

ماهی‌ها در گراف آکواریوم!

اشاره

جلسه قبل، دبیر ریاضیات گسسته مفاهیم اولیه گراف را توضیح داده و قرار بود امروز وارد موضوع جدیدی درباره گراف‌ها شویم. هر جلسه درس با حل چند مسئله شروع می‌شد و بچه‌ها داوطلبانه برای حل مسئله‌ها پای تخته می‌آمدند. مسئله اول شمارشی بود:

بقیه رأس‌ها چند حالت وجود دارد که مشابه قسمت

قبل برابر است با: $2^{\binom{n-1}{2}}$ حالت. پس در کل جواب

قسمت دوم برابر است با: $N_2 = \binom{n-1}{k} \cdot 2^{\binom{n-1}{2}}$.

جواب قسمت آخر هم برابر است با: $N_3 = 2^{\binom{n}{2}-1}$

چون ...

معلم حرف مهسا را قطع کرد و از بچه‌ها خواست که دلیلش را خودشان در دفترشان بنویسند. معلم از مهسا تشکر کرد و برای مسئله دوم از بچه‌ها خواست که بیایند برای حل مسئله. اما صورت مسئله دوم:

مسئله ۲. ثابت کنید در میان هر n نفر، حداقل دو نفر

وجود دارند که تعداد آشنایانشان در میان همان جمع با هم برابر است.

مسئله ۱. چند گراف ساده از مرتبه n و با مجموعه رئوس

$V = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ می‌توان تعریف کرد؟ در چندتای

آن‌ها: $d(V_1) = k$ ؟ در چندتای آن‌ها دو رأس V_1 و V_2 مجاور هستند؟

مهسا در حل مسئله‌های شمارشی قوی‌تر از بقیه بود و داوطلب شد که برود پای تخته.

♦ **مهسا:** بین n رأس، $\binom{n}{2}$ یال می‌توان رسم کرد.

برای هر کدام از این یال‌ها دو انتخاب داریم که در

گراف باشد یا نه. پس تعداد کل گراف‌های ساده

برابر است با: $N_1 = 2^{\binom{n}{2}}$. در قسمت دوم، باید ابتدا

k رأس مجاور V_1 را مشخص کنیم که $\binom{n-1}{k}$

انتخاب وجود دارد. بعد باید ببینیم برای یال‌های بین

می‌کنید که هر ماهی با کدام ماهی‌ها نمی‌تواند در یک‌جا باشد.

جدول ۱. هم‌زیستی ماهی‌ها

A	B	C	D	E	F
B, C	A, C, E	A, B, D, E	C, F	B, C, F	D, E

سؤالی که برای این دوست من مطرح است و از من خواست کمکش کنم، این بود که چند آکواریوم لازم دارد. من اول از شما می‌خواهم که مسئله را با مفهوم گراف مدل‌سازی کنید.

◆ **کیانا:** خانم هر نوع ماهی را در یک آکواریوم نگهداری کنیم؛ خلاص!

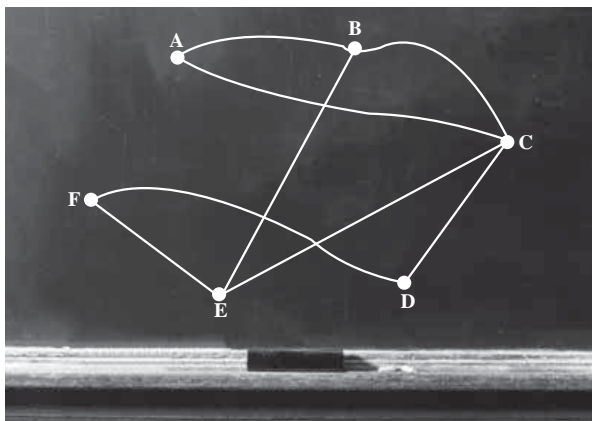
◆ **معلم:** بله، اما این جوری این دوست من باید همه حقوقش را بدهد برای خرید آکواریوم. در نظر داشته باشید که این دوست من هر ماه چند نوع ماهی جدید به مجموع ماهی‌هایش اضافه می‌کند!

◆ **آذر:** بهتر است هر نوع ماهی را با یک رأس در گراف نمایش دهیم. خانم این گراف را با اجازه شما من به نام «گراف ماهی‌ها» نام‌گذاری می‌کنم.

◆ **معلم:** آفرین! در جواب، رأس‌های گراف ماهی‌ها مشخص می‌شود. یال‌ها چی؟

◆ **زهره:** خانم می‌توانیم هر دو ماهی را که با هم مشکل دارند، با یک یال به هم وصل کنیم. من شکل گراف را کشیده‌ام. بیایم روی تخته بکشیم؟

◆ **معلم:** بله، بفرمایید. بعد زهره شکل زیر را روی تخته کشید که نمودار گراف ماهی‌هاست.



خیلی از بچه‌ها توانسته بودند مسئله را با مفهوم گراف، مدل‌سازی کنند، اما راه‌حلشان ناقص بود. آن‌ها حالا باید نشان می‌دادند در هر گراف ساده، دو رأس با درجه یکسان وجود دارد.

مرضیه مسئله را حل کرده بود و دستش را بلند کرد که بیاید پای تخته. معلم پرسید: «از چه راهی حل کردی؟»

و مرضیه که در گروه تئاتر هم فعال بود، شروع کرد به بال زدن! بچه‌ها با این حرکت آشنا بودند (اصل لانه کبوتر!!) و در واقع خانم معلم خودش اولین بار سر کلاس جبر و احتمال از این حرکت استفاده کرده بود. اما راه‌حل مرضیه:

◆ **مرضیه:** درجه هر رأس عددی است (صحیح) بین صفر و $n-1$ و این یعنی n حالت، اما درجه صفر و درجه $n-1$ نمی‌توانند با هم در یک گراف اتفاق بیفتند (چرا؟). در نتیجه $n-1$ حالت برای درجه هر رأس وجود دارد. اما گراف n رأس (کبوتر) دارد. در نتیجه طبق اصل لانه کبوتری دو رأس با درجه برابر وجود دارند.

بنابراین اگر هر نفر را رأس یک گراف در نظر بگیریم و یال‌ها را آشنایی فرض کنیم، لاقل دو نفر هستند که تعداد آشنایانشان (تعداد یال‌ها - درجه رأس) یکسان است. راه‌حل مرضیه خیلی جالب بود و بچه‌ها هنوز درگیر مسئله بودند. خانم **مریم پرور** که پارسال معلم جبر و احتمال ما هم بود، خیلی خوشحال شد که مرضیه توانسته بود از مطالب گذشته استفاده کند. بعد از نشستن مرضیه معلم مسئله دیگری مطرح کرد و گفت که حل این مسئله جایزه دارد.

مسئله ۳. ثابت کنید که تنها دو گراف از مرتبه n وجود دارند که در آن‌ها دقیقاً دو رأس با درجه برابر وجود دارد و این دو گراف مکمل یکدیگر هستند.

خانم **مریم پرور** بعد از مکثی کوتاه از ما خواست که اول این دو گراف را پیدا کنیم. می‌خواستیم برویم سراغ تمرین بعدی که معلم نگاهی به ساعتش کرد و از بچه‌ها خواست که ادامه تمرین‌ها را بگذارند برای جلسه بعد. حتماً می‌خواست درس را شروع کند. چون نیم ساعت بیشتر از وقت کلاس نمانده بود.

◆ **معلم:** بچه‌ها امروز می‌خواهیم گراف‌ها را رنگ کنیم!

◆ **پروانه:** خانم این موضوع که تو کتاب نیست!

◆ **معلم:** بله، ولی موضوع جالبی است و شاید پاسخ این سؤال شما باشد که نظریه گراف کجاها کاربرد دارد. یکی از دوستان من علاقه زیادی به ماهی‌ها دارد و در خانه خود انواع ماهی‌ها را نگهداری می‌کند. او به تازگی شش نوع ماهی خریده است که آن‌ها را با حرف‌های A, B, ..., و F نام‌گذاری می‌کنیم. اما او نمی‌تواند همه این ماهی‌ها را در یک آکواریوم جای دهد. چون بعضی از آن‌ها طعمه دیگران خواهند شد. در جدول ۱ مشاهده

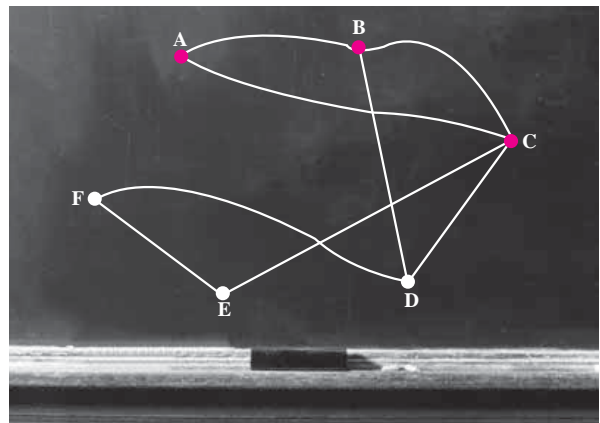
◆ **پریسا:** خانم پس آکواریومها چی شدند؟ مسئله اصلی تعداد حداقل آکواریومها برای نگهداری ماهی هاست که هنوز مشخص نیست.

◆ **معلم:** بله. تا اینجا ما مسئله را با یک گراف مدل سازی کرده ایم. حالا می توانیم مشخص کنیم که هر نوع ماهی (اینجا رأسها) در چه آکواریومی باشد.

◆ **زهرا:** خانم سه نوع ماهی A، B و C در این گراف دوبه دو به هم وصل هستند. پس حداقل سه آکواریوم لازم داریم.

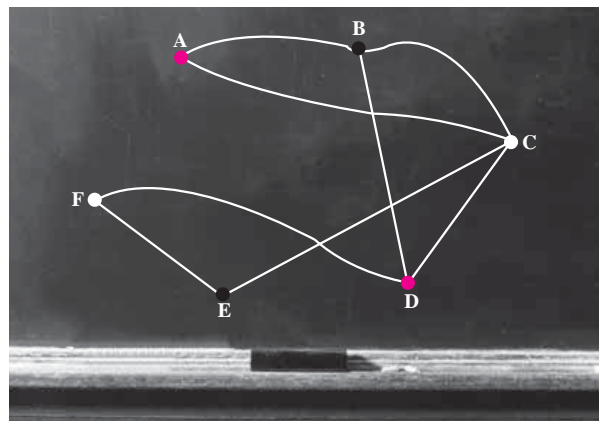
◆ **معلم:** آفرین زهرا. بیا بیاید آکواریومها را با رنگ رأسها مشخص کنیم.

بعد معلم پای تخته رفت و سه رأس A، B و C را با سه رنگ متفاوت رنگ کرد.



◆ **زهرا:** خانم ماهی های نوع D کنار ماهی های نوع B و C نمی توانند باشند. پس بهتره آنها را بریزیم تو آکواریوم آبی!

بچه ها رأس های E و F را هم خودشان رنگ کردند. معلم که دفتر بچه ها را یکی یکی نگاه می کرد، تأیید کرد که همه مسئله را کامل کرده اند. بعد هم رفت پای تخته و رنگ آمیزی رأس های گراف ماهی ها را تکمیل کرد.



◆ **معلم:** پس تعداد حداقل آکواریومها چی شد؟
◆ **تقریباً همه:** سه تا.

◆ **معلم:** بچه ها با رنگ آمیزی رأسها و یال های گراف می توان مسائل جالبی را حل کرد که در اینجا شما یک نوع آن را دیدید. می خواستیم رأس های گراف را با کمترین تعداد رنگ به طوری رنگ کنیم که هر دو رأس مجاور هم رنگ نباشند.

این نوع رنگ آمیزی را معتبر می نامیم و تعداد حداقل رنگ های مورد نیاز برای رنگ آمیزی معتبر گراف G را عدد رنگی G می نامیم. آیا مسئله برایتان جالب بود؟

◆ **بچه ها:** بله خانم.

◆ **من:** خانم «حدس بهزاد» چیست؟ به این موضوع ربطی دارد؟

معلم با تعجب مرا نگاه کرد و بعد پرسید که کجا حدس بهزاد را شنیده ام. پدرم استاد ریاضی دانشگاه بود و چند وقتی بود که از ۵۰ سالگی حدس بهزاد صحبت می کرد. توی خانه ما همه کنجکاو شده بودند که بدانند این حدس ریاضی چیست که هنوز کسی نتوانسته است آن را حل کند. ماجرا را که گفتم، همه فهمیدند که علت سکوت من (که بین بچه ها به گرافیک معروف بودم) در طول این جلسه چه بود!



زنگ خورد و خانم مریم پرور قول داد که در جلسات بعد اگر تستها فرصتی باقی گذاشتند، حدس بهزاد را سر کلاس بگوید؛ شاید یکی از ماها توانستیم آنرا حل کنیم!

پرسش های بیکار جو!

چند دوزنقه متساوی الساقین وجود دارد که طول های اضلاع و اقطار آنها همگی اعداد اول باشند؟

(الف) ۰
(ب) ۱
(ج) ۲
(د) ۳
(ه) بی شمار