آن‌قدر ساده می‌کنیم تا به دو عبارت برابر برسیم.

مثال ۲: درستی اتحاد $\frac{۲-\ \ ۲\alpha}{۲}=\frac{^{۳}\alpha+c\ ^{۳}\alpha}{\alpha+c\ \ \alpha}$ را ثابت کنید.

حل: فرض می‌کنیم تسـاوی بالا درسـت باشـد. بـرای حل ابتـدا عبـارت $^{۳}\alpha+c\ ^{۳}\alpha$ را بـا اسـتفاده از اتحـاد $^{۳}+\ ^{۳}=\ \ +\ \ \ ^{۲}+\ ^{۲}-$ بسط می‌دهیم.

پس:

$$^{۳}\alpha+c\ ^{۳}\alpha=\ \ \alpha+c\ \ \alpha\ \underbrace{^{۲}\alpha+c\ ^{۲}\alpha}_{۱}-\ \ \alpha c\ \ \alpha$$

$$^{۳}\alpha+c\ ^{۳}\alpha=\ \ \alpha+c\ \ \alpha\ ۱-\ \ \alpha c\ \ \alpha$$

بنابراین داریم:

$$\text{عبارت سمت چپ}=\frac{^{۳}\alpha+c\ ^{۳}\alpha}{\alpha+c\ \ \alpha}=\frac{\alpha+c\ \ \alpha\ ۱-\ \ \alpha c\ \ \alpha}{\alpha+c\ \ \alpha}$$

$$=۱-\ \ \alpha c\ \ \alpha$$

$$\text{عبارت سمت راست}=\frac{۲-\ \ ۲\alpha}{۲}=\frac{۲-۲\ \ \alpha c\ \ \alpha}{۲}$$

$$=\frac{۲\ ۱-\ \ \alpha c\ \ \alpha}{۲}=۱-\ \ \alpha c\ \ \alpha$$

ملاحظه می‌کنیم که پس از ساده کردن عبارت‌های سمت راست و سمت چپ به عبارت‌های برابر رسیدیم.

روش سوم: با نوشتن روابط متناسب و با به‌کارگیری فرمول‌ها و روابط مثلثاتی، صورت اصلی اتحاد را می‌سازیم (این روش در واقع برگشت‌پذیری روش دوم است).

مثال ۳. درستی اتحاد $\frac{۲}{۱-c}=\frac{۱+c}{}+\frac{}{۱-c}$ را ثابت کنید.

حل: به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$۲\ \ \ \ =۲$$

دو طرف را بر $1-\cos x\neq 0$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{2\sin x}{1-\cos x}=\frac{2\sin x}{1-\cos x}$$

حال، عبارت سمت چپ را در $\frac{\sin x}{\sin x}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{\sin x}{\sin x}\times\frac{2\sin x}{1-\cos x}=\frac{2\sin x}{1-\cos x}\Rightarrow\frac{2\sin^2 x}{\sin x(1-\cos x)}=\frac{2\sin x}{1-\cos x}$$

$$\frac{\sin^2 x+\sin^2 x}{\sin x(1-\cos x)}=\frac{2\sin x}{1-\cos x}\Rightarrow\frac{\sin^2 x+(1-\cos^2 x)}{\sin x(1-\cos x)}=\frac{2\sin x}{1-\cos x}$$

حال کسر سمت چپ را تفکیک می‌کنیم:

$$\frac{\sin^2 x}{\sin x(1-\cos x)}+\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\sin x(1-\cos x)}=\frac{2\sin x}{1-\cos x}\begin{cases}1-\cos x\neq 0\\ \Rightarrow \sin x\neq 0\end{cases}$$

$$\frac{\sin x}{1-\cos x}+\frac{1+\cos x}{\sin x}=\frac{2\cos x}{1-\cos x}$$

توجه: این روش معمول نیست، ولی در اتحادهای مثلثاتی مسائلی داریم که راحت‌تر است، از این روش برای اثبات آن‌ها استفاده شود.

حال به حل چند مسئله می‌پردازیم:

مسئلهٔ ۱

درستی اتحاد $(\cot\alpha-1)^2+(\cot\alpha+1)^2=\frac{2}{\sin^2\alpha}$ را ثابت کنید.

حل: به روش اول مسئله را حل می‌کنیم.

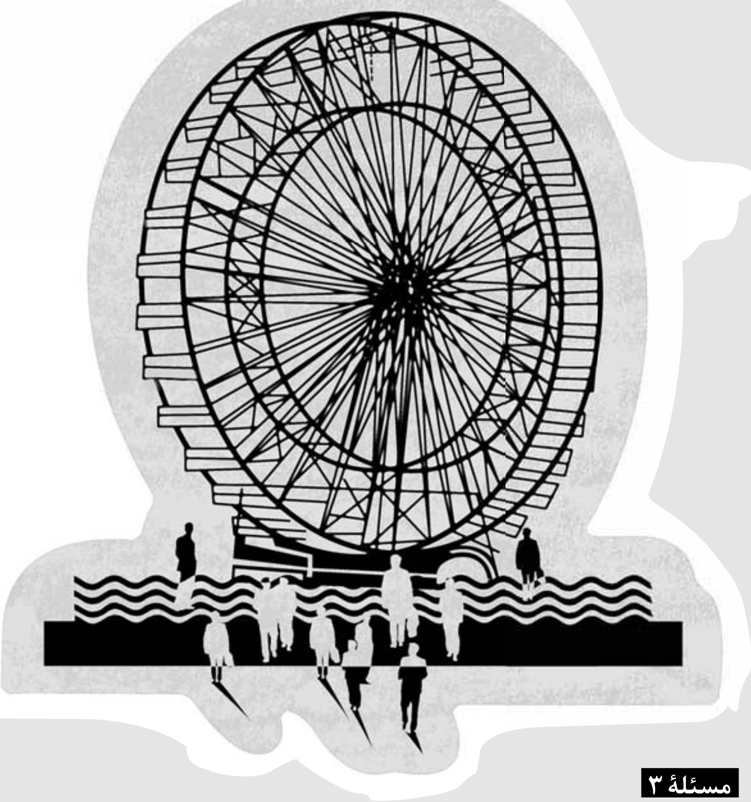
$$\text{عبارت سمت چپ}=(\cot\alpha-1)^2+(\cot\alpha+1)^2$$
$$=\cot^2\alpha-2\cot\alpha+1+\cot^2\alpha+2\cot\alpha+1$$
$$=2\cot^2\alpha+2=2(1+\cot^2\alpha)=2\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}\right)=\frac{2}{\sin^2\alpha}$$

مسئلهٔ ۲

درستی اتحاد $\frac{\sin\theta}{\frac{1}{\sin\theta}-1}+\frac{\sin\theta}{\frac{1}{\sin\theta}+1}=2\tan^2\theta$ را ثابت کنید.

حل:

$$\text{عبارت سمت چپ}=\frac{\sin\theta}{\frac{1-\sin\theta}{\sin\theta}}+\frac{\sin\theta}{\frac{1+\sin\theta}{\sin\theta}}=\frac{\sin^2\theta}{1-\sin\theta}+\frac{\sin^2\theta}{1+\sin\theta}$$
$$=\frac{\sin^2\theta(1+\sin\theta)+\sin^2\theta(1-\sin\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}$$
$$=\frac{\sin^2\theta+\sin^3\theta+\sin^2\theta-\sin^3\theta}{1-\sin^2\theta}$$
$$=\frac{2\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=2\tan^2\theta$$



مسئلهٔ ۳

درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha+\sin^2\alpha.\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

حل:

$$\text{عبارت سمت چپ}=\underbrace{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}_{1}+\sin^2\alpha+\sin^2\alpha.\tan^2\alpha$$
$$=1+\sin^2\alpha(1+\tan^2\alpha)=1+\sin^2\alpha\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)$$
$$=1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

مسئلهٔ ۴

درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\cos\alpha+\cos(120^\circ+\alpha)+\cos(240^\circ+\alpha)=0$$

حل:

$$\text{عبارت سمت چپ}=\cos\alpha+\cos(180^\circ-60^\circ+\alpha)+\cos(180^\circ+60^\circ+\alpha)$$
$$=\cos\alpha+\cos(\pi+\alpha-60^\circ)+\cos(\pi+\alpha+60^\circ)$$
$$=\cos\alpha-\cos(\alpha-60^\circ)-\cos(\alpha+60^\circ)$$
$$=\cos\alpha-\cos\alpha\cos 60^\circ-\sin\alpha.\sin 60^\circ$$
$$-\cos\alpha\cos 60^\circ+\sin\alpha.\sin 60^\circ$$
$$=\cos\alpha-2\cos\alpha.\cos 60^\circ=\cos\alpha-2\left(\frac{1}{2}\right).\cos\alpha$$
$$=\cos\alpha-\cos\alpha=0$$

مسئلهٔ ۵

درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\frac{۲\pi-\alpha \quad \frac{\pi}{۲}+\alpha \; c \; \frac{۳\pi}{۲}-\alpha}{c \quad ۲\pi+\alpha \quad \pi+\alpha}=۱$$

حل:

$$۲\pi-\alpha = - \quad \alpha$$
$$\frac{\pi}{۲}+\alpha = -c \quad \alpha$$
$$c \quad \frac{۳\pi}{۲}-\alpha = c \quad \pi+\frac{\pi}{۲}-\alpha = c \quad \frac{\pi}{۲}-\alpha = \quad \alpha$$
$$\pi+\alpha = \quad \alpha \quad c \quad ۲\pi+\alpha = c \quad \alpha$$

عبارت سمت چپ $= \frac{- \quad \alpha - c \quad \alpha \quad \alpha}{c \quad \alpha \quad \alpha} = \frac{\alpha \quad \overbrace{\alpha \, c \quad \alpha}}{c \quad \alpha \frac{\alpha}{c \quad \alpha}}$

$$= \frac{\alpha}{\alpha}=۱$$

مسئلهٔ ۶

درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\frac{{}^{۲}- {}^{۲} c \quad \pi-\alpha}{\frac{\pi}{۲}-\alpha} + \frac{{}^{۲}+{}^{۲} \quad \frac{\pi}{۲}-\alpha}{c \quad \pi-\alpha} = -۲ {}^{۲}$$

حل:

$$c \quad \pi-\alpha = -c \quad \alpha \qquad \frac{\pi}{۲}-\alpha = c \quad \alpha$$
$$\frac{\pi}{۲}-\alpha = c \quad \alpha$$

عبارت سمت چپ $= \frac{{}^{۲}- {}^{۲} \quad -c \quad \alpha}{c \quad \alpha} + \frac{{}^{۲}+{}^{۲} \; c \quad \alpha}{-c \quad \alpha}$

$$= \frac{- {}^{۲} - {}^{۲} c \quad \alpha - {}^{۲} + {}^{۲} c \quad \alpha}{c \quad \alpha}$$
$$= \frac{- {}^{۲} - {}^{۲} + {}^{۲} + {}^{۲} c \quad \alpha}{c \quad \alpha}$$
$$= \frac{-۲ {}^{۲} c \quad \alpha}{c \quad \alpha} = -۲ {}^{۲}$$

مسئلهٔ ۷

درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$۲۰۰^\circ \quad ۳۱۰^\circ + c \quad ۳۴۰^\circ c \quad ۵۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

حل:

$$۲۰۰^\circ = \quad ۱۸۰^\circ+۲۰^\circ = \quad \pi+۲۰^\circ = - \quad ۲۰^\circ$$
$$۳۱۰^\circ = \quad ۳۶۰^\circ-۵۰^\circ = \quad ۲\pi-۵۰^\circ = - \quad ۵۰^\circ$$
$$c \quad ۳۴۰^\circ = c \quad ۳۶۰^\circ-۲۰^\circ = c \quad ۲\pi-۲۰^\circ = c \quad ۲۰^\circ$$

عبارت سمت چپ $= - \quad ۲۰^\circ - \quad ۵۰^\circ + c \quad ۲۰^\circ \; c \quad ۵۰^\circ$

$$= c \quad ۵۰^\circ c \quad ۲۰^\circ + \quad ۵۰^\circ \quad ۲۰ = c \quad ۵۰^\circ - ۲۰^\circ$$
$$= c \quad ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

مسئلهٔ ۸

درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\frac{\alpha+ \quad \beta}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha- \quad \beta}{\alpha-\beta} = ۲$$

حل:

عبارت سمت چپ $= \frac{\frac{\alpha+\quad\beta}{۱}}{\frac{\alpha+\quad\beta}{۱-\quad\alpha\quad\beta}} + \frac{\frac{\alpha-\quad\beta}{۱}}{\frac{\alpha-\quad\beta}{۱+\quad\alpha\quad\beta}}$

$$= ۱- \quad\alpha\quad\beta + ۱ + \quad\alpha\quad\beta = ۲$$

مسئلهٔ ۹

درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\frac{\tan(\frac{\pi}{۴}+\alpha)-\tan(\frac{\pi}{۴}-\alpha)}{\tan(\frac{\pi}{۴}+\alpha)+\tan(\frac{\pi}{۴}-\alpha)} = \sin ۲\alpha$$

حل:

عبارت سمت چپ $= \frac{\frac{\frac{\pi}{۴}+\quad\alpha}{۱-\quad\frac{\pi}{۴}\quad\alpha} - \frac{\frac{\pi}{۴}-\quad\alpha}{۱+\quad\frac{\pi}{۴}\quad\alpha}}{\frac{\frac{\pi}{۴}+\quad\alpha}{۱-\quad\frac{\pi}{۴}\quad\alpha} + \frac{\frac{\pi}{۴}-\quad\alpha}{۱+\quad\frac{\pi}{۴}\quad\alpha}} \qquad \frac{\pi}{۴}=۱$

$$= \frac{\frac{۱+\quad\alpha}{۱-\quad\alpha} - \frac{۱-\quad\alpha}{۱+\quad\alpha}}{\frac{۱+\quad\alpha}{۱-\quad\alpha}+\frac{۱-\quad\alpha}{۱+\quad\alpha}}$$
$$= \frac{\frac{۱+ \quad {}^{۲}\alpha+۲ \quad \alpha-۱- \quad {}^{۲}\alpha+۲\quad\alpha}{۱-\quad\alpha \; ۱+\quad\alpha}}{\frac{۱+\quad{}^{۲}\alpha+۲\quad\alpha+۱+\quad{}^{۲}\alpha-۲\quad\alpha}{۱-\quad\alpha\;۱+\quad\alpha}}$$
$$= \frac{۴\quad\alpha}{۲+۲ \quad {}^{۲}\alpha} = \frac{۲۲\quad\alpha}{۲۱+\quad{}^{۲}\alpha} = \frac{۲\quad\alpha}{۱+\quad{}^{۲}\alpha} = \quad ۲\alpha$$

مسئلهٔ ۱۰

درستی اتحاد $\sin^۲\beta = ۱-\frac{۱}{۴}\sin^۲ ۲\beta-\cos^۴\beta$ را ثابت کنید

حل:

$$\text{عبارت سمت چپ} = ۱-\frac{۱}{۴}(\sin ۲\beta)^۲-\cos^۴\beta$$
$$= ۱-\frac{۱}{۴}(۲\sin\beta\cos\beta)^۲-\cos^۴\beta$$
$$= ۱-\frac{۱}{۴}(۴\sin^۲\beta.\cos^۲\beta)-\cos^۴\beta$$
$$= ۱-\sin^۲\beta\cos^۲\beta-\cos^۴\beta$$
$$= ۱-\cos^۲\beta(\underbrace{\sin^۲\beta+\cos^۲\beta}_{۱})$$
$$= ۱-\cos^۲\beta = \sin^۲\beta$$

مسئلهٔ ۱۱

الف) نشان دهید که $\cot x-\tan x = ۲\cot ۲x$. ب) درستی اتحاد $\cot a-\tan a-۲\tan ۲a-۴\tan ۴a = ۸\cot ۸a$ را ثابت کنید

حل:

الف:

$$\cot x-\tan x = \frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^۲ x-\sin^۲ x}{\sin x.\cos x}$$
$$\frac{\cos ۲x}{\frac{۱}{۲}\sin ۲x} = \frac{۲\cos ۲x}{\sin ۲x} = ۲\cot ۲x$$

ب): با استفاده از قسمت الف عبارت سمت چپ برابر است با:

$$\underline{\cot a-\tan a}-۲\tan ۲a-۴\tan ۴a$$
$$= ۲\cot ۲a-۲\tan ۲a-۴\tan ۴a$$
$$= ۲(\underline{\cot ۲a-\tan ۲a})-۴\tan ۴a$$
$$= ۲(۲\cot ۴a)-۴\tan ۴a = ۴(\cot ۴a-\tan ۴a) = ۴(۲\cot ۸a)$$
$$= ۸\cot ۸a$$

مسئلهٔ ۱۲

با فرض $۰ < a < \pi$، ثابت کنید

$$\frac{۱+\sin a+\cos a}{۱+\sin a-\cos a} = \cot\frac{a}{۲}$$

حل:

$$\text{عبارت سمت چپ} = \frac{(۱+\cos a)+\sin a}{(۱-\cos a)+\sin a} = \frac{(۲\cos^۲\frac{a}{۲})+۲\sin\frac{a}{۲}\cos\frac{a}{۲}}{(۲\sin^۲\frac{a}{۲})+۲\sin\frac{a}{۲}\cos\frac{a}{۲}}$$
$$= \frac{۲\cos\frac{a}{۲}(\cos\frac{a}{۲}+\sin\frac{a}{۲})}{۲\sin\frac{a}{۲}(\sin\frac{a}{۲}+\cos\frac{a}{۲})} = \frac{\cos\frac{a}{۲}}{\sin\frac{a}{۲}} = \cot\frac{a}{۲}$$

مسئلهٔ ۱۳

ثابت کنید $\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha = ۱-\frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲\alpha$

حل:

داریم:

$$a^۴+b^۴ = (a^۲+b^۲)^۲-۲a^۲b^۲$$
$$\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha = (\underbrace{\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha}_{۱})^۲-۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha$$
$$= (۱)^۲-۲(\sin\alpha.\cos\alpha)^۲ = ۱-۲(\frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha)^۲$$

پس:

$$\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha = ۱-۲(\frac{۱}{۴}\sin^۲ ۲\alpha)$$
$$\Rightarrow \boxed{\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha = ۱-\frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲\alpha}$$

مسئلهٔ ۱۴

ثابت کنید $\sin^۶\alpha+\cos^۶\alpha = ۱-\frac{۳}{۴}\sin^۲ ۲\alpha$

حل:

داریم:

$$a^۶+b^۶ = (a^۲+b^۲)(a^۴+b^۴-a^۲b^۲)$$
و $$a^۴+b^۴ = (a^۲+b^۲)^۲-۲a^۲b^۲$$
$$\sin^۶\alpha+\cos^۶\alpha = (\underbrace{\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha}_{۱})(\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha-\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha)$$
$$= \sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha-\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha$$
$$= (\underbrace{\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha}_{۱})^۲-۲\sin^۲\alpha.\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha.\cos^۲\alpha$$
$$= (۱)^۲-۳\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha = ۱-۳(\sin\alpha.\cos\alpha)^۲$$
$$= ۱-۳(\frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha)^۲ = ۱-\frac{۳}{۴}\sin^۲ ۲\alpha$$

پس:

$$\boxed{\sin^۶\alpha+\cos^۶\alpha = ۱-\frac{۳}{۴}\sin^۲ ۲\alpha}$$