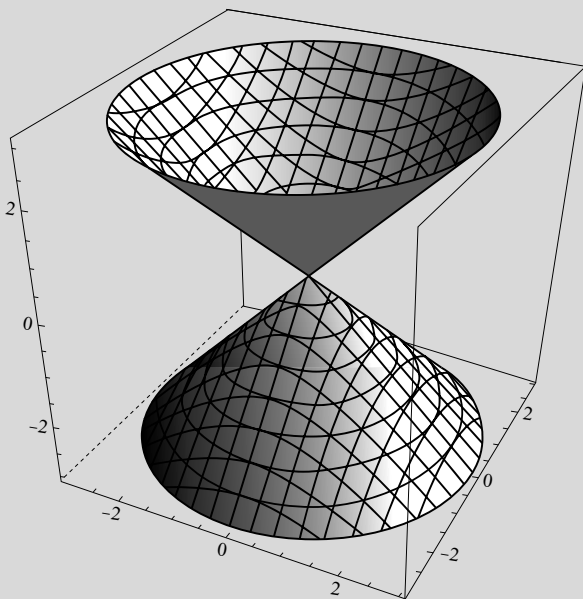




آشنایی با بسته‌ی نرم‌افزاری مَتَمَتیکا ۳

Mathematica

دکتر محمدعلی فریبرزى عراقى
عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه
آزاد اسلامی، واحد تهران مرکزی



مقدمه

یکی از مباحث مهم در درس ریاضیات دوره‌ی دبیرستان، موضوع توابع، اعمال روی توابع و رسم نمودار آنهاست. بسته‌ی نرم‌افزاری مَتَمَتیکا این قابلیت را دارد که به راحتی محاسبات روی توابع را انجام دهد و منحنی یک تابع در یک بازه‌ی مفروض را رسم کند. در این قسمت چگونگی تعریف یک تابع و تعدادی از دستورالعمل‌های رایج برای رسم یک تابع در محیط بسته‌ی نرم‌افزاری مَتَمَتیکا با ارائه‌ی مثال‌های مختلف معرفی می‌شوند. باز هم یادآوری می‌کنیم برای اجرای هر یک از دستورالعمل‌ها باید دکمه‌های Shift+Enter به‌طور هم‌زمان فشار داده شوند.

معرفی توابع در متمتیکا

فرض کنیم f تابعی بر حسب متغیر x باشد. به منظور تعریف ضابطه‌ی این تابع در متمتیکا یکی از دو صورت کلی زیر استفاده می‌شود:

$$f[x_]=\dots \text{ یا } f[x_]=\dots$$

در طرف دوم تعریفی باید مطرح شود که مطابق آن مقدار تابع f در مقدار مفروض x محاسبه می‌شود. گفتنی است که x یک متغیر ظاهری است و می‌تواند با هر متغیر یا عبارت دیگری جایگزین شود.

مثال ۱: در این مثال دو تابع f و g با ضابطه‌های $f(x)=x^2$ و $g(x)=2x^2$ در محیط متمتیکا تعریف و مقادیر $f(3)$ ، $f(-3)$ و $f(1)+g(-2)$ محاسبه شده‌اند. همچنین تابع f با ضابطه‌ی $f(a)=3a^2+2a-5$ تعریف و مقدار $f(2)+f(-2)$ به دست آمده است.

$$f[x_]=x^2$$

$$f[3]$$

$$9$$

$$g[x_]=2x^2$$

$$g[-3]$$

$$-54$$

$$f[1] + g[-2]$$

$$-15$$

$$f[a_]=3a^2+2a-5$$

$$f[2] + f[-2]$$

$$-10$$

مثال ۲: در این مثال ابتدا تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=x^2+x^3$ تعریف شده است و به دنبال آن $f(2)$ ، $f(2x)$ ، $f(e^x)$ و $f(\lambda)$ مشخص شده‌اند. توجه کنید که $\text{Exp}[x]$ به معنای e^x است.

$$f[x_]=x^2+x^3;$$

$$f[2]$$

$$12$$

$$f[2x]$$

$$4x^2+8x^3$$

$$f[\text{Exp}[x]]$$

$$e^{2x}+e^{3x}$$

$$f[\lambda]$$

$$\lambda^2+\lambda^3$$

توابع چندضابطه‌ای نیز در متمتیکا قابل تعریف‌اند. برای این کار ضابطه‌ی تابع را به همراه شرط مورد نظر به صورت زیر منظور می‌کنیم:

$$f[x_]= \text{عبارت} ; \text{ شرط}$$

در این حالت حتماً باید از نماد $=$ استفاده کرد و پس از معرفی

ضابطه‌ی تابع، شرط مورد نظر را بعد از نماد $;$ قرار داد. مثال ۳: در زیر تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x^2 & x \leq 2 \\ 8-2x & x > 2 \end{cases}$ تعریف شده است:

$$f[x_]=x^2;x \leq 2$$

$$f[x_]=8-2x;x > 2$$

$$f[-4]$$

$$16$$

$$f[4]$$

$$0$$

ملاحظه می‌شود که مقدار $f(-4)$ از ضابطه‌ی اول و مقدار $f(4)$ از ضابطه‌ی دوم به ترتیب ۱۶ و ۰ به دست آمده‌اند.

اعمال روی توابع

اگر f و g دو تابع مفروض باشند، اعمال جمع، تفریق، ضرب و تقسیم این توابع در محیط متمتیکا قابل انجام است. می‌دانیم این اعمال بین f و g به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), x \in D$$

$$(f \times g)(x) = f(x) \cdot g(x), x \in D$$

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x), x \in D - \{x | g(x) = 0\}$$

که در آن‌ها $D_f \cap D_g = D$.

مثال ۴: در زیر چهار عمل اصلی روی توابع f و g با ضابطه‌های $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x^2 + 2x + 3$ محاسبه شده‌اند:

$$f[x_]=\sqrt{x};$$

$$g[x_]=x^2+2x+3;$$

$$h1[x_]=f[x_]+g[x_]$$

$$3 + \sqrt{x} + 2x + x^2$$

$$h2[x_]=f[x_]-g[x_]$$

$$-3 + \sqrt{x} - 2x - x^2$$

$$h3[x_]=f[x_] \cdot g[x_]$$

$$\sqrt{x}(3 + 2x + x^2)$$

$$h4[x_]=f[x_]/g[x_]$$

$$\frac{\sqrt{x}}{3 + 2x + x^2}$$

مثال ۵: فرض کنیم $f(x) = x^2 - 1$ و $g(x) = 3x^2 + 4x - 7$. در این صورت $f+g$ ، $f-g$ ، $f \times g$ و f/g به صورت زیر قابل محاسبه‌اند. در این حالت از دستورهای Factor و Simplify نیز استفاده شده است.

$$f[x_]=x^2-1$$

$$g[x_]=3x^2+4x-7$$

Nest List [f, عبارت , n]

دستور Nest، n بار متوالی تابع f را تحت ضابطه‌ی مشخص شده در عبارت داخل گروه با خودش ترکیب می‌کند. دستور Nest List همین کار را انجام می‌دهد، ولی تمام محاسبات میانی را از ابتدا تا بار nم فهرست می‌کند.

مثال ۸: در زیر تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=x^2$ ، ۵ بار با خودش ترکیب شده است.

$$f[x_]:=x^2;$$

Nest[f,x,۵]

$$x^{32}$$

Nest List[f,x,۵]

$$\{x, x^2, x^4, x^8, x^{16}, x^{32}\}$$

مثال ۹: در زیر تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x+1}$ تعریف شده و حاصل fofofof (یعنی ترکیب f با خودش تا ۵ بار) به دست آمده است. با مقدار دهی به x می‌توان مقدار این ترکیب را به ازای آن مقدار خاص پیدا کرد.

$$f[x_]=\sqrt{1+x};$$

Nest[f,x,۵]

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}}}$$

رسم نمودار توابع در متمتیکا

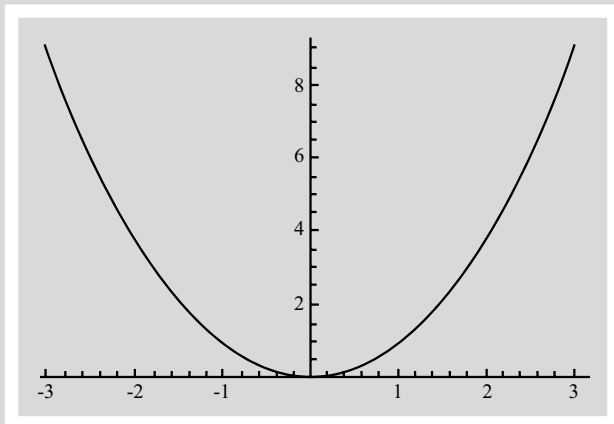
در ادامه، دستورالعمل رسم منحنی یک تابع در محیط متمتیکا معرفی می‌شود. دستور اصلی برای رسم نمودار یک تابع مفروض Plot است که به شکل کلی زیر تعریف می‌شود:

Plot [f[x], {x, x_{min}, x_{max}}]

دستور فوق برای رسم نمودار دو بعدی تابع f در بازه‌ی $x \in [x_{min}, x_{max}]$ به کار می‌رود.

مثال ۱۰: دستور زیر نمودار تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=x^2$ را در $[-3, 3]$ رسم می‌کند.

Plot [x², {x, -۳, ۳}]



$$f[x]+g[x]$$

$$f[x]-g[x]$$

Factor[f[x]*g[x]]

Simplify[f[x]/g[x]]

$$-8+4x+4x^2$$

$$6-4x-2x^2$$

$$(-1+x)^2(1+x)(7+3x)$$

$$\frac{1+x}{7+3x}$$

هم‌چنین می‌توان ترکیب دو تابع مفروض f و g را نیز در متمتیکا محاسبه کرد. می‌دانیم اگر x عددی در دامنه‌ی g و g(x) مقداری در دامنه‌ی f باشد، آن‌گاه داریم:

$$(fog)_{(x)}=f(g(x))$$

مثال ۶: در مثال ۴، ترکیب دو تابع f و g به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$h5[x]=f[g[x]]$$

$$\sqrt{3+2x+x^2}$$

$$h6[x]=g[f[x]]$$

$$3+2\sqrt{x}+x$$

به منظور محاسبه‌ی ترکیب دو تابع f و g می‌توان از دستور Com-position به صورت زیر استفاده کرد.

I) Composition[f,g]

II) Composition[g,f]

دستور اول همان fog و دستور دوم همان gof را مشخص می‌کند. مثال ۷: در دستورالعمل‌های زیر دو تابع f و g با ضابطه‌های $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x^2+2x+3$ تعریف شده و سپس fog و gof با به‌کارگیری دستور Composition به دست آمده‌اند.

$$f[x_]=\sqrt{x};$$

$$g[x]=x^2+2x+3;$$

h۱=Composition[f,g];

h۱[x]

$$\sqrt{3+2x+x^2}$$

h۲=Composition[g,f];

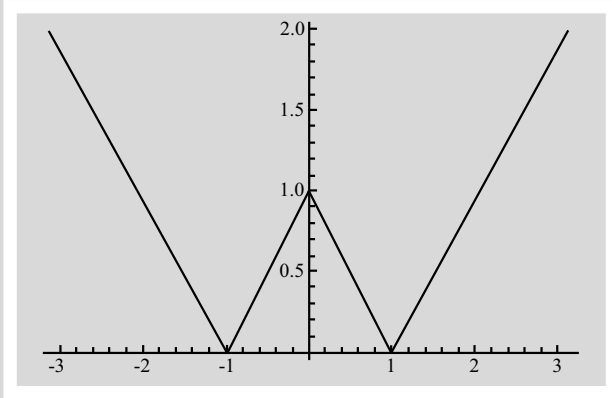
h۲[x]

$$3+2\sqrt{x}+x$$

با استفاده از دستور ترکیب توابع می‌توان ترکیب یک تابع با خودش را به هر تعداد بار که مورد نظر باشد محاسبه کرد. برای این کار از دستورالعمل Nest یا Nest List به صورت زیر استفاده می‌شود:

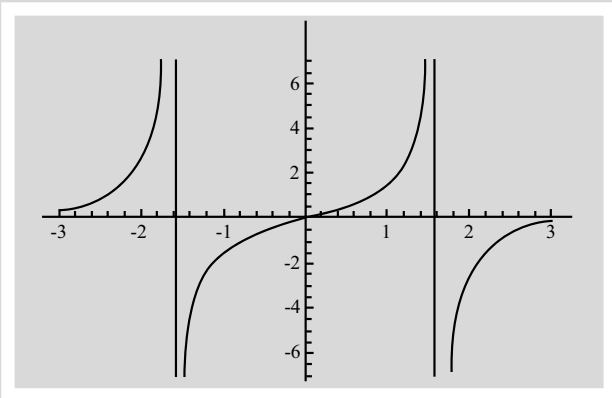
Nest [f, عبارت , n]

Plot [Abs [Abs[x] - ۱], {x, -۳, ۳}]



مثال ۱۳: به منظور رسم نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = \tan x$ به ازای $-3 \leq x \leq 3$ دستور زیر را اجرا می‌کنیم:

Plot [Tan[x], {x, -۳, ۳}]



می‌توان نمودار دو تابع را به‌طور هم‌زمان در صفحه‌ی مختصات با رنگ‌های متفاوت رسم کرد. به این منظور از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

Plot [{f[x], g[x]}, {x, x_{min}, x_{max}}]

این دستور نمودارهای توابع f و g را در محدوده‌ی x_{\min} تا x_{\max} در یک صفحه‌ی مختصات رسم می‌کنیم. این دستور قابل تعمیم برای رسم سه یا بیش از سه تابع به صورت کلی زیر است:

Plot [{f, f_۲, ...}, {x, x_{min}, x_{max}}]

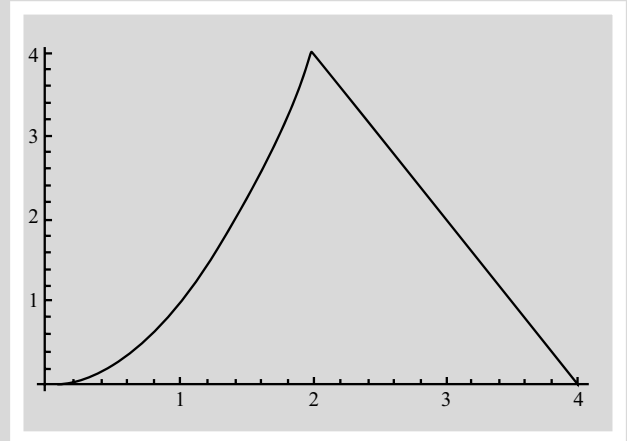
مثال ۱۴: به منظور رسم هم‌زمان نمودارهای دو تابع f و g با ضابطه‌های $f(x) = x^2$ و $g(x) = 2x + 7$ در $[-5, 5]$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

مثال ۱۱: دستور زیر نمودار تابع مثال ۳ را رسم می‌کند:

$$f[x_] := x^2; x \leq 2$$

$$f[x_] := 8 - 2x; x > 2$$

Plot [f[x], {x, ۰, ۴}]

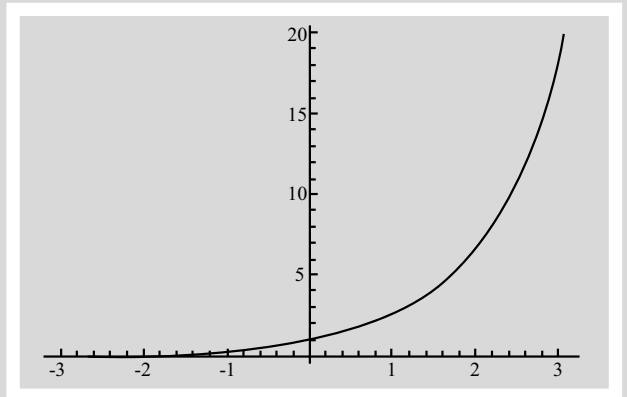


مثال ۱۲: دستورهایی زیر نمودارهای توابع با ضابطه‌های $y = e^x$ در

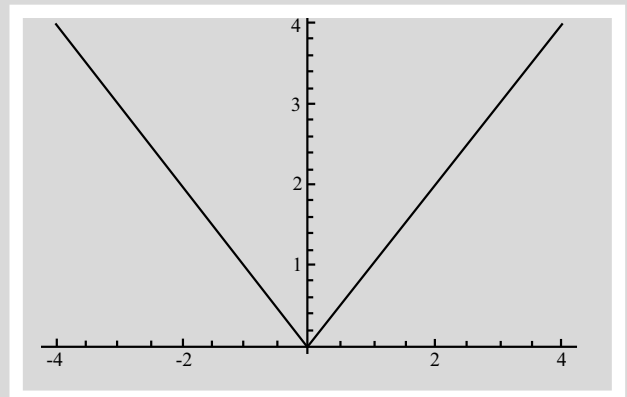
بازه‌ی $[-3, 3]$ ، $y = |x|$ ، در بازه‌ی $[-4, 4]$ و $y = ||x| - 1|$ در بازه‌ی $[-3, 3]$ رسم می‌کند. توجه شود که $Abs[x]$ به معنای قدرمطلق x است.

$$f[x_] = Exp[x];$$

Plot [f[x], {x, -۳, ۳}]

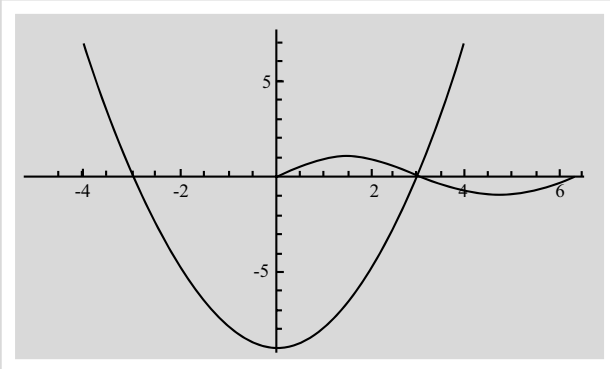


Plot [Abs[x], {x, -۴, ۴}]

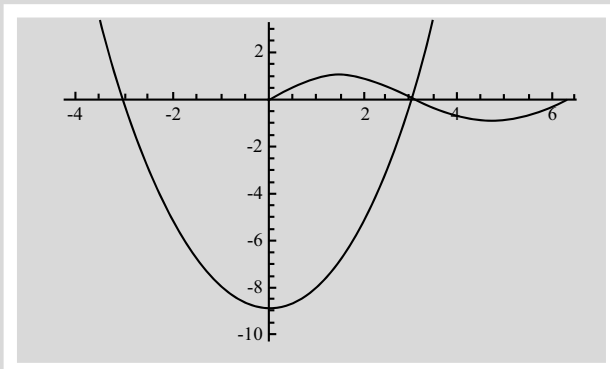


در یک صفحه‌ی مختصات با به‌کارگیری PlotRange رسم می‌کنیم.

```
g۱ = Plot[x۲ - ۹, {x, -۴, ۴}];
g۲ = Plot[sin[x], {x, ۰, ۲π}];
Show [g۱, g۲, PlotRange → All]
```



```
Show [g۱, g۲, PlotRange → {-۱۰, ۳}]
```

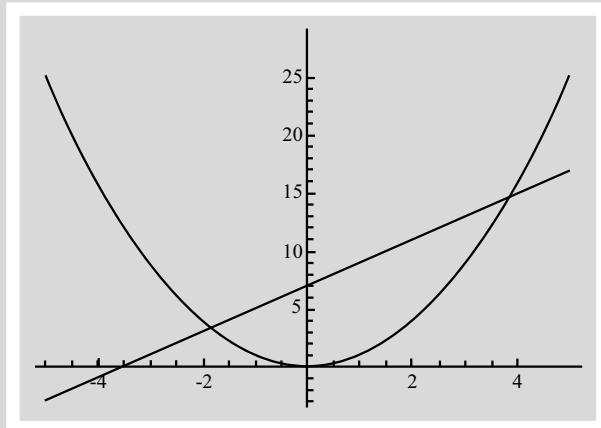


زمانی که چند نمودار به‌طور هم‌زمان رسم می‌شوند، متمتیکا قابلیت را دارد که برای تشخیص نمودارها آن‌ها را با رنگ‌ها و اندازه‌های مختلف یا با برجسب‌گذاری و به‌کارگیری خط‌چین‌های گوناگون رسم کند. برای مثال می‌توان با به‌کارگیری دستور PlotStyle نوع ترسیم موردنظر را اعلام کرد. یکی از انواع رایج GrayLevel[x] است که در آن x عددی بین صفر و یک است. هر قدر x به یک نزدیک‌تر باشد شکل پررنگ‌تر و هر قدر به صفر نزدیک‌تر باشد کم‌رنگ‌تر رسم می‌شود. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱۶: دستور زیر سه منحنی $y = \sin^3 x$ و $y = \sin^2 x$ و $y = \sin x$ را به ازای $-\pi \leq x \leq \pi$ با سه سطح رنگ مختلف رسم می‌کند.

```
Plot [{sin[x], sin [2x], sin [3x]}, {x, -Pi, Pi}]
PlotStyle → {GrayLevel [۰/۲], GrayLevel [۰/۵], GrayLevel [۰/۸]}
```

```
Plot [{x۲, ۲x+۷}, {x, -۵, ۵}]
```



به‌منظور رسم هم‌زمان نمودار چند تابع در یک صفحه‌ی مختصات از دستور Show نیز می‌توان استفاده کرد. در این حالت چون دامنه‌های توابع متفاوت‌اند، با به‌کارگیری یکی از موارد زیر، کاربر می‌تواند تنظیمات موردنظر برای رسم این نمودارها را تغییر دهد. برای تایپ کاراکترهایی چون → می‌توانیم روی گزینه‌ی Insert کلیک و پس از انتخاب special character گزینه‌ی → را در صفحه درج کنیم یا این کاراکتر را از پنجره‌ی Basic Math Input برگزینیم.

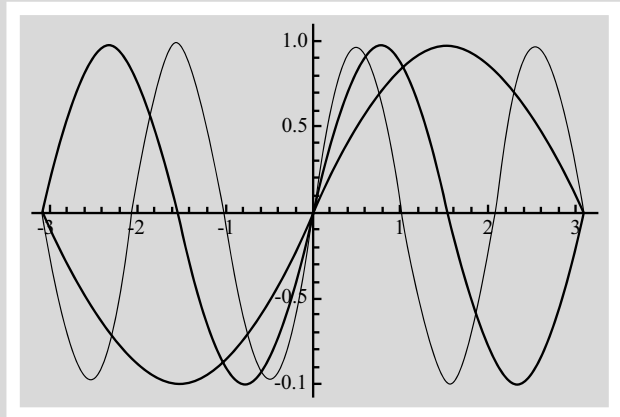
- ۱) PlotRange → Automatic
- ۲) PlotRange → All
- ۳) PlotRange → {y_{min}, y_{max}}
- ۴) PlotRange → {{x_{min}, x_{max}}, {y_{min}, y_{max}}}

با در نظر گرفتن دستور انتخابی ۱، خود متمتیکا به صورت خودکار تنظیمات مبنایی را برای رسم توابع برمی‌گزیند و آن دسته از نقاطی را که مختص عمودی آن‌ها خیلی بزرگ باشد، در نمودارها حذف می‌کند. دستور ۲ متمتیکا را وادار می‌کند که تمام نقاط نمودارها را در محدوده‌های وارد شده رسم کند. دستور ۳ تنها نقاطی از نمودارها را رسم می‌کند که مختص عمودی آن‌ها در محدوده‌ی بین y_{min} و y_{max} باشد. دستور ۴ نیز تنها نقاطی از نمودارها را رسم می‌کند که مختص افقی آن‌ها بین x_{min} و x_{max} و مختص عمودی آن‌ها بین y_{min} و y_{max} باشند. به این ترتیب از دستور Show به شکل کلی زیر برای رسم هم‌زمان چند تابع می‌توان استفاده کرد.

```
Show [g۱, g۲, ..., PlotRange → ...]
```

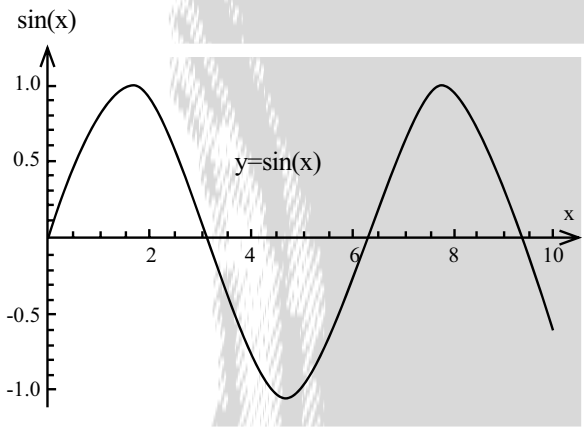
مثال ۱۵: در مثال ذیل، دو تابع با ضابطه‌های $y = \sin x$ و $y = x^2 - 9$ رسم شده‌اند. با استفاده از دستور Show به دو صورت زیر آن‌ها را

❖ گفتنی است که اگر نوع رنگ‌ها مشخص نشود، خود نرم‌افزار به شکل خودکار رنگ‌های مختلفی را انتخاب می‌کند. هم‌چنین می‌توان با برجسب‌گذاری روی نمودار تابع یا محورهای مختصات، اطلاعات موردنظر را روی شکل منظور کرد. برای این کار از دستور `PlotLabel` برای برجسب‌گذاری نمودار تابع و `AxesLabel` برای برجسب‌گذاری محورهای مختصات استفاده می‌کنیم. به مثال زیر توجه کنید.



مثال ۱۸: در دستور زیر منحنی تابع با ضابطه $y = \sin x$ در بازه‌ی $[0, 10]$ با برجسب `y=sin(x)` برای منحنی تابع و برجسب‌های `x` و `sin(x)` برای محورهای مختصات رسم شده‌اند.

`Plot[sin[x], {x, 0, 10}, PlotLabel -> y==sin[x], AxesLabel -> {x, sin [x]}`

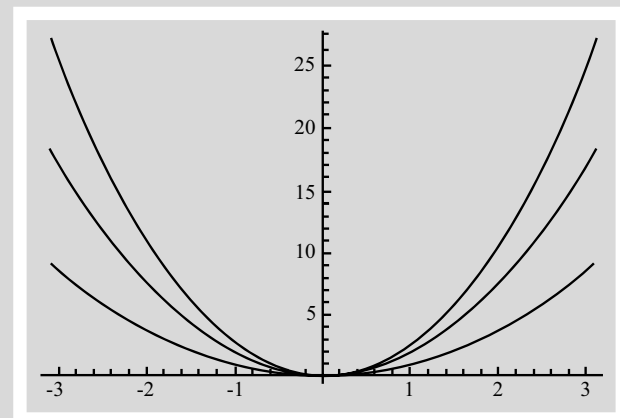


در قسمت بعد دستورات عمل‌های دیگری از بسته‌ی نرم‌افزاری متمتیکا معرفی خواهند شد.

هم‌چنین می‌توان نام رنگ انتخابی برای رسم هر یک از نمودارها را اعلام کرد. به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۱۷: دستور زیر منحنی توابع $y = x^2$, $y = 2x^2$ و $y = 3x^2$ را به ازای $-3 \leq x \leq 3$ ، به ترتیب با نوع ترسیم قرمز، سبز و آبی رسم می‌کند. شما در مانیتور رایانه‌ی خود می‌توانید نمودارها را با این رنگ‌ها مشاهده کنید. البته رنگ‌های دیگری چون `Pink`, `Gray`, `Brown`, `Yellow` و... را نیز می‌توان انتخاب کرد. دوباره متذکر می‌شویم که حرف اول نام هر یک از دستورات عمل‌ها و انتخاب‌ها در متمتیکا باید بزرگ و سایر حروف باید کوچک تایپ شوند. البته این قانون برای دستورات عمل‌های دو کلمه‌ای نیز باید رعایت شود. برای مثال در واژه‌ی `PlotStyle` باید حروف `S` و `P` بزرگ و سایر حروف کوچک تایپ شوند. یا برای مثال اگر بخواهیم رنگ یک منحنی قرمز کم‌رنگ باشد باید تایپ کنیم: `Light Red` برای انتخاب ساده‌ی رنگ‌ها در صفحه‌ی اصلی متمتیکا روی `Insert` کلیک و گزینه‌ی `Color` را انتخاب می‌کنیم، سپس در صفحه‌ی رنگ‌ها رنگ موردنظر را برمی‌گزینیم.

`Plot[{x^2, 2x^2, 3x^2}, {x, -3, 3}, PlotStyle -> {Red, Green, Blue}]`



منابع

1. Mathematica, Eugene Don, Schaum's outline series, second edition, McGraw Hill Companies, 2009.
2. Wolfram Mathematica 6, Guidebook, 2007.

