

واژه‌های ریاضی

«ساده کردن عبارت»، «تساوی =»

سپیده چمن‌آرا

کلیدواژه‌ها: واژه‌های ریاضی، ساده کردن عبارت، تساوی =.

توجه کنیم که با توجه به محل «=»، خط کسری مقابل علامت =، خط کسری اصلی است؛ ولی صورت و مخرج آن، خودشان عبارت‌های ریاضی هستند و یک عدد طبیعی نیستند که «کسر را ساده کنیم». بنابراین باید نخست عبارت (۱) را محاسبه کنیم و حاصل آن را که احتمالاً یک عدد کسری است، بیابیم و آن کسر را تا حد امکان ساده کنیم. پس در این جا، ساده کردن، شامل محاسبات و ساده کردن کسر حاصل می‌شود که قدری با معنای قبلی تفاوت دارد. بگذارید عملیات زیر را انجام دهیم:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{6-3+4}{6} = \frac{7}{6} = \frac{7}{6} \div \frac{5}{4} = \frac{7}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{28}{30}$$

تا این جا با انجام محاسبات و چهار عمل اصلی، حاصل عبارت

را پیدا کردیم که کسر $\frac{28}{30}$ است. حال این کسر را (به معنای اول)

$$\frac{28}{30} = \frac{14}{15}$$

ساده می‌کنیم:

پس پاسخ سؤال فوق، $\frac{14}{15}$ است.

اما هنوز ماجرا تمام نشده است. زمانی که در پایه‌ی دوم راهنمایی با عبارت‌های جبری آشنا می‌شویم از ما می‌خواهند که عبارت‌هایی مانند عبارت زیر را ساده کنیم:

الف) $x + 2y - 1 + 3x - y =$

ب) $3a - 4b + 2a + b - 7 =$

اما دیگر نه کسری است، نه خط کسری! در چنین عبارت‌هایی، منظور از ساده کردن، جمع یا تفریق جمله‌های مشابه با یکدیگر

است. حال به مثال زیر توجه کنید:

عبارت‌های زیر را ساده کنید:

در این بخش از واژه‌های ریاضی به دو موضوع می‌پردازیم: یکی معنای اصطلاح «ساده کردن عبارت» و دیگری معناهای مختلف علامت: «=».

همه‌ی ما اولین بار اصطلاح «ساده کردن» را در دبستان و در کار با کسرهای مساوی شنیده‌ایم:

«کسرهای زیر را تا حد امکان ساده کنید:

$$\dots, \frac{21}{56}, \frac{3}{15}, \frac{4}{8}$$

و همه به خوبی می‌دانید که «ساده کردن» در این جا، یعنی

یافتن کسری مساوی با کسر موردنظر که بزرگ‌ترین مقسوم

علیه مشترک صورت و مخرج آن، عدد ۱ باشد. یعنی صورت مخرج

آن کسر هم‌زمان به هیچ عددی جز ۱ تقسیم‌پذیر نباشند. حتی در

کتاب ریاضی پایه‌ی اول راهنمایی، تمرین‌هایی به این صورت داریم

که به طور مستقیم به این موضوع اشاره می‌کند:

کسرهای زیر را با استفاده از ب.م.م صورت و مخرج، ساده

کنید:

$$\dots, \frac{121}{99}, \frac{51}{68}$$

اما ساده کردن کسر و یافتن کسرهای مساوی، تنها جایی

نیست که به ما گفته می‌شود: «ساده کنید»!

به مثال زیر توجه کنید:

«عبارت زیر را تا حد امکان ساده کنید:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{2-1+2}{3} = \frac{3}{3} = 1 \quad (1)$$

به ظاهر خط‌های کسری زیادی در این عبارت هست، ولی باید

اما باز به سراغ عبارتهای جبری می‌رویم و از همان مثال‌های بخش قبل استفاده می‌کنیم:

$$x + 2y - 1 + 3x - y = ?$$

در این‌جا، معنای = این نیست که یک حاصل عددی برای عبارت سمت چپ به دست آوریم، بلکه این‌جا باید عبارت جبری را با استفاده از جمع یا تفریق جملات مشابه، ساده‌تر کنیم. پس = در این عبارت به معنای دیگری آمده است و در واقع از آن‌جا که عبارت X و Y و عددی در این عبارت مشابه نیستند، هرگز سمت چپ تساوی با یک عدد برابر نیست.

$$x + 2y - 1 + 3x - y = 4x + y - 1$$

سمت راست تساوی که یک عبارت جبری جدید است.

در عبارت زیر، معنای = چیست؟

$$a + 2b = ?$$

در این‌جا نیز به معنای یافتن یک عبارت جبری ساده‌تر است (که جمله‌های مشابه نداشته باشد). ولی از آن‌جا که a و 2b مشابه نیستند، پس در واقع هیچ عبارت جدیدی جلو مساوی نمی‌توانیم بنویسیم! این، از آن‌هایی است که سمت راستش عبارت ساده‌تری نمی‌توان نوشت.

در تساوی زیر، = به چه معناست؟

$$2x(x^2 - 4y) = ?$$

در این‌جا باید 2x را در عبارت دو جمله‌ای $x^2 - 4y$ پخش کنیم (یعنی با استفاده از خاصیت پخش، ضرب کنیم) و یک دو جمله‌ای به دست آوریم:

$$2x(x^2 - 4y) = 2x^3 - 8xy$$

و عبارت $2x^3 - 8xy$ ، دو جمله‌ی غیر مشابه دارد که با هم جمع (یا تفریق) نمی‌شوند. چنین حالتی به این دلیل پیش می‌آید که $x^2 - 4y$ (عبارت داخل پرانتز) نیز از دو جمله‌ی x^2 و $-4y$ که مشابه نبودند، تشکیل شده بود.

پس در مثال اخیر، = به معنای یافتن حاصل ضرب تک جمله‌ای 2x در جمله‌ی $x^2 - 4y$ است. در مثال زیر، باز هم = به معنای یافتن حاصل ضرب است، اما حاصل ضرب دو جمله‌ی $x - y$ در دو جمله‌ی $x + y$ و البته در این مثال و مثال قبلی، هیچ یک از حاصل ضرب‌ها عدد نیستند، بلکه باز هم یک عبارت جبری به دست می‌آید:

$$\frac{1}{4}x + 2y - 5 + \frac{1}{4} - \frac{3}{4}y + \frac{2}{3}x$$

در این عبارت، کسرهایی وجود دارد (مثل $\frac{1}{4}$ ، $\frac{3}{4}$ ، $\frac{2}{3}$) اما این‌جا منظور از ساده کردن، ساده کردن کسر نیست، زیرا یک عبارت جبری است (1) و لذا باید جملات مشابه را تشخیص دهیم و آن‌ها را با هم جمع یا تفریق کنیم.

$$\frac{2}{3}x + 2y - 5 + \frac{1}{4} - \frac{3}{4}y + \frac{2}{3}x = \frac{12}{15}x + \frac{9}{4}y - \frac{9}{4}$$

خوب، به نظر می‌رسد که کار تمام شده است، اما اگر خوب دقت کنید، ضریب X یعنی $\frac{12}{15}$ کسری است که ساده می‌شود: پس حاصل عبارت را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$\frac{4}{5}x + \frac{9}{4}y - \frac{9}{4}$$

لذا در این مثال، علاوه بر ساده کردن عبارتهای جبری (به معنای جمع یا تفریق جملات مشابه)، ساده کردن کسر نیز داشتیم!

حال شما بگویید که در سؤال زیر، منظور از «ساده کنید» چیست؟

عبارت زیر را تا حد امکان ساده کنید:

$$\frac{21 \times (-14) \times 55 \times 4}{(-8) \times (-49) \times 11}$$

پاسخ: به معنای ساده کردن کسر است، زیرا عبارت داده شده در واقع یک کسر است که اعداد صورت و مخرج به حاصل ضرب اعدادی دیگر تجزیه شده‌اند. اگر بخواهیم دقیق‌تر بگوییم، در واقع معنای محاسبه و سپس ساده کردن کسر حاصل است.

علامت « = »

حتماً همه‌ی شما علامت « = » را می‌شناسید. این علامت را اولین بار در ریاضی کلاس اول دبستان دیدیم:

$$1 + 1 = ?$$

در عبارت $1 + 1 =$ ، باید حاصل جمع سمت چپ تساوی را بیابیم و در سمت راست تساوی بنویسیم. این معنا برای تمام عبارتهای عددی که عملیات مشابه در آن را بدانیم، یکسان است:

$$-(2 - 3^2 + 7 \times 5 - (4 - (-8))) \div (1 - \frac{1}{8}) =$$

خدای من! عبارت خیلی طولانی شد! حتی حساب نکردیم جوابش چه عددی می‌شود؟ اما به هر حال معنای = در عبارت اخیر، همان یافتن حاصل عبارت سمت چپ است. در این موارد، آن‌چه سمت راست = می‌نویسیم، یک عدد است (گویا، گنگ یا صحیح (منفی یا مثبت)، فرقی نمی‌کند، به هر حال یک عدد است).

و عبارت ساده‌تری نمی‌توان جلو آن نوشت (مثل یکی از مثال‌های قبلی). اما اگر دانش‌آموز سوم راهنمایی باشید و فاکتورگیری یا تبدیل چند جمله‌ای به حاصل ضرب را یاد گرفته باشید، می‌بینید از $2xy$ می‌توان در این سه جمله فاکتور گرفت و عبارت سمت چپ را به حاصل ضرب تبدیل کرد، یعنی برعکس آن کاری که در مثال $2x(x^2 - 4y)$ کردیم!

پس داریم:

$$4x^2y - 6xy + 2xy^2 = 2xy(2x - 3 + y)$$

فقط حواستان باشد که دوباره یک مساوی در سمت راست نگذارید و $2xy$ را دوباره در $2x - 3 + y$ پخش نکنید، چون دوباره همان عبارت $4x^2y - 6xy + 2xy^2$ به دست می‌آید! (خیلی از بچه‌ها به عادت، این کار را می‌کنند).

نکند از این همه تنوع در نوع درخواست‌ها برای نوشتن چیزی در سمت راست = گیج شده باشید؟! برای این که یک جمع‌بندی کنیم، یک دور دیگر مطلب را از آن‌جا که درباره‌ی علامت = نوشته شده است بخوانید و سپس از این‌جا به بعد مطلب را ادامه دهید. با مرور کلی مثال‌ها، متوجه می‌شویم که در کل علامت تساوی (=) در موارد زیر مورد استفاده قرار می‌گیرد:

(۱) بین حاصل عددی یک عبارت عددی و خود آن عبارت عددی، مثل

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{1}{4} = 1\frac{3}{4}$$

(۲) بین دو عبارت عددی که حاصل یکسان دارند، مثل

$$\sqrt{1+2^2+4 \times 5} = \sqrt{1+4+20}$$

(۳) بین دو عبارت جبری که یکی با عملیات مجاز از دیگری به دست آمده است، مثل انواع نمونه‌های زیر: (جمع جملات مشابه)

$$4a - 6b + a = 5a - 6b$$

$$2(x-5) + 3(2-x) = 2x - 10 + 6 - 3x = -x - 4$$

سمت راست، با جمع مشابه به دست می‌آید
سمت راست، با پخشی عدد در عبارت‌های داخل پرانتز به دست می‌آید.

(با فاکتوری سمت راست به دست می‌آید)

$$4x^2 - 3x = 3x(2x - 1)$$

(۴) در عبارت‌های جبری، وقتی متغیرهای آن عبارت، اعداد موردنظر را می‌گذاریم و آن را به یک عبارت عددی تبدیل می‌کنیم، مثل

$$x^2 - 8 + y = 3^2 - 8 + (-5)$$

$$(x-y)(x+y) = x^2 - xy + xy - y^2$$

خوب، به نظر می‌رسد کارمان تمام شده است؛ اما یک دقیقه صبر کنید! در عبارت سمت راست، جملات XY و $-XY$ با هم مشابه هستند و حاصل جمع آن‌ها، صفر است: $xy - xy = 0$ پس می‌توان یک = دیگر گذاشت و عبارت را ساده‌تر کرد:

$$(x-y)(x+y) = x^2 - xy + xy - y^2 = x^2 - y^2$$

این مساوی به معنای ساده کردن عبارت جبری است
این مساوی به معنای ضرب کردن دو عبارت سمت چپ در یکدیگر است (البته با استفاده از خاصیت پخشی)

خوب، به نظر می‌رسد «=» در عبارت‌های مختلف، نشان‌دهنده‌ی «درخواست‌های» مختلف است! ما باید از شکل و اجزای عبارت داده شده، متوجه شویم که چه نوع عملیاتی را انجام دهیم و سمت راست تساوی، چه بنویسیم. اگر فکر می‌کنید معنای دیگری برای = در عبارت‌هایمان نداریم، به مثال زیر توجه کنید و توضیح دهید چه اتفاقی افتاده و هر = به معنای چیست؟

$$(1) \quad (2) \quad (3) \\ 3x - 1 = 3(-2) - 1 = -6 - 1 = -7$$

بله، درست است: شماره (۱)، نشان می‌دهد عبارت $3x - 1$ ، به ازای (این مساوی $x = -2$ یعنی x همان عدد -2 است و باز معنی‌اش فرق می‌کند! وای خدای من !!!) با عبارت عددی $3(-2) - 1$ برابر است.

= شماره‌ی (۲) یعنی حاصل عبارت عددی $3(-2) - 1$ با حاصل عبارت عددی $-6 - 1$ برابر است و بالاخره = شماره‌ی (۳) به معنای این است که حاصل عبارت $-6 - 1$ ، عدد -7 است. پس = شماره‌ی (۱) در این‌جا به معنای جاگذاری یک عدد در عبارت سمت چپ به جای مجهول (یا متغیر) آن عبارت و یافتن عبارت عددی بود و این معنا با سایر معانی که بررسی کردیم، متفاوت است.

حال شما بگویید که معنای = در عبارت زیر چیست؟ (در واقع، «درخواست» چیست و چه چیزی باید در سمت راست = بنویسیم؟)

$$4x^2y - 6xy + 2xy^2 = ?$$

اگر هنوز حدس نزده‌اید که باید چه کار کنید، به این توجه کنید که عبارت سمت چپ، یک عبارت جبری است، ولی درخواست ضرب در آن وجود ندارد، زیرا فقط سه جمله‌ی $4x^2y$ و $-6xy$ و $2xy^2$ را دارد. پس در واقع یک سه جمله‌ای است و این سه جمله با هم مشابه نیستند. پس چه کار کنیم؟ قطعاً به نظر می‌رسد که این = از آن مساوی‌هایی باشد که سمت راستش خالی می‌ماند



دفتر انتشارات کمک آموزشی

با مجله‌های رشد آشنا شوید

مجله‌های رشد توسط دفتر انتشارات کمک آموزشی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وابسته به وزارت آموزش و پرورش تهیه و منتشر می‌شوند:

مجله‌های دانش آموزی

(به صورت ماهنامه و ۸ شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شوند):

- رشد کودک (برای دانش‌آموزان آمادگی و پایه‌ی اول دوره‌ی دبستان)
- رشد نواآموز (برای دانش‌آموزان پایه‌های دوم و سوم دوره‌ی دبستان)
- رشد دانش‌آموز (برای دانش‌آموزان پایه‌های چهارم و پنجم دوره‌ی دبستان)
- رشد نوجوان (برای دانش‌آموزان دوره‌ی راهنمایی تحصیلی)
- رشد جوان (برای دانش‌آموزان دوره‌ی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)

مجله‌های بزرگسال عمومی

(به صورت ماهنامه و ۸ شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شوند):

- رشد آموزش ابتدایی
- رشد آموزش راهنمایی تحصیلی
- رشد تکنولوژی آموزشی
- رشد مدرسه فردا
- رشد مدیریت مدرسه
- رشد معلم

مجله‌های بزرگسال اختصاصی

(به صورت فصلنامه و ۴ شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شوند):

- رشد برهان راهنمایی (مجله ریاضی برای دانش‌آموزان دوره‌ی راهنمایی تحصیلی)
- رشد برهان متوسطه (مجله ریاضی برای دانش‌آموزان دوره‌ی متوسطه)
- رشد آموزش قرآن
- رشد آموزش معارف اسلامی
- رشد آموزش زبان و ادب فارسی
- رشد آموزش هنر
- رشد مشاور مدرسه
- رشد آموزش تربیت بدنی
- رشد آموزش علوم اجتماعی
- رشد آموزش تاریخ
- رشد آموزش جغرافیا
- رشد آموزش زبان
- رشد آموزش ریاضی
- رشد آموزش فیزیک
- رشد آموزش شیمی
- رشد آموزش زیست‌شناسی
- رشد آموزش زمین‌شناسی
- رشد آموزش فنی و حرفه‌ای
- رشد آموزش پیش‌دبستانی

مجله‌های رشد عمومی و اختصاصی برای آموزگاران، معلمان، مدیران و کارکنان اجرایی مدارس، دانشجویان مراکز تربیت‌معلم و رشته‌های دبیری دانشگاه‌ها و کارشناسان تعلیم و تربیت تهیه و منتشر می‌شوند.

نشانی: تهران، خیابان ایرانشهر شمالی، ساختمان شماره‌ی ۴ آموزش و پرورش، پلاک ۲۶۶، دفتر انتشارات کمک آموزشی.

تلفن و نمابر: ۰۲۱ - ۸۸۳۰۱۴۷۸

که در آن به جای x ، عدد ۳ و به جای y ، عدد ۵- را گذاشته‌ایم، یعنی $x=3$ و $y=-5$ ، که این دو تساوی اخیر به معنای برابری مقادیر x و y با اعداد معینی هستند، یعنی:

(۵) برابری دو شیء از یک جنس با هم، مثل همان $x=3$ و $y=-5$ در مثال قبل.

البته توجه کنید که باید جنس دو شیء دو طرف تساوی مثل هم باشد. در مجموعه‌ها یا در بحث بردارها نیز تساوی‌هایی از این دست داریم:

مثال (۱) اگر $A =$ مجموعه‌ی عددهای طبیعی زوج کم‌تر از ۱۰

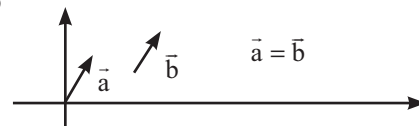
و

$B =$ مجموعه‌ی مضارب طبیعی ۲ که یک رقمی باشند،

آن‌گاه $A=B$

مثال (۲) در شکل زیر، بردارهای \vec{a} و \vec{b} برابرند، یعنی

$$\vec{a} = \vec{b}$$



(۶) بین نام شیء و خود شیء قرار می‌گیرد، مثل

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

یا

$$\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(۷) در هندسه، بین نام یک شیء و اندازه‌ی آن قرار می‌گیرد،

مثل

$$\hat{A} = 45^\circ \quad \text{یا} \quad AB = 3 \text{ cm}$$

(۸) آیا باز هم موارد دیگری هست که من فراموش کرده‌ام نام ببرم؟ به هر حال به این جمع‌بندی رسیدیم که وقتی علامت = را دیدیم و سمت راست آن خالی بود، حتماً نباید یک عملیات یا محاسباتی انجام دهیم تا در سمت راست تساوی چیزی بنویسیم. چگونگی و نوع نوشتن چیزی در سمت راست تساوی بستگی دارد به معنایی که آن عبارت‌ها و تساوی‌ها می‌دهند.

حال آیا می‌توانید بگویید تساوی زیر چیست؟ $4x-6=12$

بله، درست است؛ این تساوی یک معادله است که ما برای تکمیل تساوی کاری انجام نمی‌دهیم، بلکه تساوی را شخص دیگری پیدا کرده است و ما به کمک آن، مقدار مجهول (یعنی x) را پیدا می‌کنیم. پس:

(۹) بین دو عبارت جبری که دست کم یکی از آن‌ها حداقل یک

مجهول دارد و به آن تساوی، معادله گوییم.