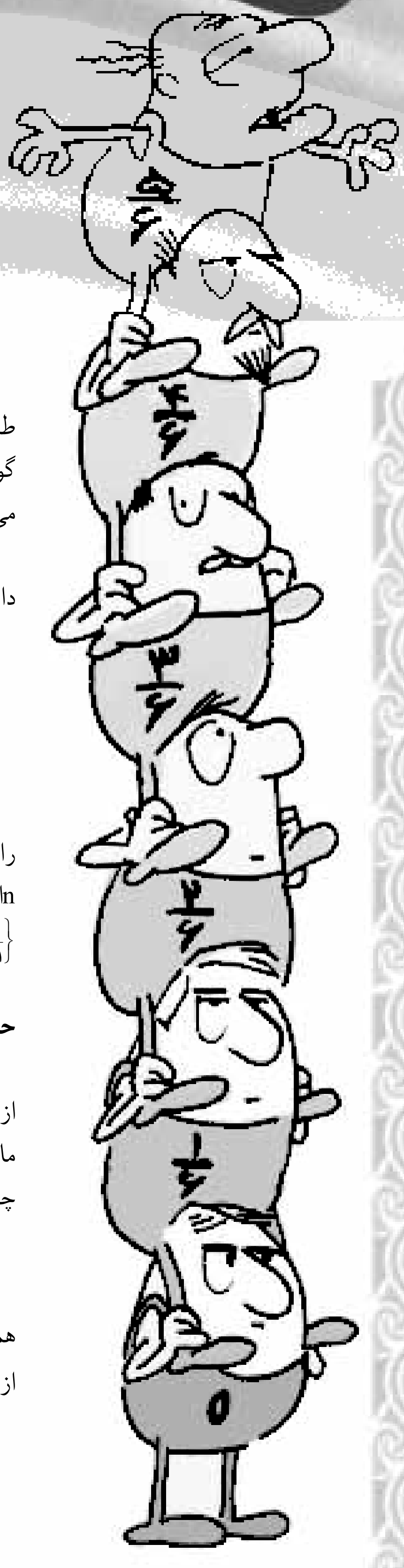
دنباله

۱

احمد قندهاری



یک دنباله، تابعی است که دامنه‌ی آن مجموعه‌ی اعداد طبیعی باشد و به هریک از مقادیر برد آن، یک جمله‌ی دنباله گویند. در واقع، مقادیر برد چنین تابعی، جمله‌های دنباله را تولید می‌کند.

برای مثال، تابع $\underset{N\to\mathbb{R}}{f(x)}=\frac{n}{n+1}$ یک دنباله است. در این دنباله داریم:

$$f(1)=\frac{1}{2},\ f(2)=\frac{2}{3},\ f(3)=\frac{3}{4},\ \dots,\ f(n)=\frac{n}{n+1},\ \dots$$

پس جمله‌های این دنباله عبارت است از:

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\dots,\frac{n}{n+1},\dots$$

جمله‌ی اول دنباله را با a_1 و جمله‌ی دوم را با a_2 و جمله‌ی سوم را با a_3 و ... و جمله‌ی nام دنباله‌دار را با a_n نشان می‌دهیم. به جمله‌ی nام، جمله‌ی عمومی دنباله هم می‌گوییم. و خود دنباله‌ها را با $\{a_n\}$ یا $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ یا $\left\{a_n=\frac{n}{n+1}\right\}$ نشان می‌دهیم.

حدّ دنباله و دنباله‌ی همگرا

می‌گوییم دنباله‌ی $\{a_n\}$ دارای حدّ L است $(L\in\mathbb{R})$ هرگاه به ازای هر $\varepsilon>0$ عدد طبیعی M وجود داشته باشد، به طوری‌که از مرتبه‌ی مانند $n\geq M$ داشته باشیم $|a_n-L|<\varepsilon$. این گفته را با نمادهای ریاضی چنین نشان می‌دهیم.

$$\forall\varepsilon>0\ \exists M\in N: n\geq M\Rightarrow |a_n-L|<\varepsilon$$

در این صورت می‌گوییم دنباله همگراست یا دنباله به عدد L همگراست و می‌نویسیم $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L$ برای یافتن عدد طبیعی M، باید از نامساوی $|a_n-L|<\varepsilon$ شروع کرد تا به نامساوی $n\geq M$ رسید. عمل

رسیدن از $|a_n-L|\langle ε$ به $n \ge M$ یک جست‌وجو و بررسی است و پس از یافتن M باید بتوان از $n \ge M$ به نامساوی $|a_n-L|\langle ε$ رسید. در واقع، روابط حل باید برگشت‌پذیر باشد.

مسئله‌ی ۱: با استفاده از تعریف حدّ دنباله ثابت کنید که حدّ دنباله‌ی $\left\{\frac{n+۲}{n}\right\}$ عدد ۱ است.

یعنی: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+۲}{n}=۱$

حل: برای این کار باید ثابت کنیم:

$$\forall ε\rangle ۰ \ \exists M\in N: n\ge M\Rightarrow\left|\frac{n+۲}{n}-۱\right|\langle ε$$

$$\left|\frac{n+۲}{n}-۱\right|\langle ε\Rightarrow\left|\frac{n+۲-n}{n}\right|\langle ε\Rightarrow\left|\frac{۲}{n}\right|\langle ε\Rightarrow\frac{۲}{n}\langle ε\Rightarrow\frac{n}{۲}\rangle\frac{۱}{ε}$$

$$\Rightarrow n\rangle\frac{۲}{ε}$$

چون (ε) عدد مثبتی است پس $\frac{۲}{ε}$ هم مثبت است، ولی ممکن است $\frac{۲}{ε}$ عدد طبیعی نباشد، در حالی‌که $\left[\frac{۲}{ε}\right]$ حتماً عدد طبیعی است، اما ممکن است از $\frac{۲}{ε}$ کمتر باشد، لذا $M=\left[\frac{۲}{ε}\right]+۱$ را در نظر می‌گیریم.

حال که عدد طبیعی M را پیدا کردیم باید بتوانیم از $n\ge M$ به نامساوی $\left|\frac{n+۲}{n}-۱\right|\langle ε$ برسیم. اگرچه این قسمت از حل ضروری نیست، ولی برای درک بهتر، آن را می‌نویسیم.

$$n\ge M=\left[\frac{۲}{ε}\right]+۱\Rightarrow n\ge\left[\frac{۲}{ε}\right]+۱\Rightarrow n\rangle\frac{۲}{ε}\Rightarrow\frac{۱}{n}\langle\frac{ε}{۲}$$

$$\Rightarrow\frac{۲}{n}\langle ε\Rightarrow\left|\frac{۲}{n}\right|\langle ε\Rightarrow\left|\frac{n+۲-n}{n}\right|\langle ε\Rightarrow\left|\frac{n+۲}{n}-۱\right|\langle ε$$

این اعمال را برگشت‌پذیری می‌گوییم. چنان‌چه در یافتن M درست عمل کنیم نیازی به حل برگشت‌پذیری وجود ندارد.

قضیه: اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ همگرا باشد، حدّ آن یکتاست.

دنباله‌ی واگرا

اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ به عدد حقیقی L همگرا نباشد، دنباله را واگرا گوییم. مثلاً دنباله‌های $\{(-۱)^n\}$ و $\{\sqrt{n}\}$ و $\{n^۲\}$ و $\{\sin n\}$ واگرا هستند. اگر بخواهیم ثابت کنیم یک دنباله واگراست، کافی است ثابت کنیم حدّ دنباله نمی‌تواند یک عدد حقیقی مانند L باشد.

مسئله‌ی ۲: ثابت کنید دنباله‌ی $\{\sqrt{n+۱}\}$ واگراست.

حل: فرض می‌کنیم این دنباله به عدد حقیقی L همگرا باشد، یعنی $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+۱}=L$ آن‌گاه به تناقض می‌رسیم. برای اثبات این حدّ باید بگوییم:

$$\forall ε\rangle ۰ \ \exists M\in N: n\ge M\Rightarrow|\sqrt{n+۱}-L|\langle ε$$

$$|\sqrt{n+۱}-L|\langle ε\Rightarrow -ε\langle\sqrt{n+۱}-L\langle ε\Rightarrow L-ε\langle\sqrt{n+۱}\langle L+ε$$

$$\sqrt{n+۱}\langle L+ε\Rightarrow n+۱\langle(L+ε)^۲\Rightarrow n\langle(L+ε)^۲-۱$$

معنای نامساوی $n\langle(L+ε)^۲-۱$ این است که وقتی $n\to\infty$، n از عددحقیقی $(L+ε)^۲-۱$ کوچک‌تر است، یعنی اعداد طبیعی از بالا کران‌دارند که غیر ممکن است. بنابراین، حدّ دنباله‌ی این مسئله نمی‌تواند عدد حقیقی L باشد، پس دنباله واگراست.

اعمال اصلی روی دنباله‌ها

قضیه: اگر در دو دنباله‌ی $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ داشته باشیم $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L_۱$ و $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=L_۲$، آن‌گاه داریم:

۱) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=L_۱\pm L_۲$

۲) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n.b_n)=L_۱.L_۲$

۳) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{L_۱}{L_۲}\qquad L_۲\neq۰$

دنباله‌ی کران‌دار

۱. دنباله $\{a_n\}$ را از بالا کران‌دار گوییم هرگاه عدد حقیقی $M_۲$ وجود داشته باشد به طوری‌که برای هر $n\in N$ داشته باشیم:

$a_n\le M_۲$

۲. دنباله‌ی $\{a_n\}$ را از پایین کران‌دار گوییم، هرگاه عدد حقیقی $M_۱$ وجود داشته باشد، به طوری‌که برای هر $n\in N$ داشته باشیم:

$a_n\ge M_۱$

اگر دنباله‌ای هم کران بالا داشته باشد و هم کران پایین، دنباله را کران‌دار گوییم. برای مثال دنباله‌ی $\left\{\frac{۱}{n}\right\}$کران‌دار است، زیرا کران بالای آن ۱ و کران پایین آن صفر است. یا مثلاً دنباله‌ی $\{\sin n+\cos n\}$کران‌دار است، زیرا کران بالای آن $\sqrt{۲}$ و کران پایین آن $-\sqrt{۲}$ است.

دنباله‌ی صعودی

اگر در دنباله‌ی $\{a_n\}$ برای هر $n\in N$ داشته باشیم $a_{n+۱}\ge a_n$، دنباله را صعودی گوییم. برای مثال دنباله‌ی $\{\sqrt{n+۲}\}$صعودی است.

دنباله‌ی نزولی

اگر در دنباله $\{a_n\}$ برای هر $n\in N$ داشته باشیم $a_{n+۱}\le a_n$، آن‌گاه دنباله را نزولی گوییم، مانند دنباله‌ی $\{-n+۵\}$.

مثال: نشان دهید که دنباله‌ی $\left\{\frac{n}{n+۴}\right\}$ صعودی است.

حل: باید ثابت کنیم که برای هر $n\in N$ داریم: $a_{n+۱}\ge a_n$

$$a_{n+۱}\ge a_n\quad\Rightarrow\quad\frac{n+۱}{n+۵}\ge\frac{n}{n+۴}$$

دو طرف نامساوی را در مقدار مثبت $(n+۵)(n+۴)$ ضرب می‌کنیم.

$$(n+۴)(n+۱)\ge n(n+۵)\Rightarrow n^۲+۵n+۴\ \langle\ n^۲+۵\Rightarrow ۴\rangle۰$$

همواره درست است.

قضیـــه: هر دنباله‌ی همگرا کران‌دار اســـت، ولی عکس این قضیه همواره درست نیست.

قضیـــه: دنباله‌ی $\{f(n)\}$ را در نظر می‌گیریم. اگر تابع با ضابطه‌ی $f(x)$ به ازای $x \ge 1$ مشتق‌پذیر باشد، در این صورت داریم:

الف) اگر $f'(x) \ge 0$، آن‌گاه دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ صعودی است.

ب) اگر $f'(x) \le 0$، آن‌گاه دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ نزولی است.

مثال: نشان دهید که دنباله‌ی $\left\{\frac{-n+2}{2n+3}\right\}$ نزولی است.

حل:

$$x=n\ge 1,\ f(x)=\frac{-n+2}{2n+3}\Rightarrow f'(x)=\frac{-7}{(2n+3)^2}<0$$

درنتیجه دنباله نزولی است.

نکات دنباله

۱- اگــر بخواهیم که بدانیــم عدد m چندمین جملــه‌ی دنباله‌ی $\{a_n\}$ اســت، بایــد معادله‌ی $a_n=m$ را با توجــه به این‌که $n\in N$ است، حل کنیم.

۲- اگــر بخواهیم که بدانیــم دنباله‌ی $\{a_n\}$ چند جمله‌ی منفی یا چند جمله‌ی مثبت دارد، باید نامعادله‌های $a_n<0$ یا $a_n>0$ را حل کنیـــم. با تعیین علامت، محدوده‌ی جواب بـــا توجه به این‌که $n\in N$ است، به دست می‌آید.

مثال: دنباله‌ی $\{n^2-6n-187\}$ چند جمله‌ی منفی دارد؟

حل:

$$n^2-6n-187<0,\ n^2-6n-187=0\Rightarrow n=3\pm\sqrt{9+187}$$

$$n=3\pm 14\Rightarrow\begin{cases}n=-11\\ n=17\end{cases}\xrightarrow{\text{با توجه به تعیین علامت}}-11<n<17,\ n\in N$$

$\Rightarrow 1\le n\le 16 \Rightarrow$ این دنباله ۱۶ جمله‌ی منفی دارد.

۳- قضیه‌ی فشار: اگر در سه دنباله‌ی $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ برای nای به بعد داشـــته باشیم $a_n\le c_n\le b_n$ و $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=L$ آن‌گاه $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=L$

مسئله‌ی ۳: به کمک قضیه‌ی فشار، حدّ دنباله‌ای $\left\{\frac{2^n}{n!}\right\}$ را وقتی $n\to\infty$ بیابید.

حل:

$$a_n=\frac{2^n}{n!}\quad n\in N,\ a_n>0$$

$$0\le a_n=\frac{2^n}{n!}=\frac{\overbrace{2\times2\times2\times\ldots\times2}^{n}}{1\times2\times3\times\ldots\times n}\le 2\times1\times1\times\ldots\times\frac{2}{n}=\frac{4}{n}$$

$$0\le a_n\le\frac{4}{n},\ \lim_{n\to\infty}(0)\le\lim_{n\to\infty}a_n\le\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}$$

$$\Rightarrow 0\le\lim_{n\to\infty}a_n\le 0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=0$$

۴- اگـــر $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=L$ و بـــرای هر عدد صحیـــح مثبت x تابع f تعریف شده باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=L$.

۵- بـــه کمک حدّ بعضی از توابع می‌توان حـــدّ بعضی از دنباله‌ها را پیدا کرد.

مسئله‌ی ۴: حدّ دنباله‌ی $\left\{\frac{2n^4+n+1}{2n^3+n^4}\right\}$ را وقتی $n\to\infty$ بیابید.

حل: اگـــر $x\ge 1$ و $f(x)=\frac{2x^4+x+1}{2x^3+x^4}$ را در نظر بگیریم، وقتی $x\to+\infty$، داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^4+x+1}{2x^3+x^4}\sim\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^4}{x^4}=2\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{2n^4+n+1}{2n^3+n^4}=2$$

نکته:

$$n\to\infty,\ n\in N:\ \log n<n<n^p<k^n<n!<n^n,\ P>0,\ k>1$$

مثال:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^4}{2^n}=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n!}=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$$

آزمون ۱: دنباله‌ی $\left\{\sqrt[3]{2n-n^2}\right\}$ کدام ویژگی را دارد؟

۱) نزولی و همگراست ۲) صعودی و همگراست

۳) صعودی و واگراست ۴) نزولی و واگراست

حل: گزینه‌ی ۴.

زیرا:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{2n-n^2}=-\infty,\ a_1=1,\ \forall n\in N,\ a_n\le 1$$

آزمون ۲: کدام یک از دنباله‌های زیر یکنوا و بی‌کران است؟

۱) $\{\sin n+\cos n\}$ ۲) $\left\{\cos\frac{n\pi}{2}\right\}$

۳) $\left\{\sqrt[5]{n^5+5n}\right\}$ ۴) $\left\{\sqrt[3]{n^3-27n}\right\}$

حـــل: گزینه‌ی ۳؛ گزینه‌های ۱ و ۲ کـــران دارند. گزینه‌ی ۱ یکنوا نیست.

دنباله یکنوا است.

$$x=n\ge 1,\ f(x)=\sqrt[5]{x^5+5x}\Rightarrow f'(x)=\frac{5x^6+5}{5\sqrt[5]{(x^5+5x)^4}}>0$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[5]{n^5+5n}=\infty$$

دنباله بی‌کران است.

آزمون ۳: چندمین دنباله‌ی $\{n^3+n\}$ برابر ۲۲۲ است؟

۱) جمله‌ی نهم ۲) جمله‌ی هشتم

۳) جمله‌ی هفتم ۴) جمله‌ی ششم

حل: گزینه‌ی ۴؛

$$n^3+n=222\Rightarrow n^3+n-222=0\Rightarrow \underbrace{n^3-216}+n-6=0$$

$$(n-6)(n^2+6n+36)+(n-6)=0\Rightarrow (n-6)\underbrace{(n^2+6n+37)}_{\Delta<0,\,a>0}=0$$

$$n-6=0\Rightarrow n=6$$

آزمون ۴: دنباله‌ی $\left\{\sqrt{n^2-n}+\sqrt{n^2-1}-2n+\frac{5}{2}\right\}$ همگرا به کدام عدد است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{7}{2}$

حل: گزینه‌ی ۱؛

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-n}+\sqrt{n^2-1}-2n+\frac{5}{2}\right)\sim\lim_{n\to\infty}\left(n-\frac{1}{2}+n-2n+\frac{5}{2}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=2$$

آزمون ۵: $t_{n+2}=t_n+t_{n+1}$ و $t_2=3$ و $t_1=1$ مفروض است. $\lim_{n\to\infty}\frac{t_n}{t_{n+1}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}+1$ ۲) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

۳) $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ ۴) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

حل: گزینه‌ی ۲؛

$$\lim_{n\to\infty}\frac{t_n}{t_{n+1}}=k\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{t_{n+1}}{t_n}=\frac{1}{k}\ ,\ k>0$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{t_{n+2}}{t_{n+1}}=\frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{t_{n+1}+t_n}{t_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{t_n}{t_{n+1}}\right)=1+\lim_{n\to\infty}\frac{t_n}{t_{n+1}}$$

$$=1+k=\frac{1}{k}\Rightarrow k^2+k-1=0\Rightarrow k=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

آزمون ۶: دنباله‌ی $\left\{\cot\left(n\sin\frac{\pi}{2n}\right)\right\}$ همگرا به کدام عدد است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) π

حل: گزینه‌ی ۱؛

$$n\to\infty\Rightarrow\sin\frac{\pi}{2n}\sim\frac{\pi}{2n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\cot\left(n\sin\frac{\pi}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}\cot\left(n\times\frac{\pi}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}\cot\frac{\pi}{2}=0$$

آزمون ۷: در دنباله‌ی a_n داریم $a_n=\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots}{4+2+1+\dots}$، $\lim_{n\to\infty}a_n$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) ۱ ۴) ۴

حل: گزینه‌ی ۲: صورت و مخرج هردو تصاعد هندسی با قدر نسبت $r=\frac{1}{2}$ هستند.

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{\frac{a_1}{1-r}}{\frac{a_1'}{1-r}}=\frac{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}}{\frac{4}{1-\frac{1}{2}}}=\frac{\frac{1}{\frac{1}{2}}}{\frac{4}{\frac{1}{2}}}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

آزمون ۸: دنباله‌ی همگرای a_n به صورت $a_n=2\sqrt{3+2\sqrt{3+2\sqrt{3\dots}}}$ است. این دنباله همگرا به کدام عدد است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

حل: گزینه‌ی ۱؛ فرض می‌کنیم $\lim_{n\to\infty}a_n=L$، در این صورت می‌توان نوشت

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}2\sqrt{3+a_n}=2\sqrt{3+\lim_{n\to\infty}a_n}$$

$$\Rightarrow L=2\sqrt{3+L}\Rightarrow L^2=4(3+L)\Rightarrow L^2-4L-12=0$$

$$(L-6)(\underbrace{L+2}_{+})=0\Rightarrow L-6=0\Rightarrow L=6$$

آزمون ۹: چند جمله از دنباله‌ی $\left\{\frac{2n-1}{n}\right\}$ در خارج بازه‌ی $\left(2-\frac{1}{10},2+\frac{1}{10}\right)$ قرار دارد؟

۱) ۵ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۲۰

حل: گزینه‌ی ۳؛

$$\left|\frac{2n-1}{n}-2\right|\ge\frac{1}{10}\Rightarrow\left|\frac{2n-1-2n}{n}\right|\ge\frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow\left|\frac{-1}{n}\right|\ge\frac{1}{10}\Rightarrow\frac{1}{n}\ge\frac{1}{10}\Rightarrow n\le10$$

آزمون ۱۰: برای دنباله‌ی $\left\{\frac{2n}{n-1}\right\}$ داریم: برای هر $\varepsilon>0$، وجود دارد $M\in N$ که: $(n>1),\ n\ge M\Rightarrow\left|\frac{2n}{n-1}-2\right|<\varepsilon$ در این صورت مقدار M کدام است؟

۱) $\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]+2$ ۲) $\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]+1$

۳) $\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$ ۴) $\frac{2}{\varepsilon}-1$

حل: گزینه‌ی ۱؛

$$\left|\frac{2n}{n-1}-2\right|<\varepsilon\Rightarrow\left|\frac{2n-2n+2}{n-1}\right|<\varepsilon\Rightarrow\left|\frac{2}{n-1}\right|<\varepsilon,\ n>1$$

$$\Rightarrow\frac{2}{n-1}<\varepsilon\Rightarrow\frac{n-1}{2}>\frac{1}{\varepsilon}\Rightarrow n-1>\frac{2}{\varepsilon}\Rightarrow n>\frac{2}{\varepsilon}+1$$

$$\Rightarrow M=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]+2$$