المپیادهای ریاضی لنینگراد ۲

هوشنگ شرقی

اشاره

در برهان شماره‌ی ۶۷ درباره‌ی تاریخچه‌ی المپیاد ریاضی لنینگراد و مسائل آن نوشتیم. در این‌جا سؤالات دیگری از این المپیادها را همراه با راه‌حل آن‌ها ارائه می‌دهیم. این مسائل از المپیاد سال ۱۹۹۳ انتخاب شده‌اند.

مسائل

۱. آیا پنج عدد طبیعی مختلف وجود دارد به گونه‌ای که حاصل‌ضرب دو عدد بزرگ‌تر با مجموع هر پنج عدد برابر باشد؟

۲. عددی چهار رقمی را از وسط به دو عدد دو رقمی تفکیک کرده‌ایم. معلوم شد عدد چهار رقمی بر مجموع دو عدد دو رقمی بخش‌پذیر است. آیا ممکن است مجموع این اعداد برابر ۹۴ باشد؟

۳. نقطه‌ی M وسط ضلع BC چهارضلعی کوژ ABCD قرار دارد و می‌دانیم مقدار زاویه‌ی $\widehat{AMD}$ ۱۲۰ درجه است. ثابت کنید:

$$AB+\frac{1}{2}BC+CD\geq DA$$

۴. نقطه‌های D, E, F را روی ضلع‌های AC و AB و BC از مثلث متساوی الساقین ABC $(AB=BC)$ طوری در نظر گرفته‌ایم که طول پاره‌خط‌های راست DE و DF و دو زاویه‌ی $\widehat{BAC}$ و $\widehat{FDE}$ برابر باشند. ثابت کنید:

$$AE+FC=AC$$

۵. نقطه‌های D و E و F را روی ضلع‌های AC و AB و BC از مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB=BC)$ طوری در نظر گرفته‌ایم که داشته باشیم:

$DE=DF$ و $AE+FC=AC$

ثابت کنید دو زاویه‌ی BAC و FDE برابرند.

۶. ثابت کنید تابع تعریف شده‌ی $f(x)$ در بازه‌ی (∞+ و ۰] وجود دارد به نحوی که داشته باشیم:

$$f(f(\dots f(x)\dots))=\frac{x}{x+1}$$

(از نماد f، ۲۳۹ بار استفاده شده است).

۷. ثابت کنید تابع معین $f(x)$ در بازه‌ی (∞+ و ۰] وجود دارد به‌گونه‌ای که داریم:

$$f(f(\dots f(x)\dots))=1+x+2\sqrt{x}$$

(از نماد f، ۴۵ بار استفاده شده است).

پاسخ‌ها

۱. عددهای مزبور را به ترتیب از بزرگ به کوچک، x_1 و x_2 و x_3 و x_4 و x_5 فرض می‌کنیم و با توجه به فرض مسئله داریم: $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5$ بنابراین:

$$x_1\ge x_2+1\ ,\quad x_2\ge x_3+1\ ,\quad x_3\ge x_4+1\ ,\quad x_4\ge x_5+1$$

حال اگر داشته باشیم: $x_1x_2=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$ نتیجه می‌شود:

$$x_1x_2=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$$
$$\Rightarrow x_1x_2-x_1-x_2+1=1+x_3+x_4+x_5$$
$$\Rightarrow (x_1-1)(x_2-1)=1+x_3+x_4+x_5$$
$$(x_1-1)(x_2-1)\ge x_2x_3$$

و چون $x_1\ge x_2+1$ و $x_2\ge x_3+1$ پس:

$$(x_1-1)(x_2-1)\ge x_2x_3$$

در نتیجه داریم:

$$1+x_3+x_4+x_5\ge x_2x_3$$
$$\Rightarrow 1+x_4+x_5\ge x_3(x_2-1),\ x_2\ge x_3+1$$
$$\Rightarrow x_3(x_2-1)\ge x_3^2\Rightarrow 1+x_4+x_5\ge x_3^2\ge(x_4+1)(x_5+2)$$
$$\Rightarrow 1+x_4+x_5\ge x_4x_5+2x_4+x_5+2$$
$$\Rightarrow x_4x_5+x_4+1\le 0$$

که این نتیجه غیرممکن است.

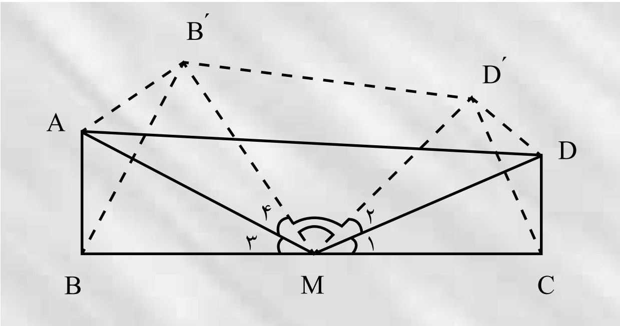
۲. مطابق فرض مسئله داریم: $\overline{ab}+\overline{cd}\mid\overline{abcd}$

و با فرض $\overline{ab}=x$ و $\overline{cd}=y$ خواهیم داشت:

$$\overline{abcd}=d+10c+100b+1000a=(d+10c)+100(b+10a)$$
$$=\overline{cd}+100\overline{ab}=y+100x\Rightarrow x+y\mid y+100x$$
$$\Rightarrow (x+y)\mid(x+y)+99x\Rightarrow x+y\mid 99x$$

و با فرض $x+y=94$ نتیجه می‌شود: $94\mid 99x$ و چون $(94,99)=1$ پس $94\mid x$ و در نتیجه $x=94$ و $y=0$؛ که این نیز غیرممکن است.

۳. مطابق شکل، داریم: $A\hat{M}D=120^\circ$. بازتاب (قرینه‌ی) C نسبت به MD (C') و قرینه‌ی B نسبت به AM (B') را رسم و C' و B' را به A و D و M وصل می‌کنیم.



بدیهی است که مثلث‌های MCD و $MC'D$ با یکدیگر و مثلث‌های MAB و MAB' نیز با یکدیگر هم‌نهشت‌اند و در نتیجه:

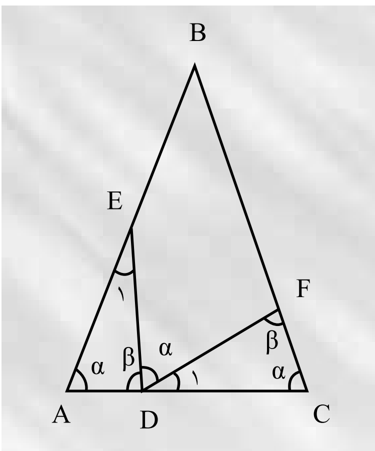
$$MC=MD'=MB=MB'=\frac{1}{2}BC,\ \hat{M}_1=\hat{M}_2,\ \hat{M}_3=\hat{M}_4$$
$$\Rightarrow \hat{M}_1+\hat{M}_3=\hat{M}_2+\hat{M}_4=60^\circ,\ B'\hat{M}C'=60^\circ$$

بنابراین مثلث $B'MD'$ متساوی الاضلاع است و $B'D'=MB'=\frac{BC}{2}$. هم‌چنین مطابق اصل حمار می‌توان نوشت:

$$DD'+D'B'+AB'\ge AD\Rightarrow DC+\frac{BC}{2}+AB\ge AD$$

۴. مطابق شکل، چون AB=AC و $B\hat{A}C=F\hat{D}E$، پس می‌توان فرض کرد که:

$$B\hat{A}C=B\hat{C}A=F\hat{D}E=\alpha$$



بنابراین:

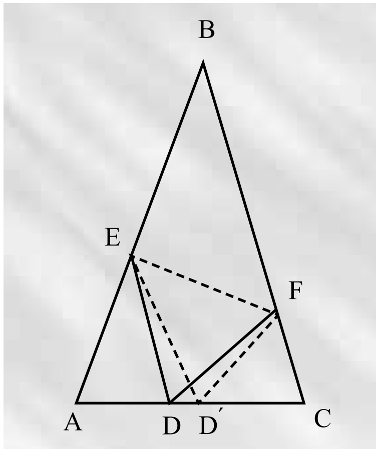
$$F\hat{D}A=A\hat{C}F+D\hat{F}C$$
$$\Rightarrow \alpha+E\hat{D}A=\alpha+D\hat{F}C\Rightarrow E\hat{D}A=D\hat{F}C=\beta$$

و در نتیجه دو مثلث DFC و AED دو زاویه‌ی برابر دارند

و لذا زاویه‌ی سوم آن‌ها نیز برابر است، یعنی: $\hat{D}_1=\hat{E}_1$ و چون $DF=DE$، پس دو مثلث DFC و ADE و به حالت دو زاویه و ضلع بین هم‌نهشت‌اند و از آن‌جا:

$$DC=AE, FC=AD$$
$$AD+DC=AE+FC \Rightarrow AC=AE+FC$$

۵. این مسئله در واقع عکس مسئله‌ی ۴ است، یعنی در همان شکل و این بار با فرض AE+FC=AC می‌خواهیم ثابت کنیم: $B\hat{A}C=F\hat{D}E$. برای این منظور، نقطه‌ی D' را روی AC طوری در نظر می‌گیریم که $D'C=AE$ و با توجه به فرض $AE+FC=AC=AD'+D'C$ نتیجه می‌شود که $AD'=FC$ و چون $\hat{A}=\hat{C}$، پس مثلث‌های $D'FC$ و $D'AE$ به حالت دو ضلع و زاویه‌ی بین هم‌نهشت‌اند.



پس $D'F=D'E$، یعنی D' از E و F به یک فاصله است و بنابراین روی عمودمنصف EF است. پس D' نقطه‌ی برخورد عمود منصف EF و ضلع AC است و از آن‌جا که طبق فرض DE=DF پس با استدلالی مشابه، D نیز همین نقطه است، یعنی D و D' بر هم منطبق‌اند و AD=FC و DC=AE.

مثلث‌های ADE و CFD هم‌نهشت‌اند و $A\hat{D}E=D\hat{F}C$ و $D\hat{E}A=F\hat{D}C$، بنابراین:

$$F\hat{D}E=180^\circ-(F\hat{D}C+A\hat{D}E)$$
$$=180^\circ-(D\hat{E}A+D\hat{F}C)=180^\circ-(D\hat{E}A+E\hat{D}A)=B\hat{A}C$$

۶. با فرض $f(x)=\frac{ax}{a+x}$ نتیجه می‌شود:

$$f(f(x))=\frac{a\frac{ax}{a+x}}{a+\frac{ax}{a+x}}=\frac{a^2x}{a^2+2ax}=\frac{ax}{a+2x}$$

$$f(f(f(x)))=f\left(\frac{ax}{a+2x}\right)=\frac{a\frac{ax}{a+2x}}{a+\frac{ax}{a+2x}}=\frac{a^2x}{a^2+3ax}$$

$$\Rightarrow\quad f(f(f(x)))=\frac{ax}{a+3x}$$

و به صورت استقرایی می‌توان حدس زد:

$$f(\underbrace{f(f(....(f(x))...)}_{n})=\frac{ax}{a+nx}$$

(درستی این حدس را به کمک قضیه‌ی استقرای ریاضی اثبات کنید.)

حال اگر داشته باشیم $f(f(...f(x)...)=\frac{x}{x+1}$ نتیجه می‌شود:

$$\frac{ax}{a+nx}=\frac{x}{x+1}\quad\Rightarrow\quad ax^2+ax=ax+nx^2$$

$$\Rightarrow ax^2=nx^2\quad\Rightarrow\quad a=n$$

یعنی کافی است که $a=n=239$ فرض شود، یعنی: $f(x)=\frac{239x}{239+x}$ و با این فرض خواهیم داشت:

$$\underbrace{f(f(\ldots f(x)\ldots)}_{239}=\frac{x}{x+1}$$

۷. این مسئله مشابه مسئله‌ی قبلی است که برای دانش‌آموزان پایه‌ای دیگر طرح شده بود. راه‌حل آن نیز مشابه مسئله‌ی قبلی است و به‌عنوان تمرین به دانش‌آموزان واگذار می‌شود. برای راهنمایی می‌گوییم که $f(x)=(\sqrt{x}+\frac{1}{a})^2$ فرض شود.

ادب ریاضی

نباید تصور کرد که یگانه عمل ریاضیات که آن را «خادم علوم» نامیده‌اند خدمت به علوم دیگر و تلاش در پیشرفت آن‌هاست؛ بر این دانش نام «ملکه‌ی علوم» نیز اطلاق شده است. این ملکه از خواهران ثروتمندتر خود تقاضای کمک می‌کند و انتظار خدماتی دارد، در عوض صاحب کبریا و مناعت عظیمی است و هرگز از هیچ‌کس کمک بی‌اجر و زحمت بی‌مزد نمی‌خواهد و در انتظار لطف و احسان دیگران نیست و آن‌چه را که دریافت می‌کند به‌طور افزون‌تر خواهد پرداخت.

اِریک تمپل‌بل