حل معادلهٔ $f(x)=$

احمد قندهاری

معادلهٔ $f(x)=0$ در حالت کلی و برای هر عبارت از $f(x)$ قابل حل نیست و فقط در حالت‌های خاص می‌توان آن را حل کرد، ولی راه‌هایی وجود دارد که مقدار تقریبی ریشه‌ها را مشخص می‌کند و معمولاً به ماشین‌حساب نیاز داریم. قبل از ورود به این مبحث، قضیهٔ زیر را یادآور می‌شویم.

قضیهٔ بولتزانو

اگر تابع f در بازهٔ $[a,b]$ پیوسته و $f(a)$ و $f(b)$ مختلف العلامه باشند، آن‌گاه معادلهٔ $f(x)=0$ در بازهٔ (a,b) یک ریشهٔ حقیقی دارد.

حال به ادامهٔ بحث می‌پردازیم:

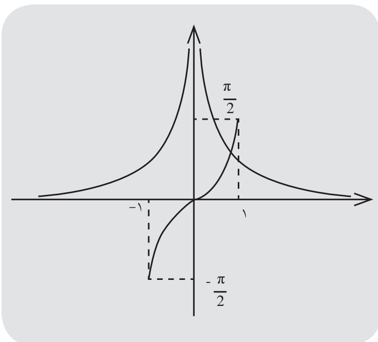
روش اول: تعیین تعداد ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$ به کمک نمودار عبارت $f(x)$ را به صورت $f(x)=g(x)-h(x)$ می‌نویسیم، سپس نمودارهای دو تابع g و h را رسم می‌کنیم. تعداد نقاط تقاطع دو منحنی g و h برابر تعداد ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$ است.

مثال ۱: تعداد ریشه‌های معادلهٔ $x^2 \operatorname{Arc\,tan} x - 1 = 0$ را بیابید.

حل: فرض می‌کنیم $f(x) = x^2 \operatorname{Arc\,tan} x - 1$. مسلماً در معادلهٔ $x^2 \operatorname{Arc\,tan} x - 1 = 0$، $x \neq 0$ دو طرف تساوی را بر x^2 تقسیم می‌کنیم

$$x^2 \operatorname{Arc\,tan} x - 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{Arc\,tan} x - \frac{1}{x^2} = 0$$

حال فرض می‌کنیم $g(x) = \operatorname{Arc\,tan} x$ و $h(x) = \frac{1}{x^2}$ باشند. نمودارهای دو تابع g و h را رسم می‌کنیم.



به‌طوری که ملاحظه می‌شود نمودارهای دو تابع g و h در یک نقطه متقاطع‌اند، پس معادلهٔ $x^2 \operatorname{Arc\,tan} x - 1 = 0$ یک ریشهٔ حقیقی دارد.

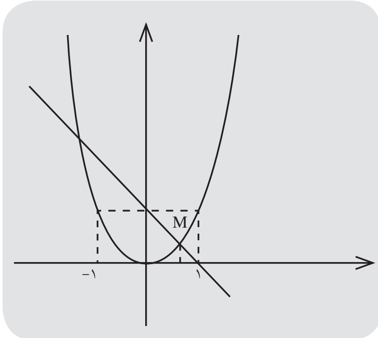
مثال ۲: تعداد ریشه‌های معادلهٔ $x^6 + x - 1 = 0$ را بیابید و ریشهٔ مثبت آن را با تقریب محاسبه کنید.

حل:

$$f(x) = x^2 + x - 1 = x^6 - (1 - x) = 0$$

$f(x) = g(x) - h(x)$ پس $h(x) = 1 - x$ و $g(x) = x^6$ حال

نمودارهای g و h را رسم می‌کنیم.



به‌طوری که نمودار نشان می‌دهد، معادلهٔ $x^{۶}+x-۱=۰$ دو ریشهٔ حقیقی مختلف‌العلامه دارد.

به نظر می‌آید که ریشهٔ مثبت معادلهٔ $f(x)=۰$ یعنی x_M حدود ۰/۶ باشد.

$$\begin{cases} f(۰/۶)=-۰/۱۸۴ \\ f(۰/۷)=۰/۰۴۳ \end{cases} \Rightarrow f(۰/۶).f(۰/۷)$$

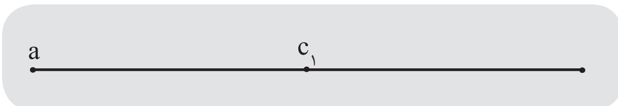
بنا به قضیهٔ بولتزانو معادلهٔ $f(x)=۰$ یک ریشه بین ۰/۶ و ۰/۷ دارد، یعنی $۰/۶ < x_M < ۰/۷$.

روش دوم. روش نصف کردن

فرض کنید می‌خواهیم ریشهٔ حقیقی معادلهٔ $f(x)=۰$ را که در بازهٔ $[a,b]$ قرار دارد، بیابیم. با فرض این‌که f در بازهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد بنا به قضیهٔ بولتزانو داریم:

$f(a).f(b)<۰ \Rightarrow$ ریشهٔ معادلهٔ $f(x)=۰$ بین a و b هست

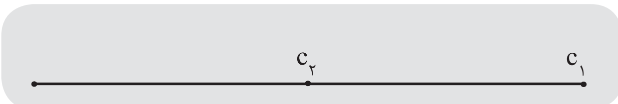
حال $\frac{a+b}{۲}$ را $c_۱$ فرض می‌کنیم



الف) اگر $f(a).f(c_۱)<۰$، آن‌گاه ریشهٔ معادله بین a و $c_۱$ است.

ب) اگر $f(c_۱).f(b)<۰$، آن‌گاه ریشهٔ معادله بین $c_۱$ و b است.

برای ادامهٔ کار فرض می‌کنیم حالت «الف» درست باشد، یعنی ریشهٔ معادلهٔ $f(x)=۰$ بین $c_۱$ و a است. حال $\frac{a+c_۱}{۲}$ را $c_۲$ می‌نامیم.



ج) اگر $f(a).f(c_۲)<۰$، آن‌گاه ریشهٔ معادله بین a و $c_۲$ است.

د) اگر $f(c_۲).f(c_۱)<۰$، آن‌گاه ریشهٔ معادله بین $c_۱$ و $c_۲$ است.

و عمل را به همین ترتیب ادامه می‌دهیم. با توجه به گرد کردن عدد، به ریشهٔ معادله نزدیک می‌شویم.

مثال: ریشهٔ معادله $x^{۳}+x-۱=۰$ را که بین $(۰,۱)$ قرار دارد، بیابید.

حل: فرض می‌کنیم $f(x)=x^{۳}+x-۱$

$$\begin{cases} f(۰)=-۱ \\ f(۱)=۱ \end{cases} \Rightarrow f(۰).f(۱)<۰ \Rightarrow ۰<x<۱$$

حال وسط بازهٔ $(۰,۱)$ را در نظر می‌گیریم: $\frac{۰+۱}{۲}=\frac{۱}{۲}$

$$f(\tfrac{۱}{۲})=\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۲}-۱=۰/۳۷۵,\ f(۱)=۱$$

$$\Rightarrow f(\tfrac{۱}{۲}).f(۱)<۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲}<x<۱$$

حال وسط بازهٔ $(\frac{۱}{۲},۱)$ را در نظر می‌گیریم: $\frac{\frac{۱}{۲}+۱}{۲}=\frac{۳}{۴}$

$$f(\tfrac{۳}{۴})=\frac{۲۷}{۶۴}+\frac{۳}{۴}-۱=۰/۱۷۲,\ f(\tfrac{۱}{۲})=-۰/۳۷۵$$

$$\Rightarrow f(\tfrac{۱}{۲}).f(\tfrac{۳}{۴})<۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲}<x<\frac{۳}{۴}$$

اینک وسط بازهٔ $(\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۴})$ را در نظر می‌گیریم: $\frac{\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۴}}{۲}=\frac{۵}{۸}$

$$f(\tfrac{۵}{۸})=\frac{۱۲۵}{۵۱۲}+\frac{۵}{۸}-۱=-۰/۱۳,\ f(\tfrac{۳}{۴})=۰/۱۷$$

$$\Rightarrow f(\tfrac{۳}{۴}).f(\tfrac{۵}{۸})<۰ \Rightarrow \frac{۵}{۸}<x<\frac{۳}{۴}$$

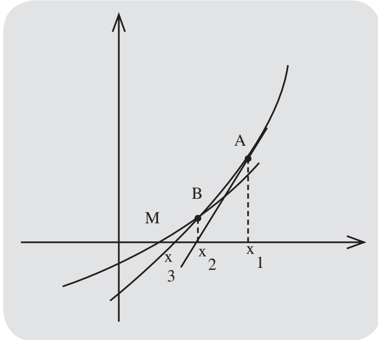
$$\Rightarrow ۰/۶۲<x<۰/۷۵ \xrightarrow{\text{با توجه به گرد کردن اعداد}} ۰/۶<x<۰/۷$$

روش سوم: روش نیوتن

این دانشمند بزرگ حدود ۴۰۰ سال پیش، روش بسیار کارایی برای حل معادلهٔ $f(x)=۰$ ارائه داده است.

فرض کنید می‌خواهیم معادلهٔ $f(x)=۰$ را حل کنیم. ابتدا تابع با ضابطهٔ $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم. فرض می‌کنیم نمودار تابع f محور xها را در نقطهٔ M قطع کرده است. می‌خواهیم طول نقطهٔ M را بیابیم.

در نزدیکی‌های نقطهٔ M روی محور xها، $x_۱$ را در نظر می‌گیریم. به وسیلهٔ رابطه موازی محور yها به نقطهٔ A روی منحنی f می‌رسیم. در نقطهٔ A مماس بر منحنی f را رسم می‌کنیم.



معادلهٔ این خط مماس چنین است

$$y - f(x_۱) = f'(x_۱)(x - x_۱)$$

حال طول نقطهٔ تقاطع این خط مماس بر محور xها را $x_۲$ می‌نامیم:

$$y = ۰ \Rightarrow ۰ - f(x_۱) = f'(x_۱)(x_۲ - x_۱) \Rightarrow x_۲ = x_۱ - \frac{f(x_۱)}{f'(x_۱)}$$

حال از $x_۲$ رابطی موازی محور yها رسم می‌کنیم تا نمودار تابع f را در نقطهٔ B قطع کند. معادلهٔ خط مماس بر منحنی تابع f را در نقطهٔ B به طول $x_۲$ می‌نویسیم. فرض می‌کنیم این خط مماس محور xها را در نقطه‌ای به طول $x_۳$ قطع کند. این عمل را هر چند بار که لازم باشد می‌توان ادامه داد. ریشهٔ معادلهٔ $f(x)=۰$ یعنی طول نقطهٔ M با تقریب بسیار قابل قبولی محاسبه می‌شود.

فرمول کلی روش نیوتن چنین است:

$$\boxed{x_{n+۱} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

مثال: می‌خواهیم ریشهٔ مثبت معادلهٔ $x^۲ - ۷ = ۰$ را محاسبه کنیم (در واقع می‌خواهیم مقدار $\sqrt{۷}$ را محاسبه کنیم).

حل: $f(x) = x^۲ - ۷$ و $f'(x) = ۲x$

$x_۱$ را ۲ فرض می‌کنیم؛ داریم: $x_{n+۱} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$$x_۱ = ۲\ ;\ x_۲ = x_۱ - \frac{f(x_۱)}{f'(x_۱)} = ۲ - \frac{f(۲)}{f'(۲)} = ۲ - \frac{-۳}{۴} = ۲/۷۵ = x_۲$$

$$x_۳ = x_۲ - \frac{f(x_۲)}{f'(x_۲)} = ۲/۷۵ - \frac{f(۲/۷۵)}{f'(۲/۷۵)} = ۲/۷۵ - \frac{۰/۵۶۲۵}{۵/۵} = ۲/۶۴۷ = x_۳$$

$$x_۴ = x_۳ - \frac{f(x_۳)}{f'(x_۳)} = ۲/۶۴۷ - \frac{f(۲/۶۴۷)}{f'(۲/۶۴۷)} = ۲/۶۴۵۷۵$$

اگر با ماشین حساب $\sqrt{۷}$ را محاسبه کنیم، خواهیم داشت: $\sqrt{۷} = ۲/۶۴۵۷۵۱۳۱۱$ ملاحظه می‌کنید که روش نیوتن چه‌قدر به مقدار واقعی نزدیک است.

مسئله: نشان دهید که معادلهٔ $x^۳ - ۳x^۲ + ۱ = ۰$ سه ریشهٔ حقیقی متمایز دارد.

حل: فرض می‌کنیم $f(x) = x^۳ - ۳x^۲ + ۱$

$$f(۰) = ۱,\ f(۱) = -۱,\ f(-۱) = -۳,\ f(۲) = -۳,\ f(۳) = ۱$$

$$f(-۱).f(۰) < ۰ \Rightarrow -۱ < x_۱ < ۰$$

$$f(۰).f(۱) < ۰ \Rightarrow ۰ < x_۲ < ۱$$

$$f(۲).f(۳) < ۰ \Rightarrow ۲ < x_۳ < ۳$$

پس معادلهٔ $f(x) = x^۳ - ۳x^۲ + ۱$ سه ریشهٔ حقیقی متمایز دارد.

تفریح اندیشه

گفت‌وگوی دو مسافر

در کشورهایی از خاورمیانه، دو نفر هر چند ناآشنا باشند و برای نخستین بار باشد که به هم رسیده‌اند، پرس‌وجو کردن آن‌ها از کار و بار یکدیگر و از تعداد فرزندانی که دارند و از کارهای آن‌ها، یک امر عادی است.

دو تن، که آن‌ها را الف و ب می‌نامیم، در یک مسافرت با اتوبوس کنار هم جای گرفته بودند. پس از احوالپرسی و خوش و بش کردن، الف از ب می‌پرسد که چند فرزند دارد. ب پاسخ می‌دهد که سه فرزند، به نام‌های رضا، احمد و حمید، که یکی از آن‌ها ۲۰ سال، دیگری بیشتر از ۲۰ سال و آن دیگری کمتر از ۲۰ سال دارد. ب می‌گوید: لابد رضا پسر بزرگتر و حمید پسر کوچکتر است؟

الف پاسخ می‌دهد:

ـ نه. اگر فرض کنید رضا ۲۰ ساله است، نتیجه‌اش آن خواهد شد که احمد پسر بزرگتر است. اگر فرض کنید رضا پسر بزرگتر است، نتیجه‌اش آن خواهد شد که احمد پسر کوچکتر است، اگر فرض کنید احمد ۲۰ ساله نیست، نتیجه‌اش آن خواهد شد که حمید پسر بزرگتر است. این سه فرض را که با هم بسنجید، می‌توانید دریابید از فرزندانم کدام پسر بزرگتر، کدام پسر کوچکتر و کدام ۲۰ ساله است!

پاسخ در صفحه ۳۷

برگرفته از کتاب داستانواره‌های ریاضی/ ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی/ انتشارات مدرسه