

مسابقه‌ی ریاضی استرالیا (۲۰۰۸)

ترجمه‌ی سپیده چمن‌آرا



پرسش ۶ امتیازی. عدد دو رقمی ab و معکوس آن ba ، هر دو اعداد اول هستند. برای مثال ۱۳ و ۳۱ هر دو عددی اول هستند. بزرگ‌ترین مجموع ممکن چنین دو عددی چیست؟

پرسش ۷ امتیازی. فرض کنید یک هفت ضلعی منتظم داریم. چند مثلث با زاویه‌های تند وجود دارد که رأس‌های این مثلث‌ها، رأس هفت ضلعی باشد؟

پرسش ۸ امتیازی. یک مکعب مستطیل $۶ \times ۳ \times ۳$ سانتی‌متر مکعبی از مکعب‌های $۱ \times ۱ \times ۱$ سانتی‌متر مکعبی ساخته شده است. چند نوع مکعب مستطیل (از جمله مکعب مربع) وجود دارد که رئوس آن‌ها، رئوس مکعب‌های $۱ \times ۱ \times ۱$ سانتی‌متر مکعبی بوده و آن‌ها با وجود مکعب مستطیل اولیه، موازی باشد؟ (مکعب مستطیل‌های هم‌اندازه که در جهت‌های مختلف باشند، متفاوت به حساب می‌آیند).

پنج پرسش ذیل، پنج پرسش آخر سؤال‌های مسابقه‌ی ریاضی استرالیا (سال ۲۰۰۸) برای پایه‌های دوم و سوم راهنمایی است که در شماره‌ی گذشته‌ی این مجله، ۲۵ پرسش پنج‌گزینه‌ای آن را چاپ کردیم. این پرسش‌ها را همراه با راه‌حل آن‌ها و نیز جدول پاسخ‌نامه‌ی پرسش‌های شماره‌ی قبل در این قسمت خواهیم آورد.

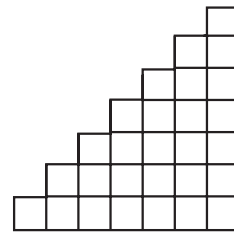
پرسش ۹ امتیازی. به مجموعه‌ای از اعداد طبیعی که اولین و آخرین عدد آن ۱ باشد و هر عدد با اعداد قبل و بعد از خود حداکثر یک واحد اختلاف داشته باشد، مجموع خاص می‌گوییم. برای مثال

$$1+2+3+4+3+2+3+3+2+3+2+1$$

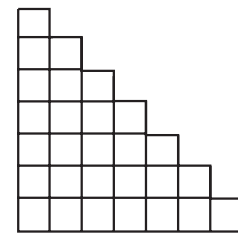
یک مجموع خاص است.

حداقل تعداد اعداد صحیحی که یک مجموع خاص برابر با ۲۰۰۸ داشته باشند، چندتا است؟

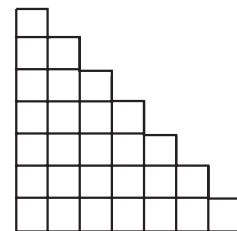
پرسش ۱۰ امتیازی. یک شکل از مکعب‌های سنگی هم‌اندازه ساخته شده است. نمای این شکل از بالا، جلو و کنار به صورت‌های زیر است:



نما از کنار



نما از جلو



نما از بالا

بیشترین تعداد مکعب سنگی که شکلی با این نماها تولید می‌کند، چندتا است؟



پاسخ‌ها

پاسخ پرسش ۶ امتیازی

برای پاسخ به این پرسش باید همه‌ی اعداد اول دو رقمی را بشناسیم. این اعداد عبارتند از:

$$۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۲۳، ۲۹، ۳۱، ۳۷، ۴۱، ۴۳، ۴۷، ۵۳، ۵۹، ۶۷، ۷۱، ۷۳، ۷۹، ۸۳، ۸۹، ۹۱، ۹۷$$

بزرگ‌ترین عدد اول دو رقمی، ۹۷ است که معکوس آن ۷۹، نیز عددی اول است، پس بزرگ‌ترین مجموع ممکن برای چنین اعدادی،

$$۷۹+۹۷=۱۷۶$$

است.

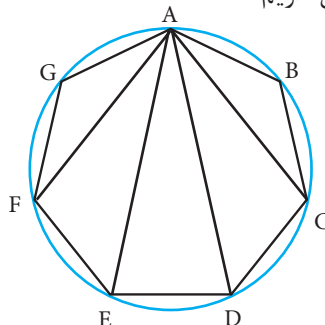
پاسخ پرسش ۷ امتیازی

زاویه‌های یک هفت ضلعی منتظم تقریباً 128° است. هم‌چنین طبق شکل زیر، می‌توان هفت ضلعی منتظم را درون دایره محاط کرد. هر یک از کمان‌های و

و و و و و و و ، حدود 51°

است. لذا برای رسم مثلثی با ویژگی‌های موردنظر از یک رأس مشخص مثلاً A ، باید قطرهای گذرا از A را رسم کرد و تنها مثلث ADE ، دارای زاویه‌های تند است. (زیرا با استفاده از محاسبه‌ی زاویه‌های محاطی، می‌بینیم که سایر مثلث‌ها یک زاویه‌ی باز دارند).

از هر رأس، یک مثلث با چنین ویژگی داریم، پس هفت ($7 \times 7 = 49$) مثلث با این ویژگی داریم.



پاسخ پرسش ۸ امتیازی

از آن‌جا که تمام مکعب مستطیل‌های هم‌اندازه و هم‌جهت، یکی به حساب می‌آیند. برای شمارش انواع مختلف آن‌ها، باید ببینیم در هر جهت، چند انتخاب مختلف برای اندازه‌های مکعب داریم. در جهت طول از ۱ تا ۶ واحد، در جهت عرض از ۱ تا ۳ واحد و در جهت ارتفاع نیز از ۱ تا ۳ واحد می‌توانیم انتخاب کنیم. پس ۶ حالت انتخاب در جهت طول و ۳ حالت انتخاب در جهت عرض و ۳ حالت انتخاب نیز در جهت ارتفاع داریم. بنابراین، تعداد انواع مکعب‌ها $6 \times 3 \times 3 = 54$ است.

پاسخ پرسش ۹ امتیازی

برای ساختن یک مجموع خاص، باید اولین و آخرین عدد، ۱ باشد. هم‌چنین عدد بعدی یا قبلی، باید حتماً یک واحد بیش‌تر از آن عدد باشد تا تعداد اعداد این حاصل جمع، حداقل تعداد ممکن شود. پس مجموعی به صورت زیر داریم:

$$1+2+3+\dots+3+2+1=2008$$

برای این‌که ببینیم این حاصل جمع تا کجا باید ادامه داشته باشد تا ۲۰۰۸ را به ما بدهد، اگر فرض کنیم از هر عدد ۲ تا داشته

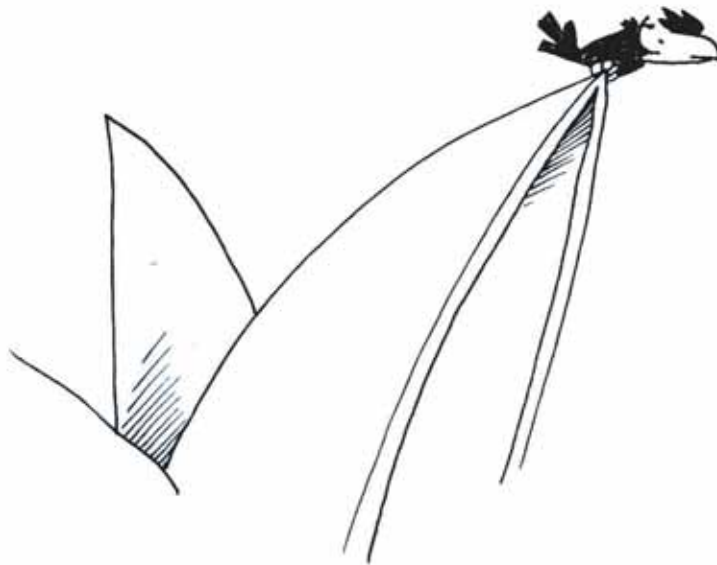
باشیم، باید ببینیم که مجموعی به شکل $1+2+3+\dots=1004$

تا کجا ادامه دارد. با آزمون و خطا پیش می‌رویم و در ضمن از این‌که حاصل جمع اعداد از ۱ تا n برابر است با استفاده می‌کنیم.

فرض می‌کنیم این مجموع را باید تا $n=20$ ادامه دهیم، در این صورت، حاصل جمع برابر است با:

$$1+2+3+\dots+20$$

که خیلی کمتر از ۱۰۰۴ است. پس فرض کنیم $n=50$ ، در این صورت:



پاسخ پرسش ۱۰ امتیازی

که در مجموع $۱+۲+۳+۴+۵+۶$ یعنی مکعب دارد.

به همین ترتیب ردیف سوم، $۱+۲+۳+۴+۵$ ، یعنی ۱۵ مکعب دارد؛

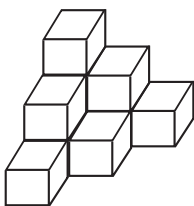
ردیف چهارم، $۱+۲+۳+۴$ ، یعنی ۱۰ مکعب؛

ردیف پنجم، $۱+۲+۳$ ، یعنی ۶ مکعب؛

در ردیف ششم و هفتم به ترتیب $۳+۱=۲$ ، و ۱ مکعب دارند.

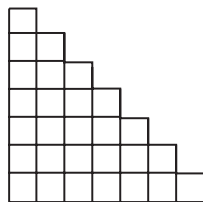
پس کل مکعب‌ها که شکلی شبیه شکل زیر (منتها بزرگ‌تر) را تولید می‌کنند، برابر است

$$۱+۳+۶+۱۰+۱۵+۲۱+۲۸=۸۴$$



دانش‌آموزان دوم راهنمایی، حتماً به خاطر دارند که این شکل را در یکی از رسم‌های کتاب درسی خود دیده‌اند

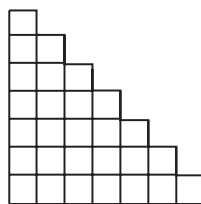
نمای کنار مشخص می‌کند که شکل موردنظر باید حالت پلکانی داشته باشد ولی تصویر از بالا نشان می‌دهد که پله‌ها، مساوی هم و کامل نیستند. می‌توان شکل موردنظر را، ردیف به ردیف تصور کرد و در هر ردیف، باید بیش‌ترین تعداد مکعب سنگی که این شکل را می‌سازند، در نظر بگیریم. ردیف اول از پایین: چون تصویر از جلو نشان می‌دهد در اولین ردیف ۷ قطعه داریم، باید در ردیف اول، کل شکل دیده شده از بالا را تصور کنیم



$$۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷$$

مکعب دارد.

ردیف دوم نیز وضعیتی مشابه از سه جهت دارد، پس مثل ردیف اول اما با شروع از ۶ مکعب است:



که از ۱۰۰۴ بزرگ‌تر است. اگر $n=۴۰$ ، آن‌گاه:

که باز هم از ۱۰۰۴ کوچک‌تر خواهد شد. پس n عددی است بین ۴۰ و ۵۰. اگر $n=۴۵$ داریم

پس ۴۵ n . اگر $n=۴۴$ ، داریم

پس و این امکان‌پذیر نیست، لذا مجموع «خاص» باید به شکل زیر باشد:

$$۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸+۹+۱۰+۱۱+۱۲+۱۳+۱۴+۱۵+۱۶+۱۷+۱۸+۱۹+۲۰+۲۱+۲۲+۲۳+۲۴+۲۵+۲۶+۲۷+۲۸+۲۹+۳۰+۳۱+۳۲+۳۳+۳۴+۳۵+۳۶+۳۷+۳۸+۳۹+۴۰+۴۱+۴۲+۴۳+۴۴+۴۵$$

یعنی از ۱ شروع می‌شود و تا ۴۴ می‌رود و دوباره از ۴۴ به ۱ باز می‌گردد، ولی چون حاصل جمع

$$۱۹۸۰=(۲ \times ۹۹۰)$$

می‌شود که از ۲۰۰۸، ۲۸ تا کمتر است، ۲۸ باید در محل مناسبی (یا در قسمت ابتدای مجموع یا در قسمت دوم) تکرار می‌شود. پس تعداد جملات برابر است با: جمله. $۸۹=۲ \times ۴۴+۱$

پاسخ سؤالات مسابقه‌ی شماره‌ی قبل در صفحه‌ی ۴۱