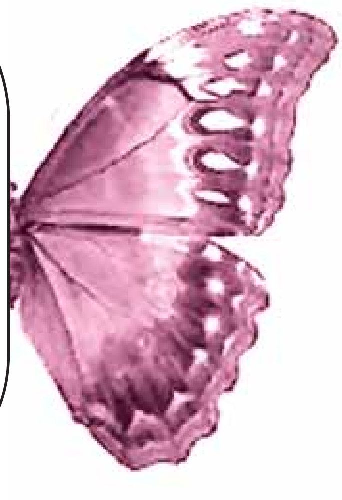


تقارن در شکل‌های متناهی

اشاره

در این مقاله به بررسی مفهوم تقارن از دیدگاه ریاضی می‌پردازیم. روشی ارائه می‌شود که می‌توان آن را در تعیین گروه تقارن یک شکل هندسی متناهی با استفاده از تقارن‌های آن شکل به‌کار برد.

مقداد قاری
دانشگاه اصفهان
دانشکده ادبیات و علوم انسانی
گروه فلسفه

مقدمه

در این مقاله به دنبال ردپای ریاضی در پدیده‌های زیبا هستیم.[1] حس ما از زیبایی بر توازن و هارمونی استوار است. به نظر شما چه چیز باعث می‌شود منظرهٔ تصویر ۱ یا دانهٔ برف تصویر ۲ زیبا به نظر برسند؟

تصویر ۱

تصویر ۲.

پاسخ «تقارن» است. **افلاطون** معتقد است که: «قوانین ریاضی حاکم بر طبیعت منشأ تقارن در طبیعت هستند» [weyl,1952]. به تازگی روان‌شناسان پی برده‌اند، یکی از قسمت‌های مهمی که باعث زیبایی انسان می‌شود، تقارن صورت است. مردم بیشتر صورت‌هایی را دوست دارند که نه زیاد لاغر باشد و نه زیاد چاق و نه زیاد... بلکه متعادل و متقارن باشند. نظرتان در مورد صورت تصویر ۳ چیست؟

تصویر ۳.

این صورت به وسیلهٔ **لنگلویس**[2] با استفاده از رایانه ساخته شده است. این صورت که میانگین ۳۲ صورت واقعی است، کاملاً متقارن است.[3] بنابراین شاید عشق به تقارن در اصل در طبیعت ما وجود دارد.

تقارن در ریاضی

واژهٔ «symmetry» از واژهٔ یونانی «Σύμμετρος» در اصل به معنای «proportionate» (متناسب) و «commensurable» (دارای اندازهٔ مشترک) گرفته شده است. در ادامه تعریف ریاضی تقارن را یادآوری می‌کنیم.

وقتی واژه تقارن را می‌شنویم، بیشتر تعادل دو جانبه (تعادل چپ و راست) به ذهن خطور می‌کند. چنین تقارنی را نه‌تنها در صورت بلکه در بدن انسان نیز می‌توان مشاهده کرد (شکل ۱). بدن ما نسبت به صفحه‌ای که از مرکز آن می‌گذرد، متقارن است.

شکل ۱

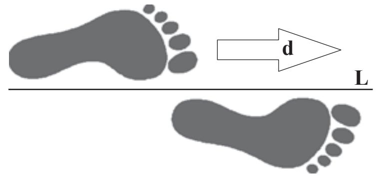
با چنیــن نگاهی به تقارن فــوراً معادل ریاضی این مفهــوم یعنی «انعکاس» مطرح می‌شود. آیا تنها شکل‌هایی که دارای تقارن انعکاسی (آینه‌ای) هســتند، متقارن به نظر می‌آیند؟ با دیدن شــکل ۲ باز هم احساسی از تقارن در مــا به وجود می‌آید. در حالی‌که این شــکل تقارن انعکاسی ندارد، ولی با یک دوران (به اندازهٔ ۷۲ درجه) دوباره روی خود قرار می‌گیرد.

شکل ۲

این‌ها نمونه‌های اولیهٔ تقارن هستند که با آن‌ها مواجه می‌شــویم. بعداً می‌بینیم که انعکاس و دوران تنها تقارن‌های شــکل‌های متناهی‌اند.

دیدیم که بعضی شــکل‌ها به این دلیل متقارن هســتند که با یک انعکاس یا دوران روی خود قــرار می‌گیرنــد. مهم‌ترین وجه اشتراک انعکاس و دوران این است که فاصلهٔ دو نقطه از شــکل پس از تبدیل ثابت باقی می‌ماند. به چنین تبدیل‌هایــی «طولپا» یا «ایزومتــری»[۴] گفته می‌شــود. یک *تبدیل ایزومتــری* (یــا به‌طور خلاصــه ایزومتری) نگاشــتی اســت از صفحهٔ اقلیدسی به روی خودش، به طوری که حافظ طول باشد. برای مثال، انتقال یک ایزومتری است، در حالی‌که تجانس ایزومتری نیست.

ریاضی‌دانان از سال ۱۸۳۱ می‌دانستند کــه هر ایزومتری به یکــی از این چهار نوع اســت: دوران حول یک نقطه، انتقال در یک جهت مفروض؛ انعکاس نســبت به یک خط مفروض (خط انعــکاس)؛ و لغزه. دوران‌هایی به اندازهٔ $\frac{۲\pi}{n}$ را دوران‌های n- تایی می‌نامند. مثــلاً دوران به انــدازهٔ ۹۰ درجه یک دوران ۴-تایی اســت. لغزه ترکیبی اســت از یک انعکاس نســبت به خــط L و یک انتقال در جهت d موازی با L. شکل ۳ را ببینید.



شکل ۳

همان‌طــور که می‌دانیم، یــک *تقارن* از شــکل T، تبدیل ایزومتری چون f است، به طوری که T را به خودش تبدیل کند؛ یعنی: $f(T)=T$. بــه عبارت ســاده، تصور کنید که شــکل T را روی کاغذی رسم کرده‌ایم. حال کاغذی شفافی روی آن قرار دهید و شکل T را روی آن کاغذ شفاف چاپ کنید. یک تقارن شکل T متناظر است با حرکت کاغذ شفاف بــه طوری که بعد از حرکت شــکل T روی کاغذ شفاف دقیقاً روی شکل T قرار گیرد.

برای هر شکل T، مجموعهٔ همهٔ تقارن‌های T را بــا S(T) نمایش می‌دهیم و آن را گروه تقارن‌های T می‌نامیم. (مفهوم گروه در ادامه تعریف خواهد شــد). برای مثال، «نگاشــت همانی»، که هر نقطه از صفحه را به خودش تصویر می‌کند، یک تقارن اســت. نگاشــت همانی یک تقارن برای هر شــکل T اســت. اما شکلی را می‌توان متقارن نامید که دارای یک تقارن به غیر از نگاشت همانی باشد. مثلاً شکل ۴ را ببینید.

شکل ۴

شــکل ۴ به وضوح متقارن نیست، ولی دارای یک تقارن (یعنی همان نگاشت همانی) اســت. حال به شکل ۵ دقت کنید. این شکل متقارن است، زیرا به غیر از نگاشت همانی دارای انعکاس (یا دوران به انــدازهٔ ۱۸۰ درجه) نیز هست. پس شکلی را «متقارن»[۵] می‌نامیم که دارای یک تقارن به غیر از نگاشت همانی باشد.

شکل ۵

در انتها مفهوم «گــروه»[۶] را به اختصار تعریف می‌کنیم.[۷]

یک گروه ســه‌تایی به‌صــورت (G,o,e) اســت که در آن G یک مجموعهٔ غیرتهی، o یک عملگر دوتایی و e (عضو خنثی) عضوی از G است، به طوری که در خواص زیر صدق کنند:

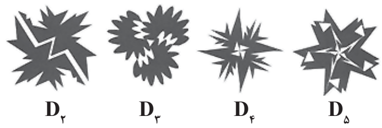
$$۱.(\forall x,y,z \in G)(x \circ y)\circ z = x \circ (y \circ z)$$
$$۲.(\forall x \in G)x \circ e = e \circ x = x$$
$$۳.(\forall x \in G)(\exists y \in G)x \circ y = y \circ x = e$$

بــرای مثال، عددهای صحیــح به همراه عمل جمــع و عدد صفر به‌عنوان عضو خنثی (Z,+,o)، اعداد حقیقی به همراه عمل ضرب و عــدد یک به‌عنوان عضو خنثــا (R,x,۱)، و مجموعهٔ همهٔ توابع به همــراه عمل ترکیب توابــع و تابع همانــی به‌عنــوان عضو خنثا (F,o,Id) تشکیل گروه می‌دهند. می‌توان ثابت کرد که مجموعهٔ همهٔ تقارن‌های یک شکل T، یعنی S(T)، به همراه عمل ترکیب توابع و تابع همانی Id به‌عنوان عضــو خنثا (S(T),o,Id) تشــکیل گروهی می‌دهند که به آن «گروه تقارن»[۸] می‌گوینــد. در بخش‌های بعدی به رده‌بنــدی گروه‌های تقارن برای شــکل‌های متفاوت می‌پردازیــم (برای تعاریف دقیق‌تر و اثبات‌ها منابع شمارهٔ ۵ تا ۸ را ببینید).

شکل‌های متناهی

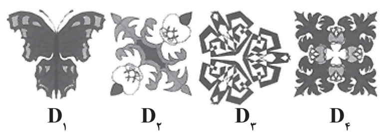
«شکل‌های متناهی»[۹] شکل‌هایی هستند که گــروه تقارن آن‌ها شــامل انتقال و لغزه نباشــند. اگر گروه تقارن یک شکل متناهی دقیقاً شــامل n دوران بــه اندازه‌های $\frac{۲\pi j}{n}$،

برای $j=0,1,...,n-1$ باشـــد، گروه تقارن آن را «گروه دوری»[۱۰] از مرتبهٔ n نامیده با C_n نشان می‌دهند. در شکل ۶ مثال‌هایی از شکل‌های متناهی با تقارن C_n نشان داده شده‌اند.



شکل ۶. شکل‌هایی با گروه تقارن دوری

اگـــر گروه تقـــارن یک شـــکل علاوه بر دوران‌هـــای گـــروه C_n دارای n انعکاس نیز باشد، آن را «گروه دووجهی»[۱۱] از مرتبهٔ ۲n می‌نامیم با D_n نشـــان می‌دهیم. در شکل ۷ مثال‌هایی از شکل‌های متناهی با تقارن D_n نشان داده شده است.



شکل ۷. شکل‌هایی با گروه تقارن دووجهی

ثابت می‌شـــود که تنها گروه‌های تقارن شـــکل‌های متناهی عبارت‌انـــد از: C_n و D_n. ادعا می‌شـــود که **لئوناردو داوینچی** اولین شخصی بوده که چنین رده‌بندی از گروه‌های تقارن شـــکل‌های متناهی را ارائه داده است. در زیر، فلوچارت۱ برای تشخیص گروه‌های تقارن یک شکل متناهی ارائه شده است.

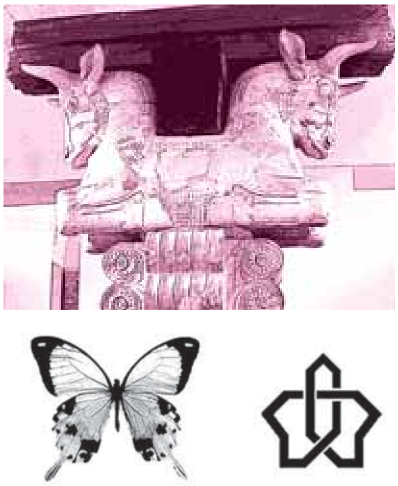
شکل دارای دقیقاً n دوران به اندازه‌های j/n ۳۶۰ (برای n-1 و ... و ۱ و ۰=j) است. ← **Cn**

شکل علاوه بر دوران‌های گروه Cn دارای n انعکاس است. ← **Dn**

فلوچارت ۱. تشخیص گروه‌های تقارن متناهی

گروه تقارن C_1 نشان‌دهندهٔ عدم تقارن شکل است، زیرا این گروه تنها شامل دوران صفر درجه (که همان نگاشت همانی است) اســـت. گروه تقارن D_1 نشـــان‌دهندهٔ تقارن انعکاسی است، زیرا این گروه علاوه بر نگاشت همانی دارای یک انعکاس نیز هســـت. برای مثال تصویر ۴ را ببینید.

گلبرگ‌هـــای گل شـــکل ۲ دارای گروه تقارن C_5 و بلور بـــرف تصویر ۲ دارای گروه تقارن D_6 هستند.

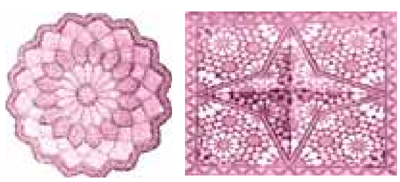


تصویر ۴. شـــکل‌هایی با گروه تقارن D_1، به ترتیب از راســـت به چپ: آرم خانهٔ ریاضیات اصفهان، پروانه، سرستون تخت جمشید، (موزه لوور ـ پاریس)

گروه‌هـــای C_n و D_n بـــرای n بزرگ‌تر یا مساوی ۲ «گروه‌های رز»[۱۲] نامیده می‌شوند (برای مثال تصویر ۵ را ببینید).

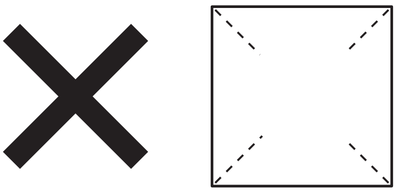
تصویر ۵. قسمتی از دیوار کاخ داریوش در شوش (موزه لوور ـ پاریس) با گروه تقارن رز D_{16}

n- ضلعی‌هـــای منتظم و یا ســـتاره‌ای دارای گروه تقارن D_n هســـتند (تصویر ۶ را ببینید).

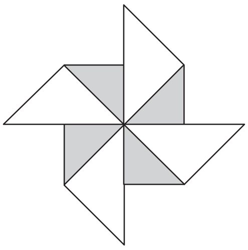


تصویر ۶. چهارضلعی ســـتاره‌ای با گروه تقارن D_4 (باغ ملی تهران)، بشقاب مینا با گروه تقارن D_{16}

در شکل‌های ۸ و ۹ نشان داده شده است که چگونه می‌توان یک کاغذ مربع‌شـــکل یا یـــک علامت ضرب‌در با گروه تقارن D_4 را به شکل‌هایی با گروه تقارن C_4 تبدیل کرد.

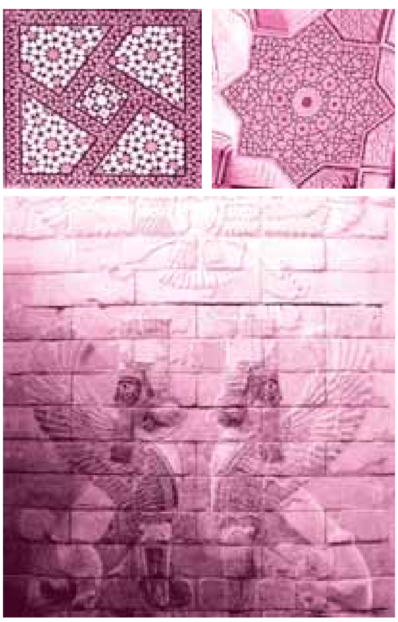


شکل ۸. کاغذ مربع شـــکل و علامـــت ضربدر با گروه تقارن D_4



شکل ۹. فرفره با گروه تقارن C_4

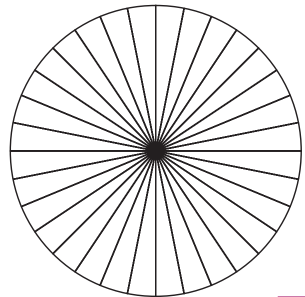
در تصویـــر ۷ الگوهایـــی در معماری به همـــراه گروه‌هـــای تقارن آن‌ها نشـــان داده شده‌اند.



تصویر ۷. به ترتیب از راســـت به چپ: مقرنس مسجد جامع اصفهان با گروه تقـــارن D_8، بازار هنر اصفهان با گروه تقارن C_4، قســـمتی از دیوار کاخ داریوش در شوش (موزه لوور ـ پاریس) با گروه تقارن D_1

به دلیل تقارن دورانی کاملی که در دایره و کره موجود است، فیثاغورثیان این شکل‌ها را کامل‌ترین شکل‌های هندسی می‌دانستند، و ارسطو شکل‌های کروی را به اجسام آسمانی نسبت می‌داد [weyl,1952:5].

گروه تقارن دایره که شامل بی‌نهایت دوران و انعکاس است با D_∞ نشان داده می‌شود.



شکل ۱۰.

سخن آخر

در این مقاله به بررسی یکی از کاربردهای مبحث تقارن در آموزش ریاضی پرداختیم. محتوای این مقاله می‌تواند به‌صورت یک کارگاه برای دانش‌آموزانی که قبلاً با تبدیلات ایزومتری آشنایی دارند، اجرا شود (برای تمرین روی تبدیلات ایزومتری کارگاه توصیف شده در منابع شمارهٔ ۲ و ۳ نیز می‌تواند مفید باشد).

در هر نوبت یک شکل متناهی به دانش‌آموزان نشان داده می‌شود. دانش‌آموزانی که به گروه‌های متفاوت تقسیم شده‌اند، با استفاده از تقارن‌های مختلف شکل و فلوچارتی که در اختیارشان قرار گرفته است، باید نوع گروه تقارن شکل را بیابند. این کار می‌تواند بدون اینکه بحثی روی مفهوم و یا تعریف گروه صورت گیرد، انجام شود (در منبع شمارهٔ ۶ مفهوم گروه و گروه‌های تقارن به شیوه‌ای ساده برای دانش‌آموزان توضیح داده شده است).

همچنین می‌توان گروه تقارنی به دانش‌آموزان داد و از آن‌ها خواست تا شکلی با آن گروه تقارن رسم کنند. بعد از برگزاری این کارگاه، به‌عنوان یک فعالیت می‌توان از دانش‌آموزان خواست تا گروه‌های تقارن متناهی الگوهای هندسی به‌کار رفته در محیط اطراف خود را پیدا کنند. این کارگاه از سال ۱۳۸۷ تا ۱۳۹۱ بارها برای دانش‌آموزان راهنمایی و دبیرستان در خانهٔ ریاضیات اصفهان توسط نگارنده اجرا شده است. همچنین به‌عنوان یک فعالیت جذاب دانش‌آموزان می‌توانند از نرم‌افزارهای کار با گروه‌های تقارن استفاده کنند.

پی‌نوشت‌ها

۱. در اینجا می‌توان به نسبت طلایی، هندسه فرکتالی و غیره، و ارتباط آن‌ها با زیبایی اشاره کرد. ولی ما در این مقاله به این موضوع‌ها نمی‌پردازیم.

2. Judith Langlois
3. ر.ک: Buryland Starbird, 2010
4. Isometry
5. Symmetric
6. Group

۷. یان استیوارت در کتاب مفاهیم ریاضیات جدید می‌نویسد: هر جا که تقارنی وجود داشته باشد، نظریهٔ گروه‌ها نیز به میدان می‌آید. این نظریه ما را قادر می‌سازد که تقارن‌ها را بر حسب گروه زیر بنای آن‌ها تشریح کنیم.

8. Symmetry group
9. Finited figure
10. Cyclic group
11. Dihegral group
12. Rose group

منابع

۱. استیوارت، یان (۱۳۶۳). **مفاهیم ریاضیات جدید**. ترجمهٔ جمشید پرویزی. انتشارات خوارزمی. تهران.

۲. قاری، مقداد (۱۳۹۳). «**کاشی‌کاری‌های اشر و تبدیلات هندسی (۱)**». مجلهٔ رشد برهان ریاضی (فصل‌نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲). شمارهٔ ۸۳. پاییز.

۳. ـــــــ (۱۳۹۳). «**کاشی‌کاری‌های اشر و تبدیلات هندسی (۲)**». مجلهٔ رشد برهان ریاضی (فصل‌نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲). دورهٔ ۲۴. شمارهٔ ۲. شمارهٔ پیاپی ۸۴. زمستان.

4. E. B, Burgerm M. Starbird, The Heart of Mathematics, An invitation to effective thinking, Third rdition, John Wiley & Sons, INC., 2010.
5. H. S. M. Coxeter, Introduction to Geometry, (2nd edition) New York, Wiley 1969.
6. D. W. Farmer, Groups and Symmetry: A Guide To Discovering Mathematics, Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1995.
7. J. A. Gallian, Contemporary Abstract Algebra, Brooks/Cole, Cengage Learning, 2013.
8. B. Grunbaum, G. C. Shephard, Tilings and Patterns, W. H. Freeman and company, 1987.
9. H. Weyl, Symmetry, Princton University Press, 1952.