

# هفت هفت ساموراییم شب



شیمادا رهبر گروه بود و او بود که ۶ سامورایی دیگر را برای محافظت از روستاییان فقیر انتخاب کرد. شیمادا به کیکوچیو (با بازی توشیرومیفونه) گفت: «هر شب ۳ نفر باید نگهبانی بدهند.» کیکوچیو توی دلش گفت: «۷ شب، ۷ سامورایی. بهتر نیست هر شب یکی نگهبانی بدهد؟ اما نه، یک نفر، کم است!»

شیمادا گفت: «به چی فکر می‌کنی؟ ۷ نفریم و برای هر شب از ۷ روز هفته، ۳ نگهبان می‌خواهیم. طوری نگهبان‌ها را مشخص کن که عدالت رعایت شود!»

کیکوچیو اخم‌هایش تو هم رفت: «نگهبانی برای هیچ!» پولی در کار نبود و حالا رئیس از او می‌خواست این مسئله را هم حل کند! او که همه عمرش فقط جنگیده بود، این دفعه بدجوری گیر کرده بود. شیمادا (با بازی تاکاشی شیمورا) اما بیخودی رئیس سامورایی‌ها نشده بود. او دوباره گفت: «برای اینکه اعضای گروه با هم بیشتر آشنا شوند، برنامه نگهبانی‌ها را طوری بچین که هر دو نفر حداقل یک شب با هم نگهبانی بدهند!»

کیکوچیو ترجیح می‌داد همه شب‌ها را به تنهایی نگهبانی بدهد، اما فکرش را درگیر این مسئله نکند!

\*\*\*

این گفت‌وگوی خیالی در فیلم «هفت سامورایی»، ساخته آگیراکوروساوا نبود، اما در واقعیت می‌تواند بارها تکرار شود. برای مثال، در برنامه نگهبانی ادارات و کارخانه‌ها، در برنامه‌ریزی وظایف کارمندان یک اداره، در برنامه گردش روزانه یک گروه از گردشگران، و یا در کشیک شبانه یک بیمارستان. بیایید مسئله را حل کنیم. ۷ شب و هر شب ۳ نگهبان. پس ما به ۲۱ (شب، نگهبان) احتیاج داریم. چون ۷ نفر هستند و قرار است که عدالت رعایت شود، پس بهتر است هر نفر در ۳ (شب، نگهبان) حضور داشته باشد. برای برنامه‌ریزی ۷ شب راه‌های متفاوتی وجود دارند:

**الف** افراد را دور یک دایره (شکل ۱) در نظر بگیرید. هر نفر با ۲ نفر مجاورش یک گروه ۳ نفره تشکیل می‌دهد. پس ۷ گروه ۳ نفره تشکیل می‌شود:

۷۱۲، ۱۲۳، ۲۳۴، ۳۴۵، ۴۵۶، ۵۶۷، ۶۷۱



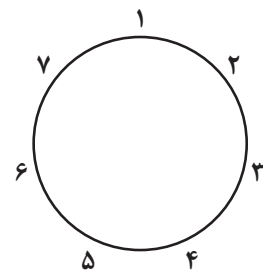
و ۳ با هم دوبار نگهبانی داده‌اند. به نظر می‌رسد هر دو نفر باید دقیقاً یک‌بار با هم نگهبانی بدهند تا شرط خواسته شده محقق شود.

### اثبات

بیایید زوج‌هایی را که با هم نگهبانی می‌دهند، بشماریم:

**شمارش اول:** هفت گروه ۳ نفره داریم. هر شب ۳ زوج نگهبان خواهیم داشت. پس ۲۱ زوج نگهبان در هفت شب خواهیم داشت.

**شمارش دوم:** می‌توان  $\binom{7}{2} = 21$  زوج از نگهبان‌ها تشکیل داد. اگر یکی از این زوج‌ها دوبار با هم نگهبانی بدهند، آن‌گاه زوج دیگری پیدا می‌شود که هیچ شبی با هم نگهبانی ندادند. پس هر زوج از این ۷ نفر دقیقاً یک‌بار باید با هم نگهبانی داده باشند.



شکل ۱.

(ب) از نفر شماره ۱ شروع کنید و سه نفر سه‌نفر جدا کنید و به پیش بروید:

۱۲۳, ۴۵۶, ۷۱۲, ۳۴۵, ۶۷۱, ۲۳۴, ۵۶۷

شیمادا شرط دیگری هم دارد. او می‌خواهد برنامه‌ریزی طوری باشد که هر دو نفر با هم حداقل یک‌بار نگهبانی داده باشند. به نظر شما دو جواب بالایی این شرط را دارند؟ به وضوح این شرط برقرار نیست. برای مثال، دو شخص ۱ و ۴ با هم نگهبانی ندادند و ۲

اما برای آنکه بتوانید خود را بیازمایید، چند مسئله شبیه به مسئله «هفت سامورایی هفت شب نگهداری» برایتان می‌آورم.

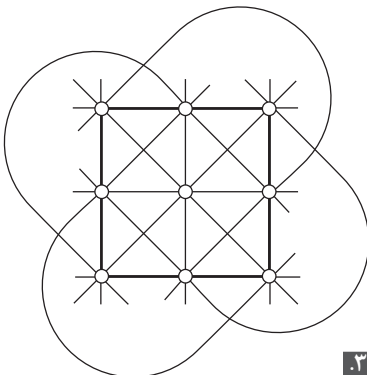
مسئله ۱. اگر ۸ پرستار بخواهند ۸ گروه ۳ نفره تشکیل دهند، به طوری که عدالت کاری رعایت شود و همچنین هر دو نفر حداقل یک‌بار با هم در یک گروه کشیک هم‌گروه باشند، آیا برنامه‌ریزی فوق امکان‌پذیر است؟

مسئله ۲. هفت بازیکن گلف می‌خواهند در یک اردوی یک‌هفته‌ای در شهری که ۲ زمین گلف دارد، شرکت کنند. آن‌ها تصمیم می‌گیرند که هر نفر در هر روز یک بازی داشته باشند. بنابراین هر روز به ۲ گروه ۳ نفره و ۴ نفره تقسیم می‌شوند و هر گروه در یک زمین گلف بازی می‌کند. برنامه‌ریزی و گروه‌بندی این روز را طوری انجام دهید که:

۱. تعداد دفعات حضور هر فرد در گروه‌های ۳ نفره یکسان باشد.
۲. تعداد دفعات حضور هر فرد در گروه‌های ۴ نفره یکسان باشد.
۳. تعداد دفعات هم‌گروه شدن هر دو نفر در گروه‌های ۳ نفره یکسان باشد.
۴. تعداد دفعات هم‌گروه شدن هر دو نفر در گروه‌های ۴ نفره یکسان باشد.

راهنمایی: از مسئله ۷ سامورایی کمک بگیرید.

مسئله ۳. به کمک شکل ۳، از ۹ دانش‌آموز ۱۲ گروه ۳ نفره تشکیل دهید، به طوری که:  
الف) هر نفر عضو ۴ گروه باشد.  
ب) هر دو نفر دقیقاً یک‌بار با هم در یک گروه آمده باشند.



شکل ۳

اما برنامه‌ریزی این ۷ شب چگونه باید باشد؟ بیایید از نفر اول شروع کنیم. او سه شب نگهداری می‌دهد و هر شب با دو نفر از ۶ نفر دیگر نگهداری خواهد داد. پس بدون از دست دادن کلیت مسئله می‌توان فرض کرد، سه شب نگهداری او به صورت زیر است:

۱۲۳، ۱۴۵، ۱۶۷

آیا می‌توانیم فرض کنیم که برنامه ۳ شب اول را چیده‌ایم؟ باز به دلیل تقارن چنین فرضی امکان‌پذیر است. نفر اول سه شب نگهداری‌اش را داده است و می‌تواند چهار شب بعد را استراحت کند!

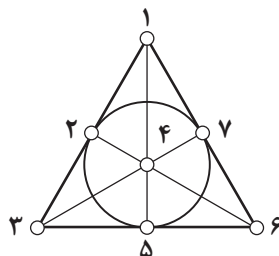
به سراغ نفر دوم می‌رویم. نفر شماره ۲ شب اول با ۱ و ۳ هم‌گروه بوده است. حال باید با افراد ۴، ۵، ۶ و ۷ نیز ۲ گروه نگهداری تشکیل دهد. آیا مجاز هستیم این ۲ گروه را برای ۲ شب بعد در نظر بگیریم: ۲۴۵ و ۲۴۶؟ پاسخ منفی است. ۴ و ۵ با هم در شب دوم نگهداری داده‌اند (همین‌طور ۶ و ۷ در شب سوم). پس تغییری نیاز است: ۲۴۶ و ۲۵۷. شب چهارم و پنجم مشخص شدند و حالا نفر دوم هم می‌تواند شب‌های دیگر استراحت کند. نفر سوم شب اول با ۱ و ۲ نگهداری داده است. حال باید با ۴ نفر دیگر ۲ گروه نگهداری تشکیل دهد. کدام‌یک از گروه‌بندی‌های زیر مجاز است؟  
الف) ۳۴۵، ۳۶۷  
ب) ۳۴۶، ۳۵۷  
ج) ۳۴۷، ۳۵۶

به وضوح پاسخ «ج» صحیح است. تا اینجا برنامه ۷ شب مشخص شده است:

۱۲۳، ۱۴۵، ۱۶۷، ۲۴۶، ۲۵۷، ۳۴۷، ۳۵۶

اگر بررسی کنید متوجه خواهید شد که شرط مسئله برای نفرات بعدی هم برقرار است. (این‌طور نیست؟) می‌توانیم برای به خاطر سپردن برنامه نگهداری‌ها (مناسب برای کی‌کوچیا!) شکل ۲ را در نظر بگیریم که به «صفحه فانو» معروف است:

(۳ ضلع، ۳ میانه و یک دایره)



شکل ۲