

پینوکیو در دهکده عجایب

مقداد قاری، شماره تقی دستجردی

این دهکده هنوز مشخص نیست و باید چند سال دیگر صبر کنیم! پینوکیو از کلاه‌نارنجی تشکر کرد و رفت. او در راه با خودش فکر می‌کرد:

● **پینوکیو:** پس من فعلاً نمی‌توانم بگویم «همه دوقلوهای این دهکده از یک نوع هستند»، چون ممکن است نوزادان دوقلوی جدید دهکده از دو نوع مختلف باشند. در این صورت چون یک دوقلو پیدا می‌شود که در موردش حدس درست نیست، یعنی حدس من برای همه دوقلوه‌ها درست نبوده است. مگر آنکه دوباره سراغ پسران نوجوان بروم ...

● **فرشته مهربان:** آفرین پینوکیو جان. پیشرفت خیلی خوبی داشته‌ای!

پینوکیو به تعجب به فرشته مهربان که روبه‌رویش پدیدار شده بود، نگاه کرد.

● **پینوکیو:** فرشته مهربان، شما صدای درونی مرا می‌شنیدید؟
 ● **فرشته مهربان:** بله، بله. خیلی هم خوش‌حالم از اینکه استدلال‌ت را شنیدم. حق با توست. فعلاً در مورد اینکه حدس درست است یا نه چیزی نمی‌توانی بگویی.

● **پینوکیو:** ممنون فرشته مهربان.

● **فرشته مهربان:** پینوکیو جان اجازه بده تا حدس‌ت را با دقت بیشتری بررسی کنیم. حدس تو چنین است: «همه دوقلوهای این دهکده از یک نوع هستند.» چه موقع می‌توانی بگویی که حدس نادرست است؟

● **پینوکیو:** هنگامی که یک دوقلو در این شهر وجود داشته باشد که یکی از آن‌ها دروغ‌گو و یکی راست‌گو باشد.

● **فرشته مهربان:** بله درست است. در حقیقت این موردی که پیدا می‌کنی، مثال نقضی است برای حدس تو.

● **پینوکیو:** مثال نقض؟

● **فرشته مهربان:** بله، زیرا مثالی است که دارد جمله‌ت را نقض می‌کند. حالا بگو چه موقع می‌توانی از اینکه حدس درست است مطمئن شوی؟

● **پینوکیو:** هنگامی که مطمئن شوم هر سه دوقلوهای این دهکده از یک نوع هستند.

● **فرشته مهربان:** و اگر در آینده دوقلوهایی به دنیا بیایند که از یک نوع نباشند چطور؟ یا در گذشته چنین دوقلوهایی وجود داشته باشند؟

● **پینوکیو:** راستش من حواسم به گذشته و آینده نبود. براساس این سه مورد می‌خواستم تصمیم بگیرم.

● **فرشته مهربان:** بله. اگر شرایط امسال را در نظر بگیری، کار درستی انجام داده‌ای. در واقع تو همه افراد را یکی یکی بررسی می‌کنی و در شرایط کنونی یک حکم کلی می‌دهی. در شرایطی که بتوان تک‌تک موارد را بررسی کرد، این کار خوب است. اما

در پنج قسمت قبل پینوکیو موفق شد از پس معماهایی برآید که در برخورد با ساکنان دهکده عجایب، با آن‌ها روبه‌رو می‌شد. این معماها از آنجا به وجود می‌آمدند که اهالی دهکده یا همیشه دروغ می‌گفتند و یا همیشه راست و نه هر دو. بنابراین پینوکیو هر بار که افراد جدیدی را می‌دید، باید تشخیص می‌داد هر کدام از چه نوعی هستند؛ راست‌گو یا دروغ‌گو.

پینوکیو پس از برخورد با خواهرهای جوان همسان حدس زده بود که شاید همه دوقلوهای این دهکده از نظر راست‌گو یا دروغ‌گو بودن از یک نوع هستند (چرا که هر دو خواهر راست‌گو بودند). اما پس از برخورد با پسران نوجوان دوقلو نتوانست به‌طور قطع بگوید حدسش درست نیست، چرا که یکی از پسران به پینوکیو گفته بود که او و برادرش از یک نوع هستند. پینوکیو به کمک «جدول ارزش» متوجه شد، پسری که این گزاره را گفته است، هم می‌تواند راست‌گو باشد و هم دروغ‌گو، اما برادرش حتماً باید راست‌گو باشد.

بنابراین، نمی‌توانست به‌طور قطع بگوید حدسش درست نیست. از طرف دیگر، حتی اگر به نحوی مطمئن می‌شد این پسر نیز مانند برادرش راست‌گوست، چون مطمئن نبود که این دوقلوه‌ها تنها دوقلوهای این دهکده هستند، نمی‌توانست بگوید حدسش درست است. پس باید به طریقی از تعداد دوقلوهای این دهکده با خبر می‌شد. برای این کار به سراغ فروشنده‌های دوره‌گرد رفت؛ چرا که پس از حل معمای سوم، پینوکیو می‌دانست آن فروشنده دوره‌گردی که کلاه نارنجی دارد، راست‌گوست.

● **پینوکیو:** سلام آقا، من باز هم از شما سؤال دارم.

● **کلاه‌نارنجی:** خواهش می‌کنم. بفرمایید. بنده در خدمتم.

● **پینوکیو:** آقا، آیا در این دهکده همه افراد دوقلو، از نظر راست‌گو یا

دروغ‌گو بودن از یک نوع هستند؟

● **کلاه‌نارنجی:** در این دهکده ما سه جفت دوقلو داریم. تا جایی که من می‌دانم دو جفت از دوقلوه‌ها، راست‌گو هستند، اما نوع دوقلوهای تازه متولد شده



می‌دانیم که گزاره اولی نادرست و گزاره دومی درست است. در واقع برای نشان دادن نادرستی یک گزاره عمومی، تنها یافتن یک مورد نقض، که آن را مثال نقض می‌گوییم، کافی است. در مورد گزاره اول، عدد ۲ مثال نقض است. اما برای نشان دادن درستی گزاره دوم نمی‌توان از مثال استفاده کرد؛ چرا که باید بخش‌پذیری بر ۲ را برای «همه» عددهای بخش‌پذیر بر ۴» بررسی کنیم و این کار با بررسی همه عددها به‌طور موردی امکان‌پذیر نیست (تعداد عددهای بخش‌پذیر بر ۴ محدود نیست که بتوان همه آن‌ها را بررسی کرد). پس باید روش دیگری به کار برد که وابسته به یک یا چند مثال نباشد. در این شرایط، توجه به تعریف‌های بخش‌پذیری بر ۴ و بخش‌پذیری بر ۲ و استفاده از نمادهای جبری به ما کمک می‌کند تا در حالت کلی نتیجه‌گیری کنیم.

➤ ثابت کنید هر عدد بخش‌پذیر بر ۴، بر ۲ نیز بخش‌پذیر است.

اگر یک گزاره در مورد جزئی یا برخی از اعضای یک مجموعه خبری به ما بدهد، آن گزاره را گزاره وجودی (یا جزئی) می‌گوییم و در ریاضیات آن را با سور «وجود دارد» بیان می‌کنیم. حدس فرشته‌مهربان در این داستان یک گزاره وجودی است. به مثال‌های دیگری از این نوع گزاره توجه کنید:

۱. عددی اول وجود دارد که زوج است.
۲. بین مجموعه توان‌های طبیعی عدد ۳، یعنی $\{1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, \dots\}$ ، عددی وجود دارد که بر ۲ بخش‌پذیر است.

گزاره اول درست است. زیرا عدد اول ۲ در این ویژگی زوج بودن صدق می‌کند. در واقع برای اثبات درستی یک گزاره وجودی به تنها یک نمونه که آن را شاهد (مثال صدق) می‌گوییم نیاز داریم. اما گزاره دوم درست نیست. توجه کنید که برای نشان دادن نادرستی این گزاره، نمی‌توانیم مثال بزنیم، چرا که هر تعداد مثال هم که بیاوریم، باز هم نمی‌توانیم مطمئن باشیم همه عددهایی که توانی از ۳ هستند، بر ۲ بخش‌پذیر نیستند (زیرا تعداد این گونه عددها محدود نیست که برای همه آن‌ها بخش‌پذیر نبودن بر ۲ را نشان دهیم). پس این بار هم به روشی نیاز داریم که مستقل از یک یا چند مثال باشد.

➤ ثابت کنید بین مجموعه توان‌های طبیعی عدد ۳، یعنی $\{1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, \dots\}$ ، عددی وجود دارد که بر ۲ بخش‌پذیر است.

گاهی چنین چیزی امکان‌پذیر نیست. مثلاً اگر تعداد موارد خیلی زیاد باشد، یا به دلایلی به همه آن‌ها دسترسی نداشته باشیم. درست مثل اینکه تو نمی‌توانی به دوقلوهایی که در آینده متولد می‌شوند دسترسی داشته باشی یا مثلاً نمی‌توانی در مورد برگ همه درختان روی کره زمین حدسی را بررسی کنی.

- **پینوکیو:** بله، حق با شماست.
- **فرشته‌مهربان:** حالا فرض کن حدس من در مورد دوقلوها چنین باشد: «دوقلوهایی در این دهکده وجود دارند که از یک نوع هستند.» آیا حدس من درست است؟
- **پینوکیو:** بله. درست است. چون خواهرهای جوان دوقلو از یک نوع بودند.
- **فرشته‌مهربان:** آیا لازم است برای بررسی درستی حدس من، به دنبال موارد دیگر باشی؟
- **پینوکیو:** نه. همین یک مورد نشان می‌دهد که حدس شما درست است.
- **فرشته‌مهربان:** آفرین پینوکیو، درست می‌گویی. به این موردی که نشان می‌دهد حدس من درست است، شاهد می‌گوییم.
- **پینوکیو:** شاهد؟
- **فرشته‌مهربان:** بله. شاهد یعنی کسی یا چیزی که گواهی می‌دهد یا امری را تأیید می‌کند. پس مثال خواهرهای دوقلو، درستی جمله‌ما تأیید می‌کند. پینوکیو پرسش دیگری هم دارم. اگر خسته نیستی، بپرسم.

- **پینوکیو:** فرشته‌مهربان، من خوش‌حالم که به پرسش‌های شما فکر می‌کنم. چون حتی اگر نتوانم جواب درستی بدهم، با توضیح شما چیزهای جدیدی یاد می‌گیرم.
 - **فرشته‌مهربان:** بسیار خب پینوکیو جان، چرا برای اثبات درستی حدس خودت باید همه دوقلوها را بررسی می‌کردی و برای بررسی درستی حدس من یک مورد کافی بود؟
- با آنکه پینوکیو به پرسش‌های قبلی فرشته‌مهربان به راحتی جواب داده بود، اما نتوانست پرسش آخر او را به سرعت جواب دهد. پینوکیو به فکر فرو رفت. او برای اینکه بهتر متوجه تفاوت حدس خودش و حدس فرشته‌مهربان بشود، هر دو جمله را در دفترچه یادداشتش نوشت و با دقت در آن‌ها، توانست به پرسش فرشته‌مهربان پاسخ دهد.

ادامه دارد...

➤ به نظر شما پاسخ پینوکیو به فرشته‌مهربان چه بوده است؟

در زندگی روزمره و در ریاضیات، با موارد زیادی روبه‌رو می‌شویم که گزاره‌ای در مورد «همه» یا «برخی» از اعضای یک مجموعه خبری می‌دهد. برای مثال، حدس پینوکیو در این داستان، گزاره‌ای در مورد همه دوقلوهای دهکده است. در حالی که حدس فرشته‌مهربان، گزاره‌ای در مورد برخی از دوقلوهای این دهکده است. به این نوع گزاره‌ها، «گزاره‌های سوری» می‌گوییم.

اگر یک گزاره سوری در مورد همه اعضای یک مجموعه خبر دهد، آن گزاره را با سور عمومی «هر»، «همه» یا «تمام» بیان می‌کنیم و به آن گزاره عمومی می‌گوییم. به مثال‌های دیگری از این نوع گزاره‌ها توجه کنید:

۱. همه عددهای اول فرد هستند.
۲. هر عدد بخش‌پذیر بر ۴، بر ۲ بخش‌پذیر است.