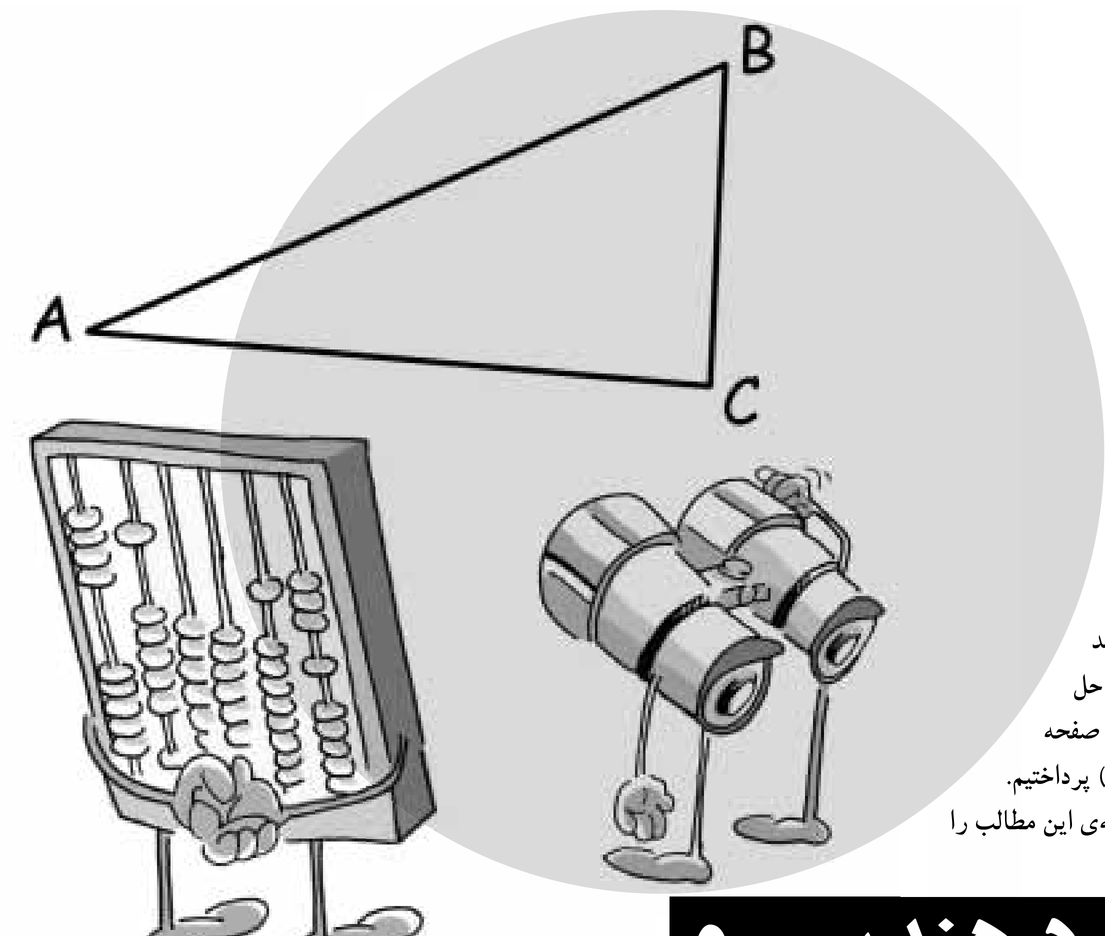
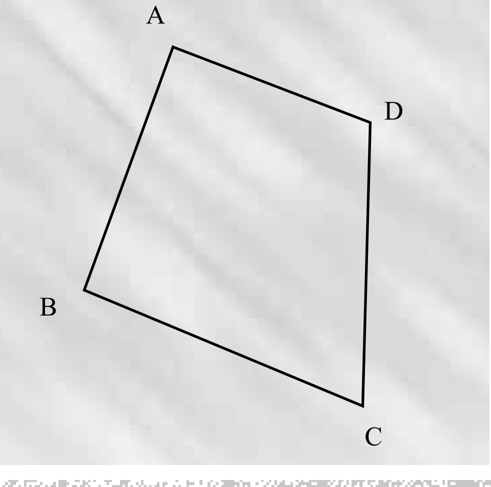


اشاره
به‌منظور استفاده بیشتر دانش‌آموزان از این مقاله، از چند شماره‌ی قبل به حل مسئله‌های هندسه در صفحه (هندسه‌ی مسطحه) پرداختیم. در این شماره ادامه‌ی این مطالب را پی‌می‌گیریم.

رویکرد هندسی و رویکرد جبری در آموزش هندسه ۱۴

محمد هاشم رستمی

مسئله‌ی ۷. چهار نقطه‌ی غیرهمخط A، B، C و D در یک صفحه داده شده‌اند. آیا نقطه‌ای در صفحه‌ی گذرنده بر این چهار نقطه وجود دارد که از این چهار نقطه به یک فاصله باشد؟ در صورتی که چنین نقطه‌ای وجود دارد، شرط وجودش چیست؟

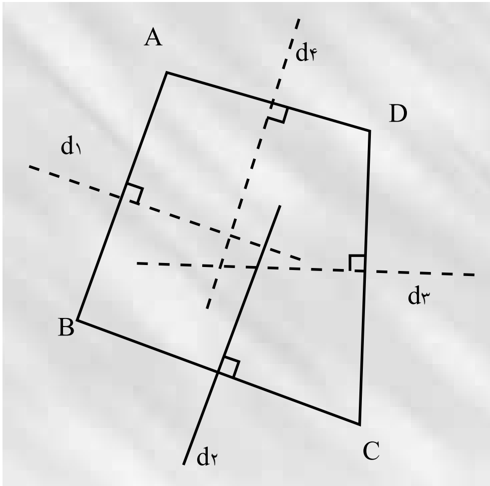


الف) حل به روش هندسی

پاره‌خط‌های AB، BC، CD و DA را رسم می‌کنیم، یعنی در واقع چهار ضلعی ABCD را می‌سازیم. عمود منصف‌های پاره‌خط‌های AB، BC، CD و DA را رسم می‌کنیم و به ترتیب d_1، d_2، d_3 و d_4 می‌نامیم.

در صورتی که این چهارخط همرس باشند، نقطه‌ی همرسی آن‌ها که آن را M می‌نامیم از چهار نقطه‌ی A، B، C و D به یک فاصله است، یعنی داریم:

MA= MB= MC= MD

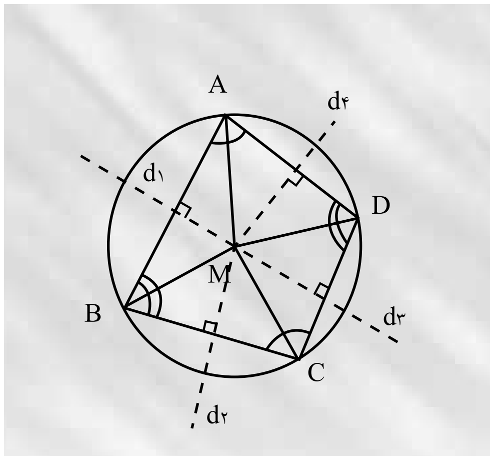


اما در چه صورتی خط‌های d_1، d_2، d_3 و d_4 هم‌رس‌اند؟ در هندسه‌ی ۲، کتاب درسی سال سوم دبیرستان رشته‌ی ریاضی و فیزیک داریم:

قضیه: در هر چهار ضلعی محاطی مجموع هر دو زاویه‌ی روبه‌رو ۱۸۰° است:

$$\hat{A}+\hat{C}=\hat{B}+\hat{D}=180^\circ$$

نکته: چهار ضلعی را محاطی می‌نامند در صورتی که بر چهار



رأس آن یک دایره بگذرد، یعنی نقطه‌ای مانند M وجود داشته باشد که از چهار رأس آن چهارضلعی به یک فاصله باشد (این نقطه را مرکز دایره‌ی محیطی چهارضلعی می‌نامند و آن را با M، یا O یا هر حرف دیگری نشان می‌دهند).

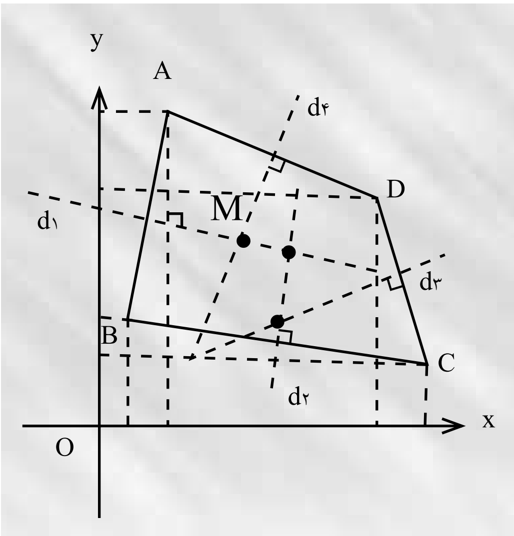
عکس قضیه: هر چهارضلعی که مجموع دو زاویه‌ی روبه‌روی آن ۱۸۰° باشد، محاطی است، یعنی دایره‌ای وجود دارد که از چهار رأس آن می‌گذرد. مرکز این دایره همان نقطه‌ی M، یعنی محل برخورد (نقطه‌ی همرسی) خط‌های d_1، d_2، d_3 و d_4 است.

اثبات این دو قضیه به روش هندسی در کتاب هندسه‌ی ۲ آمده است، بنابراین از اثبات آن صرف‌نظر می‌کنیم. پس می‌توانیم بگوییم شرط لازم و کافی برای آن که چهارضلعی ABCD محاطی باشد، یا به عبارت دیگر نقطه‌ای مانند M وجود داشته باشد که از چهار نقطه‌ی A، B، C و D به یک فاصله باشد (MA= MB= MC= MD) آن است که مجموع هر دو زاویه‌ی روبه‌روی آن ۱۸۰° باشد، یا به بیان دیگر، هر دو زاویه‌ی روبه‌روی آن مکمل یکدیگر باشند.

مربع، مستطیل و ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین از چهارضلعی‌های خاصی هستند که این ویژگی را دارند، یعنی بر چهار رأس آن‌ها یک دایره می‌گذرد. چرا؟ اما متوازی‌الاضلاع و لوزی از چهار ضلعی‌های خاصی هستند که این ویژگی را ندارند، یعنی بر چهار رأس آن‌ها یک دایره نمی‌گذرد. چرا؟

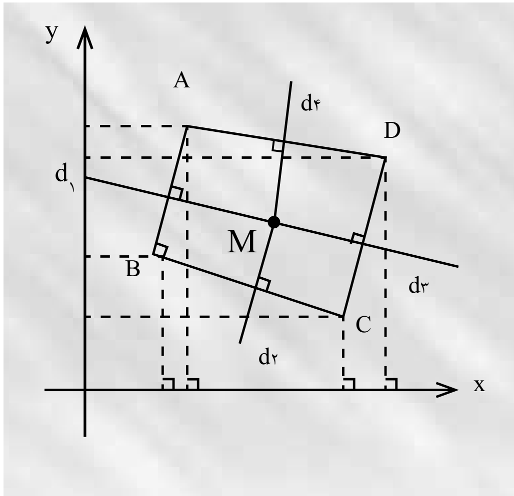
ب) اثبات به روش جبری ـ مختصاتی

دستگاه مختصات قائم xoy را در صفحه‌ی گذرنده بر چهار نقطه‌ی A، B، C و D در نظر می‌گیریم و مختصات این نقطه‌ها در این دستگاه مختصات در حالت کلی را $A=(x_1, y_1)$، $B=(x_2, y_2)$، $C=(x_3, y_3)$ و $D=(x_4, y_4)$ می‌نامیم. پاره‌خط‌های AB، BC، CD و DA را رسم می‌کنیم (در واقع چهارضلعی ABCD



را می‌سازیم) و عمود منصف‌های این پاره‌خط‌ها را به ترتیب d_1، d_2، d_3 و d_4 می‌نامیم. معادله‌ی این عمودمنصف‌ها را می‌نویسیم و همرس

بودن یا نبودن آن‌ها را بررسی می‌کنیم.

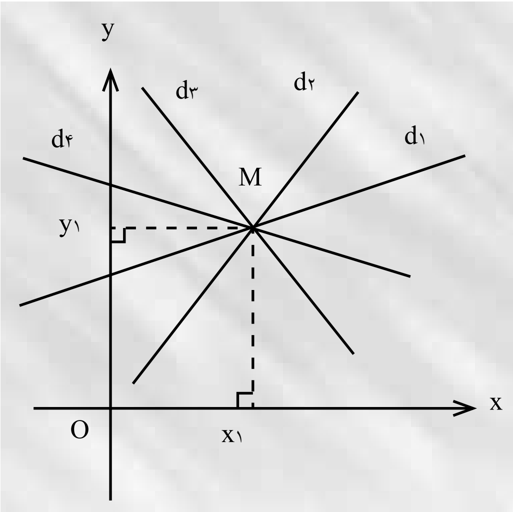


در صورتی کــه این چهار خط همرس باشــند، نقطه‌ای مانند M وجود دارد که از چهار نقطه‌ی A، B، C و D به یک فاصله اســت، یا به عبارت دیگر، چهارضلعی ABCD محاطی اســت و در صورتی که چهارخط d_1، d_2، d_3 و d_4 همرس نباشند، نقطه‌ای در صفحه‌ی گذرنده بــر چهــار نقطــه‌ی A، B، C و D وجود ندارد که از ایــن چهار نقطه به یک فاصله باشــد یا به بیانی دیگــر، چهارضلعی ABCD محاطی نیست.

بــرای این‌که همرس بودن یا نبودن خط‌هــای d_1، d_2، d_3 و d_4 را که همان عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های AB، BC، CD و DA هستند بررسی کنیم، نخست معادله‌ی این خط‌ها را می‌نویسیم، سپس مختصات نقطه‌ی برخورد دو خط از این چهار خط را به دست می‌آوریم (با حل یک دســتگاه دو معادله‌ی دو مجهولــی)؛ آن‌گاه مختصات این نقطه‌ی برخورد را در معادله‌ی دو خط دیگر قرار می‌دهیم. اگر مختصات این نقطه در معادله‌ی دو خط دیگر صدق کند، بدان معناســت که دو خط دیگر هم از این نقطه می‌گذرنــد، یعنی چهارخط همرس‌اند و نقطه‌ی همرســی آن‌ها که آن را M می‌نامیم، جواب مســئله اســت، یعنی از چهار نقطه‌ی A، B، C و D به یک فاصله اســت یا به عبارت دیگر، چهارضلعی ABCD است.

در صورتــی که مختصــات این نقطه در معادلــه‌ی دو خط دیگر صــدق نکنــد مسئله جــواب نــدارد، یعنــی نقطــه‌ای در صفحه‌ی گذرنــده بــر این چهــار نقطــه وجود نــدارد کــه از چهــار نقطه‌ی A، B، C و D بــه یک فاصله باشــد یــا به بیان دیگــر، چهارضلعی ABCD محاطی نیست.

نکته‌ی مهم: برای بررســی همرس بودن یا نبودن هر چندخط (۳ خط، ۴ خط، ۵ خط، ۶ خط یا بیشتر) می‌توانیم از روش بالا استفاده کنیم، یعنی با داشتن معادله‌ی آن‌ها، مختصات نقطه‌ی برخورد دو خط از ایــن خط‌ها را به دســت می‌آوریــم و آن‌گاه مختصات این نقطه را در معادلــه‌ی خط‌های دیگر قرار می‌دهیم. اگر مختصات این نقطه در معادله‌ی خط‌های دیگر صدق کند، این خط‌ها همرســند و اگر صدق نکند، همرس نیستند.



از این ویژگی برای بررسی محاطی بودن یا نبودن یک چند ضلعی می‌توانیم اســتفاده کنیــم، بدین ترتیب که معادلــه‌ی عمودمنصف‌های ضلع‌های آن را بنویسیم و همرس بودن یا نبودن آن‌ها را بررسی کنیم. اگر این عمودمنصف‌ها همرس باشند، چندضلعی محاطی است و اگر همرس نباشند، چندضلعی محاطی نیست. محاطی‌بودن چندضلعی به معنای آن است که در صفحه‌ی آن چندضلعی، نقطه‌ای وجود دارد که از تمام رأس‌های آن چندضلعی به یک فاصله است و محاطی نبودن چندضلعی به معنای بودن چنین نقطه‌ای است.

مثال ۱: ثابت کنید که در صفحه‌ی هر مستطیل نقطه‌ای وجود دارد کــه از چهار رأس آن به یک فاصله اســت. به عبارت دیگر، دایره‌ای وجود دارد که بر چهار رأس یک مســتطیل می‌گذرد یا به بیان دیگر، هر مستطیلی می‌تواند در یک دایره محاط شود.

الف) اثبات به روش هندسی

روش اول ـ مســئله را حل شــده در نظر می‌گیریم، یعنی فرض می‌کنیم نقطه‌ی M جواب مسئله باشد، یعنی نقطه‌ای باشد که از چهار نقطه‌ی A، B، C و D به یک فاصله است، یعنی داشته باشیم:

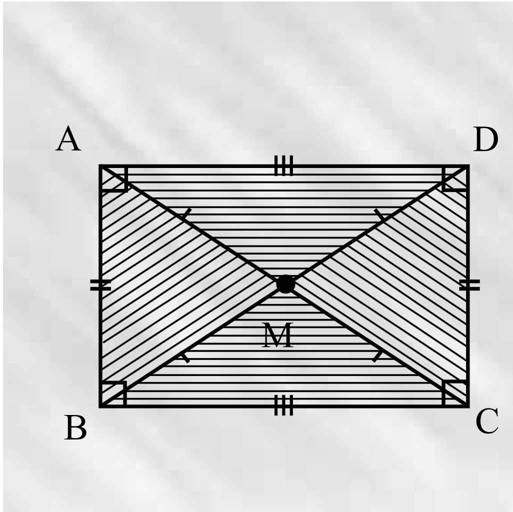
$MA= MB= MC= MD$

با توجه به این‌که AB=CD و BC=AD و $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = ۹۰^\circ$ اســت، دو مثلث MAB و MCD و هم‌چنین دو مثلث MBC و MAD هم‌نهشت‌اند (به حالت ض‌ض‌ض) زیرا:

$MA = MB = MC = MD$ و $AB = CD \Rightarrow \Delta MAB \simeq \Delta MCD$

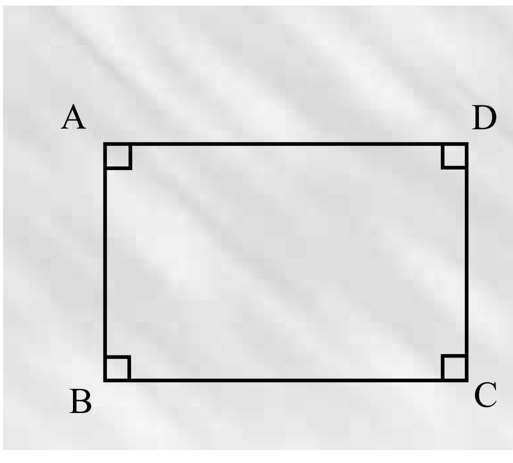
$MA = MB = MC = MD$ و $BC = AD \Rightarrow \Delta MBC \simeq \Delta MAD$

از هم‌نهشتی این مثلث‌ها نتیجه می‌شود که $\hat{M}_1 = \hat{M}_3$ و $\hat{M}_2 = \hat{M}_4$، اما $\hat{M}_1 + \hat{M}_2 + \hat{M}_3 + \hat{M}_4 = 360^\circ$ است، پس $2M_1 + 2M_2 = 360^\circ$



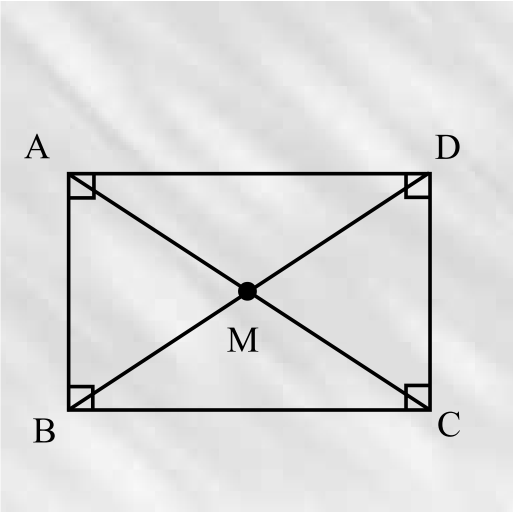
در نتیجه $\hat{M}_1 + \hat{M}_2 = 180^\circ$ و $\hat{M}_1 + \hat{M}_4 = 180^\circ$. پس AMC و BMD خط‌های راست هستند، یعنی AMC و BMD قطرهای مستطیل ABCD هستند. بنابراین نقطه‌ی M وجود دارد و این نقطه محل برخورد قطرهای AC و BC از مستطیل ABCD است.

روش دوم ـ چون در مستطیل ABCD $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$ است، پس $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$ و $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$ است، یعنی هر دو زاویه‌ی روبه‌روی آن مکمل یکدیگرند، بنابراین مستطیل ABCD محاطی است، یعنی بر چهار رأس آن یک دایره می‌گذرد. اگر مرکز این دایره را M بنامیم، M جواب مسئله است، یعنی نقطه‌ای است که از چهار رأس این مستطیل یک فاصله است، یعنی داریم MA= MB= MC= MD (این دایره به قطر AC یا BD است).



روش سوم ـ قطرهای AC و BD از مستطیل ABCD را رسم می‌کنیم و نقطه‌ی برخورد آن‌ها را M می‌نامیم. چون قطرهای مستطیل با هم مساوی‌اند و یکدیگر را نصف می‌کنند، پس داریم:

MA= MB= MC= MD

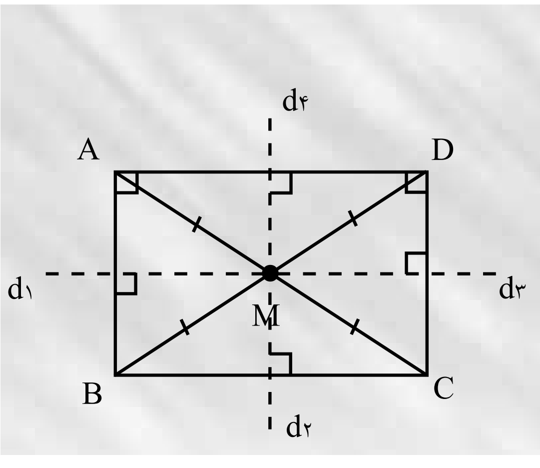


بنابراین، نقطه‌ی M محل برخورد قطرهای مستطیل ABCD جواب مسئله است.

روش چهارم ـ عمودمنصف‌های ضلع‌های مستطیل، یعنی عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های AB، BC، CD و DA را رسم می‌کنیم و به ترتیب d_1، d_2، d_3 و d_4 می‌نامیم. d_1 و d_3 بر هم منطبق‌اند، زیرا در واقع خطی که وسط‌های ضلع‌های AB و CD از این مستطیل را به هم وصل می‌کند بر هر دو ضلع AB و CD عمود است، یعنی هم عمودمنصف AB است و هم عمودمنصف CD؛ چرا؟ هم‌چنین خط‌های d_2 و d_4 نیز برهم منطبق‌اند.

اگر نقطه‌ی برخورد d_1 و d_3 با خط‌های d_2 و d_4 را M بنامیم، این نقطه جواب مسئله است، یعنی داریم:

MA= MB= MC= MD



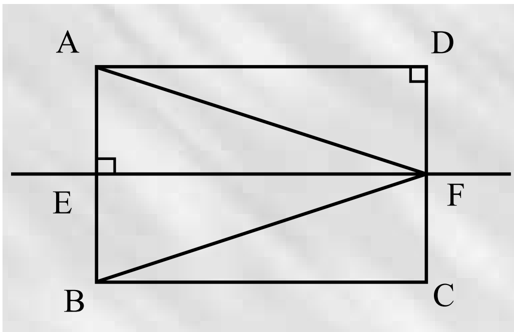
زیرا:

$$M \in d_1 \Rightarrow MA = MB,\ M \in d_3 \Rightarrow MC = MD$$
$$M \in d_2 \Rightarrow MB = MC,\ M \in d_4 \Rightarrow MA = MD$$
$$\Rightarrow MA = MB = MC = MD$$

نکته: از این‌که M هم روی d_1 و هم روی d_3 است، به‌طور مستقیم می‌توان نتیجه گرفت که MA= MB= MC= MD است، زیرا:

$$M \in d_1 \Rightarrow MA = MB,\ M \in d_3 \Rightarrow MC = MD$$
$$\Rightarrow MA = MB = MC = MD$$

پاسخ چرا در حل مسئله: اگر وسط ضلع AB را E و وسط ضلع CD را F بنامیم و از E به F وصل کنیم، خط EF بر دو ضلع AB و CD عمود است، زیرا اگر از F به A و B وصل کنیم دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی ADF و BCF به دلیل برابری ضلع‌های مجاور به زاویه‌های قائمه نشان هم‌نهشت‌اند (AD= BC و FC= FD و $\hat{D} = \hat{C} = 90^\circ$). بنابراین FA= FB است، یعنی نقطه‌ی F روی عمودمنصف پاره‌خط AB است و چون پای این عمودمنصف نقطه‌ی E است، پس EF هم عمودمنصف پاره‌خط AB و هم عمودمنصف پاره‌خط CD است، یعنی d_1 و d_3 برهم منطبق‌اند. به دلیل مشابه، خط‌های d_2 و d_4 که به ترتیب عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های BC و AD هستند. نیز، برهم منطبق‌اند.



ب) اثبات به روش جبری ـ مختصاتی

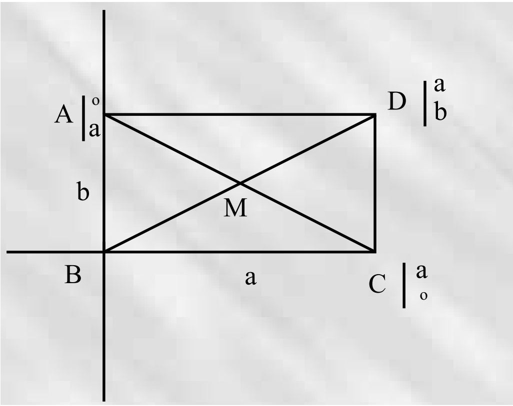
روش اول ـ اندازه‌ی ضلع‌های مستطیل ABCD را a و b در نظر می‌گیریم، یعنی فرض می‌کنیم AB= CD = a و BC = AD= d.

دستگاه مختصات قائم xoy را چنان اختیار می‌کنیم که محور xها روی BC و محور yها روی BA باشد. رأس B را مبدأ مختصات در نظر می‌گیریم، یعنی $B = (0,0)$.

در این دستگاه مختصات $A = (0,b)$، $D = (a,b)$ و $C = (a,0)$ است. وسط قطر AC که آن را M می‌نامیم، محل برخورد قطرهای آن است و داریم:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{0 + a}{2} = \dfrac{a}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{b + 0}{2} = \dfrac{b}{2} \end{cases}$$

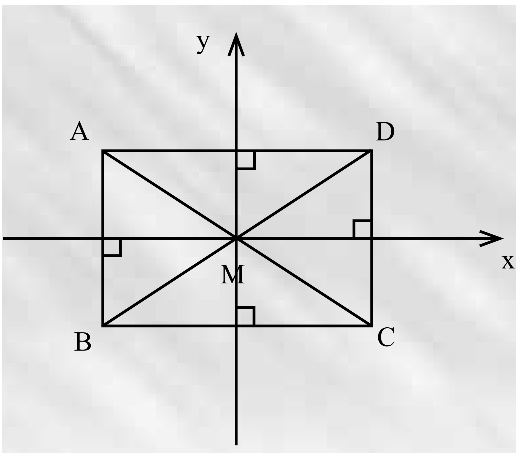
اکنون فاصله‌ی نقطه‌ی M تا چهار رأس مستطیل را به دست می‌آوریم.



$$MA = \sqrt{(0 - \frac{a}{2})^2 + (b - \frac{b}{2})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$
$$MB = \sqrt{(0 - \frac{a}{2})^2 + (0 - \frac{b}{2})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$
$$MC = \sqrt{(a - \frac{a}{2})^2 + (0 - \frac{b}{2})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$
$$MD = \sqrt{(a - \frac{a}{2})^2 + (b - \frac{b}{2})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\Rightarrow MA = MB = MC = MD = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

پس نقطه‌ی M جواب مسئله است. این نقطه مرکز تقارن مستطیل نیز هست که همان نقطه‌ی برخورد قطرهای مستطیل است.

روش دوم ـ طول ضلع‌های مستطیل را a و b در نظر می‌گیریم. قطرهای آن را رسم می‌کنیم و نقطه‌ی برخورد آن‌ها را M می‌نامیم.



دســتگاه مختصات قائــم xMy را چنان اختیار می‌کنیــم که M مبدأ مختصات، محور xها موازی راستای AB و محور yها موازی راستای BC باشد. در این دستگاه مختصات رأس‌های مستطیل $A=(\frac{-a}{2},\frac{b}{2})$ ، $B=(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2})$، $C=(\frac{a}{2},\frac{-b}{2})$ و $D=(\frac{+a}{2},\frac{+b}{2})$ است. فاصله‌ی نقطه‌ی M مبدأ مختصات و محل برخورد قطرهای مستطیل از چهار نقطه‌ی A، B، C و D را به دست می‌آوریم. داریم:

$$MA=\sqrt{(-\frac{a}{2})^2+(\frac{b}{2})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$$

$$MB=\sqrt{(\frac{-a}{2})^2+(\frac{-b}{2})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$$

$$MC=\sqrt{(\frac{a}{2})^2+(\frac{+b}{2})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$$

$$MD=\sqrt{(\frac{+a}{2})^2+(\frac{+b}{2})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\Rightarrow MA=MB=MC=MD=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$$

بنابرایــن، نقطــه‌ی M محل برخورد قطرهای مســتطیل و جواب مســئله اســت، یعنی نقطه‌ای اســت که از چهار رأس مستطیل به یک فاصله خواهد بود.

نکته‌ی مهم: این سؤال پیش می‌آید که چرا در راه‌حل‌های جبری- مختصاتی ارائه شده، حدس زدیم که نقطه‌ی برخورد قطرهای مستطیل جواب مسئله است و سپس درست بودن این حدس را ثابت کردیم. این حدس زدن می‌تواند از راه‌حل هندســی مســئله نشأت بگیرد، اما بدون حدس زدن، مســتقیماً می‌توانیم مختصات نقطه‌ی جواب مسئله را پیدا کنیم و متوجه شــویم که این نقطه همان محل برخورد قطرهای مســتطیل اســت. برای مثال در روش آخر راه‌حل جبری ـ مختصاتی که مختصات رأس‌های مســتطیل ABCD به صورت $A=(\frac{-a}{2},\frac{b}{2})$ ، $B=(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2})$، $C=(\frac{a}{2},\frac{-b}{2})$ و $D=(\frac{+a}{2},\frac{+b}{2})$ اســت، فــرض می‌کنیم جواب مسئله نقطه‌ی $M=(\alpha,\beta)$ باشد. یعنی M نقطه‌ای باشد که از چهار رأس مستطیل به یک فاصله است. در این صورت داریم:

$$MA=\sqrt{(-\frac{a}{2}-\alpha)^2+(\frac{b}{2}-\beta)^2}$$

$$MB=\sqrt{(\frac{-a}{2}-\alpha)^2+(\frac{-b}{2}-\beta)^2}$$

$$MC=\sqrt{(\frac{a}{2}-\alpha)^2+(\frac{-b}{2}-\beta)^2}$$

$$MD=\sqrt{(\frac{+a}{2}-\alpha)^2+(\frac{+b}{2}-\beta)^2}$$

$$MA=MB=MC=MD\Rightarrow MA^2=MB^2=MC^2=MD^2$$

$$\Rightarrow(-\frac{a}{2}-\alpha)^2+(\frac{b}{2}-\beta)^2=(\frac{-a}{2}-\alpha)^2+(\frac{-b}{2}-\beta)^2$$

$$\Rightarrow\frac{a^2}{4}+\cancel{\alpha^2}+a\alpha+\frac{b^2}{4}+\cancel{\beta^2}-b\beta$$

$$=\frac{a^2}{4}+\cancel{\alpha^2}+a\alpha+\frac{b^2}{4}+\cancel{\beta^2}+b\beta$$

$$\Rightarrow 2b\beta=0, b\neq 0\Rightarrow\beta=0 \quad (1)$$

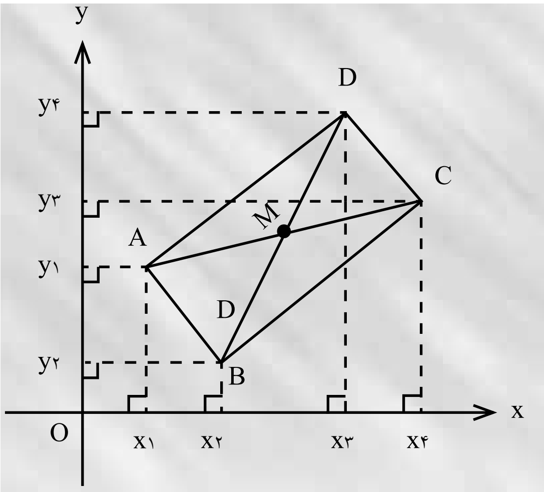
$$(\frac{a}{2}-\alpha)^2+(\frac{-b}{2}-\beta)^2=(\frac{a}{2}-\alpha)^2+(+\frac{b}{2}-\beta)^2$$

$$\Rightarrow 2a\alpha=0, a\neq 0$$

$$\Rightarrow\alpha=0 \quad (2)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شــود $M(0,0)$. پس جواب مسئله، نقطه‌ی M، محل برخورد قطرهای مستطیل است که در این دستگاه مختصات به عنوان مبدأ مختصات انتخاب شده است.

روش ســوم ـ اگر دســتگاه مختصات قائم xoy را بــه صورت دلخواه انتخاب کنیم، مختصات رأس‌های مستطیل $A=(x_1,y_1)$ ، $B=(x_2,y_2)$ ، $C=(x_3,y_3)$ و $D=(x_4,y_4)$ خواهــد بــود. در ایــن صورت نیز می‌توانیم مختصات نقطه‌ی M جواب مسئله را همانند روش ارائه شده در قســمت قبل به دست آوریم، یعنی فرض کنیم $M=(\alpha,\beta)$ جواب این مســئله است و از رابطه‌های MA= MB= MC= MD اندازه‌های α و β را به دست آوریم. نتیجه‌ی کار چنین خواهد بود:



$$M=(\frac{x_1+x_3}{2},\frac{y_1+y_3}{2}) \text{ یا } M=(\frac{x_2+x_4}{2},\frac{y_2+y_4}{2})$$

که این نقطه، محل برخورد قطرهای مستطیل است.

نکته: چون نقطه‌ی M وسط قطر AC و وسط قطر BD نیز هست، پــس تســاوی‌های $\frac{x_1+x_3}{2}=\frac{x_2+x_4}{2}$ و $\frac{y_1+y_3}{2}=\frac{y_2+y_4}{2}$ برقرارند.

توجــه: چگونگــی تعیین α و β برحســب مختصــات رأس‌های مســتطیل را برای ما بنویسید و به نشانی مجله ارسال کنید. به بهترین پاسخ‌ها جوایزی اهدا خواهد شد.

ادامه دارد