مسئله‌های باز کردن گاوصندوق

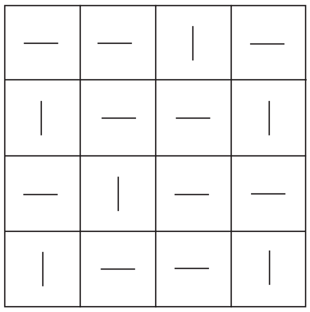
ترجمه و تألیف: هوشنگ شرقی

برای آن‌که به‌طور کامل رعایت امانت‌داری را کرده باشم، ابتدا یادآور می‌شوم که منبع اصلی این مقاله، مسئله‌ای است که نخستین‌بار در مسابقهٔ ریاضی نیومکزیکو (دور نهایی سال ۲۰۰۲) برای دانش‌آموزان دبیرستان طرح شده بود. صورت این مسئلهٔ بسیار زیبا و شگفت‌انگیز چنین است:

یک گاوصندوق با یک قفل شامل یک جدول ۴×۴ از کلیدها داده شده است. هریک از این ۱۶ کلید می‌توانند در یکی از دو وضع (حالت) افقی یا قائم باشند. برای باز شدن گاوصندوق، همهٔ کلیدها باید در وضعیت قائم (عمودی) قرار بگیرند. وقتی شما یک کلید را می‌چرخانید، همهٔ کلیدهایی که در سطر یا ستون این کلید قرار داشته باشند، می‌چرخند و تغییر حالت می‌دهند و شما می‌توانید یک کلید را هر چند بار که بخواهید بچرخانید.

الف) اگر وضعیت شکل ۱ در زیر برای این کلیدها داده شده باشد، حداقل تعداد کلیدهایی که برای باز شدن گاوصندوق باید چرخانده شوند چندتاست؟ چه کلیدهایی باید بچرخند؟

ب) اگر شما مجاز به چرخاندن حداکثر ۲۰۰۲ بار کلید باشید، بزرگ‌ترین صفحه کلید ۲n×۲n یک گاوصندوق که همیشه می‌توانید آن را باز کنید، کدام است؟



شکل ۱

سعی کنید پیش از حل مسئله به شرایط گفته شده خوب فکر کنید و به‌ویژه به این موضوع توجه کنید که با چرخش هر کلید، شش کلید دیگر بدون این‌که به آن‌ها دست بزنید، می‌چرخند و تغییر حالت می‌دهند و هر کلید فقط در یکی از دو وضع عمودی یا افقی می‌تواند قرار بگیرد. به این صفحه کلید به مانند یک ماتریس مربعی ۴×۴ نگاه کنید. برای مثال اگر کلید واقع در سطر دوم و ستون سوم را بچرخانید و از حالت افقی، آن را به حالت عمودی تغییر حالت دهید، همهٔ سه کلید دیگر در سطر دوم و نیز کلیدهای ستون سوم، تغییر حالت می‌دهند و از افقی به قائم یا برعکس تغییر می‌کنند. پس با این توضیح می‌بینید که کار ما قدری مشکل می‌شود و عمودی کردن همهٔ کلیدها کاری آسان نیست. قدری فکر کنید.

❊ ❊ ❊

برای شروع چه‌طور است پاسخ مسئله را بدهیم؟ (دیگر چه چیزی باقی می‌ماند؟!!ـ البته این را محض شوخی گفتم. حتماً می‌دانید که یک دانش‌پژوه و دانش‌دوست واقعی پیش از آن‌که به‌دنبال پاسخ مسئله یا حتی راه‌حل آن باشد، به‌دنبال ایدهٔ مسئله است تا اگر صورت مسئله تغییر کرد باز هم بتواند آن را حل کند و به پاسخ برسد. علاوه بر آن، قسمت «ب» مسئله هم هست و پاسخ به آن نیازمند کشف ایدهٔ کامل مسئله است. درواقع می‌خواهیم با دادن پاسخ مسئله وارد مسئله شویم

مطابق دیاگرام زیر کلیدها را نام‌گذاری می‌کنیم: a و b و c و... و p. جواب مسئله را می‌توانید در زیر ببینید. کافی است دو کلید b و k را به‌دنبال هم بچرخانیم.

مسلماً این راه‌حل همیشه جوابگو نیست و باید راه‌حلی کلی برای این مسئله پیدا کنیم. هدف از پاسخ‌گویی به این مسئلهٔ خاص، همان‌گونه که ذکر شد، ورود به مسئله است.

❊ ❊ ❊

روشن است که اگر یک کلید را دو بار در جای خود بچرخانیم به وضع اولیهٔ خود بازمی‌گردد. بنابراین چرخاندن یک کلید به تعداد زوج بار معادل با نچرخاندن آن است و چرخاندن آن به تعداد فرد بار، معادل یک بار چرخاندن آن است. هم‌چنین بدیهی است که ترتیب چرخاندن کلیدها در یک رشته چرخش کلیدها به‌دنبال هم بی‌تأثیر است.

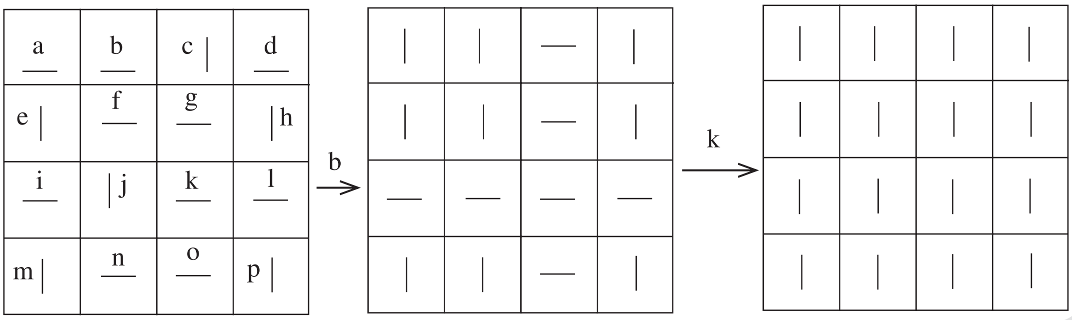
(یعنی برای مثال در این مورد، چرخش bk و چرخش kb یک نتیجه می‌دهند یا چرخش‌های abc و cba و bac و... یک نتیجه دارد).

حال به مسئلهٔ خودمان برگردیم. اگر می‌توانستیم یک کلید را بچرخانیم و این چرخش هیچ‌یک از کلیدهای دیگر سطر و ستون آن کلید را (به‌جز خودش) تغییر حالت ندهند، کار تمام بود، یعنی همهٔ کلیدهای افقی را عمودی می‌کردیم و کار تمام می‌شد!

اما مسئلهٔ ما همین است. چه مکانیزمی وجود دارد که براساس آن بتوان فقط یک کلید را تغییر حالت داد؟ راه‌حل مسئله این است که همهٔ کلیدهای موجود در آن ردیف و ستون را بچرخانیم. چرا چنین است؟ به همان صفحه کلید ۴×۴ خودمان نگاه کنیم. اگر کلیدهای مربوط به سطر و ستون a را بچرخانیم، کلید a هفت‌بار می‌چرخد (یک‌بار با لمس دست و شش بار دیگر به‌طور خودکار و هنگام چرخش شش کلید موجود در سطر و ستون آن). کلیدهای دیگر این رشته چه‌طور؟

روشن است که هریک از آن‌ها چهار بار می‌چرخند (یک‌بار با لمس دست و سه‌بار دیگر با چرخش سه کلید دیگر که در سطر یک ستون مربوط به آن‌ها می‌چرخند).

اما بقیهٔ ۹ کلید که در این رشته‌کلیدها (abcdeim) جای ندارند چه‌طور؟ هریک از آن‌ها در تقاطع یک سطر و یک ستون از کلیدهای این رشته قرار دارند. (برای مثال، کلید j در تقاطع سطر کلید i و ستون کلید ما است) پس با چرخش این دو کلید آن‌ها هم دو بار می‌چرخند، پس هریک از این ۹ کلید در این فرایند دو بار



شکل ۲

می‌چرخند. به شکل‌های زیر توجه کنید:

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	o	p

شکل ۳

۷	۴	۴	۴
۴	۲	۲	۲
۴	۲	۲	۲
۴	۲	۲	۲

شکل ۴

بنابراین، مطابق آن‌چه گفته شـد، همهٔ کلیدها (به‌غیر از a) که زوج‌بـار می‌چرخند به وضع اولیهٔ خـود برمی‌گردند و فقط کلید a تغییر حالت می‌دهد. اکنون یک راه‌حل ساده پیدا شده است. برای چرخاندن هر کلید بدون آن‌که کلیدهای دیگر بچرخند، کافی است همهٔ کلیدهای موجود در سـطر و سـتون آن کلید و خود آن کلید (یعنی هفت کلید) را به‌دنبال هم (به‌ترتیب دلخواه) چرخاند. نتیجهٔ نهایـی این فراینـد، چرخش همان یک کلیـد از حالت عمودی به افقی (یا برعکس) اسـت و سایر کلیدها تغییر وضع نمی‌دهند. پس کافی است همهٔ کلیدهای افقی را به این ترتیب تغییر حالت دهیم و کار تمام می‌شود. اما در این روش برای حل مسئلهٔ «الف»، نیاز به هفتاد بار چرخاندن کلیدها داریم! (برای تغییر حالت هر کلید افقی نیاز به چرخاندن هفت کلید داریم و چون ده کلید افقی داریم، پس به هفتاد بار چرخش کلید نیاز داریم).

ولی به‌هرحال مسـئلهٔ ما را حل می‌کنـد. اما چگونه می‌توانیم تعداد چرخش‌های کلیدها را تقلیل دهیم؟

بیاییم یک‌بار دیگر به مسـئلهٔ اصلی خودمان نگاه کنیم. دیدیم کـه برای تغییر حالـت ده کلید افقی، باید هفتاد بـار کلیدها را با لمس بچرخانیم. (توجه کنید که این غیر از چرخش‌های خودبه‌خود کلیدها در اثر چرخش کلیدهای دیگر است) رشتهٔ شامل ای هفتاد بار چرخش را در نظر بگیرید. مثلاً برای تغییر حالت کلید a، رشتهٔ abcdeim را بایـد بچرخانیم و... این دنبالهٔ هفتاد جمله‌ای شـامل چند حرف a است؟ چند حرف b؟ و...

آیا برای پاسخ به این سؤال باید همهٔ این هفتاد جمله را نوشت؟

البته نوشـتن آن کار دشواری نیسـت، ولی بدون آن هم می‌توانیم پاسخ این سؤال را بدهیم. کافی است توجه کنیم که مثلاً کلید a در سطر یا سـتون چند کلید افقی قرار دارد (و برای تغییر حالت آن‌ها باید چرخانده شـود). با کمی دقت درمی‌یابیم که برای تغییر حالت کلیدهـای افقـی a و b و d و i، باید کلید a چرخانده شـود، پس در رشتهٔ فوق کلید a، ۴ بار ظاهر می‌شود و به همین ترتیب کلید b، ۵ بار و کلید c ۶ بار و کلید d، ۴ بار و... به شکل‌های زیر توجه کنید:

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	o	p

<table>
<tr><td>—</td><td>—</td><td>|</td><td>—</td></tr>
<tr><td>|</td><td>—</td><td>—</td><td>|</td></tr>
<tr><td>—</td><td>|</td><td>—</td><td>—</td></tr>
<tr><td>|</td><td>—</td><td>—</td><td>|</td></tr>
</table>

۴	۵	۶	۴
۴	۴	۴	۴
۴	۶	۵	۴
۴	۴	۴	۴

شکل ۵

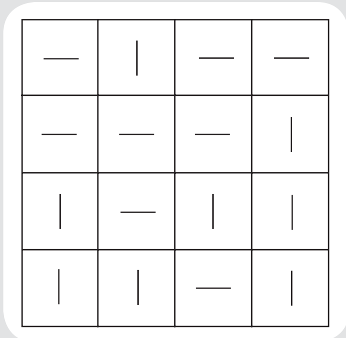
عددهای داخل هـر مربع جدول بالا معرف تعداد چرخش‌های هریک از کلیدها و مجموع این عددها مساوی ۷۰ است.

با توجه به عددهای فوق، بدیهی است که چرخش‌های زوج بی‌تأثیرند و چرخش‌های فرد نیز معادل یک‌بار چرخش‌اند. پس کلیدهای a، c، d، e، f، g، h، i، j، l، m، n، o و p هیچ نقشی در فرایند باز شدن گاوصندوق ندارند و لذا فقط کافی است کلیدهای b و k را بچرخانیم تا همین نتیجه عاید ما شود! (زیرا کلیدهای b و k هریک پنج‌بار چرخیده‌اند که معادل با یک‌بار چرخش آن‌هاست). پس با این فرایند همهٔ کلیدهای افقی به کلیدهای عمودی تغییر حالت می‌دهند و کار تمام است. بنابراین، ایدهٔ

کلی زیر می‌تواند به حل مسئله در حالت کلی بینجامد:

«برای هر کلید، عدد H، یعنی مجموع تعداد کلیدهای افقی موجود در سطر و ستون آن کلید را (با احتساب خود آن) محاسبه می‌کنیم، اگر H فرد باشد، کلید را می‌چرخانیم و اگر H زوج باشد، بدون چرخش از آن کلید عبور می‌کنیم.» با نگاهی به شکل ۵ درمی‌یابیم که باید (و کافی است) کلیدهای b و k چرخانده شوند تا گاوصندوق باز شود.

حـال به‌عنوان تمرین بگویید برای باز کـردن گاوصندوقی که صفحـه کلید آن به‌صورت زیر اسـت، حداقل چنـد کلید (و کدام کلیدها) را باید چرخاند و سپس فرایند باز شدن گاوصندوق را نیز با رسم شکل نشان دهید:



* * *

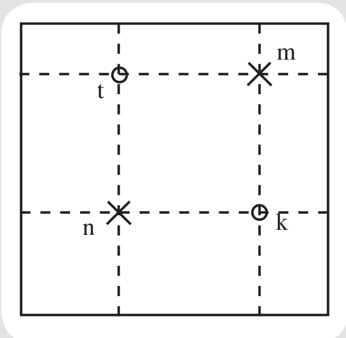
اکنون نوبت پاسـخ‌گویی به قسـمت دوم مسئله است. برای این منظور اندکی نظریه‌سازی لازم است. فرض کنید H تعداد کلیدهای افقی موجود در سـطر و ستون هر کلید باشد. دو اصل زیر را در نظر بگیرید:

۱. برای باز شدن گاوصندوق باید H برای هر کلید عمودی زوج باشد (و درنهایت به صفر برسد).

۲. تنهـا راه برای تغییر زوجیت H (یعنی زوج یا فرد بودن H) برای هر کلید، چرخاندن همان کلید اسـت و چرخاندن کلیدهای دیگر هیچ تأثیری در زوجیت H کلید مزبور ندارد.

گمان می‌کنم درسـتی گزارهٔ اول را به آسانی می‌پذیرید، اما در مورد گزارهٔ دوم کمی توضیح می‌دهیم. مفهوم این گزاره آن است که چرخانـدن هریک از کلیدها به غیر از کلید اصلی، زوج یا فرد بودن تعداد کلیدهای افقی و سـطر و سـتون آن کلید را تغییر نمی‌دهد. برای اثبات این موضـوع دو حالت را در نظر می‌گیریم. یکی این‌که کلید چرخانده شده متعلق به سطر یا ستون همان کلید باشد و دیگر این‌که در این سطر و ستون نباشد. در حالت اول واضح است که اگر صفحه‌کلیدها ۲n×۲n باشد، چرخاندن این کلید وضع همهٔ کلیدهای موجود در سـطر (یا سـتون) کلید اصلی را عوض می‌کند، پس هر کلیدی را که افقی باشد، عمودی و هر کلید عمودی را افقی می‌کند. لذا اگر یک کلید افقی را کم کند، در مقابل یک کلید عمودی را نیز افقـی می‌کند، پس زوجیت H را عـوض نمی‌کند. اما اگر این کلید در هیچ سطر و هیچ ستون مربوط به کلید اصلی نباشد، یک سطر و یک سـتون دیگر را عوض می‌کند. محل تقاطع این سطر و ستون را با سطر و ستون کلید اصلی در نظر بگیرید که دو کلید است (شکل ۶ را ببینید). هر دو این کلیدها تغییر حالت پیدا می‌کنند، پس یا دو کلید از سـطر و سـتون کلید اصلی افقی می‌شوند، یا هر دو عمودی خواهند شـد یا این‌که یکی از افقی‌ها عمودی می‌شـود و دیگری از عمودی به افقی تغییر حالت می‌دهد. پس در هر صورت، زوجیت H عوض نمی‌شود.

(با چرخاندن کلید k، کلیدهای m و n از سـطر و سـتون مربوط به کلید t تغییر حالت می‌دهند و بنابراین زوجیت H مربوط به کلید t عوض نمی‌شود).



شکل ۶

نتیجهٔ این بحث نسـبتاً طولانی آن است که اگر یک صفحه کلید ۲n×۲n داشته باشیم، حداکثر چرخش‌های لازم برای تغییر حالت همهٔ کلیدها به حالت عمودی آن است که ناچار به تغییر حالت همهٔ کلیدها شویم (و این در صورتی است که H برای همهٔ کلیدها فرد باشد) و اگر ناچار به حداکثر ۲۰۰۲ بار چرخش کلیدها باشیم، نتیجه می‌گیریم که:

$$۴n^{۲} \le ۲۰۰۲ \Rightarrow ۲n \le ۴۴$$

یعنی بزرگ‌ترین صفحه کلید گاوصندوقی که همواره بازشدنی است، یک صفحه کلید ۴۴×۴۴ است.

تا این‌جا بحث تمام اسـت، اما می‌خواهیـم کمی دیگر حوصله کنید! و به دو سؤال دیگر من هم فکر کنید.

سؤال اول این‌که این بحث به کدام‌یک از شاخه‌های دانشی (ریاضی که تا به‌حال شـناخته‌اید مربوط می‌شود؟ در حل آن به کدام‌یک از اصول و قضایای ریاضی که قبلاً دیده‌اید اتکا شده است؟)

و سؤال دوم که با خود بحث بیش‌تر ارتباط دارد، این است که در تمام این بحث فرض ما بر این بود که تعداد سـطرها و ستون‌های این صفحه کلید عددی زوج اسـت. آیا این نتایج وقتی که تعداد سطرها و ستون‌ها عددی فرد باشد، باز هم صادق‌اند؟ مثال بزنید و نتیجه‌گیری کنید. اگر این نتایج در آن‌جا برقرار نیستند، راه‌حل مسئله در آن حال چیسـت؟ اگر صفحه کلید مربعی نباشد، چه‌طور؟ به این موضوع فکر کنید و اگر نتایج قابل عرضه‌ای به‌دست آوردید ما را هم باخبر کنید. از همین حالا شروع کنید! مطمئن باشید تلاش بیهوده‌ای نیست.