مفهوم‌های هندسی و حل مسئله

محمود نصیری

در سلسله مقاله‌های قبلی ساختاری از هندسه را در مورد خط‌ها و پاره‌خط‌ها، مفهوم‌های اولیهٔ هندسه شامل هم‌نهشتی مثلث‌ها، نامساوی‌ها در مثلث و خلاصه‌ای از تبدیل‌های هندسی بررسی کردیم. می‌دانیم اساس ساختار هندسه پاره‌خط‌ها هستند که به کمک آن‌ها مثلث و کلاً چندضلعی را می‌سازیم. اما بعد از پاره‌خط‌ها، مهم‌ترین شکل در هندسهٔ اقلیدسی دایره است. به زبان خیلی ساده، دو عنصر اساسی هندسه پاره‌خط و دایره هستند. در مورد بخش اول تا حدودی مطالبی را بیان کردیم. اکنون برای آنکه این ساختار هندسه گسترش بیشتری پیدا کند، باید بخش دوم آن، یعنی دایره‌ها را نیز بررسی کنیم.

دایره یکی از مهم‌ترین شکل‌های هندسی است که بشر از ابتدا با آن آشنا بوده است. مشاهدهٔ قرص کامل ماه در آسمان و غروب آفتاب در کنار دریا، ذهن بشر را از زمان‌های دور مشغول کرده است. کاربردی‌ترین آن‌ها اختراع چرخ است که تاریخی بسیار دور دارد و احتمالاً بشر به تجربه با کاربرد آن آشنا شده است. از این‌ها که بگذریم، دایره نقش برجسته‌ای را در هندسه ایفا می‌کند. **اقلیدس** از همان ابتدا در ساختن هندسه پاره‌خط‌ها و دایره‌ها را به کار برده است. حتی قضیه‌هایی در مورد دایره و زاویه‌هایی در دایره وجود دارند که اولین بار قبل از اقلیدس، توسط **تالس** مطرح و اثبات شده‌اند. تفاوتی که در ساختار هندسه بین خط‌ها و دایره‌ها وجود دارد این است که خط از مفهوم‌های اولیه و از جملهٔ تعریف‌نشده‌هاست. اما دایره را تعریف می‌کنیم. در این بخش به دایره و ویژگی‌های آن می‌پردازیم. ابتدا دایره را و سپس سه پاره‌خط شعاع، قطر و وتر را در دایره تعریف می‌کنیم. پس از تعریف درون و برون دایره، مفهومی مهم به نام مماس بر دایره را شرح می‌دهیم و ویژگی‌های آن را بیان خواهیم کرد.

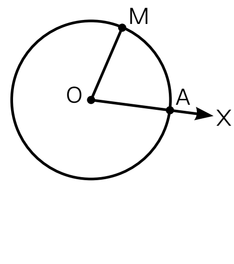
تعریف: نقطهٔ O در صفحهٔ P و عدد حقیقی R مفروض‌اند. مجموعهٔ همهٔ نقطه‌هایی مانند M که از صفحهٔ P و از نقطهٔ O به فاصلهٔ R باشند، شکلی را به وجود می‌آورند که آن را دایره می‌نامیم.

نقطهٔ O را مرکز دایره و عدد حقیقی مثبت R را شعاع دایره می‌نامند. دایره به مرکز O و شعاع R را به صورت $C(O,R)$ نشان می‌دهیم و می‌خوانیم دایرهٔ C به مرکز O و شعاع R.

چون فاصلهٔ M از O برابر R است پس می‌نویسیم: $OM=R$. دایره را به زبان نمادها و مجموعه‌ها به صورت زیر نیز می‌توانیم در صفحهٔ P تعریف کنیم:

$$C(O,R)=\{M\in P \mid OM=R\}$$

برای هر نقطهٔ M روی دایره به مرکز O، $\overline{OM}$ را که یک پاره‌خط است و نه یک عدد، یک شعاع دایره می‌نامیم. و $OM=R$ را که یک عدد حقیقی است اندازهٔ شعاع دایره می‌نامیم.



شکل ۱

درواقع شعاع در دایره به دو معنی به کار می‌رود:

۱. عدد حقیقی مثبت R؛

۲. پاره‌خطی که یک سر آن روی مرکز دایره و سر دیگر آن نقطه‌ای از دایره است.

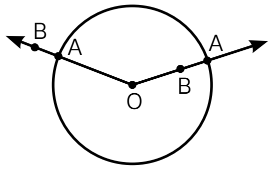
به این جمله‌ها خوب توجه کنید:

- وقتی می‌گوییم شعاع دایره منظور عدد R است.
- وقتی می‌گوییم یک شعاع دایره، منظور یک پاره‌خط است که تعریف کردیم.

پس برای هر نقطه روی دایره یک پاره‌خط در دایره می‌توان رسم کرد که دو سر آن، آن نقطه و مرکز دایره است و این پاره‌خط یک شعاع نظیر آن نقطه است، یا شعاع شامل آن نقطه است.

اگر نیم‌خط $\overrightarrow{OX}$ در صفحهٔ دایره رسم شده باشد که O مرکز دایرهٔ ابتدای این نیم‌خط باشد، آنگاه نقطه‌ای مانند A روی نیم‌خط $\overrightarrow{OX}$ وجود دارد که $OA=R$. پس بنا بر تعریف دایره، نقطهٔ A روی دایره واقع است. بنابراین اولین ویژگی چنین است: «هر نیم‌خط که ابتدای آن مرکز دایره باشد، دایره را در نقطهٔ یکتایی می‌برد.»

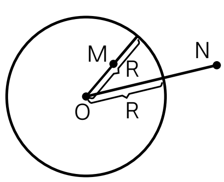
یعنی اگر B هر نقطهٔ دلخواهی در صفحهٔ دایره $C(O,R)$ به غیر از O مرکز دایره باشد، آنگاه نیم‌خط $\overrightarrow{OB}$ دایره را در نقطه‌ای یکتا مانند A می‌برد. درنتیجه اگر در صفحه بی‌شمار نقطه وجود داشته باشد، دایره بی‌شمار نقطه و همچنین بی‌شمار شعاع $\overline{OA}$ دارد.



شکل ۲

درون و بیرون دایره

در شکل ۳ نقطهٔ M درون و نقطهٔ N بیرون دایره هستند. اگر بخواهیم آن‌ها را به زبان ریاضی تعریف کنیم، فکر می‌کنید چگونه باید تعریف کرد؟



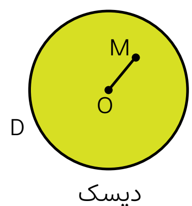
شکل ۳

چه رابطه‌ای بین فاصلهٔ نقطه تا مرکز دایره و R شعاع دایره وجود دارد؟

مسلماً خواهید گفت: $OM<R$ و $ON>R$. بنابراین، اگر دایرهٔ $C(O,R)$ در صفحهٔ P مفروض باشد، هر نقطهٔ M که فاصله‌اش تا O کمتر از R باشد، درون دایره و هر نقطهٔ N که فاصله‌اش تا O بیشتر از R باشد، بیرون دایره است.

مجموعهٔ همه نقطه‌های درون و روی دایره برای ما اهمیت دارند، به همین دلیل آن را یک دیسک یا ناحیهٔ دایره‌ای می‌نامند. پس بهتر است آن را با نمادهای زیر تعریف کنیم:

تعریف: مجموعهٔ همه نقطه‌های درون و روی یک دایره را یک دیسک بسته می‌نامیم و با D نشان می‌دهیم (شکل ۴).



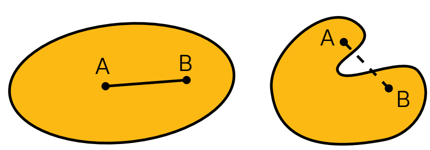
شکل ۴

پس دیسک بستهٔ D مجموعه نقطه‌هایی از صفحهٔ P شامل دایرهٔ $C(O,R)$ است که فاصلهٔ آن‌ها تا مرکز دایره کوچک‌تر یا برابر R باشد:

$$D=\{M\in P \mid OM\le R\}$$

مجموعهٔ نقطه‌های درون و روی دایره را ناحیهٔ دایره‌ای نیز می‌نامند.

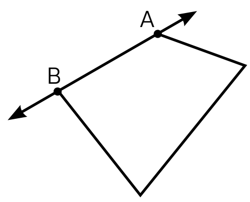
قبلاً مجموعهٔ محدب و همچنین چندضلعی محدب را تعریف کرده‌ایم. مجموعهٔ S را محدب گوییم هرگاه برای هر دو نقطهٔ دلخواه A و B متعلق به آن، همهٔ نقطه‌های پاره‌خط $\overline{AB}$ نیز متعلق به آن باشند. هر مجموعه را که محدب نباشد، غیرمحدب یا مقعر می‌نامند.



شکل ۵. مجموعهٔ غیرمحدب یا مقعر مجموعهٔ محدب

اگر حداقل یک نقطه روی پاره‌خط $\overline{AB}$ وجود داشته باشد که متعلق به S نباشد، آنگاه S محدب نیست.

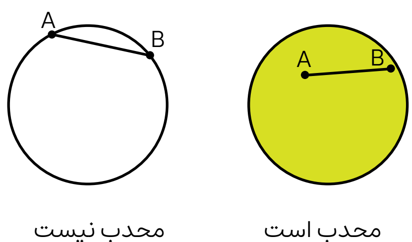
خود نقطه، پاره‌خط، نیم‌خط و خط مجموعه‌هایی محدب‌اند؛ چرا؟ مثلث محدب نیست، اما مجموعهٔ درون مثلث و خود مثلث محدب است. مجموعهٔ محدب را با چندضلعی محدب نباید اشتباه کنیم. در اساس این یک نام‌گذاری مناسب نیست، اما در هر صورت آن را بیان می‌کنیم. خود چندضلعی محدب مجموعهٔ محدب نیست. بیان کردیم که در چندضلعی محدب، همهٔ نقطه‌های چندضلعی به جز نقطه‌های روی هر ضلع، در یک طرف خط شامل آن ضلع واقع‌اند. این را فقط برای یادآوری بیان کردیم.



شکل ۶

اما به بحث دایره برمی‌گردیم. آیا دایره مجموعه‌ای محدب است؟ آیا درون دایره مجموعه‌ای محدب است؟ پاسخ به این دو پرسش به‌طور شهودی دشوار نیست. واضح است که خود دایره مجموعه‌ای محدب نیست. هر دو نقطهٔ دایره را به هم وصل کنیم، به جز این دو نقطه، هیچ نقطهٔ دیگر پاره‌خط $\overline{AB}$ به دایره تعلق ندارد.

اما مجموعه نقطه‌های درون و حتی مجموعه نقطه‌های درون و روی دایره یعنی همان ناحیهٔ دایره‌ای مجموعه‌ای محدب است.



شکل ۷

اکنون می‌خواهیم با توجه به آنچه در مقاله‌های قبلی نشان داده‌ایم و تعریف دایره، مسئله‌هایی را حل کنیم. مسئله‌ای که هدف اصلی محسوب می‌شود، مسئله‌ای است که با پویش رمزینه می‌توانید آن را بخوانید.