

مسئله چیست؟ و چگونه می‌توان مسئله را حل کرد؟



محمد هاشم رستمی

اشاره

در شماره قبل قسمت اول مقاله مسئله چیست؟ و چگونه می‌توان مسئله را حل کرد؟ را دیدید. در این مقاله پس از تبیین مسئله چیست؟ الگوی حل مسئله توسط پولیا (در ۴ مرحله) را دیدیم که بعداً درباره آن بیشتر خواهیم نوشت. همچنین به روش حل مسئله به‌ویژه حل مسئله‌های هندسه توسط

عبدالجلیل سجزی ریاضیدان ایرانی سده چهارم هجری پرداختیم و ۷ رهنمود حل مسئله سجزی را دیدیم؛ اینک برای درک عظمت کار انجام شده توسط سجزی از این موارد، که در «رساله سجزی در روش‌های حل مسئله‌های هندسی» توسط انتشارات فاطمی چاپ شده است، نمونه‌هایی از حل مسئله‌ها توسط سجزی را در زیر می‌آوریم.

جمع‌بندی متن از زبان خود سجزی

در خلاصه‌ای که در پی می‌آید، عده‌های داخل کروش (مثل [۲]) ارجاع به بندهایی است که ترجمه رساله با آن‌ها تقسیم‌بندی شده است.

هدف رساله در آسان کردن راه‌های به‌دست آوردن شکل‌های هندسی به گفته خود سجزی چنین است [۱]: برشمردن قوانینی که... به دست آوردن ترسیم‌های هندسی مورد نظر پژوهشگر را بر وی آسان می‌کند. سجزی رساله خود را به یک مقدمه با توضیح کلی درباره قانون‌های خود در [۱۱]-[۲] و سپس مثال‌هایی در [۲۲]-[۵۰] تقسیم کرده است. در [۲۰] وی برای جمع‌بندی بحث «هفت شیوه برای کشف در این

فن» برمی‌شمارد. اکنون این شیوه‌ها را از زبان خود سجزی همراه با اظهارنظرهایی از خودم و نقل‌قول‌هایی از کتاب معروف چگونه مسئله را حل کنیم پولیا می‌آورم.

۱. مهارت و تیزهوشی و توجه به

شرایطی که نظم مناسب (مسئله) ایجاد می‌کند. جنبه‌ی دوم مرتبط است با مرحله نخست در طرح پولیا برای حل مسئله‌ها (مقدمه، ص بیست و چهار):

«اول باید مسئله را بفهمید. مجهول چیست؟ داده‌ها کدام است؟ شرط چیست؟ آیا تحقق یافتن شرط مسئله امکان‌پذیر است؟ آیا شرط مسئله برای تعیین مجهول

کفایت می‌کند؟ یا کافی نیست؟ شرط اضافی چه‌طور؟ یا متناقض است؟»

۲. تسلط عمیق بر قضایا و

مقدمات (مرتبط با شکل). مقایسه کنید با گفته پولیا در ص ۱۰، «اگر از موضوع مورد نظر شناخت کمی داشته باشیم، دریافت درون‌مایه آن دشوار است و در صورتی که هیچ شناختی نداشته باشیم، اصلاً درک درون‌مایه آن امکان‌پذیر نیست. دریافت درست بر شالوده تجربه گذشته و شناختی که از پیش به دست آمده، بنا شده است.»

۳. ... بلکه همراه با آن‌ها (شماره ۲)

از هوش و گمان و شگردها نیز بهره گیرد. عامل اصلی در این فن، استفاده از شگردهاست و نه فقط ذهن (خود) بلکه هم‌چنین اندیشه (ریاضی‌دانان) باتجربه و افراد ماهر و آشنایان به شگردها.

مقایسه کنید با گفته پولیا در ص ۶: «حل کردن مسائل، مثل شناگری، یک مهارت تمرینی و عملی است. هر مهارت

کلیدواژه‌ها:

سجزی، پولیا، ابوسهل کوهی، دوپاره خط متناسب.

عملی را از راه تقلید و تمرین به دست می آوریم. برای آموختن فن شنا از کاری که دیگران با دست و پای خود انجام می دهند تا سر خود را در هنگام شنا بیرون از آب نگاه دارند، تقلید می کنید و سرانجام با تمرین کافی، شنا کردن را فرامی گیرید. برای حل مسائل، باید آنچه را که دیگران می کنند رعایت کنید و سرانجام با حل مسائل می آموزید که چگونه آن ها را حل کنید.»

۴. آگاهی از وجوه مشترک شکل ها، تفاوت ها و ویژگی های خاص آن ها.

در این نحوه برداشت، ویژگی های خاص، مشابهت ها و تضادها بدون احتساب قضایا و مقدمات (فی نفسه در نظر گرفته می شوند). ظاهراً دو نگرش در اینجا مطرح شده است. سجزی در [۷] می افزاید که، بعضی شکل ها در یک یا چند ویژگی خاص اشتراک دارند و بعضی دیگر هیچ وجه مشترکی ندارند و برخی بسته به شکل، تناسب و جنس آن ها وجه اشتراک دور یا نزدیک با هم دارند. واژه ی جنس در اینجا این احتمال را پیش می کشد که سجزی به شیوه ارسطو در صدد دسته بندی فلسفی شکل ها به جنس هایی بود که هریک به گونه هایی تقسیم می شوند. شاید سجزی معتقد بود که اگر دو شکل (یعنی دو مسئله یا دو قضیه) با هم ارتباط فلسفی داشته باشند، ترسیم یا براهین آن ها هم با هم مرتبط اند.

از دیدگاه سجزی، یکی از ویژگی های ذاتی هر مسئله آسانی یا دشواری آن است. وی در [۲۲] اشاره به شکلی می کند که به دست آوردن آن دشوار است. وی می افزاید: این حدس همان

است که قبلاً (یعنی در [۲۰]) آن را معلوم کردن میزان آسانی و دشواری آن ها خواندم؛ اگر در شکلی تعداد مجهول ها زیاد باشد، یافتن آن ها به کمک معلومات دشوار است. پس از جنبه فلسفی، مسئله ها را می توان چنین تقسیم کرد: مسئله های آسان، مسئله های دشوار که به مقدمات زیادی نیاز دارند، و حتی مسئله هایی که بذاته و بالطبع امکان پذیرند، ولی ما به آن ها واقف نیستیم یا به دست آوردن آن ها به علت نبود مقدمات ناممکن است، مثل تربیع دایره [۱۴].

پولیا هم درباره دشواری مسئله صحبت می کند، ولی موضوع را به فلسفه ربط نمی دهد: «تا چه اندازه دشوار است؟... برای پاسخ گفتن به این پرسش، باید بیش تر به «غریزه» و «احساس» متوسل شد تا به استدلال روشن. گاهی هم می توانیم میزان دشواری مسئله ای را دقیقاً روشن کنیم.»

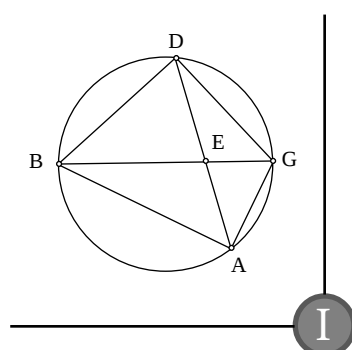
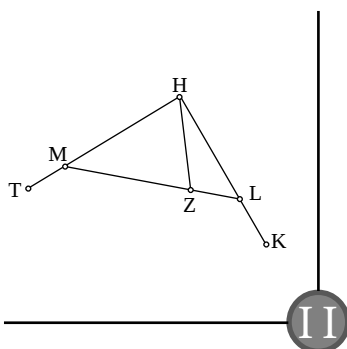
۵. نقل. منظور سجزی از نقل، نوع خاصی از تبدیل مسئله ای به یک مسئله جدید است، چنان که یک یا چند داده از مسئله اصلی در مسئله جدید مجهول به شمار آیند و یک یا چند مجهول از مسئله اصلی در مسئله جدید معلوم فرض شوند. این روش خاص را پولیا ذکر نکرده است.

سجزی مثالی از نقل را در [۲۲] - [۲۴] آورده است. در این جا مثالی از رساله المناظر ابن هیثم (قضیه ۳۴ مقاله پنجم) می آورم. مسئله اصلی و نقل این مسئله را به مسئله جدید بیان می کنم، ولی حل مسئله جدید را که با مقاطع مخروطی انجام می شود، ذکر نمی کنم. مسئله اصلی بدین قرار است. فرض کنید BG و C دو پاره خط راست مفروض اند و A نقطه مفروضی است واقع بر دایره ای که BG قطر آن است (شکل I، مسئله اصلی). می خواهیم خط راست AED را از A چنان رسم کنیم که قطر مذکور را در E و دایره را در D قطع کند چنان که $|DE| = c$.

ابتدا به نکات زیر توجه می کنیم. اگر فرض کنیم $\angle BGA = \gamma$ و $\angle GBA = \beta$ ، زاویه های γ ، β معلوم اند و براساس خاصیتی از دایره داریم $\angle EDB = \gamma$ و $\angle EDG = \beta$.

اکنون مسئله جدید را چنین مطرح می کنیم: پاره خط $HZ = c$ را بکشید و دو خط HT و HK را چنان رسم کنید که طبق شکل II داشته باشیم $\angle ZHT = \gamma$ و $\angle ZHK = \beta$. می خواهیم پاره خط MZL را از نقطه Z چنان رسم کنیم که نقطه M روی HT و نقطه L روی HK باشد و $|ML| = |BG|$.

دو شکل مربوط به مسئله اصلی و مسئله جدید یکی هستند و نقطه های Z،



M, H و L در مسئله جدید متناظرند با نقطه‌های B, D, E و G در مسئله اصلی. در مسئله اصلی، محل BG معلوم است و محل DE خواسته شده است. در مسئله جدید، محل HZ، متناظر با DE، مفروض است و محل ML، متناظر با BG خواسته شده است. پس جای مجهول با یکی از معلومات مسئله عوض شده است.

در این مثال، شکل اصلی و شکل جدید با یکدیگر مساوی‌اند. سجزی در [۲۲]-[۲۴] موردی را ذکر می‌کند که در آن شکل‌های اصلی و جدید مساوی نیستند، بلکه متشابه‌اند. از دیدگاه امروزی، تکیه بر مفهوم تبدیل هندسی از شکل اصلی به شکل جدید امری طبیعی است، اما مفهوم امروزی نگاشت بین دو شکل را نه سجزی ذکر کرده و نه در هیچ اثری از هندسه‌دانان دوره اسلامی آمده است.

روش نقل را ابوسهل کوهی، ابن هیثم و آپولونیوس نیز به کار برده‌اند. تا آن جا که می‌دانم، بیان صریح سجزی از این روش و به کار بردن اصطلاح نقل برای آن از سوی وی در عهد باستان و دوره اسلامی منحصر به فرد بوده است.

۶. تحلیل. این همان روش تحلیل و ترکیب یونان باستان است که پولیا آن را در مقاله «پاپوس» (ص ۹۴-۱۰۰) براساس عبارتی از مقاله هفتم مجموعه ریاضی پاپوس اسکندرانی شرح داده است. این اثر برای ریاضی‌دانان دوره اسلامی شناخته شده نبود، اما روش‌های تحلیل و ترکیب از طریق متن‌های دیگر از آثار یونانی به آثار دوره اسلامی راه یافت. ابراهیم بن سنان، رساله مفصلی به نام رساله در روش تحلیل و ترکیب در مسئله‌های هندسی راجع به آن نوشت. این رساله را، س. سعیدان در مجموعه رسائل ابن سنان منتشر کرده که رساله

مورد بحث از سجزی را نیز در همان مجموعه به صورت پیوست انتشار داده است.

۷. استفاده از شگردها چنان که هرون به کار می‌برد. سجزی در [۱۹] موضوع را با تفصیل بیش‌تر بیان کرده است: هندسه‌دانانی از دوران باستان بوده‌اند که وقتی کشف چیزهای مطلوب برایشان دشوار بود شگردهای ظریفی به کار می‌بردند، مثل آن هندسه‌دان که چیزهای مطلوبش به نسبت مربوط می‌شد و در آن‌ها از اعداد و ضرب استفاده می‌کرد یا آن (هندسه‌دان) که مسئله‌اش اندازه‌گیری (مساحت) یک شکل یا تساوی (بین شکل‌ها) بود و در این کار از ترسیم آن‌ها بر پارچه نازک یا کاغذ و وزن کردن آن‌ها استفاده می‌کرد یا شگردهای مشابه دیگری به کار می‌برد.

احتمالاً سجزی این مطالب را از نوشته‌های باستانی که اکنون مفقود شده‌اند، نقل می‌کند.

پولیا این «شگردها» را ذکر نمی‌کند. نشانه‌ای در دست نداریم از این که سجزی (یا هیچ هندسه‌دان دیگری از دوره اسلامی) کتاب روش‌های ارشمیدس را می‌شناخته است. ارشمیدس در این کتاب، روشی برای تخمین حجم برخی اجسام از طریق تقسیم آن‌ها به برش‌های بسیار نازک و سپس وزن کردن این برش‌ها با یک ترازوی فرضی بیان کرده است. متن یونانی این اثر را هایبرگ (Heiberg) در سال ۱۹۰۶ کشف کرده است.

نکات جالب رساله سجزی به هفت قانون مذکور محدود نمی‌شود و خواننده علاقه‌مند می‌تواند علاوه بر آنچه من آورده‌ام خود نیز شباهت‌های دیگری بین رساله سجزی و کتاب‌های پولیا درباره حل مسئله‌ها بیابد. مقدمه خود را با چند

اشاره کلی در زمینه مقایسه آثار این دو مؤلف به پایان می‌رسانم.

کتاب پولیا با در نظر داشتن مقاصد آموزشی نوشته شده است، ولی سجزی رساله خود را برای پژوهشگران و اهل علم نوشته است. این تفاوت توجه‌کننده بسیاری از جنبه‌های کتاب پولیاست که در رساله سجزی دیده نمی‌شود. برای مثال، بیان مشروح روش‌های حل مسئله که باید به وسیله آموزگار تدریس شود و دانش‌آموز آن‌ها را فرا گیرد.

کتاب پولیا حدود ده قرن بعد از رساله سجزی نوشته شده و در این مدت ریاضیات دستخوش تغییرات زیادی شده است. با این حال، چون پولیا به چیزی می‌پردازد که اکنون ریاضیات مقدماتی خوانده می‌شود و به‌خصوص بر هندسه تأکید می‌کند، موضوع بحث وی با سجزی اشتراک دارد. پولیا در حل مسئله‌های هندسی از نمادهای جبری (x, y و غیره) استفاده می‌کند که در دوره نوزایی پدید آمدند و رنه دکارت در سال ۱۶۷۳ آن‌ها را در هندسه به کار گرفته است. بدیهی

است که سجزی تصویری از این نمادها نداشته است و بنابراین در رساله او فصلی به عنوان «تنظیم و نوشتن معادلات» وجود ندارد.

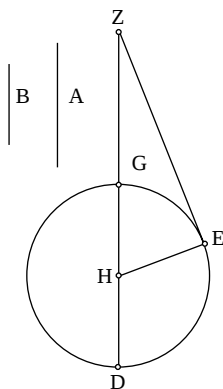
سجزی، برخلاف پولیا، ذکری از مسئله‌های حساب و جبر به میان نیاورده است، هر چند که این گونه مسائل در زمان وی مطالعه می‌شده و لابد روش‌هایی برای حل آن‌ها نیز وجود داشته است.

سجزی در مقایسه با پولیا توجه صریح‌تری به ساختار اساسی ریاضیات دارد. بنابراین توضیح‌های مشروح سجزی

اول باید مسئله را بفهمید.
مجهول چیست؟
داده‌ها کدام است؟ شرط چیست؟ آیا تحقق یافتن شرط مسئله امکان‌پذیر است؟ آیا شرط مسئله برای تعیین مجهول کفایت می‌کند؟ یا کافی نیست؟ شرط اضافی چه‌طور؟ یا متناقض است؟



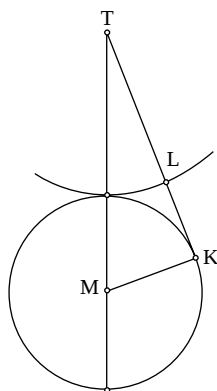
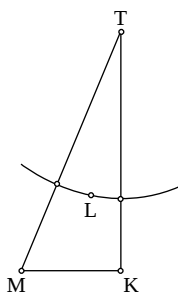
در این شکل، رابطه نزدیکی بین خط‌های ZE, ZG و محیط دایره، و



مسئله‌ای دربارهٔ ترسیم یک شکل

چگونه می‌توانیم دو پاره‌خط متناسب با دو پاره‌خط مفروض بیابیم چنان که یکی از آن‌ها بر دایرهٔ مفروضی مماس باشد و دیگری با دایره بر خورد کند، به‌طوری که اگر آن را درون دایره (مستقیماً) امتداد دهیم از مرکز بگذرد.

به شیوه تحلیل، فرض می‌کنیم که شکل رسم شده است، چنان که به جست‌وجوی مقدماتش برمی‌آییم. مثلاً (در شکل ۱)، فرض می‌کنیم که نسبت مذکور، نسبت A به B باشد و دایره، دایره GD باشد خط‌های ZE و ZG به نسبت A به B و همان پاره‌خط‌های مطلوب باشند- فرض می‌کنیم که (شکل) قبلاً رسم شده و آن را داریم، چنان که قبلاً گفتیم- چنان که اگر ZG درون دایره به سمت D امتداد یابد، GD قطری از آن باشد. سپس می‌پرسیم: از چه ترسیمی و چه مقدماتی شکل آن یافته می‌شود؟



دربارهٔ ساختار استنتاجی ریاضیات [۳۲]
در کتاب پولیا دیده نمی‌شود. علت امر دو
چیز می‌تواند باشد: اولاً سجزی در مقایسه
با پولیا، فرض را بر وجود آشنایی کم‌تری
با ریاضیات می‌گذارد.

ثانیاً چون مخاطبان سجزی اهل علم بودند، وی توجه بیش‌تری به رویکرد اصل موضوعی نسبت به ریاضیات، چنان‌که به‌وسیلهٔ اقلیدس بیان شده، داشته است. پولیا کتابش را برای آموزگاران و دربارهٔ نوع غیررسمی‌تری از ریاضیات که در دبیرستان‌های امروزی تدریس می‌شود، نوشته است.

کتاب چگونه مسئله را حل کنیم
پولیا متن کوتاهی است، ولی او کتاب
پرچم‌تری در ۶۸۶ صفحه (فارسی) با
عنوان خلاقیت ریاضی نوشته است. این
کتاب برای درک، فراگیری و آموزش حل
مسئله نوشته شده و شامل مطالب خیلی
بیش‌تری از رسالهٔ سجزی است.

به نظر من، با در نظر گرفتن فاصله زمانی عظیم بین پولیا و سجزی، موارد همسانی بین آن‌ها خیلی چشمگیرتر از تفاوت‌های آن‌هاست. بی‌شک پولیا از دانستن این‌که ده قرن پیش از وی یک ایرانی به همان مطالب مورد توجه وی پرداخته است، بسیار ذوق‌زده می‌شد. در خاتمه این پیشگفتار قطعه‌ای از مقدمه چگونه مسئله را حل کنیم پولیا را نقل می‌کنم که در مورد رساله سجزی نیز صادق است: «آری، ریاضیات دو چهره دارد، علم دقیق اقلیدس است، ولی چیز دیگری نیز هست. ریاضیاتی که به شیوه اقلیدس معرفی می‌شود، علمی نظام‌مند و قیاسی با استنتاجی است. ولی ریاضیات در حال ساخته شدن، همچون علمی آزمایشی و استقرایی به نظر می‌رسد. هر دو جنبه به اندازه خود ریاضیات عمر دارد و قدیمی است؛ ولی جنبه دوم از یک لحاظ جدید است. ریاضیات در حال تکوین و

بین زاویه Z و کمان GE وجود ندارد. بنابراین به گمان و ذهن نیز متوسل می‌شویم و ترسیم آن را به کمک نقل انجام می‌دهیم، زیرا چنان که گفتیم این روش، به دست آوردن شکل‌های دشوار را آسان می‌کند.

پس می‌گوییم: چگونه می‌توانیم پاره‌خط‌های ZG و ZE را طوری در این شکل بگذاریم که اگر دایره‌ای رسم شود، بر ZE مماس شود و با ZG برخورد کند؟ این کار تنها با فرض معلوم بودن (مقدار) زاویه Z ممکن است. پس باید در پی یافتن زاویه Z باشیم، اما یافتن آن فقط با جست‌وجوی چیز دیگری از همان جنس یعنی زاویه ممکن است. چگونه می‌توانیم (این را) از ترکیب [قرار دادن] دو خط ZG و ZE یا ZE و ZH یا ZE و ZD جست‌وجو کنیم، زیرا در این شکل نمی‌توانیم (این زاویه را) از ترکیب [قرار دادن] خط دیگری بجویم. در این جاست که باید گمان و ذهن را به کار گیریم. اگر E را (با خط راست) به G وصل کنیم یافتن آن (زاویه) آسان نمی‌شود و چه‌بسا که از این طریق نتوان آن را یافت، زیرا زاویه‌هایی که در این جا ایجاد می‌شوند در این شکل هم با این مقدمات مجهول‌اند. پس E را به H وصل می‌کنیم. از این جا دریافته‌ایم که از این سه زاویه، زاویه E معلوم است. سپس باید شکل مثلث ZEH را از ترکیب [قرار دادن] پاره‌خط‌ها و زاویه‌ها بیابیم.

اکنون با یافتن این‌ها (یعنی با این برداشته‌ها)، (حل) مسئله دیگری را جست‌وجو می‌کنیم. اگر این مسئله (تازه) را یافتیم مسئله (اصلی) به کمک آن حل می‌شود (مسئله تازه این است که: شکل مثلث ZEH چنین مشخص می‌شود: این مثلث قائم الزاویه است که نسبت یکی از ضلع‌هایش به وتر منهای ضلع دیگر، نسبت مفروضی است. پس با استفاده از روشی که اکنون به کار بردیم مسئله اول به این

مسئله تحویل شده است، برای آن که جواب خواسته شده در مسئله (اول) را می‌دهد.

پس فرض می‌کنیم مثلث به صورت عادی رسم شده است (شکل ۲): مثلث TKM قائم‌الزاویه است و زاویه قائمه آن K است، اما NM برابر است با KM و نسبت TN به TK مثل نسبت B به A است. در این جا باید مهارت و ذهن را به کار گرفت، زیرا هربار که (حل) مسئله اولیه (یعنی جدیدی) را جست‌وجو می‌کنیم، باید ذهن و گمان را به کار گیریم نه معلوماتمان را.

باید بپرسیم چگونه N را اختیار کنیم تا نسبت TK به TN مثل نسبت A به B باشد. KM را به طور نامحدود امتداد می‌دهیم، سپس TL را در ذهن خود (طوری) رسم می‌کنیم (که) اگر آن را تا خط KM امتداد دهیم، تفاضل بین پاره‌خط متحرک TL و امتداد آن تا خط KM برابر باشد با پاره‌خط بین نقطه K و نقطه اتصال واقع بر خط KM. پس این جا مسئله‌ای دوجوهلی داریم.

پس دایره‌ای رسم می‌کنیم به مرکز T و به شعاع TL. زیرا فرض کردیم پاره‌خط TL حول نقطه T حرکت می‌کند، چنان که می‌توانیم مطمئن باشیم سر L از پاره‌خط TL در حرکت فرضی خود همیشه بر محیط دایره واقع می‌شود. اما شکل مثلث جلوی ماست، چنان که هنگام ترسیم آن را به صورت درست می‌بینیم. مرکز دایره‌ای را می‌خواهیم که (آن مرکز) روی هر دو خط TM و KM واقع باشد. در این جا به کارگیری حدس و ذهن به جا خواهد بود.

به علاوه، این کار را تنها به وسیله یک ترسیم اضافی می‌توانیم انجام دهیم. پس ترسیم را به این صورت در نظر می‌گیریم. چگونه TN را تا S امتداد دهیم به صورتی که پاره‌خط KM آن را نصف کند و کل (پاره‌خط) NS دو برابر KM باشد. پس

مسئله را به شکل دیگری بدل می‌کنیم و آن، چنین است (شکل ۳):

سپس قدری در این باره تأمل می‌کنیم و طبق معمول تصور می‌کنیم مقصود حاصل شده است. یعنی TNS را چنان فرض می‌کنیم که NS دو برابر KM باشد و NM با KM برابر باشد. به مرکز M و به شعاع MK دایره KS را رسم می‌کنیم. روشن است که TK بر این دایره مماس است. ولی (اکنون) به حدس و ذهن متوسل می‌شویم. اگر چنین باشد، باید در این شکل ویژگی خاصی جست‌وجو کنیم که به تماس مربوط باشد؛ (ویژگی خاصی) که اقلیدس در کتاب اصول ثابت کرده است. ساده‌ترین ویژگی این شکل آن است که: مربع TK برابر است با حاصل ضرب TS در TN. به این ترتیب از این خاصیت موجود در این ترسیم کمک گرفتیم (به صورت یک ترسیم فرعی): NS را پاره‌خطی در نظر می‌گیریم، چنان که مربع TK برابر باشد با حاصل ضرب TS در TN. با انجام این کار، بقیه ترسیم آسان خواهد بود. یعنی پاره‌خط‌های TN، TK و TS را یافته‌ایم و آنچه باقی می‌ماند یافتن جای TS است به طوری که KM پاره‌خط NS را نصف کند. بنابراین ابتدا NS را در M نصف می‌کنیم و در ذهن خود TS را حول نقطه T حرکت می‌دهیم (تا) KM پاره‌خط NS را نصف کند. این ترسیم آسان است به این صورت که به مرکز T و به شعاع TM دایره‌ای رسم می‌کنیم که KM را در M قطع کند. TMS را رسم می‌کنیم و کمان SKN را می‌کشیم. پس شکل را چنان که می‌خواستیم ترسیم کردیم.

سپس آن را با استفاده از تشابه و نسبت به دایره مفروض انتقال می‌دهیم و (درستی) آن را ثابت می‌کنیم. این همان چیزی است که می‌خواستیم بیان کنیم.



منابع.....

۱. کتاب چگونه مسأله را حل کنیم. تألیف جورج بولیا
۲. رساله سجزی در روش‌های حل مسائل هندسه، انتشارات فاطمی، ترجمه محمد باقری
۳. مقاله‌هایی از آموزش ریاضیات