مقاله

چند توصیه برای تدریس چگونگی حل معادله به دانش‌آموزان متوسط و ضعیف

اصل هدیهٔ عید

جیمز. اف. ویرت، دانشگاه کارولینای شرقی
ترجمهٔ **زهرا گویا**

پیش‌درآمد

علت ترجمهٔ این مقاله که بسیار قدیمی است، موضوعی است که هم‌چنان دانش‌آموزان با آن مشکل دارند و آن، حل انواع معادلات مختلف است. جیمز ویرت در این مقاله، به آموزش حل معادله و **ترتیب عملیات** پرداخته است- مسئله‌ای که هنوز در اغلب کتاب‌های درسی ریاضی، به‌وضوح و با جزئیات به آن پرداخته نشده است. به‌سبب جای خالی این آموزش، ترجمهٔ این مقاله به همکاران تقدیم می‌شود. باز هم تأکید می‌شود که اهمیت این مقاله، در جدی‌کردن موضوعی است که سالیان متمادی، سهل ممتنع بوده است و اکثراً، دانش‌آموزان در لابه‌لای سطور کتاب‌های درسی ریاضی و به‌طور پراکنده، با آن آشنا می‌شوند و معلمان محترم، بارها **ترتیب عملیات** را به شکل‌های مختلف آموزش داده‌اند، اما هنوز هم شاهد مشکلات یادگیری دانش‌آموزان در این مورد هستیم.

کلیدواژه‌ها: حل معادله، ترتیب عملیات.

وقتی جبر یا مثلثات را به دانش‌آموزان تدریس می‌کنم، اغلب ناخرسندم از این‌که می‌بینم آن‌ها، اگرچه به‌راحتی معادلاتی مانند $3x+2=5$ را حل می‌کنند، اما حتی دانش‌آموزان قوی‌تر هم برای شروع به حل معادلاتی نظیر $\sqrt{3+\log(x-5)}+2=6$ مشکل دارند. در حالی‌که اصول حاکم برای حل این معادله، دقیقاً با اصول حاکم بر معادلهٔ خطی بالا یکی است. بدین‌جهت، به ذهنم رسید که ممکن است تقصیر این کار برعهدهٔ تقسیم‌بندی سنتی معادلات به انواع زیر است:

۱. خطی
۲. درجهٔ دو
۳. چندجمله‌ای‌های با درجات بالاتر
۴. متعالی

راه دیگری با همین اهمیت، برای تقسیم‌بندی معادلات وجود دارد.

۱. معادلاتی که در آن‌ها، مجهول فقط یک‌بار ظاهر می‌شود؛
۲. معادلاتی که در آن‌ها، مجهول بیش از یک‌بار ظاهر می‌شود.

چون به نظر می‌رسد که این دو نوع اخیر عنوان ندارند، نوع اول را «معادلات کامل» و نوع دوم را «معادلات شکسته» می‌نامم. اهمیت این تقسیم‌بندی در این حقیقت نهفته است که تمام معادلات شکستهٔ قابل حل، اول تبدیل می‌شوند (یعنی تعمیر می‌شوند) به معادلات کامل و **بعد** حل می‌شوند.

اصل هدیهٔ عید

من آموزش حل معادلات کامل را ـ هرچند هم که پیچیده باشند، برای دانش‌آموزانم حل کردم. برای این کار، از «اصل هدیهٔ عید» و «دور باز کردن» [کاغذ از هدیه] استفاده کردم. اولی، صرفاً یک بصیرت است؛ دومی مهارتی است که دانش‌آموزان با تمرین، باید آن را کسب کنند.

معادلهٔ پیچیده‌ای مانند $\sqrt{\sqrt{x^{۲}-۵}+۳}=۵$ را در نظر بگیرید.

طبق اصل هدیهٔ عید، این معادله، ما را با موقعیت زیر مواجه می‌کند.

کسی هدیهٔ ما را گرفته (یعنی، مجهول x) و آن را با کاغذ کادوهای متعدد پیچیده است. تکلیف ما این است که کاغذها را از دور هدیه باز کنیم، همین.

پس در مثال بالا، هدیهٔ عید (x) در کاغذهای زیر پیچیده شده بود:

۱. مربع شده بود؛

۲. ۵ از آن کم شده بود؛

۳. از آن جذر گرفته شده بود؛

۴. ۳ به آن اضافه شده بود؛

۵. بالاخره، دوباره از آن جذر گرفته شده بود.

با توجه به تمثیلی که به کار بردم، این نکته مهم است که تشخیص دهید چه موقعی شروع به باز کردن کاغذهای هدیهٔ خود کنید. شما **نیازی ندارید** که تمام نکته‌ها را در مورد بسته‌بندی هدیهٔ خود بدانید، به جای آن، همان‌طور که هر کودکی می‌داند، شما کاغذ کادویی آخری را اول پاره می‌کنید. بعد اگر باز هم بسته‌بندی دیگری بود، آن را پاره می‌کنید و به همین ترتیب ادامه می‌دهید تا به هدیه برسید. حالا می‌توانیم اصل هدیهٔ عید را اعلام کنیم:

یک بسته، با ترتیبِ مخالفی که بسته‌بندی شده، باز می‌شود، و این کار، گام‌به‌گام انجام می‌شود و از لایه‌های بیرونی شروع می‌شود تا به آخرین لایهٔ درونی برسد.

دور باز کردن

به کارگیری اصل هدیهٔ عید برای حل یک معادله، مستلزم مهارت تشخیص و مهارت عمل است. اول، دانش‌آموز باید تشخیص دهد که آخرین لایه (کاغذ پیچیده شده دور هدیه) یعنی «آخرین کاری که روی مجهول انجام شده» کدام است. سپس باید یاد بگیرد که دور باز کردن را به طریق زیر اجرا کند:

۱. آخرین کاری را که نسبت به مجهول انجام شده است، **مشخص کند**؛

۲. به معکوس آخرین کار انجام شده **فکر کند**؛

۳. آن معکوس را نسبت به دو طرف معادله **اعمال** کند (قانون طلایی).

این دور، بارها و بارها تکرار می‌شود تا معادله حل شود.

در رابطه با گام ۲ این دور، من دریافته‌ام که حتی کُندترین دانش‌آموزان حقایقی را مانند **کم‌کردن پنج، معکوس اضافه‌کردن پنج است**، یا «ضرب در ۶، معکوس عمل تقسیم بر ۶ است»، و جذرگیری معکوس مجذور کردن است». می‌دانند (اگرچه گاهی اوقات، به جای **معکوس**، از واژهٔ **برعکس** کردن استفاده می‌کنم و دانش‌آموزان بهتر متوجه می‌شوند). گاهی یک لحظه سردرگم می‌شوند (و گاهی مبهوت)ـ که کشف کنند که عوض کردن علامت، برعکس عوض کردن علامت است و معکوس کردن برعکس است.

هم‌چنین، وقتی دانش‌آموزی گام ۳ این دور را اجرا می‌کند، برای او مهم است که تشخیص دهد این گام، همیشه باز کردن بیرونی‌ترین قسمت بسته‌بندی است که x (هدیه) در آن پنهان شده است. حالا اگر با معادلهٔ

$$(x+۲)^{۲}=۳$$

مواجه شود، نباید این‌گونه عمل کند که

$$\sqrt{(x+۲)^{۲}}=\pm\sqrt{۳}$$

بلکه باید تشخیص دهد که برعکس کردن آخرین عملی که روی

x انجام شده، توان را لغو می‌کند و معادلهٔ زیر را می‌دهد:

$$x+۲=\pm\sqrt{۳}$$

مثالی از تمرین برای دور باز کردن، در زیر داده شده است:

$$\sqrt{۳+x}+۲=۶$$

دور ۱

۱. معلم: آخرین کاری که روی این معادله انجام شده چیست؟

دانش‌آموزان: ۲ به آن اضافه شده است.

۲. معلم: معکوس اضافه‌کردن ۲ چیست؟

دانش‌آموزان: کم کردن ۲

۳. معلم: عمل معکوس‌کردن را برای دو طرف معادله انجام دهید. چه به‌دست می‌آید؟

دانش‌آموزان: (چون ۴=۲-۶ است) $\sqrt{۳+x}=۴$.

دور ۲

۱. معلم: آخرین کاری که انجام شده چیست؟

دانش‌آموزان: جذرگیری

۲. معلم: معکوس جذرگیری چیست؟

دانش‌آموزان: مجذور کردن

۳. معلم: عمل معکوس را برای دو طرف معادله انجام دهید.

دانش‌آموزان: (چون $۱۶=۴^{۲}$ است) ۳+x=۱۶

دور ۳

۱. معلم: آخرین کاری که انجام شده چیست؟

دانش‌آموزان: اضافه کردن ۳ (بعد از کمی تردید).

۲. معلم: معکوس این عمل چیست؟

دانش‌آموزان: کم کردن ۳

۳. معلم: عمل معکوس را برای دو طرف معادله انجام دهید.

دانش‌آموزان: (چون ۱۳=۳-۱۶ است) x=۱۳

توقف

ترتیب عملیات

اولین گام در **دور باز کردن**، تعیین آخرین کاری است که روی مجهول (آخرین لایهٔ بسته‌بندی) انجام شده است. بعضی از دانش‌آموزان، ممکن است در فهمیدن معنی معادله آن‌قدر ضعیف باشند که این گام برای آن‌ها مشکل باشد. احتمال دارد که این‌ها، **ترتیب عملیات** را از آخر به اول یاد بگیرند. برای شروع، آن‌ها یاد می‌گیرند که آخرین کاری که انجام شده، **هرگز** داخل پرانتز پیدا نمی‌شود. بنابراین، وقتی با معادله‌ای مانند $(x^{۲}-۳)^{۵}=۶$ روبه‌رو می‌شوند، از علامت منفی غفلت می‌کنند، زیرا در داخل پرانتز است. وقتی این اصل اولیه را فهمیدند، دانش‌آموزان ضعیف‌تر می‌توانند قانون ترتیب عملیات را (برگردان از آخر به اول آن را) به شکل زیر یاد بگیرید:

وقتی که دنبال آخرین عمل انجام شده در یک فرمول (معادله) می‌گردید،

۱. به جای ضرب یا تقسیم، جمع یا تفریق را بردارید؛

۲. به جای به‌توان رساندن، ضرب یا تقسیم را بردارید؛

۳. به جای استفاده از توابعی مانند لگاریتم، سینوس، کسینوس و نظایر آن، به‌توان رساندن را انتخاب کنید.

اول، اگرچه معکوس «تقسیم بر ۵»، «ضرب کردن در ۵» است،

چیز غریبی موقع «تقسیم به وسیلۀ ۵» اتفاق می‌افتد. در حقیقت، معلم باید دانش‌آموزان را قانع کند که معکوس «تقسیم به وسیلۀ ۵»، دوباره «تقسیم به وسیلۀ ۵» است! این یک مفهوم ناآشنا اما قوی است. برای مثال، در معادلۀ

$$\frac{۶}{x^{۲}-۵}=۲$$

آخرین کاری که روی مجهول انجام شده، «تقسیم به وسیلۀ ۶» است. حالا، یک **دور باز کردن**، نتیجه می‌دهد که $x^{۲}-۵=۳$ چون ۲ که به وسیلۀ ۶ تقسیم شود، ۳ می‌شود.

دومین قانون معکوس، شامل معادلاتی از نوع زیر است

$$۱۰^{۲x+۳}=۶$$

توجه کنید که این، یک معادلۀ کامل است. آخرین عمل انجام شده که به نوعی شکسته بسته است این است «از توان ۱۰ استفاده شده» و معکوس آن «گرفتن لگاریتم از طرفین است»! پس یک دورِ بازکردن را که به‌کار بریم نتیجه می‌دهد که

$$۲x+۳=\log ۶\approx ۶/۰۲$$

به‌طور طبیعی، از دومین قانون معکوس «گرفتن لگاریتم» نتیجه می‌شود که باید، «از توان ۱۰ استفاده شود». حالا دانش‌آموز می‌تواند از عهدۀ مثالی که در ابتدا بیان شد، برآید:

$$\sqrt{۳+\log(x-۳)}+۲=۶$$

آخرین عمل را با کم کردن ۲، معکوس می‌کنیم:

$$\sqrt{۳+\log(x-۳)}=۴$$

سپس مجذور می‌کنیم:

$$۳+\log(x-۳)=۱۶$$

آن‌گاه ۳ را از طرفین کم می‌کنیم

$$\log(x-۳)=۱۳$$

چون آخرین عملی که انجام شده، لگاریتم‌گیری بوده، با «استفاده از توان ۱۰» معکوس می‌شود؛

$$x-۳=۱۰^{۱۳}$$

و بالاخره، با اضافه کردن ۳ به دو طرف معادله،

$$x=۱۰^{۱۳}+۳=۱۰/۰۰۰/۰۰۰/۰۰۰/۰۰۰/۰۰۳.$$

معادلات شکسته

وقتی دانش‌آموزی بتواند با موفقیت از عهدۀ معادلات کامل برآید، مواجه شدن با معادلات شکسته‌ای مانند

$$۳x^{۲}+۷=-۷x+۵$$

برای او کمتر مرموز می‌شوند. تمام تکنیک‌هایی که به‌کار می‌بریم، توجیهی برای **تعمیر** معادلات شکسته به گونه‌ای است که بتوان از روش **باز کردن** استفاده نمود. چند نمونه از روش‌های تغییر یک معادلۀ شکسته به معادلۀ کامل با مثال‌هایی از چگونگی استفادۀ آن‌ها، از این قرارند:

۱. کامل کردن مربع

معادلۀ شکسته:

$$x^{۲}+۶x+۷=۰$$

معادلۀ تعمیر شده:

$$(x+۳)^{۲}-۲=۰$$

۲. جمع‌کردن عبارت‌های یکسان در یک طرف

معادلۀ شکسته:

$$۵x+۳=۷x-۴$$

معادلۀ تعمیر شده:

$$-۲x+۳=-۴$$

۳. از بین بردن کسرها به وسیلهٔ ضرب کردن [طرفین وسطین کردن]

معادلهٔ شکسته:

$$\frac{۲x-۱}{x+۳}=۵$$

حذف کسر:

$$۲x-۱=۵x+۱۵$$

معادلهٔ تعمیر شده:

$$-۳x-۱=۱۵$$

اگرچه استفاده از فرمول حل معادلهٔ درجه ۲ بر «کامل‌کردن مربع» ارجحیت دارد، تنها به این دلیل است که آن فرمول، نسخهٔ خودبه‌خودی کامل کردن مربع است.

یک روش تعمیری دیگر، «جدا کردن عامل‌های صفر» است که روشی بسیار قوی است که سزاوار بحث بیشتری است. هرگاه دانش‌آموزی معادله‌ای به شکل

۰ = حاصل‌ضرب عامل‌ها

دید، باید بلافاصله مسئلهٔ اصلی را به مسئله‌های جدا بشکند؛

۰ = حل عامل اول

۰ = حل عامل دوم

و نظایر آن.

معادلات نتیجه شده همیشه ساده‌تر از معادلهٔ اولیه هستند. در حقیقت، آن‌ها اغلب معادلات کامل هستند و نیاز به تعمیر ندارند. البته، جداسازی فقط یک کاربرد باستانی از «تفرقه‌بنداز و حکومت کن» در جبر است.

یک امتیاز اضافی دیگر، فرصت مرور ایدهٔ اجتماع مجموعه‌هاست، زیرا مجموعهٔ جواب معادلهٔ اولیه، اجتماع مجموعه جواب‌های معادلات جدا شده است.

باید متذکر شد که اصل جداسازی نه تنها در مسایل سنتی مانند

$$(x-۱)(x-۳)(x+۲)=۰$$

دخیل است، بلکه به سادگی، می‌توان معادلات پیچیده‌تر را نیز با آن، ساده‌تر کرد. به‌طور مثال، معادلهٔ

$$(۵x^۲-۳)(\frac{۱}{۲x-۳}+۵)=۰$$

را می‌توان به دو معادلهٔ کامل $۵x^۲-۳=۰$ و $\frac{۱}{۲x-۳}+۵=۰$ جدا کرد. که هر کدام به سادگی و با استفاده از تکنیک **دور بازکردن**، حل می‌شوند.

البته، هیچ مسیر شاهانه‌ای (No Royal Rood) برای تعمیر معادلات وجود ندارد، زیرا این کار، ترکیبی از عمل سلیم و **حقه‌های** گوناگونی مانند کامل‌کردن مربع است. به هر حال، روش اساسی تعمیر، طبیعی است:

۱. مانعی را که دو نسخه از مجهول را از هم جدا کرده بیابید؛
۲. مانع را بردارید یا مجهول را اطراف آن حرکت دهید؛
۳. این کار را تکرار کنید تا تعمیر کامل شود.

خوشبختانه، روش بالا اغلب شکست می‌خورد، زیرا در آن صورت، ریاضی جالب‌تر است.

مزایا

یک مزیت مهم در آموزش روش حل معادله علاوه بر این مزیت آشکار که دانش‌آموزان می‌توانند با آن، معادلات پیچیده و مشکل را حل کنند، وجود دارد. ایدهٔ «انجام کاری» روی مجهول، مفهوم شهودی تابع است. یعنی دانش‌آموزان بدون آن‌که تابع را بدانند، آن را یاد می‌گیرند. به‌طور مشخص، ایدهٔ «معکوس عمل انجام شده»، مقدمه‌ای برای مفهوم معکوس تابع (تابع معکوس‌به) است. بعد از آن‌که دانش‌آموز، بر روش **بازکردن** مسلط شد، آمادگی یادگرفتن این حقیقت سردرگم‌کننده را دارد که بعضی اعمال، دارای چندین معکوس پاره‌ای هستند. بنابراین، وقتی که از $x^۲=۹$ جذر می‌گیریم (لایهٔ آخری را باز می‌کنیم)، باید بنویسیم $x=\pm۳$.

من این روشِ تدریس حل معادله را طی چندین سال تدریس تدوین کردم و آن را بسیار اثربخش یافتم. البته با وقت کافی، برای آموزش آن سرمایه‌گذاری کردم و با تمرین، دور بازکردن، در وجود دانش‌آموزان نهادینه شده است.

منبع اصلی

Wirth, J. F. (1975). The Christmas-Present Principle. Mathematics Teacher. December. 1975. pp636-639