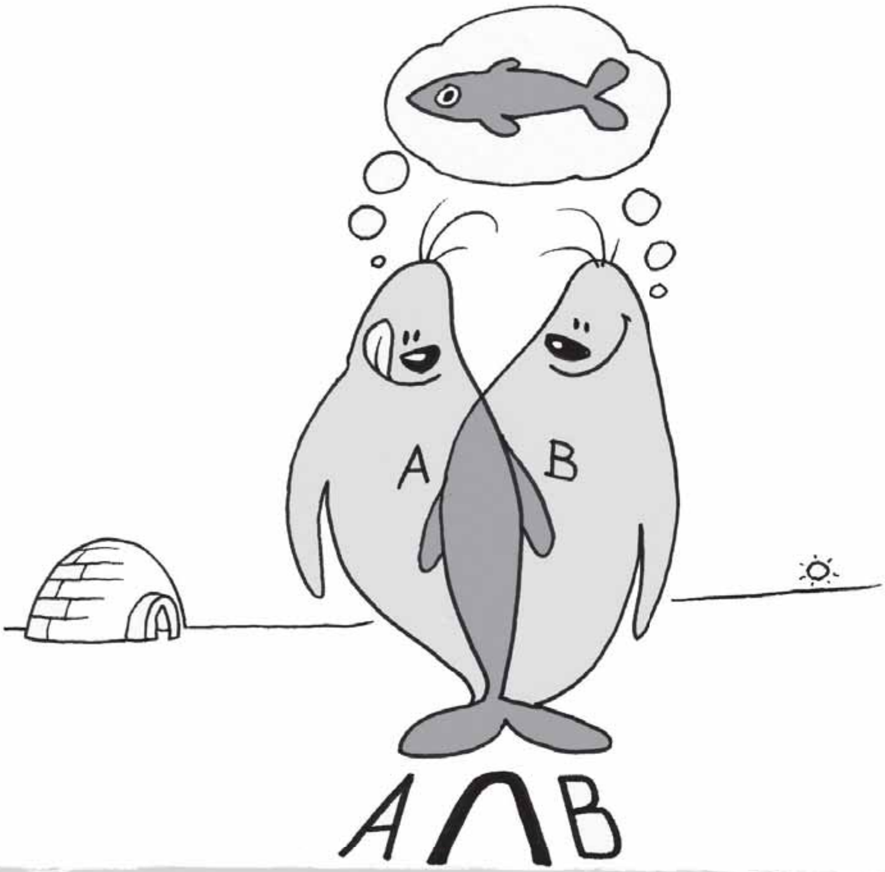


اعمال بین مجموعه‌ها
جبرمجموعه‌ها

حمیدرضا امیری

در ایــن مقاله ســعی داریم بــه ارتباط بین اعمــال مجموعه‌ها بپردازیم و مســائلی در مجموعه‌ها حل کنیم که در حل آن‌ها فقط از قوانین بین مجموعه‌ها، قضیه‌ها و تعاریف استفاده شود.

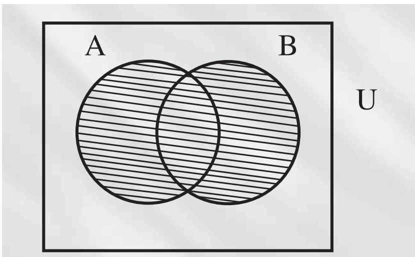
تعاریف و قضیه‌ها به گونه‌ای بیان می‌شوند که هر کدام پیش‌نیاز بعدی و درنهایت مسائل برای حل وابسته به این تعاریف و قضیه‌ها خواهند بود.

بیــن مجموعه‌ها ۴ عمــلِ اجتماع، اشــتراک، تفاضل و تفاضل متقارن تعریف می‌شــود که البته دو عملِ تفاضل و تفاضل متقارن اعمالِ مســتقلی نیســتند و بیان تعریف این دو عمل با استفاده از اعمالِ قبل از خود ممکن است.

۱. عمل اجتماع: $(A \cup B)$ مجموعه‌ای اســت که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(A \cup B) = \{x \in U \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

$$\begin{cases} x \in (A \cup B) \Leftrightarrow x \in A \text{ یا } x \in B \\ x \notin (A \cup B) \Leftrightarrow x \notin A \text{ و } x \notin B \end{cases}$$



تذکــر: بلافاصله از تعریف اجتماع، این نتیجه‌های مهم به‌دست می‌آینــد کــه «هر مجموعــه زیرمجموعــهٔ اجتماع خــودش با هر مجموعهٔ دیگر است» و «اجتماع هر مجموعه با خودش، مساوی با خودش است».

$$\text{I)}\begin{cases} A \subseteq (A \cup B) \\ B \subseteq (A \cup B) \end{cases} \qquad \text{II)}\, A \cup A = A$$

قضیهٔ ۱: اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$ آن‌گاه $(A \cup C) \subseteq (B \cup D)$

اثبات: (قضیه‌های اولیه و مقدماتی را ناچاریم به روش عضوگیری

دلخواه ثابت کنیم).

فرض کنیم $[x \in (A\cup C) \Leftrightarrow x\in A$ یا $x\in C \overset{A\subseteq B}{\underset{C\subseteq D}{\Leftrightarrow}} x\in B$ یا $x\in D \Leftrightarrow x\in(B\cup D)] \Rightarrow (A\cup C)=(B\cup D)$

نتیجه: از قضیهٔ ۱ نتیجهٔ زیر را می‌توان به‌دست آورد:

$$A\subseteq C, B\subseteq C \Rightarrow (A\cup B)\subseteq C$$

اثبات:

$$A\subseteq C,B\subseteq C\Rightarrow (A\cup B)\subseteq \underbrace{(C\cup C)}_{C}\Rightarrow (A\cup B)\subseteq C$$

قضیهٔ ۲: شرط لازم و کافی برای آن‌که $A\subseteq B$، آن است که $(A\cup B)=B$. به عبارت دیگر:

$$A\subseteq B\Leftrightarrow (A\cup B)=B$$

اثبات: ابتدا فرض می‌کنیم $A\subseteq B$ و ثابت می‌کنیم $(A\cup B)=B$. (برای اثبات تساوی بین دو مجموعه باید ثابت کنیم هر کدام زیرمجموعهٔ دیگری است).

(۱) $B\subseteq (A\cup B)$: طبق تعریف داریم

$$\left.\begin{array}{r} \text{طبق فرض}: A\subseteq B \\ \text{می‌دانیم}: B\subseteq B\end{array}\right\} \overset{\text{نتیجهٔ قضیهٔ ۱}}{\Rightarrow} (A\cup B)\subseteq B \quad (\text{۲})$$

(۱),(۲) $\Rightarrow (A\cup B)=B$

حال فرض می‌کنیم $(A\cup B)=B$ و ثابت می‌کنیم $A\subseteq B$.

$$\left.\begin{array}{r} \text{می‌دانیم}: A\subseteq (A\cup B) \\ \text{طبق فرض}: (A\cup B)=B\end{array}\right\} \Rightarrow A\subseteq B$$

[به جای $(A\cup B)$ در رابطهٔ بالا طبق فرض قرار دادیم B].

نتیجه‌های حاصل از قضیهٔ ۲:

$$\text{I)}\ \varnothing\subseteq A \overset{\text{قضیهٔ ۲}}{\Rightarrow} A\cup\varnothing = A$$

$$\text{II)}\ A\subseteq U \overset{\text{قضیهٔ ۲}}{\Rightarrow} A\cup U=U$$

قضیهٔ ۳: برای هر سه مجموعهٔ دلخواه A و B و C داریم (خاصیت شرکت‌پذیری):

$$(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$$

اثبات:

می‌دانیم: $A\subseteq(A\cup B),(A\cup B)\subseteq(A\cup B)\cup C$

$\overset{\text{نتیجهٔ قضیهٔ ۱}}{\Rightarrow} A\subseteq (A\cup B)\cup C$ (۱)

می‌دانیم: $B\subseteq (A\cup B),(A\cup B)\subseteq (A\cup B)\cup C$

$\Rightarrow B\subseteq(A\cup B)\cup C$ (۲)

(۳) $C\subseteq (A\cup B)\cup C$: می‌دانیم

(۴) نتیجهٔ قضیه ۱ و (۳) و (۲) $\Rightarrow (B\cup C)\subseteq (A\cup B)\cup C$

نتیجهٔ قضیه ۱ و (۴) و (۱) $\Rightarrow A\cup(B\cup C)\subseteq (A\cup B)\cup C$

به طریق مشابه ثابت می‌شود که $(A\cup B)\cup C\subseteq A\cup(B\cup C)$. درنتیجه تساوی به اثبات می‌رسد و حکم به‌دست می‌آید.

قضیهٔ ۴: برای هر دو مجموعهٔ دلخواه مانند A و B داریم: (خاصیت جابه‌جایی)

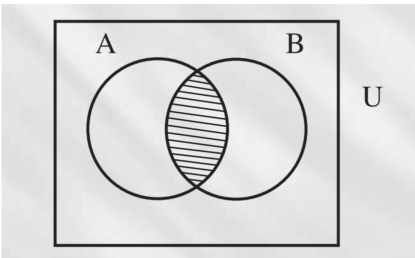
$$(A\cup B)=(B\cup A)$$

اثبات می‌دانیم: $\left.\begin{array}{l}B\subseteq(A\cup B)\\ A\subseteq(A\cup B)\end{array}\right. \overset{\text{نتیجهٔ قضیهٔ ۱}}{\Rightarrow} (B\cup A)\subseteq (A\cup B)$ (۱)

$$\left.\begin{array}{l}A\subseteq(B\cup A)\\ B\subseteq(B\cup A)\end{array}\right. \overset{\text{نتیجهٔ قضیهٔ ۱}}{\Rightarrow} (A\cup B)\subseteq (B\cup A) \quad (\text{۲})$$

(۱),(۲) $\overset{\text{تعریف تساوی}}{\Rightarrow} (A\cup B)=(B\cup A)$

۲. عمل اشتراک: $(A\cap B)$ مجموعه‌ای است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:



$$(A\cap B)=\{x\in U \mid x\in A \text{ و } x\in B\}$$

$$\begin{cases} x\in(A\cap B)\Leftrightarrow x\in A \text{ و } x\in B \\ x\notin(A\cap B)\Leftrightarrow x\notin A \text{ یا } x\notin B\end{cases}$$

تذکر: با توجه به تعریف اشتراک واضح است که I) اشتراک دو مجموعه همواره زیرمجموعهٔ هریک از آن دو مجموعه است II) اشتراک هر مجموعه با خودش مساوی با خود آن مجموعه است.

$$\text{I)}\begin{cases}(A\cap B)\subseteq A\\ (A\cap B)\subseteq B\end{cases},\ \text{II)}\ A\cap A=A$$

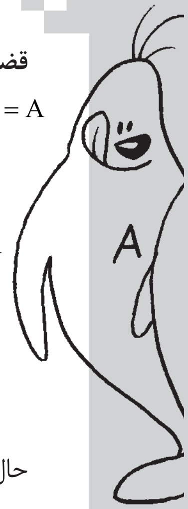
قضیهٔ ۱: اگر $A\subseteq B$ و $C\subseteq D$ آن‌گاه $(A\cap C)\subseteq (B\cap D)$

اثبات: شبیه به اثبات قضیهٔ ۱ در عمل اجتماعی و با عضوگیری انجام می‌شود.

نتیجه: اگر $A\subseteq C$ و $A\subseteq B$ آن‌گاه $A\subseteq(B\cap C)$

اثبات:

$$\left.\begin{array}{l}A\subseteq C\\ A\subseteq B\end{array}\right. \overset{\text{قضیهٔ ۱}}{\Rightarrow}\underbrace{(A\cap A)}_{A}\subseteq(B\cap C)\Rightarrow A\subseteq(B\cap C)$$



قضیهٔ ۲: شرط لازم و کافی برای آن‌که $A \subseteq B$، آن است که $(A\cap B)=A$.

$A\subseteq B \Leftrightarrow (A\cap B)=A$

اثبات: ابتدا فرض می‌کنیم $A\subseteq B$ و ثابت می‌کنیم $(A\cap B)=A$.

$(A\cap B)\subseteq A$: می‌دانیم (۱)

$$\left.\begin{array}{ll} A\subseteq B & \text{: از طرفی طبق فرض}\\ A\subseteq A & \text{: و می‌دانیم}\end{array}\right\} \Rightarrow A\subseteq (A\cap B) \quad (۲)$$

$(۱),(۲)\Rightarrow (A\cap B)=A$

حال فرض می‌کنیم $(A\cap B)=A$ و ثابت می‌کنیم $A\subseteq B$.

$$\left.\begin{array}{ll}(A\cap B)\subseteq B & \text{: می‌دانیم}\\ (A\cap B)=A & \text{: طبق فرض}\end{array}\right\}\Rightarrow A\subseteq B$$

(به جای A در رابطهٔ بالایی طبق فرض قرار داده‌ایم A).

تذکر: دو خاصیت شرکت‌پذیری و جابه‌جایی در اشتراک مشابه این خواص در اجتماع قابل اثبات است و داریم:

$$\begin{cases}(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C) & \text{شرکت‌پذیری}\\ (A\cap B)=(B\cap A)\end{cases}$$

دو نتیجهٔ مهم از قضیهٔ ۲:

$I)\ \varnothing\subseteq A \overset{\text{قضیه ۲}}{\Rightarrow} A\cap\varnothing=\varnothing$

$II)\ A\subseteq U \overset{\text{قضیه ۲}}{\Rightarrow} A\cap U = A$

تذکر: با توجه به تعاریف اجتماع و اشتراک و مجموعه‌های مرجع، تهی و تعریف متمم یک مجموعه داریم:

$$\begin{cases}A\cup A'=U\\ A\cap A'=\varnothing\end{cases}$$

نتیجهٔ مهم: اگر $A\subseteq B$ آن‌گاه $A\cap B'=\varnothing$ و برعکس

اثبات: $\begin{cases}A\subseteq B\\ B'\subseteq B'\end{cases} \overset{\text{قضیهٔ ۱}}{\Rightarrow} (A\cap B')\subseteq(B\cap B')\Rightarrow (A\cap B')\subseteq\varnothing$

چون همواره $\varnothing\subseteq(A\cap B')$ پس $A\cap B'=\varnothing$

اثبات عکس مطلب بدیهی است و به عنوان تمرین برعهده شما گذاشته می‌شود. یعنی با استفاده از $A\cap B'=\varnothing$ ثابت کنید $A\subseteq B$.

۳. عمل تفاضل: تفاضل B از A یعنی $(A-B)$ مجموعه‌ای است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$(A-B)=\{x\in U \mid x\in A \text{ و } x\notin B\}$

$$\begin{cases} x\in(A-B)\Leftrightarrow x\in A \text{ و } x\notin B\\ x\notin(A-B)\Leftrightarrow x\notin A \text{ یا } x\in B\end{cases}$$

تذکر: با توجه به تعریف تفاضل، واضح است که همواره $A\subseteq(A-B)$.

نتیجهٔ مهم: رابطهٔ بین تفاضل و اشتراک

با توجه به تعریف تفاضل و اشتراک رابطهٔ زیر به‌سادگی نتیجه می‌شود و از این رابطه برای تبدیل تفاضل به اشتراک یا اشتراک به تفاضل استفاده می‌کنیم:

$(A-B)=(A\cap B')$

$(A-B)=\{x\in U \mid x\in A \text{ و } x\notin B\} \overset{\text{تعریف متمم}}{=} \{x\in U \mid x\in A \text{ و } x\in B'\} \overset{\text{تعریف اشتراک}}{=} (A\cap B')$

قضیهٔ ۱: شرط لازم و کافی برای آن‌که $A\subseteq B$، آن است که $A-B=\varnothing$،

اثبات:

$A\subseteq B\Leftrightarrow A-B=\varnothing$

فرض کنیم $A\subseteq B\Leftrightarrow (A\cap B')=\varnothing\Leftrightarrow A-B=\varnothing$

چند تساوی مهم: (در اثبات تساوی‌های زیر کافی است تفاضل را به اشتراک تبدیل کنیم).

$$\boxed{\begin{array}{l} I)\ A-A=\varnothing,\quad II)\ A-\varnothing=A,\quad III)\ A-U=\varnothing\\ IV)\ U-A=A',\ V)\ A-A'=A,\ VI)\ \varnothing-A=\varnothing\end{array}}$$

قضیه: (قانون‌های دمورگان)

$$\boxed{\begin{cases}I)\ (A\cup B)'=(A'\cap B')\\ II)\ (A\cap B)'=(A'\cap B')\end{cases}}$$

اثبات I) به روش عضوگیری دلخواه ثابت می‌کنیم:

[فرض کنیم $x\in(A\cup B)'\Leftrightarrow x\notin(A\cup B)\Leftrightarrow x\notin A$ و $x\notin$

$\overset{\text{تعریف متمم}}{\Leftrightarrow} x\in A'$ و $x\in B' \overset{\text{تعریف اشتراک}}{\Leftrightarrow} x\in(A'\cap B')$]

$\Rightarrow(A\cup B)'=(A'\cap B')$

اثبات II) در اثبات (II) از (I) کمک می‌گیریم. توجه دارید که در (I) ثابت شد که می‌توانیم متمم اجتماع را حساب و به اشتراک تبدیل کنیم.

$(A'\cup B')'=((A')'\cap(B')')=(A\cap B)$

$\Rightarrow[(A'\cup B')']'=(A\cap B)'\Rightarrow(A'\cup B')=(A\cap B')$

نتیجه: اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند، داریم:

$(A-B)'=(A'\cup B)$

اثبات:

$(A-B)'=(A\cap B')'=(A'\cup B)$

تذکر: عمل تفاضل خاصیت جابه‌جایی ندارد.

مسئلهٔ ۱: ثابت کنید $(A-B)=(B'-A')$

حل:

$(A-B)=(A\cap B')=(B'\cap A)=(B'-A')$

مسئلهٔ ۲: ثابت کنید اگر $A-B=A$ آن‌گاه $(A\cap B)=\varnothing$ و برعکس:

حل:

$A-B=A\Rightarrow(A\cap B')=A\Leftrightarrow A\subseteq B'$
$\Leftrightarrow(A\cap B)=\varnothing$

نتیجه: اگر $A-B=A$ آن‌گاه $B-A=B$ و برعکس:

اثبات:

$A-B=A\Leftrightarrow(A\cap B)=\varnothing\Leftrightarrow(B\cap A)=\varnothing$
$\Leftrightarrow B-A=B$

تذکر مهم: قوانین توزیع‌پذیری یا پخشیِ اجتماع نسبت به اشتراک و اشتراک نسبت به اجتماع برقرارند، یعنی:

$\text{I)}A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$\text{II)}A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cap(A\cap C)$

(توجه دارید که برای رسیدنِ از سمت چپ هر یک از تساوی‌های فوق به سمت راست باید از $A\cup$ یا $A\cap$ فاکتور بگیریم).

مثال: حاصل عبارت زیر را به دست آورید:

$(A\cup B)\cap(A\cup B')$

حل:

$(A\cup B)\cap(A\cup B')=A\cup(B\cap B')=A\cup\varnothing=A$

۴. عمل تفاضل متقارن: تفاضلِ متقارنِ دو مجموعه، مجموعه‌ای است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$(A\Delta B)=(A-B)\cup(B-A)$

تذکر: عمل Δ خاصیت جابه‌جایی دارد، یعنی:

$(A\Delta B)=(A-B)\cup(B-A)=(B-A)\cup(A-B)=B\Delta A$

چند تساوی مهم:

$\text{I)}\,A\Delta A=\varnothing$
$(A\Delta A=(A-A)\cup(A-A)=\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$
$\text{II)}A\Delta A'=U$
$(A\Delta A'=(A-A')\cup(A'-A)=A\cup A'=U)$
$\text{III)}U\Delta A=A'$
$(U\Delta A=(U-A)\cup(A-U)=A'\cup\varnothing=A')$
$\text{IV)}A\Delta\varnothing=A$
$(A\Delta\varnothing=(A-\varnothing)\cup(\varnothing-A)=A\cup\varnothing=A)$

قضیه: عمل تفاضل متقارن، خاصیت شرکت‌پذیری دارد، یعنی:

$\boxed{(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)}$

(اثبات این قضیه به عنوان تمرین برعهدهٔ شماست).

فرمول دیگری برای تفاضل متقارن

با اثبات مسئلهٔ زیر، یک فرمول دیگر برای تفاضل متقارن (برحسب اجتماع و اشتراک) به دست می‌آید.

مسئله: ثابت کنید:

$\boxed{(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)}$

اثبات:

$(A-B)\cup(B-A)=(A\cap B')\cup(B\cap A')$

$\overset{\text{پخشی}}{=}[(A\cap B')\cup B]\cap[(A\cap B')\cup A']$

$\overset{\text{پخشی}}{=}[(A\cup B)\cap(B'\cup B)]\cap[(A\cup A')\cap(B'\cup A')]$

$=[(A\cup B)\cap U]\cap[U\cap(B'\cup A')]=(A\cup B)\cap(A'\cup B')$

$=(A\cup B)-(A'\cup B')'=(A\cup B)-(A\cap B)$

متمم تفاضلِ متقارن

اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند، همواره داریم:

$\boxed{(A\Delta B)'=(A'\Delta B)=(A\Delta B')}$

برای اثبات تساویِ فوق از تعریف تفاضل متقارن و مسئلهٔ قبل استفاده می‌کنیم:

$(A\Delta B)'=[(A-B)\cup(B-A)]'=[(A-B)'\cap(B-A)']$

$=(A\cap B')'\cap(B\cap A')'=(A'\cup B)\cap(B'\cup A)\quad(۱)$

$=(A'\cup B)-(A\cup B')'\overset{\text{مسئلهٔ قبل}}{=}(A'\cup B)-(A'\cap B)=(A'\Delta B)$

و به همین ترتیب با جابه‌جایی مجموعه‌ها در رابطهٔ (۱) تساوی دوم ثابت می‌شود:

$(A\Delta B)'=(A'\cup B)\cap(B'\cup A)=(B'\cup A)\cap(A'\cup B)$

$=(A\cup B')-(A'\cup B')\overset{\text{مسئله قبل}}{=}(A\cup B')-(A\cap B')=(A\Delta B')$

مسائل مهم

در حل کلیهٔ مسائل زیر فقط از جبر مجموعه‌ها شامل تعاریف، قضیه‌ها و مسائلِ حل شده، استفاده خواهد شد.

با استفاده از جبر مجموعه‌ها هر یک از تساوی‌های زیر یا درستی گزاره‌های زیر را ثابت کنید:

$\text{I)}\begin{cases}A\cup(A\cap B)=A & (۱)\\ A\cap(A\cup B)=A & (۲)\end{cases}$ قوانین جذب

(اگر مجموعه‌ای با دو عمل $\cup$ و $\cap$ دوبار ظاهر شود، هر مجموعهٔ دیگری جذب آن می‌شود و حاصل خود آن مجموعه خواهد شد)

اثبات: روش اول

$$A\cup(A\cap B)=(A\cap U)\cup(A\cap B)=A\cap(U\cup B)$$
$$=A\cap U=A$$

روش دوم: (استفاده از قضیهٔ اجتماع و اشتراک)

$$(A\cap B)\subseteq A\Rightarrow A\cup(A\cap B)=A$$

تساویِ (۲) با استفاده از (۱) به راحتی نتیجه می‌شود:

اثبات (۲): $A\cap(A\cup B)\overset{\text{بخشی}}{=}(A\cap A)\cup(A\cap B)=A\cup(A\cap B)\overset{(۱)}{=}A$

II) قانون حذف برای هر یک از دو عملِ $\cup$ و $\cap$ به تنهایی برقرار نیست، یعنی برای مثال از $A\cup B=A\cup C$ در حالت کلی نمی‌توان نتیجه گرفت که B=C، ولی داریم:

$$\begin{cases}A\cup B=A\cup C\\ A\cap B=A\cap C\end{cases}\Rightarrow B=C$$

اثبات:

$$B\overset{\text{جذب}}{=}B\cap(A\cup B)\overset{\text{فرض}}{=}B\cap(A\cup C)\overset{\text{بخشی}}{=}(B\cap A)\cup(B\cap C)$$
$$=(A\cap B)\cup(B\cap C)\overset{\text{فرض}}{=}(A\cap C)\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap C$$
$$\overset{\text{فرض}}{=}(A\cup C)\cap C\overset{\text{جذب}}{=}C$$

$$\text{III)}A\subseteq B\Leftrightarrow B'\subseteq A'$$

اثبات:

$$A\subseteq B\Leftrightarrow(A\cup B)=B\Leftrightarrow(A\cup B)'=B'$$
$$\Leftrightarrow(A'\cap B')=B'\Leftrightarrow B'\subseteq A'$$

$$\text{IV)}A\subseteq B\Rightarrow(A\cup C)\subseteq(B\cup C)$$

اثبات:

$$\overbrace{(A\cup C)}^{E}\cap\overbrace{(B\cup C)}^{D}=(A\cap B)\cup C\overset{A\subseteq B}{=}\overbrace{(A\cup C)}^{E}$$
$$\overset{\text{قضیهٔ ۲ در اشتراک}}{\Rightarrow}\quad\overbrace{(A\cup C)}^{E}\subseteq\overbrace{(B\cup C)}^{D}$$

(هرگاه ثابت شود اشتراک دو مجموعهٔ E و D یکی از آن دو مجموعه مثلاً E باشد، طبق قضیه باید $E\subseteq D$).

$$\text{V)}A\subseteq B\Rightarrow(A\cap C)\subseteq(B\cap C)$$

اثبات:

$$(A\cap C)\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap C\overset{A\subseteq B}{=}(B\cap C)$$
$$\overset{\text{قضیهٔ ۲ در اجتماع}}{\Rightarrow}\quad(A\cap C)\subseteq(B\cap C)$$

$$\text{VI)}A=B\Leftrightarrow(A\cup B)=(A\cap B)$$

اثبات: فرض کنیم A=B در این صورت داریم:

$$(A\cup B)\overset{A=B}{=}(A\cup A)=A=(A\cap A)\overset{A=B}{=}(A\cap B)$$

حال فرض می‌کنیم $(A\cup B)=(A\cap B)$ و ثابت می‌کنیم A=B.

$$A\overset{\text{جذب}}{=}A\cap(A\cup B)\overset{\text{فرض}}{=}A\cap(A\cap B)=(A\cap B)\overset{\text{قضیهٔ ۲ در }\cap}{\Rightarrow}A\subseteq B(۱)$$
$$A\overset{\text{جذب}}{=}A\cup(A\cap B)\overset{\text{فرض}}{=}A\cup(A\cup B)=(A\cup B)\overset{\text{قضیهٔ ۲ در }\cup}{\Rightarrow}B\subseteq A(۲)$$
$$(۱),(۲)\Rightarrow A=B$$

$$\text{VII)}A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$$

اثبات: $(A\cap B)-(A\cap C)=(A\cap B)\cap(A\cap C)'$

$$=(A\cap B)\cap(A'\cup C')$$
$$=[(A\cap B)\cap A']\cup[(A\cap B)\cap C']$$
$$\overset{\text{جابه‌جایی و شرکت‌پذیری}}{=}[B\cap(A\cap A')]\cup[(A\cap B)\cap C']$$
$$=(\underbrace{B\cap\varnothing}_{\varnothing})\cup[A\cap(B\cap C')]=A\cap(B-C)$$

(چون اشتراک خاصیت جابه‌جایی دارد، لذا عمل اشتراک از راست نیز در تفاضل توزیع‌پذیر است).

$$\text{IIX)}\begin{cases}\text{(الف} \ A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)\\ \text{(ب} \ A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)\end{cases}$$

(در توزیع‌پذیریِ تفاضل در اجتماع و اشتراک از سمت چپ این دو عمل به یکدیگر تبدیل می‌شوند).

اثبات الف:

$$(A-B)\cap(A-C)=(A\cap B')\cap(A\cap C')$$
$$=[(A\cap B')\cap A]\cap C'$$
$$\overset{\text{جابه‌جایی و شرکت‌پذیری}}{=}[(\underbrace{A\cap A}_{A})\cap B']\cap C'=(A\cap B')\cap C'=A\cap(B'\cap C')$$
$$=A-(B'\cap C')'=A-(B\cup C)$$

اثبات ب:

$$(A-B)\cup(A-C)=(A\cap B')\cup(A\cap C')\overset{\text{فاکتورگیری}}{=}$$
$$A\cap(B'\cup C')=A-(B'\cup C')'=A-(B\cap C)$$

$$\text{IX)}\begin{cases}A\subseteq B\\ A'\subseteq B\end{cases}\Rightarrow B=U$$

اثبات:

$$A\subseteq B,A'\subseteq B\Rightarrow(A\cup A')\subseteq(B\cup B)\Rightarrow U\subseteq B$$

و چون همواره $B\subseteq U$ پس B=U

X) $\begin{cases} A\subseteq B \\ A\subseteq B' \end{cases} \Rightarrow A=\varnothing$

اثبات:

$A\subseteq B, A\subseteq B' \Rightarrow (A\cap A)\subseteq (B\cap B')$

$\Rightarrow A\subseteq \varnothing$

و چون همواره $\varnothing\subseteq A$ پس $A=\varnothing$.

XI) $(A\Delta B)=(A'\Delta B')$

اثبات:

$(A\Delta B)=(A-B)\cup(B-A)=(B'-A')\Delta(A'-B')$

$=(B'\Delta A') \overset{\text{جابه‌جایی}}{=} (A'\Delta B')$

(قبلاً ثابت کردیم که، $A-B=B'-A'$).

XII) $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$

اثبات:

$A\cap(B\Delta C)=A\cap[(B-C)\cup(C-B)]$

$\overset{\text{پخشی}}{=}[A\cap(B-C)]\cup[A\cap(C-B)]=$

$\overset{\text{مسئلهٔ VII}}{=}[(\underbrace{A\cap B}_{D})-(\underbrace{A\cap C}_{E})]\cup[(\underbrace{A\cap C}_{E})-(\underbrace{A\cap B}_{D})]=D\Delta E$

$=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$

XIII) $A\subseteq B\Rightarrow (A'\cup B)=U$

اثبات:

$A\subseteq B\Rightarrow (A\cap B)=A\Rightarrow A'\cup(A\cap B)=(A'\cup A)$

$\Rightarrow (\underbrace{A'\cup A}_{U})\cap(A'\cup B)=U\Rightarrow U\cap(A'\cup B)=U$

$\Rightarrow (A'\cup B)=U$

IXV) عمل تفاضل از سمت راست روی هر چهار عمل اشتراک، اجتماع، تفاضل و تفاضل متقارن توزیع‌پذیر است:

الف) $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$

ب) $(A\cap B)-C=(A-C)\cap(B-C)$

ج) $(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$

د) $(A\Delta B)-C=(A-C)\Delta(B-C)$

اثبات الف:

$(A\cup B)-C=(A\cup B)\cap C' \overset{\text{پخشی}}{=} (A\cap C')\cup(B\cap C')$

$=(A-C)\cup(B-C)$

اثبات ب:

$(A-C)\cap(B-C)=(A\cap C')\cap(B\cap C') \overset{\text{جابه‌جایی و شرکت‌پذیری}}{=}$

$(A\cap B)\cap(C'\cap C')=(A\cap B)\cap C'=(A\cap B)-C$

اثبات ج:

$(A-C)-(B-C)=(A\cap C')-(B\cap C')$

$\overset{\text{مسئلهٔ VII}}{=}(A-B)\cap C'=(A-B)-C$

اثبات د:

$(A\Delta B)-C=[(A-B)\cup(B-A)]-C$

$\overset{\text{قسمت اول}}{=}[(A-B)-C]\cup[(B-A)-C]$

$\overset{\text{قسمت ج}}{=}[(\underbrace{A-C}_{D})-(\underbrace{B-C}_{E})]\cup[(\underbrace{B-C}_{E})-(\underbrace{A-C}_{D})]=(D\Delta E)$

$=(A-C)\Delta(B-C)$

XV) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-C$

اثبات:

$A\cap(B-C)=A\cap(B\cap C')=(A\cap B)\cap C'=(A\cap B)-C$

تفریح اندیشه

پاسخ گفت‌وگوی دو مسافر

اگر رضا ۲۰ سال داشته باشد، بنابر فرض (۱) بایستی احمد پسر بزرگتر باشد و ۲۰ ساله نباشد. در این صورت بنابر فرض (۳) نتیجه می‌شود که حمید پسر بزرگتر است؛ اما احمد و حمید هر دو نمی‌توانند پسر بزرگتر باشند و فرض ۲۰ ساله بودن رضا نادرست است.

اگر رضا پسر بزرگتر باشد، بنابر فرض (۲) بایستی احمد پسر کوچکتر باشد و ۲۰ سال نداشته باشد. در این صورت بنابر فرض (۳) نتیجه می‌شود که حمید پسر بزرگتر باشد. حمید و رضا هر دو نمی‌توانند پسر بزرگتر باشند و فرض پسر بزرگتر بودن رضا نیز نادرست است.

رضا که نه ۲۰ ساله و نه پسر بزرگتر می‌تواند باشد، پسر کوچکتر است. احمد هم اگر پسر بزرگتر باشد، با فرض (۳) سازگار نیست، زیرا احمد و حمید هر دو نمی‌توانند پسر بزرگتر باشند. بنابراین، احمد ۲۰ ساله و حمید پسر بزرگتر است.