تاریخچه‌ی مجلات ریاضی ایران ۴

غلامرضا یاسی‌پور

در پی بررسی «تاریخچه‌ی مجلات ریاضی ایران» به شماره‌های ۴۰، ۴۱ و ۴۲ مجله‌ی یکان می‌رسیم و به مسئله‌های جالبی برمی‌خوریم که در پاییز و زمستان سال ۱۳۴۶ به چاپ رسیده‌اند.

در شماره‌ی مسلسل ۴۰ با این مسئله‌ی جالب مواجه می‌شویم:

حل یک مسئله از مسائل شیخ بهائی

در یکان شماره‌ی یکم به نقل از خلاصة الحساب شیخ بهائی با عنوان مسائل لاینحل هفت مسئله درج شده بود. آقای **علی رضائی**، دبیر دانشمند ریاضیات (فعلاً بازنشسته) حل یکی از این مسائل را مرقوم داشته‌اند که در زیر چاپ می‌شود:

مطلوبست حل هر یک از دو معادله‌ی زیر:

$$x^2-10=\sqrt{b} \quad \text{و} \quad x^2+10=\sqrt{a}$$

معادلات را در حالت کلی زیر حل می‌کنیم:

$$(1)\quad x^2+\alpha=\sqrt{a}$$

$$(1)\quad x^2-\alpha=\sqrt{b}$$

معادله‌ی (۱) را چنین می‌نویسیم:

$$x^2-\alpha=\sqrt{a}-2\alpha$$

تساوی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\sqrt{a}-2\alpha=(\sqrt[4]{a}-\alpha)^2$$

که از آن نتیجه خواهد شد:

$$\sqrt{a}=\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)^2$$

و از معادله‌ی (۲) نیز حاصل می‌شود:

$$\sqrt{b}=\left(\frac{2-\alpha}{2}\right)^2$$

چون این مقادیر را در معادلات (۱) و (۲) قرار دهیم نتیجه خواهد شد:

$$x^2=\frac{\alpha^2+4}{4}$$

و در ازای مقادیر مختلف α می‌توان مقادیر نظیر a و b و x را تعیین کرد. مثلاً:

$$\alpha=0\ ;\ \sqrt{a}=1\ ،\ \sqrt{b}=1\ ،\ x^2=1$$

$$\alpha=1\ ;\ \sqrt{a}=\frac{9}{4}\ ،\ \sqrt{b}=\frac{1}{4}\ \text{و}\ x^2=\frac{5}{4}$$

و در حالت خاص $\alpha=10$ داریم:

$$\sqrt{a}=36\ \text{و}\ \sqrt{b}=16\ \text{و}\ x^2=26$$

در این شماره در مقاله‌ای با عنوان **کارمند بازنشسته‌ی راه‌آهن** به این داستان برخورد می‌کنیم که:

ترن‌هایی که از کنار یکدیگر می‌گذرند

چند روزی از ملاقات دکتر و جانسن گذشته بود که تلفن منزل جانسن زنگ زد. از آن طرف، دکتر از مکانیسین تقاضا کرد که اگر ممکن است در بعدازظهر آن روز وی را در مطبش ملاقات کند. جانسن که بازنشسته بود و همیشه وقت داشت، دعوت دکتر را پذیرفت و عصر به دیدار وی رفت. در آن‌جا دکتر گفت با معمای تازه‌ای مواجه شده است و آن‌را برای جانسن چنین شرح داد:

ـ با یکی از بیمارانم راجع به آن‌چه برای تو پیش آمده بود، صحبت کردم و او در مقابل، مسئله‌ای مربوط به خودش را برای من بیان کرد: این شخص برای رفتن سر کارش از راهی باید بگذرد که یک رشته‌ی تنهای راه‌آهن را قطع می‌کند. این یک رشته‌ی راه‌آهن اغلب برای عبور ترن‌های تجاری استفاده می‌شود که هم از نظر طول و هم از این نظر که آهسته از شهرها می‌گذرد معروف است. بسیار رخ داده که شخص مزبور مجبور شده است پشت راه‌بند، خودرو خود را متوقف کند و پشت فرمان انتظار بکشد تا زمانی که ترن تجاری با دنباله‌ی دور و درازش آهسته بگذرد و راه برای خودرو وی باز شود. او به من گفت که ترجیح می‌دهد به جای یک رشته، دو رشته راه‌آهن وجود داشته باشد، زیرا گاهی پیش آمده که دو ترن در جهت‌های مخالف از آن راه می‌گذرند و این باعث می‌شود که زمان توقف اجباری وی دو برابر گردد.

آیا به عقیده‌ی شما این شخص درست پیش‌بینی می‌کند؟ یعنی اگر دو رشته راه‌آهن وجود داشته باشد، زمان توقف وی در حالت اخیر کمتر می‌شود؟

مکانیسین بازنشسته اظهار داشت:

ـ کاملاً صحیح است. اگر تعداد کل ترن‌هایی که از دو رشته راه‌آهن

اســتفاده می‌کنند با تعداد ترن‌هایی که روی یک رشته حرکت می‌کنند برابر باشد، در تقاطع آن‌ها زمان انتظار به حد وسط تقلیل خواهد یافت. اگر دو ترن با هم از آن‌جا بگذرند زمان توقف اجباری در راه بسته برای آن دو درست برابر است با زمان توقف برای یک ترن تنها.

دکتر پاسخ داد:

ـ این موضوع درســت، اما برای وقتی کــه محل عبور ترن‌ها از یکدیگر درست محل تقاطع جاده با راه‌آهن باشد. در حالت‌هایی غیر از این، وضع فرق می‌کند. یک حالت هم که ممکن اســت پیش بیاید حالتی اســت که لوکوموتیو یکی از ترن‌ها هنگامی به معبر برســد که درســت واگن انتهایی ترن دیگر در حال گذشــتن باشد. راجع به این حالت چه می‌گویید؟

مکانیسین پاسخ داد:

ـ بیــن ایــن حالت و حالتی که دو تــرن در آن محل هرگز به هم نرسند هیچ فرقی نیست.

دکتر اظهار داشت:

ـ در این مورد شــما اشــتباه می‌کنید. اجازه بدهید با محاســبات مقدماتی دلیل اشتباه شما را برایتان توضیح دهم. فرض می‌کنیم به‌طور متوسط در هر جهت یک ترن از راه‌آهن بگذرد و زمان عبور هر ترن از معبر محل تقاطع ۶ دقیقه باشــد. بــا این پیش‌فرض‌ها زمان توقف پشت راه‌بند را حساب می‌کنیم؛ احتمال این‌که اتومبیل موقعی به محل تقاطع برســد که ترن از آن می‌گذرد یعنی راه بســته باشد برابر با یک برده است.

احتمال این‌که درست هنگامی برسد که ترن به معبر می‌رسد برابر است با احتمال آن‌که درست موقعی که ترن آنجا را ترک می‌کند.

روی هــم رفته، وی باید ســه دقیقه انتظار بکشــد تا ترن بگذرد. بنابراین، زمان متوسط توقف ۰/۳ دقیقه خواهد شد.

اکنــون حالت فوق‌العاده‌ای را در نظــر بگیریم که ترن‌ها در محل تقاطــع به وضعی از یکدیگــر بگذرند که لوکوموتیــو یکی در مقابل واگن انتهایی دیگری واقع شــده باشد. خیلی ساده است که اگر تعداد ترن‌هــا را نصف بگیریم و در عوض، طول هر ترن را دو برابر در نظر بگیریم. در نتیجه فرقی حاصل نخواهد شــد. احتمال مربوط به این‌که با راه بسته روبه‌رو شوید همان احتمال قبلی خواهد بود. اما اگر پشت راه‌بند توقف کرده باشید زمان انتظار شما دو برابر خواهد شد.

بنابراین، چنین دو ترنی برای اتومبیل سواری که مجبور به توقف شده وضعی دو مرتبه بدتر ایجاد می‌کند:

مکانیسین در حالی که به موضوع فکر می‌کرد، گفت:

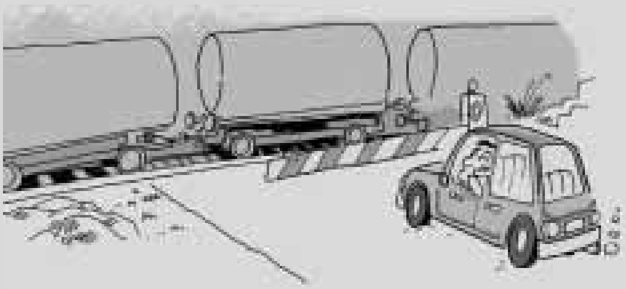
ـ واضح اســت کــه اگر بین عبــور دو ترن از محــل تقاطع چند دقیقــه‌ای فاصله باشــد، راننده‌ی خودرو می‌تواند از این مدت زمان اســتفاده کند و قبل از عبور ترن دیگر از راه‌آهن بگذرد و این حالت بر حالتی که دو ترن پشــت سرهم از معبر بگذرند و جاده را در تمام طول مدت بسته نگاه دارند، برتری دارد.

دکتر گفت:

ـ خوشــحالم کــه موضوع را متوجه شــدید. فعلاً بــه این نتیجه رســیده‌ایم کــه در حالت کلی که ترن‌ها از یکدیگــر می‌گذرند، زمان توقــف نصف می‌شــود و در حالــت خاصی که در عبــور از گذرگاه لوکوموتیو یکی مقابل واگن انتهایی دیگری واقع می‌شود، زمان توقف دو برابر خواهد شد.

مکانیسین اظهار داشت: حالتی را بررسی می‌کنید که ترن‌ها وقتی در محل تقاطع از یکدیگر می‌گذرند، لوکوموتیو یکی در نیمه‌ی طول دیگری واقع شده باشد؛ و دکتر چنین پاسخ داد:

ـ خیلی ســاده اســت. چنین حالتی معادل است با وقتی که تعداد ترن‌ها نصف باشد، اما طول هر یک از آن‌ها یک برابر و نیم بزرگ‌تر



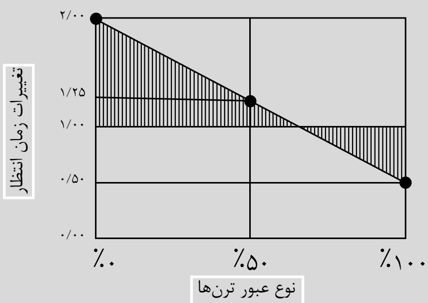
باشــد. در چنین وضعی احتمال مربوط به این‌که وقتی به محل تقاطع برسیم که راه بسته باشد در $\frac{۱/۵}{۲}$ ضرب می‌شود و حد متوسط زمان انتظار برای باز شدن راه در ۱/۵ ضرب می‌شود. روی‌هم، اضافه شدن زمان متوسط انتظار برابر می‌شود با:

$$\frac{۱/۵}{۲} \times ۱/۵ = ۱/۱۲۵$$

بنابراین زمان انتظار برای گذشــتن نیم طول ترن‌ها، ۱۲/۵ درصد افزایش خواهد داشت:

مکانیســین گفت که برای یک چنین وضعی، محاسبه ناجور است و دکتر چنین توضیح داد:

ـ پاســخ آن هم قابل تأمل است. فعلاً نمودار سه حالت گفته شده را رسم می‌کنیم:



ملاحظه می‌شــود که ســطح کل متناظر با افزایش زمان متوســط به‌طور قابل ملاحظه‌ای از سطح متناظر با کاهش زمان متوسط بیش‌تر

است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که به‌طور متوسط، روبه‌رو شدن دو ترن در گذرگاه‌های مختلف باعث می‌شود که به مدتی بیش‌تر از وقتی که همان تعداد ترن بر یک رشته راه‌آهن می‌گذرند جاده بسته باشد.

در شماره‌ی ۴۱ باز هم تحت عنوان **کارمند بازنشسته راه‌آهن** به مسئله‌ی زنبور و راه‌حل آن می‌رسیم:

مسئله‌ی زنبور

مکانیسین پس از کمی مکث از دکتر خواهش کرد که معمای دیگری مطرح کند. دکتر گفت که یک معما را مطرح خواهد ساخت، اما بسیار ساده است و آن‌را چنین شرح داد:

دو ترن در یک لحظه از دو ایستگاه A و B به فاصله‌ی ۱۶۰ کیلومتر به طول یکدیگر حرکت می‌کنند. سرعت هر یک از آن‌ها ۸۰ کیلومتر در ساعت است. در همان لحظه‌ی حرکت ترن‌ها، زنبوری از A با سرعت ۱۰۰ کیلومتر در ساعت به طرف B پرواز می‌کند. این زنبور در لحظه‌ای که ترنی را که از B می‌آید ملاقات می‌کند جهت حرکت خود را تغییر می‌دهد و به طرف ترن اول برمی‌گردد. بعد از ملاقات با این ترن باز جهت حرکت خود را تغییر می‌دهد و به طرف ترن دوم پرواز می‌کند و این عمل را به همین ترتیب و با همان سرعت ثابت اولیه ادامه می‌دهد تا لحظه‌ای که دو ترن را با هم ملاقات کند. در این لحظه از ترس سقوط می‌کند و می‌میرد.

معلوم کنید که این زنبور در مجموع چند کیلومتر مسافت در حال پرواز بوده است؟

جانسن اظهار داشت:

ـ خیلی ساده است. دو ترن با سرعت ۸۰ کیلومتر در ساعت به طرف یکدیگر حرکت می‌کنند. فاصله‌ی دو ایستگاه ۱۶۰ کیلومتر است. بنابراین آن‌ها درست در وسط راه در نقطه‌ای که از دو ایستگاه به یک فاصله است، یکدیگر را ملاقات می‌کنند. از ابتدای شروع حرکت ترن‌ها تا زمان ملاقات آن‌ها روی هم یک ساعت طول می‌کشد، بنابراین زنبور مدت یک ساعت در پرواز بوده است و چون سرعت پرواز آن هم ۱۰۰ کیلومتر در ساعت است پس کل مسافتی که زنبور در حال پرواز بوده ۱۰۰ کیلومتر است. آیا درست است؟

دکتر پاسخ مکانیسین را تأیید کرد و گفت:

ـ کاملاً درست است. اما روشی که به کار بردید و جواب مسئله را به این سادگی به دست آوردید، نشان می‌دهد که شما ریاضی‌دان نیستید. یک ریاضی‌دان برای حل این مسئله از سری‌ها استفاده می‌کند، وی یک سری در نظر می‌گیرد که هر جمله‌ی آن یکی از فاصله‌های پیموده شده توسط زنبور است. اما این راه خیلی ساده هم نیست، زیرا تعیین فرمولی که هر یک از فاصله‌ها را بیان کند کار مشکلی است.

تعریف می‌کنند که وقتی این مسئله را برای **جان ون‌نیومن** ریاضی‌دان بزرگ معاصر مطرح کرده‌اند و از وی خواستند که ظرف چندین ثانیه جواب درست آن‌را پیدا کند، وی این کار را کرد. وقتی از او سؤال شد مسئله را از چه راهی حل کرده است، پاسخ داد که مجموع یک سری نامحدود را حساب کرده است. راجع به نیومن، حکایت می‌کنند که بعضی محاسبات پیچیده‌ی ریاضی را در ذهن خود با همان سرعت ماشین‌های محاسبه‌ی الکترونیکی انجام می‌داده است.

در این شماره با عنوان **مسئله‌ی مسابقه**، مسئله‌ی زیر از حساب استدلالی آورده شده است:

با جایزه‌ی دو هزار ریال

از طرف: محمود کاشانی مؤلف جزوه‌های «مسائلی نمونه از حساب استدلالی»

مسئله: دو عدد صحیح a و b را چنین تعیین کنید که عبارت (a^2+b^2+1) بر $(a+b)$ و عبارت (a^2+b^2-1) بر $(a-b)$ قابل قسمت باشد.

شرایط تعلق جایزه:

۱. مسئله باید با توجه به تعریف عدد صحیح در نظریه‌ی اعداد (عددهای صحیح مثبت، منفی یا صفر) حل شود.

۲. مسئله باید صددرصد کامل حل شود به‌طوری که شرح هیچ نکته‌ی مبهم یا حالت خاص از قلم نیفتاده باشد.

۳. پاسخ‌ها حداکثر تا روز آخر ماه دی به اداره‌ی مجله‌ی یکان رسیده باشد.

۴. پاسخ‌ها با خط خوانا نوشته شده باشد و روی ورقه‌ی مربوط، نام و نشانی کامل و مخصوصاً دبیرستان و پایه‌ی تحصیلی حل کننده ذکر شده باشد.

تذکر ـ مسئله‌ی فوق حالت خاصی از مسئله‌ی زیر است. می‌توانید آن‌را به صورت کلی حل کنید: به ازای چه مقادیر صحیح (مثبت، منفی یا صفر) از اعداد a و b عبارت

$(a^2+b^2+2nab+1)$ بر $(a+b)$ و عبارت

$(a^2+b^2+2nab-1)$ بر $(a-b)$ بخش‌پذیر است.

در شماره‌ی ۴۲، مجله به مقاله‌های جالب زیر می‌پردازد:

خواص مثلث شبه قائمه

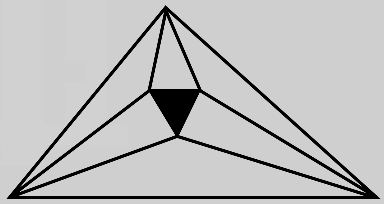
Pseudo rectangle triangle

تهیه از: جعفر آقایانی چاوشی

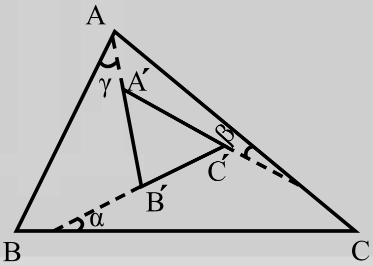
مثلثی که تفاضل دو زاویه‌ی آن یک قائمه باشد، مثلث شبه‌قائمه نامیده می‌شود. اگر مثلث ABC در رأس A شبه‌قائمه باشد، یعنی داشته باشیم: $\hat{B}-\hat{C}=۹۰$، دارای خواص زیر است.

۱. ارتفاع AH واسطه‌ی هندسی است بین BH و CH.

۲. نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه‌ی A با یکدیگر برابرند.



شکل ۱



شکل ۲

۳. ارتفاع AH بر دایره‌ی محیطی مثلث مماس است.

۴. قرینه‌ی رأس A نسبت به ضلع BC بر نقطه‌ی تلاقی ارتفاعات واقع است.

۵. بین اندازه‌های ضلع‌ها و شعاع دایره‌ی محیطی روابط زیر برقرار است:

$$b^۲-c^۲=۲aR \quad \text{و} \quad b^۲+c^۲=۴R^۲$$

۶. اگر ضلع BC از حیث اندازه و وضع ثابت بماند و رأس A در صفحه‌ی مثلث تغییر مکان دهد تا همواره مثلث شبه‌قائمه باقی بماند، مکان A و همچنین مکان نقطه‌ی تلاقی ارتفاعات، یک هذلولی متساوی‌القطرین خواهد بود.

قضیه‌ای درباره‌ی مثلث مورلی

از ماهنامه‌ی ریاضیات آمریکا

ترجمه: غلامحسین بهفرو

اگر هر یک از زاویه‌های مثلث غیر مشخص ABC را به سه قسمت متساوی تقسیم کنیم، از برخورد دوبه‌دو خطوط حاصل مثلثی به دست می‌آید که متساوی‌الاضلاع است (مجموعه‌ی علمی یکان سال). این مثلث به نام مثلث مورلی معروف است (شکل ۱).

مثلث ABC و یک مثلث دلخواه A′B′C′ واقع در داخل آن‌را در نظر می‌گیریم. اگر α، β، γ زاویه‌های بین اضلاع متناظر از این دو مثلث باشند (شکل ۲) روابط زیر برقرار خواهد بود:

$$A'=A+\beta-\gamma \quad \text{و} \quad B'=B+\gamma-\alpha \quad \text{و} \quad C'=C+\alpha-\beta$$

حال قضیه‌ی زیر را مطرح می‌کنیم:

قضیه ـ شرط لازم و کافی برای آن‌که اضلاع مثلث مورلی مربوط به مثلث ABC با اضلاع مثلث مورلی مربوط به مثلث A′B′C′ نظیر به نظیر با هم موازی باشند، آن است که داشته باشیم:

$$\frac{B-C}{۳}=\alpha+\frac{B'-C'}{۳}$$

که با در نظر گرفتن جهت زاویه‌ها نتیجه خواهد شد:

$$\alpha+\beta+\gamma=۰$$

به آسانی ثابت می‌شود که شرط فوق، وقتی که A′B′C′ یکی از هشت مثلث زیر باشد، برقرار خواهد بود:

۱. مثلث میانه‌ای مثلث ABC؛

۲. مثلث ارتفاعیه‌ی مثلث ABC؛

۳. مثلثی که از وصل کردن مراکز دایره‌های محاطی خارجی به دست می‌آید؛

۴. مثلثی که از وصل کردن نقاط تماس اضلاع مثلث ABC با دایره‌ی محاطی داخلی به دست می‌آید؛

۵ و ۶ و ۷. مثلث‌هایی که از وصل کردن نقاط تماس اضلاع مثلث ABC با دوایر خارجی آن به دست می‌آید.

۸. مثلثی که از خطوط مماس بر دایره‌ی محیطی مثلث ABC در رأس‌های آن به دست می‌آید.

کارمند بازنشسته‌ی راه‌آهن

کبوتران نامه‌بر

در ملاقات دیگری که بین جانسن مکانیسین بازنشسته‌ی راه‌آهن و دکتر پزشک ناحیه روی‌داد، جانسن داستانی از یک مأموریت جالب که در زمان اشتغال به کار برای وی اتفاق افتاده بود برای دکتر شرح داد. او گفت: روزی از طرف هیأت نقل و انتقالات به وی مأموریت دادند تا به هنگام کار در یکی از ترن‌های عادی دو کبوتر نامه‌بر را با خود ببرد و آن‌ها را دقیقاً در فاصله‌ی ۸۰ کیلومتری یکدیگر و درست به فاصله‌ی یک ساعت از هم رها کند.

خوشبختانه قسمتی از مسیری که راه‌آهن از آن می‌گذشت کاملاً هموار بود. طول این خط آهن مستقیم ۱۶۰ کیلومتری به نحوی بود که ترن‌ها این فاصله را درست در مدت ۲ ساعت می‌پیمودند. در این

فاصله ایســتگاه‌هایی وجود داشــت و در آن‌ها ترن‌ها به نسبت تعداد مسافرانی که پیاده یا سوار می‌شدند توقف داشــتند، اما با کم و زیاد کردن سرعت، این زمان‌های توقف جبران می‌شد و در نتیجه، فاصله‌ی ۱۶۰ کیلومتری درست در ۲ ساعت طی می‌شد.

اما از این که ما فاصله‌ی ۱۶۰ کیلومتری را در مدت ۲ ساعت طی می‌کردیم و سرعت متوسط ما ۸۰ کیلومتر در ساعت بود، نمی‌توان اطمینان داشت که یک فاصله‌ی زمانی یک ساعتی وجود داشته که در آن مسافت ۸۰ کیلومتر پیموده شده باشد.

دکتر اظهار داشت: «این چنین نیست. بدون در نظر گرفتن تغییرات سرعت در فاصله‌ی ۲ ساعت به سادگی می‌توان ثابت کرد که در هر حال فاصله‌ای یک ساعتی وجود داشــته است که طی آن مســافت ۸۰ کیلومتر پیموده می‌شده است. راه ساده‌ی اثبات این مطلب از این قرار است:

فاصله‌ی دو ســاعتی را به دو فاصله‌ی یک ساعتی تقسیم می‌کنیم. فرض می‌کنیم که نه در یک ســاعت اول و نه در یک ســاعت دوم دقیقاً مســافت ۸۰ کیلومتر را نپیموده باشید، وگرنه مسئله خیلی ساده خواهد بود. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که در یک ساعت اول سرعت متوسط شــما کمتر از ۸۰ کیلومتر در ســاعت و در دومین ساعت بیش‌تر از این مقدار بوده اســت. ملاحظه خواهید کــرد که اگر به ترتیب عکس فرض کنیم، اثبات فرق نخواهد کرد.

یک فاصله‌ی یک ســاعتی مجــزا در نظــر می‌گیریــم و آن را به تدریج در طول مسیر (شکل در پایین است) جا می‌دهیم به‌طوری که ابتدا یک ساعت اول و بعد به تدریج یک ساعت دوم را دربرگرفته باشد. در این یک ســاعت مجزا که آن را در طول مســیر پخش کردیم سرعت متوسط همان سرعت مطلوب است. از آن‌جا که این فاصله یک ساعت اول را دربر دارد، در ابتدای آن سرعت متوسط کم‌تر از ۸۰ کیلومتر در ساعت می‌باشد و چون یک ساعت دوم را هم دربرمی‌گیرد، در پایان، سرعت متوسط آن بیش‌تر از ۸۰ کیلومتر خواهد بود.

ملاحظه می‌کنیم که در طول یک ســاعت سرعت متوسط بیــن دو مقدار محصور می‌ماند، یکی کم‌تــر از ۸۰ کیلومتر در ســاعت و دیگری بیش‌تر از آن. بنابراین، بخشی از مسیر وجود دارد که ضمن آن در این فاصله‌ی یک ساعتی سرعت متوسط دقیقاً برابر با ۸۰ کیلومتر در ساعت است و به این صورت حکم ثابت می‌شود.»

مکانیسین بازنشسته حق را به جانب دکتر داد و چنین اظهار داشت: «آنچه گفتید به جای خود درست است، اما این موضوعی نبود که به کار هیئت نقل و انتقالات بیاید. برای این‌که هیچ‌گاه من نمی‌توانســتم شروع این فاصله را تعیین کنم و در نتیجه نمی‌توانستم ساعت رها شدن کبوتران را معلوم کنم. فعلاً هم چنانچه مایل باشــید مسئله‌ی کوچکی که سراغ دارم مطرح کنم، شاید برای شما جالب باشد.» قرار شد که این مسئله در جلسه‌ی بعد مطرح شود.