

پینوکیو درد دهکده عجایب



مقداد قاری، شراره تقی دستجردی

یاد می‌گیری.

● **پینوکیو:** بله به کمک راهنمایی‌های فرشته مهربان از پس همه معماهای منطقی بر آمدم. علاوه بر این فهمیدم که دیگر نباید به گربه نره و روباه مکار اعتماد کنم.

● **پدر ژپتو:** چه‌طور به این نتیجه رسیدی؟

● **پینوکیو:** خوب، اگر کسی، دروغ بگوید، آن وقت فرد قابل اعتمادی نیست و چون گربه نره و روباه مکار به من دروغ گفته‌اند، پس دیگر قابل اعتماد نیستند.

● **پدر ژپتو:** آفرین پسر. خیلی خوب نتیجه‌گیری کردی. حالا بهتر است کمی استراحت کنی چون حسابی خسته به نظر می‌رسی.

پینوکیو یک ساعتی خوابید. وقتی بیدار شد و خودش را در آینه دید با خوشحالی چنان جیغی زد که پدر ژپتو با ترس به طرفش دوید. پدر ژپتو پسرش پینوکیو را دید که دیگر یک عروسک چوبی نیست و تبدیل به یک آدم واقعی شده است. محکم او را بغل کرد و بوسید. فرشته مهربان هم در آنجا حاضر بود.

● **فرشته مهربان:** پینوکیو جان یادت هست که در دهکده عجایب به تو چه گفتم؟

● **پینوکیو:** بله. شما گفتید اگر بتوانم همه معماهای منطقی را حل کنم من را آدم می‌کنید. اما راستش آن موقع که این جمله را به من گفتید فکر کردم فقط دارید مثالی می‌زنید تا من از جملات «اگر... آنگاه...» درک بهتری پیدا کنم. واقعا از شما ممنونم فرشته مهربان و همیشه راستگو.

● **فرشته مهربان:** یادت باشد که یکی از مهمترین ویژگی‌های یک آدم واقعی «منطقی فکر کردن» است.

پدر ژپتو هم از فرشته مهربان تشکر کرد چرا که صاحب یک پسر واقعی شده بود. سپس به پینوکیو گفت که امیدوار است با منطقی بودنش قدر این لطف فرشته مهربان را بداند.

پایان

در قسمت‌های قبل دیدیم که پینوکیو به اصرار گربه نره و روباه مکار وارد دهکده‌ای شد که اهالی‌اش یا همیشه دروغ می‌گویند یا همیشه راست و نه هر دو. این خاصیت اهالی دهکده باعث شد تا پینوکیو با یک سری معماهای منطقی روبه‌رو شود. پینوکیو که متوجه شده بود ساعت از ۱۲ ظهر گذشته است با سرعت به همان جایی رفت که گربه نره و روباه مکار را با سبد میوه‌هایش تنها گذاشته بود. اما از آن‌ها خبری نبود. فکر کرد شاید اشتباه آمده است که چشمش به سبد خالی‌اش افتاد. پینوکیو فهمید که گربه نره و روباه مکار او را فریب داده‌اند چرا که آن‌ها گفته بودند هم از سبد میوه‌هایش نگهداری می‌کنند و هم او را به خانه پدر ژپتو می‌رسانند. پینوکیو با ناراحتی به سمت دهکده برگشت تا از کسی کمک بگیرد که ناگهان فرشته مهربان روبه‌رویش ظاهر شد.

● **پینوکیو:** فرشته مهربان چه خوب که اینجا هستید. من خیلی از گربه نره و روباه مکار عصبانی هستم. آن‌ها به من دروغ گفتند.

● **فرشته مهربان:** پینوکیو چرا به آن‌ها اعتماد کردی؟

● **پینوکیو:** آخر همه حرف‌هایشان دروغ نبود. آن‌ها در مورد ویژگی اهالی دهکده عجایب راست گفتند. من نمی‌دانم چه موقع دروغ می‌گویند و چه موقع راست.

● **فرشته مهربان:** بله. اگر آن‌ها هم مثل اهالی دهکده عجایب همیشه راست می‌گفتند و با همیشه دروغ و نه هر دو، تو می‌توانستی به کمک منطق، نوعشان را تشخیص دهی. اما به همین دلیل که گاهی دروغ می‌گویند و گاهی راست، پس قابل اعتماد نیستند.

● **پینوکیو:** بله. همین‌طور است. فرشته مهربان حالا ممکن است راه خانه پدر ژپتو را به من نشان دهید؟

● **فرشته مهربان:** برای همین اینجا هستم.

پینوکیو با کمک فرشته مهربان به خانه پدر ژپتو رفت و در مورد دهکده عجایب هر چه اتفاق افتاده بود برایش گفت.

● **پدر ژپتو:** خیلی خوشحالم که با حل این معماها، داری منطق

۱. قاعدهٔ عکس نقیض شرطی:

$$\frac{A \rightarrow B}{\Box B \rightarrow \Box A}$$

۲. قاعدهٔ برهان خلف: $\frac{\Box A \rightarrow (B \wedge \Box B)}{A}$

که در آن $B \wedge \Box B$ یک فرمول دروغ‌نما (یا به اصطلاح تناقض) است.

۳. قاعدهٔ رفع تالی:

$$\frac{A \rightarrow B, \Box B}{\Box A}$$

به راحتی می‌توان دید که فرمول‌های زیر راست‌نما هستند:

$$(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box B \rightarrow \Box A)$$

$$\Box A \rightarrow (B \wedge \Box B) \rightarrow A \text{ و}$$

$$\Box A \rightarrow (A \rightarrow B) \wedge \Box B \rightarrow \Box A \text{ و}$$

پس عکس نقیض، برهان خلف و رفع تالی قاعده‌هایی منطقی هستند و در نتیجه به کار بردن این قاعده‌ها در هر جای ریاضی (و حتی در استدلال‌های خودتان) درست است.

➤ آیا به نظر شما استدلال زیر منطقی است؟

«اگر گربه نره و روباه مکار به من دروغ بگویند، آنگاه آن‌ها افراد قابل اعتمادی نیستند، ولی گربه نره و روباه مکار به من دروغ نگفته‌اند، پس آن‌ها قابل اعتماد هستند.»

اگر p و q مانند قبل انتخاب شوند، می‌توان استدلال بالا را به صورت مقابل نوشت:

$$\frac{p \rightarrow q, \Box p}{\Box q}$$

جدول ارزش زیر نشان می‌دهد که فرمول $\Box q$ $((p \rightarrow q) \wedge \Box p)$ راست‌نما نیست، و بنابراین استدلال بالا منطقی نیست.

$V(p)$	$V(q)$	$V(p \rightarrow q)$	$V(\Box p)$	$V(((p \rightarrow q) \wedge \Box p)$	$V(\Box q)$	$V(((p \rightarrow q) \wedge \Box p) \rightarrow \Box q)$
۱	۱	۱	۰	۰	۰	۱
۱	۰	۰	۰	۰	۱	۱
۰	۱	۱	۱	۱	۰	۰
۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱

پس قاعدهٔ $\frac{p \rightarrow q, \Box p}{\Box q}$ مثالی از یک استدلال نامعتبر (یا غیر منطقی) است.

➤ ثابت کنید استدلال‌های زیر منطقی هستند.

$$\frac{A \wedge B}{A} \text{ و } \frac{A \vee B, \Box A}{B} \text{ و } \frac{A \vee B, A \rightarrow C, B \rightarrow C}{C}$$

➤ ثابت کنید استدلال‌های زیر غیرمنطقی هستند.

$$\frac{A \rightarrow B}{B \rightarrow A} \text{ و } \frac{A \vee B}{B} \text{ و } \frac{A \rightarrow B, B}{A}$$

➤ آیا می‌توانید مثال‌های دیگری از استدلال‌های منطقی و غیرمنطقی بیاورید؟

قواعد منطقی: همهٔ استدلال‌های ما در زندگی روزمره و به‌خصوص در ریاضی باید منطقی باشند. حالا که به انتهای داستان رسیدیم خوب است که یاد بگیریم که کدام استدلال‌ها (یا قواعد) منطقی هستند.

در حالت کلی یک استدلال تشکیل شده است از تعدادی مقدمه‌ها (یا فرضیات) و یک نتیجه. اگر مقدمه‌های یک استدلال A_1, A_2, \dots, A_n و نتیجهٔ استدلال B باشد، آنگاه استدلال به صورت خلاصهٔ مقابل نشان داده می‌شود:

$$\frac{A_1, A_2, \dots, A_n}{B}$$

➤ آیا می‌توانید در داستان پینوکیو یک استدلال بیابید؟ استدلالی معتبر (یا منطقی) نامیده می‌شود که در هر وضعیتی که مقدمه‌های استدلال درست بودند، نتیجهٔ استدلال نیز درست باشد. پس استدلال $\frac{A_1, A_2, \dots, A_n}{B}$ معتبر (یا منطقی) است

هرگاه در هر وضعیتی که مقدمه‌های A_1, A_2, \dots, A_n درست باشند نتیجهٔ B نیز درست باشد، به عبارت ساده‌تر استدلال بالا معتبر (یا منطقی) است اگر فرمول $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B$ راست‌نما باشد (یعنی همیشه درست باشد).

مثلاً استدلال پینوکیو را در داستان بالا در نظر بگیرید: «اگر کسی دروغ بگوید، آن وقت فرد قابل اعتمادی نیست و چون گربه نره و روباه مکار به من دروغ گفته‌اند، پس دیگر قابل اعتماد نیستند.» این استدلال را می‌توان به این صورت در زبان منطق نوشت. فرض کنید p نشان‌دهندهٔ جملهٔ «گربه نره و روباه مکار به من دروغ گفته‌اند» و q نشان‌دهندهٔ جملهٔ «گربه نره و روباه مکار قابل اعتماد نیستند» باشد. حال استدلال پینوکیو را می‌توان به صورت مقابل نوشت:

$$\frac{p \rightarrow q, p}{q}$$

جدول ارزش زیر نشان می‌دهد که فرمول $(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$ راست‌نما است (همان‌طور که در سمت راست‌ترین ستون می‌بینید این فرمول در هر سطر درست است):

$V(p)$	$V(q)$	$V(p \rightarrow q)$	$V((p \rightarrow q) \wedge p)$	$V(((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q)$
۱	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۰	۱
۰	۱	۱	۰	۱
۰	۰	۱	۰	۱

پس استدلال پینوکیو منطقی است. در واقع استدلال $\frac{p \rightarrow q, p}{q}$ آنقدر در زندگی پرکاربرد است که منطق‌دانان یک نام برای آن گذاشته‌اند و آن را «قاعدهٔ وضع مقدم» می‌نامند. منطق نظم‌دهنده و وحدت‌بخش ریاضی است. همهٔ استدلال‌های یک ریاضی‌دان باید منطقی باشند. پس در اثبات قضایای ریاضی ما فقط مجاز به استفاده از قواعد منطقی هستیم. چند مثال از قواعد منطقی پرکاربرد در ریاضی عبارتند از: