آموزش ریاضی به روش گفت‌وگو

مجموعه‌های وزن‌دار

خسرو داوودی
آرش رستگار

آقای **اندیشه** که معلم ریاضیات است همیشه سعی می‌کند ریاضیات را با زندگی روزمره پیوند بدهد. او درس ریاضی را این‌طور شروع کرد:

آقای اندیشه: اگرچه مفهوم مجموعه یک مفهوم ریاضی است و اعضای آن باید موجودات ریاضی باشند، اما اصل آن از مفهوم گردایه‌ای از اشیا آمده است. ما عددهای طبیعی را از عددهای کوچک که از نوزادی در مغز ما از قبل کاشته شده‌اند، به کمک استعارهٔ گردایه می‌سازیم. استعارهٔ گردایه می‌گوید: عددها مانند گردایه‌ها رفتار می‌کنند. مثلاً شکلات‌های یک ظرف را می‌توان روی شکلات‌های یک ظرف دیگر ریخت و این مانند جمع عددها رفتار می‌کند. یا قسمتی از شکلات‌های یک ظرف را می‌توان در یک ظرف خالی ریخت و این مانند عمل تفریق رفتار می‌کند. بعدها مفهوم عدد شمارشی و مفهوم گردایه در ریاضیات تعمیم پیدا می‌کنند.

مفهوم مجموعه از مجردسازی مفهوم گردایه به دست می‌آید. می‌خواهم کمی از این استعاره کمک بگیرم تا مفهوم مجموعه را تعمیم دهم. مثلاً فرض کنید یک ظرف میوه داریم که در آن تعدادی سیب، پرتقال، گلابی و میوه‌های دیگر هست. من می‌توانم به‌جای اینکه تعداد همهٔ میوه‌ها را بشمارم و مجموعهٔ همهٔ میوه‌ها را درنظر بگیرم، بگویم در این مجموعه چند سیب، چند میوه و چند گلابی هست. اگر این مفهوم را ریاضی کنیم، مانند آن است که برای اعضای یک مجموعه تکرّر درنظر بگیریم؛ یعنی اجازه دهیم اعضای مجموعه تکرار شوند.

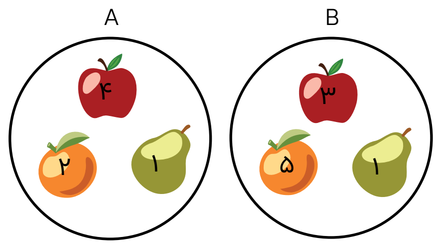
برای بیان چنین مفهومی از مجموعه، باید نمادی معرفی کنیم. مثلاً مجموعهٔ سه عدد طبیعی $\{۱,۲,۵\}$ اگر عدد یک تکرار شده باشد مثلاً چهار بار و عدد دو تکرار نشده باشد و همان یک‌بار درنظر گرفته شود و عدد پنج دو بار آمده باشد، به‌جای اینکه بنویسیم: $\{۱,۱,۱,۱,۲,۵,۵\}$، به‌طور خلاصه می‌نویسیم: $\{۱_۴,۲_۱,۵_۲\}$. اندیس پایین سمت راست به معنی تعداد تکرار آن عضو مجموعه خواهد بود. تعداد اعضای این مجموعه هم طبیعتاً ۲+۱+۴ خواهد بود.

حالا تکلیف شما این است که اجتماع و اشتراک را برای چنین مجموعه‌هایی تعریف و خصوصیات آن‌ها را بررسی کنید. مفهوم‌های اجتماع و اشتراکی که تعریف می‌کنید باید توسعهٔ مفهوم‌های اجتماع و اشتراک معمولی مجموعه‌ها باشند. چون اگر در مجموعه‌های با تکرر، هر عضو فقط یک بار بیاید، همان مفهوم مجموعهٔ معمولی به دست می‌آید.

محمود، **حامد** و **احمد** در یک گروه به هم‌فکری برای حل مسئله پرداختند. محمود ذهنی بسیار واگرا و خلاق دارد و حامد بسیار دقیق و منطقی است. احمد هم به جنبه‌های فلسفی مسئله‌ها علاقه دارد. این است که این سه نفر همیشه با هم به مسئله‌ها فکر می‌کنند؛ چون

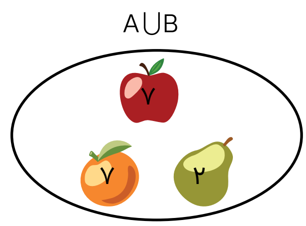
شخصیت علمی یکدیگر را کامل می‌کنند.

محمود: من اگر بخواهم اجتماع دو ظرف میوه را تعریف کنم، معلوم است که چه کار باید بکنم. آن‌ها را در یک ظرف بزرگ‌تر روی هم می‌ریزم. تعداد سیب‌ها، پرتقال‌ها، گلابی‌ها یا هر میوهٔ دیگری با هم جمع می‌شوند. یعنی تکرار اشیا در یک مجموعه به تکرر همان شیء در مجموعهٔ دیگر اضافه می‌شود. می‌توانم از همان نمودار ون معروف استفاده کنم.



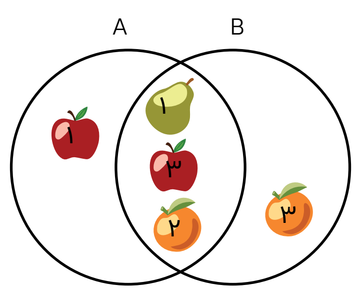
شکل ۱

حامد: صبر کن! صبر کن! این‌طوری که شما نمودار را کشیدی درست است که اجتماع مفهوم‌سازی شده، اما اشتراک درست رسم نشده است. برای اجتماع مجموعه‌های A و B می‌توانیم شکل ۲ را رسم کنیم.



شکل ۲

اما برای اشتراک آن‌ها شکل می‌توانست به‌صورت شکل ۳ باشد.



شکل ۳

به این روش تعداد سیب، پرتقال و گلابی در مجموعه‌های A و B همان قبلی است، اما تعداد کل میوه‌ها کمتر شده است.

در روش محمود $A\cup B$ دارای ۱۶ میوه بود، اما در روش من $A\cup B$ فقط ۱۰ عضو دارد. در روش محمود $A\cap B$ تهی بود، اما در روش من $A\cap B$ دارای شش عضو است. من که گیج شده‌ام. بر سر دو راهی مانده‌ام که کدام روش را انتخاب کنم.

حامد: اینجا فلسفه باید کمک کند. باید دید چه انتظاراتی از یک نظریهٔ اجتماع و اشتراک داریم. یک انتظار مثلاً می‌تواند رابطهٔ زیر باشد (# یعنی تعداد عضوهای یک مجموعه):

$$\#(A\cup B)+\#(A\cap B)=\#A+\#B$$

محمود: کمی فکر کنید! خواهید دید که هر دو مدل در فرمول بالا صدق می‌کنند. در روش اول پس از جای‌گذاری خواهیم داشت:

$$۱۶+۰=۷+۹$$

زیرا:

$$\#(A\cup B)=۱۶$$
$$\#(A\cap B)=۰$$
$$\#(A)=۷$$
$$\#(B)=۹$$

در روش دوم داریم:

$$۱۰+۶=۷+۹$$

که در آن:

$$\#(A\cup B)=۱۰$$
$$\#(A\cap B)=۶$$
$$\#(A)=۷$$
$$\#(B)=۹$$

پس حرف آخر را رابطهٔ دیگری باید بزند.

احمد: شاید فکر فلسفی دیگری راهگشا باشد. اگر از محمود بپرسم آیا در هر دو ظرف میوهٔ شما سیب هست؟ چه جوابی می‌دهد؟

محمود: می‌گویم البته که هست.

احمد: پس حتماً باید تعدادی سیب در اشتراک باشد. به همین روش تعدادی پرتقال و تعدادی گلابی؛ چون در هر دو ظرف پرتقال و گلابی هم داریم.

محمود: پس تکلیف اشتراک می‌شود اینکه حداکثر سه سیب در $A\cap B$ می‌توان داشت. بگوییم دقیقاً سه سیب، یعنی: $\min\{۳,۴\}$. یعنی کمینهٔ تعداد سیب‌ها در A و تعداد سیب‌ها در B. خود همین را برای اجتماع و تعداد سیب‌ها در $A\cup B$ می‌توان گفت. بیشینهٔ تعداد سیب‌ها در A و تعداد سیب‌ها در B یعنی: $\max\{۳,۴\}$. احتمالاً این نظریهٔ خوبی باشد چون برای هر دو عدد طبیعی a و b داریم: $\max\{a,b\}+\min\{a,b\}=a+b$.

اما خیلی وقت‌ها تکرار یک شیء در مجموعه‌ای صفر و در مجموعهٔ دیگری غیرصفر است. البته هنوز فرمول بالا درست است. حتی برای a و b در عددهای صحیح هم درست است. آیا می‌توان برای اشیا تکرار منفی هم قرار داد؟ به نظر که خوب کار می‌کند.

احمد: به نظر من هم وزن‌های دلخواه مثبت یا صفر یا منفی قابل قبول هستند؛ به شرطی که قیمتی را بپردازیم. اینکه تعداد سیب‌ها منفی باشد می‌تواند تعبیری داشته باشد. مثلاً بگوییم A سه سیب و B پنج سیب بدهکار است و $A\cup B$ می‌شود: $\max\{-۳,-۵\}=-۳$.

سه سیب بدهکار! پس اگر تکرر منفی را هم قبول کنیم و تعبیرش را این بگیریم که مجموعه‌ای چه تعدادی از چه اشیایی بدهکار است، باز یک نظریهٔ اجتماع و اشتراک مقبول داریم. مثلاً رابطه‌های زیر هم درست هستند:

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$
$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

محمود: حالا که وزن‌ها را عددهای صحیح گرفتید، خب یک‌دفعه عددهای گویا یا حقیقی را هم بگیرید دیگر!

آقای اندیشه: آفرین بر شما! به این می‌گویند بازسازی، بازفرمول‌بندی و بازنمایش. حالا بفرمایید اجتماع و اشتراک در این حالت کلی چگونه تعریف می‌شوند؟