

آهنگ آنی و کمیت‌های وابسته

برای دانش آموزان سال
سوم و چهارم

سیمین اکبری زاده
دبیر ریاضی ناحیه یک اراک

تعریف

اگر متحرکی روی یک محور براساس تابع حرکت حرکت کند، سرعت متوسط آن بین دو لحظه t_1 و t_2 برابر با: $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ و سرعت آن در هر لحظه برابر است با v .

کلیدواژه‌ها:

آهنگ آنی،
آهنگ تغییرات،
مشتق و
کمیت‌های
وابسته.

مثال ۱: اتومبیلی با سرعت ثابت ۱۰۰ کیلومتر بر ساعت حرکت می‌کند. راننده با دیدن کودکی در جلوتر، ناگهان ترمز می‌کند ($a = 0$). فاصله طی شده از لحظه ترمز تا توقف کامل از رابطه $v^2 = v_0^2 + 2ax$ $= 100^2 - 50^2$ بر حسب زمان به دست می‌آید. در این صورت، اتومبیل با توقف کامل چند متر می‌پیماید؟

$$v^2 = v_0^2 + 2ax$$

$$\Rightarrow 0 = 100^2 - 50^2 \Rightarrow x = 100$$

حل: زمان توقف، یعنی زمانی که سرعت صفر می‌شود؛ پس
یعنی اتومبیل تا توقف کامل ۵۰ متر می‌پیماید.

تعریف

فرض کنیم دو کمیت مثل A و B داشته باشیم و کمیت A تابعی از کمیت B باشد و این تابع را به صورت $A = f(B)$ نشان دهیم. اگر مقدار کمیت B برابر B_0 باشد و آن را واحد افزایش دهیم، مقدار تابع A از A_0 به A_1 تغییر می‌کند، یعنی مقدار تغییرات تابع A که آن را با ΔA نمایش می‌دهیم برابر است با $\Delta A = A_1 - A_0$ و نسبت افزایش مقدار A به افزایش مقدار B که با نماد $\frac{\Delta A}{\Delta B}$ نمایش می‌دهیم، برابر است با $\frac{\Delta A}{\Delta B}$. این کسر را آهنگ تغییرات متوسط کمیت A به کمیت B در دو مقدار B_0 و B_1 می‌نامند.

حد این کسر در $B = B_0$ را آهنگ یا آهنگ لحظه‌ای کمیت A به کمیت B در B_0 می‌نامند که همان مشتق تابع A در B_0 یعنی $A'(B_0)$ است.

مثال ۲: در تابع با ضابطه $y = \frac{240}{x}$ ، آهنگ آنی تغییر در لحظه $x = 4$ ، چه قدر از آهنگ متوسط تغییر از لحظه ۳ تا ۵ بیش تر است.

حل:

$$y = \frac{240}{x} \Rightarrow y' = -\frac{240}{x^2} \Rightarrow y'(4) = -\frac{240}{16} = -15$$

$$\text{آهنگ متوسط از } x=3 \text{ تا } x=5 = \frac{y(5) - y(3)}{5 - 3} = \frac{\frac{240}{5} - \frac{240}{3}}{2} = -16$$

$$\text{اختلاف} = -15 - (-16) = 1$$



مثال ۳: میزان آب موجود در یک مخزن بر حسب گالن، t دقیقه بعد از آن که تخلیه مخزن شروع شده برابر است با: $t) = 200(30 - t)^2$.
الف) آهنگ خروج آب از مخزن در پایان دقیقه دهم چه قدر است؟ ب) آهنگ متوسط خروج آب از مخزن در خلال ۱۰ دقیقه اول چه قدر است؟

حل: الف) $Q'(t) = 200(-2)(30 - t) = -12000 + 4000t$, $Q'(10) = -8000 \frac{\text{گالن}}{\text{دقیقه}}$

ب) $\frac{Q(10) - Q(0)}{10 - 0} = \frac{80000 - 180000}{10} = -10000 \frac{\text{گالن}}{\text{دقیقه}}$

مثال ۴: محیط هر دایره‌ای تابعی از مساحت آن است. آهنگ تغییرات محیط دایره را نسبت به مساحت آن برای دایره‌ای به مساحت π حساب کنید.

حل: فرض می‌کنیم مساحت و محیط دایره باشد. آهنگ تغییرات محیط دایره نسبت به مساحت یعنی π' برای π مجهول است.
روش اول: ابتدا را بر حسب می‌نویسیم و سپس از طرفین نسبت به مشتق می‌گیریم. داریم:

$$\begin{aligned} \pi &= r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad * \\ \pi' &\Rightarrow 2\pi r' \Rightarrow 2\pi \sqrt{\frac{\pi}{2}} r' \Rightarrow 2\sqrt{\pi} \sqrt{\pi} r' \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به}} r' = 2\sqrt{\pi} \times \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \\ \Rightarrow r' &= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} = 1 \Rightarrow \pi' = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} = 1 \end{aligned}$$

روش دوم: استفاده از قضیه مشتق تابع مرکب:

$$\left. \begin{aligned} \pi &= r^2 \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به}} \pi' = 2\pi r' \\ 2\pi &\xrightarrow{\text{مشتق نسبت به}} \pi' = 2\pi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \pi' = \frac{1}{1} = 1$$

مثال ۵: یک بادکنک کروی با تلمبه‌ای در لحظه $t = 0$ شروع به باد شدن می‌کند. هر ثانیه ۴ سانتی‌متر مکعب هوا وارد بادکنک می‌شود، حداکثر حجمی که این بادکنک تحمل می‌کند 4500π سانتی‌متر مکعب است.

الف) آهنگ تغییرات شعاع بادکنک نسبت به زمان در هر لحظه t چه قدر است؟

حل: با توجه به فرض مسئله بعد از گذشت ثانیه، حجم بادکنک ۴ سانتی‌متر مکعب افزایش می‌یابد $\pi' = 4$. با گذشت زمان، شعاع و مساحت سطح و حجم بادکنک افزایش می‌یابد، یعنی r و π تابعی از هستند. در قسمت الف آهنگ تغییرات نسبت به مجهول است، لذا با کمک فرض $\pi' = 4$ ، ابتدا را بر حسب به دست می‌آوریم و سپس r را با مشتق‌گیری نسبت به محاسبه می‌کنیم.

$$\pi = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \pi' = 4\pi r^2 \Rightarrow r' = \frac{3}{4\pi} \Rightarrow r' = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \times \sqrt{\pi} \quad * \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به}} r' = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \times \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$$

ب) آهنگ تغییرات مساحت سطح بادکنک نسبت به زمان در هر لحظه چه قدر است؟

حل: آهنگ تغییرات نسبت به یعنی π' مجهول است. بنابراین ابتدا با توجه به قسمت π' را بر حسب می‌نویسیم، سپس از طرفین نسبت به مشتق می‌گیریم؛ داریم:

$$\pi = 4\pi r^2 \Rightarrow \pi' = 8\pi r r' \Rightarrow 4\pi r' = \frac{\pi'}{2r} \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به}} r' = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \Rightarrow \pi' = \frac{8\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\pi}} = 4$$

(ج) آهنگ تغییرات شعاع بادکنک نسبت به سطح بادکنک (در هر مقداری از سطح بادکنک) چه قدر است؟

حل: با تغییر سطح بادکنک، شعاع نیز تغییر می کند، یعنی شعاع بادکنک تابعی از مساحت آن است (تابع معکوس). آهنگ تغییرات R نسبت به r مجهول است. بنابراین، ابتدا را برحسب به دست می آوریم، سپس از طرفین نسبت به مشتق می گیریم. داریم:

$$= 4\pi r^2 \Rightarrow r = \frac{1}{4\pi} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\quad} \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به}} r' = \frac{1}{4\sqrt{\pi}\sqrt{\quad}}$$

$$r' = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} = \frac{1}{8\pi} \quad (\text{طبق د})$$

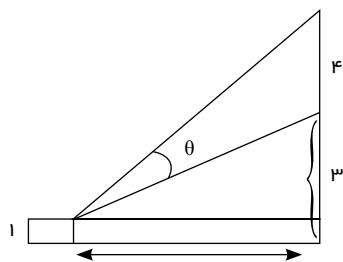
روش دوم: استفاده از قضیه مشتق تابع معکوس

(د) در آخرین لحظه که بادکنک می ترکد، آهنگ تغییرات سطح بادکنک نسبت به شعاع بادکنک چه قدر است؟

حل: با توجه به فرض مسئله، در لحظه ترکیدن $450\pi = 450\pi$ پس $\frac{4}{3}\pi r^2 = 450\pi$ ، لذا $r = 15$. آهنگ تغییرات نسبت به یعنی

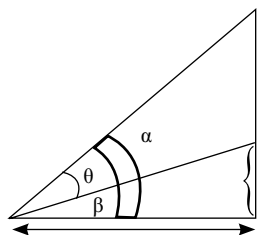
r' برای $r = 15$ مجهول است. پس را برحسب می نویسیم و از طرفین نسبت به مشتق می گیریم:

$$= 4\pi r^2 \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به}} r' = 8\pi \xrightarrow{=15} r' = 120\pi$$



(شکل - الف)

مثال ۶: در اتوبانی یک تابلوی ۴ متری روی یک دکل ۳ متری نصب شده است. راننده یک ماشین که از سطح زمین یک متر فاصله دارد، این تابلو را تحت زاویه θ می بیند. این زاویه تابعی از فاصله ماشین تا دکل و تابلو است. θ را به صورت تابعی از بنویسید. آهنگ تغییرات θ را نسبت به بیابید.



(شکل - ب)

$$\begin{aligned} \theta &= \alpha - \beta = \frac{\alpha - \beta}{1 + \frac{\alpha - \beta}{\beta}} \\ \Rightarrow \theta &= \frac{6 - 2}{1 + \frac{6 - 2}{2}} \Rightarrow \theta = \frac{4}{1 + \frac{12}{2}} = \frac{4}{2 + 12} \\ \Rightarrow \theta &= \frac{4}{2 + 12} \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به}} \theta' = \frac{-4^2 + 48}{2 + 12^2} \end{aligned}$$

حل:

کمیت های وابسته.....

در بحث آهنگ آنی، دو کمیت داشتیم که یکی تابع و دیگری متغیر بود و آهنگ تغییر تابع نسبت به متغیرش مجهول بود. لذا ارتباط بین آن دو را می نوشتیم و از طرفین نسبت به متغیر مشتق می گرفتیم.

در کمیت های وابسته، نه تنها چند کمیت (متغیر) به هم مربوط اند، بلکه همه آن ها تابعی از متغیر دیگری (در اغلب موارد، زمان) هستند. در این گونه مسائل، مقدار بعضی یا همه این متغیرها و نیز آهنگ تغییرات بعضی از آن ها نسبت به زمان در لحظه ای خاص داده می شوند و آهنگ تغییرات یک یا تعداد بیش تری از متغیرها نسبت به زمان در همان لحظه، مجهول است. در چنین مواردی، رابطه ای می نویسیم شامل متغیرهایی که آهنگ تغییراتشان نسبت به زمان در صورت مسئله داده شده یا مجهول است (گاهی مجبوریم برای یافتن چنین معادله ای دو یا چند معادله را با هم ترکیب کنیم)، سپس با توجه به آن که متغیرهای به کار رفته در این معادله تابعی برحسب زمان هستند از طرفین معادله، به کمک نتیجه قضیه مشتق تابع مرکب نسبت به زمان مشتق می گیریم. در نهایت، مفروضات مسئله را جاگذاری می کنیم تا مجهول به دست آید.



۲. در صورت لزوم، مقادیر ثابت را می‌توان قبل از مشتق‌گیری در رابطه بین متغیرها جاگذاری کرد، ولی متغیرها در لحظه خاص و نیز آهنگ تغییرات متغیرها را احتمالاً بعد از مشتق‌گیری جایگزین می‌کنیم.

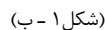
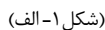
اگر تابعی برحسب باشد و مشتق نسبت به موجود باشد و نیز تابعی برحسب باشد و مشتق نسبت به موجود باشد، آن‌گاه تابعی از است و مشتق نسبت به موجود خواهد بود و داریم:

با توجه به نماد لایب نیتز $\frac{1}{n} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n}$ تساوی بالا را به شکل $\frac{1}{n} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n}$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{\frac{1}{b}} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{\frac{1}{a}} = b$$
$$1 = \sqrt{\frac{\text{مشتق نسبت به}}{\text{بافرض } X \text{ بر حسب}}} \quad ' = ' \times ' \Rightarrow ' = \frac{1}{\sqrt{2}} '$$

$$\begin{array}{c} 3 \\ = c \\ \downarrow \\ \text{عدد} \end{array} \xrightarrow[\text{با فرض } h \text{ بر حسب}]{\text{مشتق نسبت به}} \quad ' = ' \times ' \Rightarrow ' = c ' \quad \begin{array}{c} ' \\ ' \\ ' \end{array}$$

$$C = \frac{C'}{R} \Rightarrow C' = C \times R$$



حل:

II. طبق فرض، مؤلفه با آهنگ — ۱۰ افزایش می‌یابد. از واحد آن مشخص است

که آهنگ افزایش مؤلفه نسبت به زمان ۱۰- است، یعنی:

$$\left\{ \begin{array}{l} = 10 \\ = 3 \end{array} \right. \text{ مفروضات}$$

در لحظه خاص

$\theta' : \text{مجهول} = \text{III}.$

IV. چون θ' را داریم و θ' مجهول است، باید معادله‌ای بنویسیم که در آن θ و به کار رفته باشند.

$$\theta = \text{ارتباط} \Rightarrow \theta = -\frac{2}{1} \quad \text{طبق شکل ۱-ب}$$

V. θ و توابعی برحسب هستند. حال از طرفین نسبت به مشتق می‌گیریم.

$$1 + \theta' \theta' = 1 \times \theta'$$

VI. در لحظه خاص $\theta = 3$ ، مفروضات را در تساوی بالا جاگذاری می‌کنیم؛ خواهیم داشت:

$$1 + 9\theta' = 1 \times 10 \Rightarrow \theta' = 1$$

یعنی پس از گذشت یک ثانیه، زاویه θ یک رادیان افزایش می‌یابد.

توجه: وقتی می‌گویند آهنگ افزایش مؤلفه θ ، ۶ متر در ثانیه است، به این معناست که پس از گذشت یک ثانیه مؤلفه θ ، ۶ متر افزایش یافته است. گاهی به جای این عبارت می‌گویند با سرعت ۶ متر در ثانیه افزایش یافته است، یعنی $\theta' = 6$.

مثال ۲. اگر ذره‌ای روی مسیر $\frac{4}{5} = \frac{2}{1} + \frac{2}{5}$ حرکت کند و مؤلفه آن با سرعت ۶ متر در ثانیه افزایش یابد، هنگامی که ذره در نقطه (۱،۲) قرار دارد:

الف) مؤلفه با چه سرعتی تغییر می‌کند؟

ب) ذره به محور ها نزدیک می‌شود یا دور؟

$$\begin{aligned} & \text{مجهول} \quad \theta' = \text{مفروضات} \quad \begin{cases} \theta' = +6 \\ \theta' = 2 \end{cases} \quad \text{در لحظه خاص} \\ & \text{متغیرها} \quad \begin{cases} \text{زمان} \\ \text{مؤلفه افقی ذره} \\ \text{مؤلفه قائم ذره} \end{cases} \end{aligned}$$

روش اول) الف)

$$\text{ارتباط} \quad 2 + 2\theta' = 4 + 4\theta' - 5\theta'^2 = 0 \quad \xrightarrow{\text{مشتق از طرفین نسبت به}} \quad 2 + 2\theta' = 0$$

$$\xrightarrow{\text{جاگذاری}} \quad 2 + 2\theta' = 0 \Rightarrow \theta' = \frac{-2}{2} = -1 \quad \text{یا} \quad \theta' = \frac{-2}{2} = -1$$

ب) چون $\theta' < 0$ ، یعنی برحسب تابع نزولی است و با افزایش θ ، کم می‌شود. پس ذره به محور ها نزدیک می‌شود.

سخنی با دانش آموزان کم‌دقت

۱. طرف اول مشتق را همیشه θ' می‌نویسند، در حالی که اگر طرف اول تابع باشد، در هنگام مشتق‌گیری طرف اول را θ می‌نویسیم.

۲. مشتق θ' را به صورت $2\theta'$ می‌نویسند، در حالی که باید از قضیه مشتق حاصل ضرب دو تابع استفاده کرد.

۳. از مشتق‌گیری ضمنی استفاده می‌کنند، در حالی که با این روش به دست می‌آید مگر:

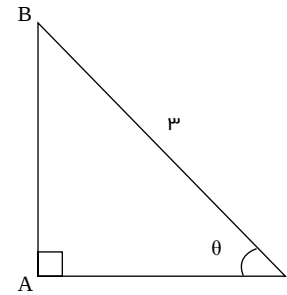
$$\text{روش دوم: برای الف) طبق مشتق‌گیری ضمنی داریم} \quad \theta' = \frac{2}{16-20} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} \quad \text{یا} \quad \theta' = \frac{2}{16-20} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

نیز داریم:

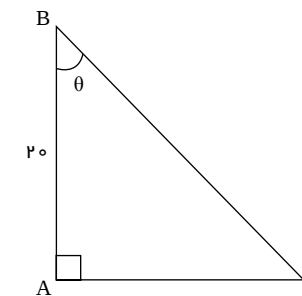
$$\theta' = \frac{2}{16-20} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta' = \frac{2}{16-20} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

مثال ۳: در مثلث قائم‌الزاویه AB ، $\angle A = 90^\circ$ و اندازه وتر ۳ متر است. اگر آهنگ تغییر یک زاویه حاده 0.2 متر در ثانیه باشد، آهنگ

تغییر ضلع مقابل آن زاویه را، وقتی اندازه زاویه $\frac{\pi}{3}$ است، بیابید.



(شکل ۲)



(شکل ۳)

حل:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{زمان } t \\ \text{متغیرها} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{عدد ثابت } BC=3=\text{وتر} \\ \theta'(t) = 0.2 \text{ m/s} \\ \text{در لحظه خاص } \theta = \frac{\pi}{3} \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} \text{مفروضات} \\ \text{زاویه حاده } \theta \\ \text{ضلع مقابل به زاویه } \theta: x \end{array} \right.$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به}} c \quad \theta \times \theta' = \frac{1}{3} \quad \theta' = \text{مجهول}$$

$$\xrightarrow{\text{جاگذاری}} \frac{2}{10} c \quad \frac{\pi}{3} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \theta' = \frac{3}{10}$$

مثال ۴: در مثلث قائم الزاویه که یک ضلع زاویه قائمه ۲۰ واحد است، اگر آهنگ تغییر زاویه حاده θ مقابل به ضلع دیگر زاویه قائمه ۰/۰۴ واحد در ثانیه باشد، در زمانی که وتر ۶۰ واحد باشد، آهنگ تغییر ضلع مقابل به زاویه θ چه قدر است؟

حل:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{زمان} \\ \text{متغیرها} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{عدد ثابت } AB=20=\text{ضلع دیگر زاویه قائمه} \\ \theta' = 0.04 \\ \text{در لحظه خاص } B=60=\text{وتر} \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} \text{مفروضات} \\ \text{یک ضلع زاویه قائمه} \\ \text{زاویه مقابل به آن ضلع } \theta \end{array} \right.$$

$$\theta = \frac{\pi}{20} \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به}} 1 + \theta^2 \theta' = \frac{1}{20} \quad \theta' = \text{مجهول}$$

$$\xrightarrow{\text{جاگذاری و *}} 9 \times \frac{4}{100} = \frac{1}{20} \quad \Rightarrow \quad \theta' = 7.2$$

$$c \quad \theta = \frac{|BA|}{|B|} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3} \quad 1 + \theta^2 \theta' = \frac{1}{20} \quad \theta' = \frac{1}{c} \quad \theta' = \frac{1}{9} = 9 \quad (*) \text{ در لحظه خاص داریم:}$$

ادامه دارد ...

