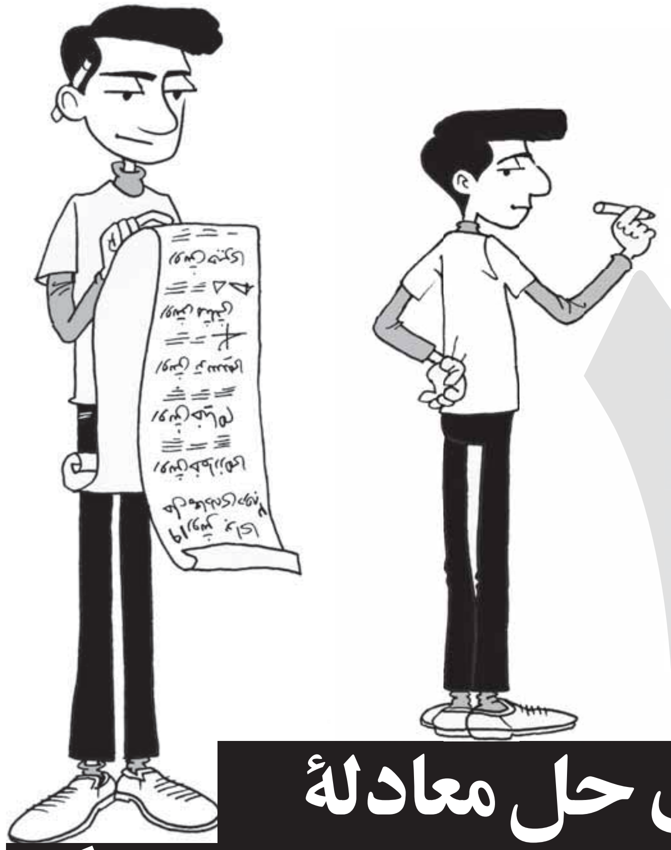


اشاره

از آن‌جا که هـر روش، در واقع یک یا چند ایدهٔ جدیـد را القا می‌کنـد، در این مختصر به ارائـهٔ روش‌های عمومی آزمـون و خطا، عددی (تکرار)، هندسی (تحلیلی، ترسیمی، تعبیری)، جبری، آنالیزی، مثلثاتی، ماتریسـی (برداری)، ترکیبی (تلفیقی از چند روش) پرداخته‌ایم که هـر یک از روش‌ها علاوه بر القای ایده، نوآوری و خلاقیـت، کاربردهایی را نیز دربردارند که به آن‌ها اشـاره شـده و ممکن اسـت کاربردهای عملی یا نظری بسیار دیگری نیز داشته باشند کـه به تفضیل در شـماره‌های آینـده به نتایج آن‌ها خواهیم پرداخت.

۲۹ روش برای حل معادلهٔ درجهٔ دوم و کاربردهای آن‌ها ۱

$$ax^{۲} + bx + c = ۰$$

سیدمحمدرضا هاشمی موسوی
hashemi-moosavi@yahoo.com

مسئلهٔ مسابقه‌ای

به مناسبت بیستمین سال مجله (شمارهٔ ۷۰)

مسابقهٔ ویژه ۷۰ (بیستمین سالگرد مجله)

* توجه: روش‌های ارائه شـده با ذکر منبع، به نام مؤلف مقاله در شماره‌های آتی به چاپ می‌رسد.

روش‌هـای دیگری را که به نظر شـما (غیر از ۲۹ روش دیگر که ارائه خواهد شد) برای حل معادلهٔ درجهٔ دوم می‌توان ارائه داد، برای ما ارسال کنید (به نفرات اول تا بیستم جوایزی نفیس اهدا خواهد شد).

مقدمه

در بسـیاری از آثار ریاضی قدیمی مسـائلی دیده می‌شـود که خواهان کشـف کمیتی مجهول‌انـد. گاهی این مجهـول، کمیتی هندسـی است که تحت شرایط مسئله به مقادیر معلوم ارتباط پیدا می‌کنـد. مثالی از این نـوع، قضیهٔ دوم مقالـهٔ دوم اصول اقلیدس راجع به تقسـیم قطعه خطی مفـروض مانند AB به دو قطعهٔ AG و GB اسـت به‌طوری که مساحت مستطیلی با اضلاع AB و GB با مساحت مربعی به ضلع AG برابر باشد:

در این‌جـا یک مقـدار معلوم (AB) و یـک قطعه خط مجهول (AG یـا GB) وجـود دارد، زیـرا: GB= AB-AG و بـا شـرط $AB.GB=AG^{۲}$.

در واقع این کار، تقسیم یک پاره‌خط به بخش طلایی است.

در این‌جـا اگر یک مجهول را به‌طور دلخواه بین دو رابطه حذف کنیم و برای سهولت مقدار AB را به a و مقدار مجهول را به x نشان دهیم: AB=a و AG=x ; $x^{۲}+ax=a^{۲}$ ملاحظه می‌شـود که مسـئلهٔ مربوط به تقسیم یک پاره‌خط به بخش طلایی در واقع به یک معادلهٔ درجهٔ دوم منجر می‌شـود که این معادله را می‌توان سـاده‌ترین نوع

معادلهٔ درجهٔ دوم برای حل یک مسئلهٔ هندسی دانست.

البته ۱۸۰۰ سال پیش از میلاد، کاتبان بابلی قادر به حل مسائلی بودنــد که به معادله‌های درجهٔ دوم می‌انجامید و اگرچه بابلی‌ها به جای «$x^2+6x=27$» می‌گفتند «مســاحت مربعم را به شــش برابر ضلع آن اضافه کرده‌ام و حاصل ۲۷ شده است»؛ ولی روشی را برای حل این مســئله به کار می‌بردند که پایه و اساس آن، همان چیزی است که امروزه به کار می‌بندیم. البته در ترد بسیاری از نویسندگان یونانی، نحوهٔ پرداختن به مســئلهٔ یافتن مجهولات، هندســی بوده اســت. برای مثال، اقلیدس در تقســیم قطعه خط به بخش طلایی به صورت هندســی با مســئلهٔ حل معادلهٔ درجهٔ دوم سروکار دارد، زیرا هرگاه با فرض $AB=a$ و $AG=x$ شرط $AB.GB=AG^2$ به $a(a-x)=x^2$ تبدیل شود، نتیجه می‌شــود که $a^2=ax+x^2$؛ و این مستلزم آن اســت که با مفروض‌بودن قطعه خطی بــه طول a قطعه خطی به طول x بســازیم به طوری کــه $x^2+ax=a^2$. اما اقلیدس به مفهوم عــددی «طول یک قطعه خط» نمی‌اندیشــد، بلکه به جای آن وی به $x^2+ax=x(x+a)$ به عنوان مســتطیلی که دارای اضلاع x و $x+a$ اســت، می‌نگرد. او وقتــی قضیهٔ ۶ مقالهٔ دوم اصــول خود را به‌کار می‌برد، در عمل «مربع را کامل می‌کند»، به این معنا که اگر مربعی به ضلع $\frac{a}{2}$ به این مســتطیل یعنی $x(x+a)$ اضافه کنیم، نتیجهٔ آن مســاحت مربعی به ضلع $(x+\frac{a}{2})$ خواهد بود که در این صورت، x مساوی با ضلع این مربع منهای مقدار معلوم $\frac{a}{2}$ است:

$$x(x+a)+(\frac{a}{2})^2=\underbrace{x^2+ax}_{a^2}+\frac{a^2}{4}=(x+\frac{a}{2})^2=\frac{5a^2}{4};$$

$$x+\frac{a}{2}=\frac{a\sqrt{5}}{2};\ x=\frac{a\sqrt{5}}{2}-\frac{a}{2};\ x=(\frac{\sqrt{5}-1}{2})a$$

نتیجهٔ تاریخی

بخش طلایی، تنها یکی از نمونه‌های مســائل هندســی اســت که هندســه‌دانان یونانی دوران کلاسیک چگونه توانستند به روابط درجهٔ دومی مانند $x^2+ax=a^2$ به عنوان احکامی دربارهٔ مســاحت‌ها بنگرند. آن‌ها برای بررســی این احکام، مجموعه‌ای از قضایا، مانند قضایــای مقالهٔ دوم اصول را در اختیار داشــتند که به آن‌ها اجازه می‌داد این مســاحت‌ها را کامل و مربع‌های معلومی ایجاد کنند که اضلاع آن‌هــا قطعه خط‌های مطلوب را به دســت دهند. به اعتقاد بســیاری از محققان، دلیل تاریخی تأکید یونانیان بر هندســه این اســت که در حل معادله‌های درجهٔ دوم اعداد گنگی از قبیل $\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$، $\sqrt{5}$ و... ناگزیر پیــش می‌آیند. چون یونانیان حتی تعریفی برای این اعداد نداشــتند و قادر هم نبودنــد به‌طور دقیق به آن‌ها بپردازند، در نتیجه هر موقع که طالب اســتدلال‌های دقیق بودند، خود کمیت‌های هندسی را به‌کار می‌بردند.

چگونگی تلفیق رهیافت عددی و هندسی برای یک علم جدید

جبر خوارزمی

از درون ایــن میراث دوگانهٔ حل مســائل، که خواســتار یافتن مجهولات عددی و هندســی بودند، تمدن اســلامی علمی را ابداع کردنــد کــه نام جبر را بر آن نهاد. منشــأ خود ایــن کلمه در واقع کلمهٔ عربی «الجبر» اســت که در عنوان بســیاری از آثار عربی به عنــوان بخشــی از عبارت «الجبــر و المقابله» دیده می‌شــود. یک معنای «جبر»، «به جای خود برگرداندن» یا «جبران» است. برای مثال، قراردادن $7x+3=4$ به جای $4x+3=4-3x$ مثالی از جبر اســت. «و» همان واو عطف است و جبر را به کلمهٔ «مقابله» الحاق می‌کند؛ «مقابله» خود، در این مضمون به معنای گذاشــتن تفاضل دو جملــهٔ هم‌جنس که در دو طرف معادله‌ای قرار دارند، در طرفی اســت که مقدار بزرگ‌تــر در آن قرار دارد. برای مثــال، قرار دادن $3x=4$ بــه جای برابری $3x+1=5$ مثالی از «مقابله» اســت. به وضوح، با این دو عمل، هر معادلهٔ جبری به معادله‌ای تبدیل خواهد شد که در آن مجموعی از جملات مثبت در یک طرف برابر است با صفــر یا مجموعی از جملات مثبت که متضمن توان‌های مختلف x اند. به‌ویژه، هر معادلهٔ درجهٔ دوم با یک ریشهٔ مثبت به یکی از سه صورت استاندهٔ زیر قابل تحویل است:

$$px^2+qx=r;\ px^2+r=qx;\ px^2=qx+r$$

که در این معادله‌ها p، q و r، هر ســه مثبت‌اند و این شــرطی اســت که در سراسر ریاضیات اســلامی دورهٔ میانی اعمال می‌شود. این شــرط را مجدداً در اثر «عمر خیام» هم می‌بینیم. این قاعده تا اوایل سدهٔ شانزدهم در ریاضیات غربی نیز حکمفرماست.

نتیجهٔ بحث

علم «جبر و مقابله» در آغاز خود، علم تبدیل معادلات متضمن یک یا چند مجهول به یکی از صورت‌های اســتاندهٔ سه‌گانهٔ فوق و ســپس حل معادله در این صورت بود. البتــه ریاضی‌دانان دیگری مثل ثابت بــن قره، ابوکامل (ملقب به حاســب مصری با گام‌هایی فراتــر از خوارزمی)، ابوبکر کرجی و غیره روی حل معادله‌ها به‌ویژه معادله‌های درجهٔ دوم کار کرده‌اند که باید تقدیر شوند.

انواع روش‌های حل معادلهٔ درجهٔ دوم

می‌دانیم برای یک مسئله ممکن است روش‌های حل گوناگونی وجود داشته باشد که با ابتکار، خلاقیت و نوآوری بتوان به تعدادی از آن‌ها دست یافت. البته برخی از مسائل را ممکن است با هر یک از روش‌های زیر حل کرد و حتی ممکن است برای هر نوع، چندین

طریق مختلف وجود داشته باشد که ما در این‌جا به تعدادی از آن‌ها اشاره می‌کنیم:

۱) آزمون و خطا، ۲) عددی (تکرار)، ۳) هندسی (تحلیلی، ترسیمی، تعبیری)، ۴) جبری، ۵) آنالیزی، ۶) مثلثاتی، ۷) ماتریسی (بُرداری)، ۸) ترکیبی (تلفیقی از چند روش)

* **توجه:** روش‌های دیگری نیز با ابزارهای دیگر شاخه‌های ریاضیات وجود دارند که در این مقالهٔ مختصر نمی‌توانیم به آن‌ها بپردازیم.

در این‌جا برای حل معادلهٔ درجهٔ دوم (۱) از هر یک از شیوه‌های بالا استفاده می‌کنیم و به صورتی کاملاً متنوع و خلاق و همراه با نوآوری به ارائهٔ طریق می‌پردازیم.

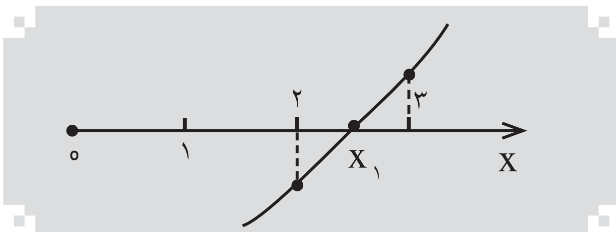
۱) روش آزمون و خطا

این روش یکی از ساده‌ترین روش‌های حل برای معادلهٔ درجهٔ دوم است که در واقع یک جواب تقریبی به دست می‌دهد. این روش را برای هر معادلهٔ پیچیده‌تر نیز می‌توان به‌کار برد. البته این روش عددی برای معادله‌هایی با ضریب‌های معلوم به‌کار می‌رود. برای مثال، معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-3x+1=0$ را با این روش حل می‌کنیم.

در این روش در مرحلهٔ اول جدول زیر را تکمیل می‌کنیم:

x	-1	0	1	2	3	...
x^2-3x+1	5	1	-1	-1	1	...

چون مقدار عبارت «$y=x^2-3x+1$» به ازای $x=0$ مثبت و به ازای $x=1$ منفی است (با توجه به نمودار منحنی $y=x^2-3x+1$ ثابت می‌شود) یک جواب معادله بین ۰ و ۱ و با همین استدلال جواب دیگر معادله بین ۲ و ۳ خواهد بود (با توجه به رسم نمودار منحنی



بدیهی است) با تکرار این عمل و در فاصله‌های کوچک‌تر به جواب‌های معادله با هر دقت و تقریب دلخواه می‌توان دست یافت.

کاربرد: این روش برای حل هر معادلهٔ جبری، مثلثاتی و... با ضرایب عددی قابل اجراست.

۲) روش عددی (تکرار)

این روش نیز مانند روش اول (آزمون و خطا) به سهولت برای حل تقریبی معادلهٔ درجهٔ دوم و هر معادلهٔ پیچیدهٔ دیگر که بتوان آن را به صورت $x=g(x)$ نشان داد، قابل اجراست. برای نشان دادن روش عمل، به حل معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2+x-1=0$ می‌پردازیم.

ابتدا معادلهٔ مورد نظر را به صورت $x=\frac{1}{x+1}$ می‌نویسیم و برابری بازگشتی زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$x_{n+1}=\frac{1}{x_n+1}$$

پس، می‌توان عمل تکرار را به صورت زیر انجام داد:

$$n=1:\ x_2=\frac{1}{x_1+1},\ x_1=0;\ x_2=\frac{1}{0+1}=1$$

$$n=2:\ x_3=\frac{1}{x_2+1},\ x_2=1;\ x_3=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}=0/5$$

$$n=3:\ x_4=\frac{1}{x_3+1},\ x_3=\frac{1}{2};\ x_4=\frac{1}{\frac{1}{2}+1}=\frac{2}{3}\approx 0/\overline{6}$$

با تکرار این عمل به تعداد دلخواه به تقریب دلخواه خواهیم رسید. در این مثال، پس از تکرار پی‌درپی عمل، به یک ریشهٔ مثبت معادله دست می‌یابیم:

$(x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2})x\approx 0/6180$ (ریشهٔ واقعی معادله)

و از ۷ مرتبه تکرار:

$(n=7)x_8\approx 0/6180$ (ریشهٔ تقریبی معادله)

کاربرد: این روش برای حل معادله‌هایی است که ضرایب عددی دارند و آن‌ها را می‌توان به صورت $x=g(x)$ نوشت.

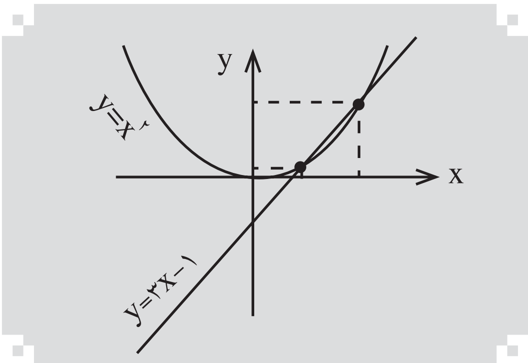
● روش‌های هندسی

۳) روش تحلیلی ـ ترسیمی

می‌خواهیم معادلهٔ $x^2-3x+1=0$ را به روش تحلیلی-ترسیمی حل کنیم. برای حل این معادله ابتدا معادله را به دو ضابطهٔ تابع خطی و تابع منحنی (سهمی) به صورت زیر می‌نویسیم $(x^2=3x-1)$:

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=3x-1 \end{cases}$$

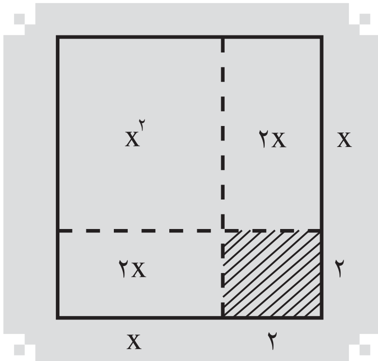
واضح است که محل تلاقی دو نمودار و اندازه‌گیری طول نقطه‌های تقاطع به‌طور تقریبی جواب‌های معادلهٔ موردنظر هستند.



کاربرد: این روش برای حل بسیاری از معادله‌هایی که از چند نوع تابع جبری، مثلثاتی، لگاریتمی و... تشکیل یافته‌اند و هم‌چنین معادله‌هایی از درجه‌های بالاتر، به‌ویژه معادلهٔ درجهٔ دوم به کار می‌رود که خیام با این روش حل کرده است.

۴) روش خوارزمی (تعبیری)

خوارزمی برای حل معادله‌های درجهٔ دوم، شش حالت خاص را مورد بررسی قرار می‌دهد. از میان این حالت‌ها به اختصار فقط یکی از آن‌ها را توضیح می‌دهیم. معادلهٔ $x^۲+۴x-۲۱=۰$ را در نظر می‌گیریم. در روش خوارزمی، جمله‌های دارای مجهول را در یک طرف برابری نگه می‌داریم و عدد ثابت را به طرف دیگر می‌بریم. بنابراین، معادله را به صورت $x^۲+۴x=۲۱$ می‌نویسیم. نصف ضریب x را حساب می‌کنیم (در این‌جا عدد ۲ است). مساحت مربعی با ضلع x+۲ را می‌توان حساب کرد. در شکل ۳ مساحت مربع هاشورخورده برابر ۲×۲ است و بقیهٔ مربع، مساحتی برابر $x^۲+۲(۲x)=x^۲+۴x$ دارد که آن هم برابر ۲۱است.



بنابراین، مساحت کل مربع بزرگ برابر ۲۵=۴+۲۱ است. پس، طول ضلع مربع بزرگ برابر $x+۲=\sqrt{۲۵}=۵$ و در نتیجه x=۳.

کاربرد: این روش برای تحلیل ریشه‌های معادله‌های درجهٔ زوج بسیار مناسب است. با تعمیم این روش برای حل هندسهٔ معادلهٔ درجهٔ سوم می‌توان منحصر بودن جواب را در حالت $\Delta>۰$ (مبین معادلهٔ درجهٔ سوم) به اثبات رساند. (برای اطلاع بیش‌تر رجوع کنید به شمارهٔ ۲۲ رشد آموزش ریاضی، مقالهٔ مؤلف با عنوان «حل هندسی معادلهٔ درجهٔ سوم»؛ مشابه روش خوارزمی مکعبی جدید با امتداد اضلاع مکعب روی مکعب اولیه به ضلع z بنا می‌شود).

۵) روش خیام

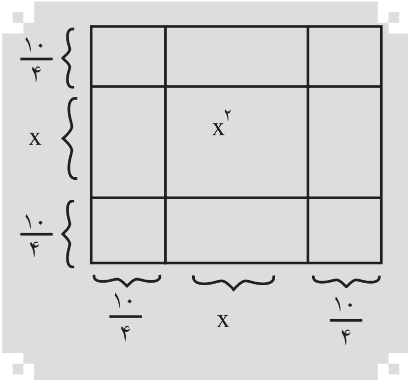
خیام و خوارزمی روش مشابهی را برای اثبات جواب معادلهٔ «مالی و ده جذر معادل سی و نه درهم» به‌کار برده‌اند. این معادله به زبان امروزی چنین است:

(مالی = $x^۲$، ده جذر = $۱۰x$) $x^۲+۱۰x=۳۹$

خیام امتداد اضلاع مربع به ضلع x را از چهار گوشه مانند شکل زیر انجام می‌دهد:

$$S_T=\underbrace{x^۲+۴(\frac{۱۰}{۴}x)}_{۳۹}+۴(\frac{۱۰}{۴})^۲=(x+۵)^۲$$

$$(x+۵)^۲=۳۹+۲۵=۶۴;\ x+۵=۸;\ x=۳$$



کاربرد: کاربردی را که برای روش خوارزمی ذکر شد، برای این روش نیز می‌توان یادآور شد.

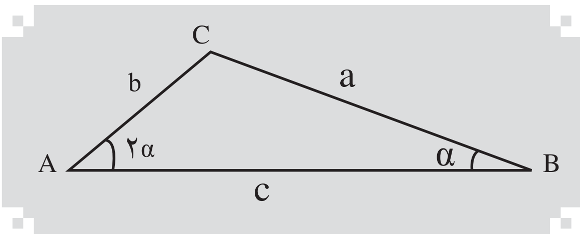
توجه: روش ششم که به نام روش مثلثی یا خط‌کش و نقاله نام‌گذاری شده، روش ابداعی مؤلف است.

۶) روش مثلثی (خط‌کش و نقاله)

برای القای ایدهٔ این روش، مسئلهٔ زیر را یادآوری می‌کنیم:

هرگاه یک زاویه از مثلثی دو برابر زاویه‌ای دیگر در آن مثلث باشد، رابطهٔ مستقل بین اضلاع به صورت زیر است:

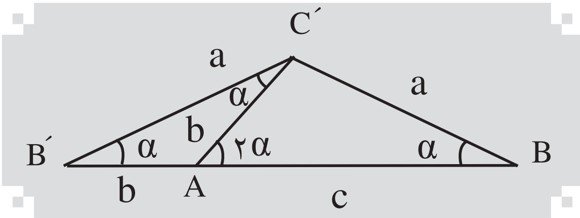
$a^۲-b^۲=bc$ (۱)



برای اثبات رابطهٔ (۱) کافی است در شکل زیر رابطهٔ تشابه را بنویسیم:

$\frac{b}{a}=\frac{a}{b+c}$ (۲)

توضیح: ابتدا ضلع AB را (از سمت چپ) به اندازهٔ b امتداد می‌دهیم و با توجه به AB'=b، رأس C را به B' وصل می‌کنیم. از تشابه دو مثلث $\overset{\Delta}{AB'C}$ و $\overset{\Delta}{BB'C}$ رابطهٔ (۲) یا (۱) نتیجه می‌شود.



اکنون اگر در رابطهٔ (۱)، مقدار b را به x، مقدار c را به p و مقدار a^2 را به q نشان دهیم، معادلهٔ درجهٔ دوم زیر حاصل می‌شود:

$x^2 + px = q$ (۳)

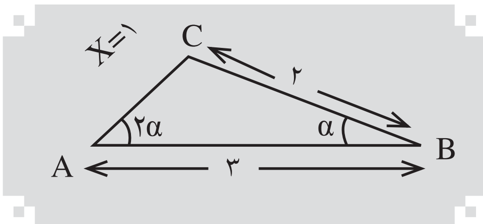
با توجه به برابری‌های c=p و $a = \sqrt{q}$، واضح است که ریشهٔ مثبت معادلهٔ (۳) یعنی مقدار x، در واقع ضلع سوم مثلث ABC است.

برای مثال، ریشهٔ مثبت معادلهٔ $x^2 + 3x - 4 = 0$ را به روش مثلثی تعیین می‌کنیم.

در این مثال داریم $AB = c = p = 3$ و $BC = a = \sqrt{4} = 2$.

بنابراین، با رسم مثلث ABC ضلع AC ریشهٔ مثبت معادله است: $AC = x = 1$

(ریشهٔ مثبت معادلهٔ $x^2 + 3x = 4$ برابر x=1 است)



توجه: این روش حل با خط‌کش و نقاله انجام می‌شود.

کاربرد: با تعمیم این روش، یعنی مثلثی با زاویه‌های α و nα معادله‌های درجهٔ nام $(n = 3,4)$ نیز قابل حل‌اند.

توجه: روش هفتم به نام روش دایره‌ای یا خط‌کش و پرگار نام‌گذاری شده که با تحلیل کردن روابط بین ریشه‌ها و ضرایب، روش ابداعی مؤلف است.

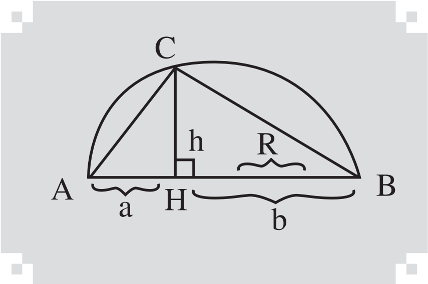
۷) روش دایره‌ای (خط‌کش و پرگار)

برای القای ایدهٔ این روش، مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را محاط در نیم‌دایره‌ای به شعاع R در نظر می‌گیریم:

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC می‌توان نوشت: $a.b = h^2$

پس:

$$\begin{cases} a + b = 2R \\ a.b = h^2 \end{cases}$$



اکنون اگر a و b را ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2 - 2Rx - h^2 = 0$ در نظر بگیریم، از مقایسهٔ این معادله با معادلهٔ درجهٔ دوم عمومی زیر:

$x^2 - px - q = 0$ (۱)

می‌توان نوشت:

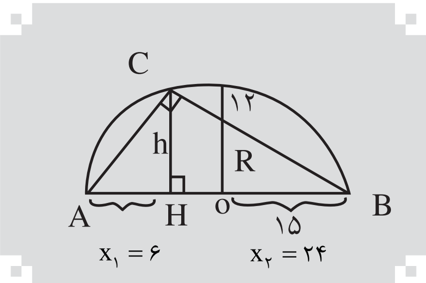
$$\begin{cases} -2R = -p \\ -h^2 = -q \end{cases} ; \begin{cases} R = \frac{p}{2} \\ h = \sqrt{q} \end{cases}$$

بنابراین، در عمل برای یافتن ریشه‌های مثبت معادلهٔ (۱) کافی است در نیم‌دایره‌ای به شعاع $\frac{p}{2}$ مثلث قائم‌الزاویه‌ای با ارتفاع وارد بر وتر AB به طول $\sqrt{q}$ محاط کنیم. برای مثال، ریشه‌های مثبت معادلهٔ (۲) $x^2 - 30x - 144 = 0$ را به روش دایره‌ای (خط‌کش و پرگار) تعیین می‌کنیم.

در این مثال، داریم $R = \frac{p}{2} = \frac{30}{2} = 15$ و $h = \sqrt{q} = \sqrt{144} = 12$، پس کافی است مثلثی با ارتفاع وارد بر وتر به طول h=12 را در نیم دایره‌ای به شعاع R=15 محاط کرد.

در این صورت قطعات جدا شدهٔ روی وتر مثلث قائم‌الزاویه ABC ریشه‌های معادلهٔ (۲) خواهند بود.

$$\left| \begin{array}{l} AH = x_1 = 6 \\ BH = x_2 = 24 \end{array} \right.$$



توجه: این روش حل با خط‌کش و پرگار است. یعنی ریشه‌ها با اندازه‌گیری با خط‌کش تعیین می‌شوند.

کاربرد: این روش مخصوص حالتی از معادلهٔ درجهٔ دوم است که در معادلهٔ عمومی $x^2 + mx + n = 0$ مقادیر m و n اعدادی منفی باشند، زیرا در حالت $m<0$ با روش‌های هندسی خوارزمی ـ خیام یا مثلثی قابل تعبیر نیست. با استفاده از این روش می‌توان به هر دو جواب مثبت معادله دست یافت (قطعات جدا شده روی وتر مثلث).

• روش‌های جبری

۸) روش مربع کامل

این روش در عمل همان روش خوارزمی است با این تفاوت که جبری است و نیازی به تعبیر هندسی ندارد و به همین دلیل در حالت عمومی می‌توان از آن استفاده کرد.

سعی بر این است که روش خوارزمی را به‌کار بریم. برای مثال معادلهٔ

$x^2 - 10x + 16 = 0$ (۱)

را در نظر می‌گیریم. ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$x^2 - 10x = -16$ (۲)

مربع نصف ضریب x را به دو طرف اضافه می‌کنیم (تا طرف اول معادله مربع کامل شود)

$x^2 - 10x + (-5)^2 = -16 + (-5)^2$ (۳)

معادلهٔ (۳) را به صورت مختصر می‌نویسیم:

$(x-5)^2 = 9$ (۴)

از دو طرف معادلهٔ (۴) جذر می‌گیریم و مقدار x را بدون محدودیت‌های هندسی به دست می‌آوریم (پس از جذرگیری از دو طرف، علامت‌های $\pm$ را می‌گذاریم):

$x - 5 = \pm 3$ (۵)

از معادلهٔ (۵) جواب‌های معادلهٔ (۱) تعیین می‌شوند:

$x = 5 \pm 3;\ x_1 = 2,\ x_2 = 8$

کاربرد: این روش برای حل عمومی معادلهٔ درجهٔ دوم به‌کار می‌رود. در این‌جا با این روش، معادلهٔ درجهٔ دوم (۱) را حل می‌کنیم:

$ax^2 + b + c = 0$ (۱)

با فرض $a \neq 0$ معادلهٔ (۱) را بر a تقسیم می‌کنیم و عدد ثابت $\frac{c}{a}$ را با تعویض علامت به طرف دوم می‌بریم و برای مربع‌سازی طرف اول، عبارت $(\frac{b}{2a})^2$ (در واقع مربع نصف ضریب x) را به دو طرف اضافه می‌کنیم:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a};\quad x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \quad (۲)$$

معادلهٔ (۲) را به صورت مختصر می‌نویسیم:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{\Delta}{4a^2} \quad (۳)$$

با فرض $\Delta \geq 0$ از دو طرف معادلهٔ (۳) جذر می‌گیریم (علامت‌های $\pm$ هر دو مورد قبول است):

ریشه‌های معادلهٔ (۱) $\Delta \geq 0:\ x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{\Delta}}{2a};\ x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ (مبین معادله)

۹) روش تجزیه

در برخی موارد، معادلهٔ درجهٔ دوم به صورت ضرب دو چند جمله‌ای درجهٔ اول برابر صفر است. برای مثال:

$x^2 - 3x = 0;\ x(x-3) = 0$ (۱)

و هم‌چنین:

$x^2 - 3x + 2 = 0;\ (x-1)(x-2) = 0$ (۲)

با توجه به یکی از خاصیت‌های اساسی اعداد:

* برای این‌که ضرب دو عدد صفر شود لااقل یکی از آن دو عدد صفر است.

$a.b = 0;\ a = 0$ یا $b = 0$

پس، معادلهٔ (۱) وقتی برقرار است که $x = 0$ یا $x - 3 = 0$ و هم‌چنین معادلهٔ (۲) وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$x - 1 = 0$ یا $x - 2 = 0$ (۳)

در واقع جواب‌های معادله‌های (۳) همان جواب‌های معادلهٔ زیر است:

$x^2 - 3x + 2 = 0$

بنابراین، با استفاده از تجزیهٔ عبارت درجهٔ دوم (طرف اول) توانستیم به جواب‌های معادله دست یابیم: $x_1 = 1;\ x_2 = 2$

کاربرد: در صورتی که بتوانیم چند جمله‌ای طرف اول معادله را تجزیه کنیم به‌راحتی می‌توانیم به جواب‌های معادلهٔ موردنظر دست یابیم.

۱۰) روش مربع‌سازی معادلهٔ عمومی

برای مربع‌سازی معادلهٔ عمومی $ax^2 + bx + c = 0$ (۱)

کافی است معادله را در $(4a)$ ضرب و عبارت b^2 را به دو طرف اضافه کنیم:

$$4a(ax^2 + bx + c) = 0;\ 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0;$$

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac = \Delta;\ (2ax + b)^2 = \Delta$$

با فرض $\Delta \geq 0$، پس از جذرگیری از دو طرف معادله:

$2ax + b = \pm\sqrt{\Delta}$

بنابراین داریم:

جواب‌های معادلهٔ (۱) $a \neq 0, \Delta \geq 0;\ x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

کاربرد: این روش برای حل عمومی معادلهٔ درجهٔ دوم (۱) بسیار مناسب و به سادگی و سهولت خاصی انجام می‌شود (به‌ویژه برای حل معادله‌های پارامتری مانند: $x^2 + 2mx + m + 1 = 0$ بسیار مناسب است و با سهولت انجام خواهد گرفت).

ادامه دارد...