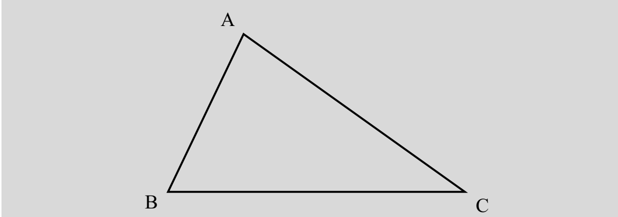
نامساوی مثلثی و روش برداری

مؤلفان: میلاد محبی و سینا عبدالهی‌نژاد
دانش‌آموزان دوره‌ی پیش‌دانشگاهی

اشاره

در این مقاله قصد داریم شما را با روشی جالب برای اثبات نامساوی مثلثی آشنا کنیم. در این‌جا ابتدا نامساوی مثلثی را مطرح و سپس روش برداری را ارائــه می‌کنیم. روش برداری از جمله روش‌های کاربردی در حل مســائل ریاضی است و از آن در همه‌ی شاخه‌های ریاضی اســتفاده می‌کننــد. این روش بیش‌تر بــرای تعیین ماکزیمم و مینیمــم و حل معــادلات و اثبات نابرابری‌ها استفاده می‌شود.

قضیــه‌ی نابرابــری مثلثــی: در هــر مثلــث، مجمــوع اندازه‌هــای هــر دو ضلــع از انــدازه‌ی ضلــع ســوم بزرگ‌تــر اســت. یعنــی اگــر A ،B ،C سه نقطه‌ی متمایز ناهمخط باشند، آن‌گاه: $AC + AB > BC$.



حالا می‌خواهیــم قضیه را اثبات کنیم، ولی ابتدا چند خاصیت از بردارها را بیان می‌کنیم:

بردارهای $\vec{a}(x_1, y_1)$ و $\vec{b}(x_2, y_2)$ را در نظر بگیرید. خواهیم داشت:

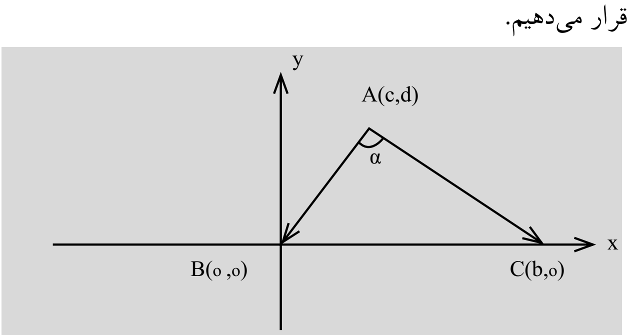
۱) $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2+y_1^2}$ $\qquad |\vec{b}| = \sqrt{x_2^2+y_2^2}$

۲) $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\hat{\alpha}$; ($\alpha$ زاویه‌ی بین دو بردار است)

$\vec{a}.\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$

(منظور از $\vec{a}.\vec{b}$ ، ضرب داخلی دو بردار است.)

حالا ما مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ را به صورت زیر روی محورهای مختصات قرار می‌دهیم.



اکنون خواهیم داشت:

$\vec{AB}(-c,-d)$,$\vec{AC}((b-c),-d)$

$$\vec{AB}.\vec{AC} = |\vec{AB}|.|\vec{AC}|.\cos\hat{\alpha} \Rightarrow \cos\hat{\alpha} = \frac{\vec{AB}.\vec{AC}}{|\vec{AB}|.|\vec{AC}|}$$

می‌دانیم که در هر مثلث، کســینوس هیــچ زاویه‌ای برابر ۱ و ۱− نیست[1] .پس همواره: $-1 < \cos\alpha < 1$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{AB}.\vec{AC}}{|\vec{AB}|.|\vec{AC}|} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{(-c\times(b-c)) + (-d\times(-d))}{\sqrt{c^2+d^2}\times\sqrt{(b-c)^2+d^2}}$$

$$= \frac{c^2 - bc + d^2}{\sqrt{(c^2+d^2)((b-c)^2+d^2)}} \Rightarrow \frac{c^2 - bc + d^2}{\sqrt{(c^2+d^2)((b-c)^2+d^2)}} > -1$$

$$\Rightarrow c^2 - bc + d^2 > -\sqrt{(c^2+d^2)((b-c)^2+d^2)}$$

$$\Rightarrow 2(c^2 - bc + d^2) > -2\sqrt{(c^2+d^2)((b-c)^2+d^2)}$$

$$\Rightarrow (c^2+d^2) + (c^2+d^2-2bc) + 2\sqrt{(c^2+d^2)((b-c)^2+d^2)} > 0$$

$$\Rightarrow (c^2+d^2) + (d^2+c^2+b^2-2bc) + 2\sqrt{((b-c)^2+d^2)(c^2+d^2)} > b^2$$

$$\Rightarrow (\sqrt{c^2+d^2})^2 + (\sqrt{(b-c)^2+d^2})^2 + 2\sqrt{((b-c)^2+d^2)(c^2+d^2)} > b^2$$

$$(\sqrt{c^2+d^2} + \sqrt{(b-c)^2+d^2})^2 > b^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{c^2+d^2} + \sqrt{(b-c)^2+d^2} > b \Rightarrow AB + AC > BC$$

برای بقیه‌ی اضلاع یعنی $BC + AB > AC$ و $BC + AC > AB$ نیز به همین صورت حکم اثبات می‌شود.

پی‌نوشت

۱. زیرا در هیچ مثلثی، زاویه‌ای وجود ندارد که اندازه‌ی آن ۰° یا ۱۸۰° باشد.