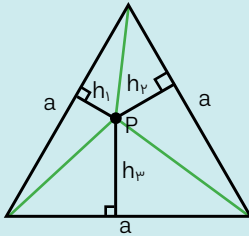


تشکلهای مجموع ثابت

دلخواه را بی نهایت نزدیک یکی از رأس‌ها در نظر بگیرید و فرایند را تکرار کنید. این حاصل جمع دقیقاً برابر ارتفاع مثلث متساوی الاضلاع است! (شکل ۱).



شکل ۱

مشاهده: مجموع فاصله هر نقطه‌ای داخل مثلث متساوی الاضلاع از سه ضلع آن عدد ثابتی است.
برهان:

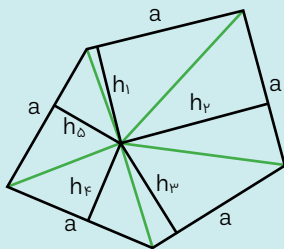
$$ah_1 + ah_2 + ah_3 = 2 \times \text{مساحت مثلث}$$

$$a(h_1 + h_2 + h_3) = 2 \times \text{مساحت مثلث}$$

$$h_1 + h_2 + h_3 = \frac{2 \times \text{مساحت مثلث}}{a}$$

با این مشاهده پرسشی ایجاد می‌شود: «چه شکل‌های دیگری هم این ویژگی را دارند؟»

مثلاً به روشنی در هر n ضلعی منتظم این ویژگی برقرار است. اما فقط شکل‌های منتظم نیستند که چنین‌اند. می‌دانیم که در مثلث‌ها «برابری سه ضلع» معادل است با «برابری سه زاویه» و معادل است با «منتظم بودن». اما در شکل‌های دارای تعداد ضلع‌های بیشتر این سه عبارت با یکدیگر معادل نیستند. پس شاید شرطی ضعیف‌تر از «منتظم بودن» کافی باشد. با دقت کردن به مرحله‌های اثبات می‌بینیم که کافی است خط اول و اثبات برای شکلی برقرار باشد و اگر شکل ما محدب و طول ضلع‌های آن برابر باشند، خط اول برقرار است.

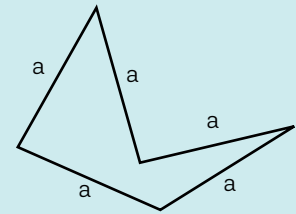


شکل ۲

$$ah_1 + ah_2 + ah_3 + ah_4 = 2 \times \text{مساحت شکل}$$

روی کاغذ و یا به کمک نرم افزار یک مثلث متساوی الاضلاع بکشید. از یک نقطه دلخواه داخل این مثلث، سه پاره خط عمود بر ضلع‌ها رسم کنید. طول این پاره خط‌ها را اندازه بگیرید و این سه عدد را با هم جمع بزنید. نتیجه را در جایی بنویسید. حالا نقطه دیگری را در نظر بگیرید و همین کار را تکرار کنید. چه مشاهده می‌کنید؟ نقطه

بررسی کنید که آیا برای شکل های مقعری که طول اضلاعشان برابر است نیز حکم برقرار است؟ (شکل ۳).



شکل ۳

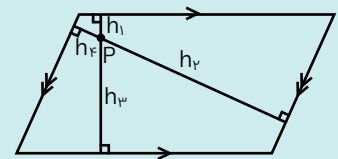
از این به بعد این ویژگی را «مجموع ثابت» می نامیم.

دیدیم که شکل های محدب با طول ضلع های برابر مجموع ثابت هستند. اما هنوز هم شکل های مجموع ثابت دیگری وجود دارند! مستطیل یکی از این شکل هاست (شکل ۴).



شکل ۴

اما پاسخ پرسش برای چهارضلعی ها چه می شود؟ یعنی چهارضلعی های مجموع ثابت کدام چهارضلعی ها هستند؟ **ادعا:** متوازی الاضلاع مجموع ثابت است و برعکس. یعنی اگر یک چهارضلعی مجموع ثابت باشد، متوازی الاضلاع است (شکل ۵).



شکل ۵

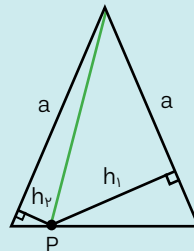
این را که «متوازی الاضلاع مجموع ثابت است» شما بررسی کنید. اثبات قسمت دیگر ادعا دشوارتر است ولی از آنجایی که

گام های روشننگری دارد آن را به دقت اثبات خواهیم کرد. اما پیش از آن به دو گزاره و دو سؤال زیر توجه کنید.

گزاره اول: در هر مثلث متساوی الساقین، مجموع فاصله هر نقطه روی قاعده از دو ساق، عدد ثابتی است. چون:

$$ah_1 + ah_2 = 2 \times \text{مساحت مثلث}$$

برهان دقیقاً مشابه اثباتی است که پیش تر دیدیم.



شکل ۶

گزاره دوم: برعکس گزاره اول نیز درست است. یعنی اگر بدانیم مجموع فاصله هر نقطه روی ضلع مثلثی از دو ضلع دیگر، عدد ثابتی است، مثلث متساوی الساقین و نقطه روی قاعده آن است. چرا؟

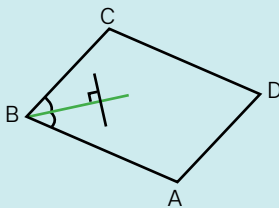
با توجه به دو گزاره اخیر، توجه کنید که برای یک زاویه داده شده، **نقاط روی پاره خطی عمود بر نیمساز، مجموع ثابت هستند**، زیرا دو خط زاویه و پاره خط عمود، یک مثلث متساوی الساقین تشکیل می دهند.

سؤال اول: روی کاغذ دو خط متقاطع را رسم کنید. همه نقطه هایی را بیابید که مجموع فاصله شان از این دو خط، یک سانتی متر باشد.

سؤال دوم: دو خط موازی داده شده اند. همه نقطه هایی را بیابید که مجموع فاصله شان از این دو خط مقدار ثابتی باشد. این مقدار ثابت را با عددهای متفاوتی امتحان کنید.

حالا دو خط متقاطع را در نظر بگیرید. با چرخاندن یکی از این دو خط، آن ها را به دو خط موازی تبدیل کنید. در این حرکت، توجه کنید که شکل نقطه هایی که مجموع فاصله شان از دو خط عدد ثابتی است، چگونه تغییر می کند. به این عمل **دگر دیسی** می گویند.

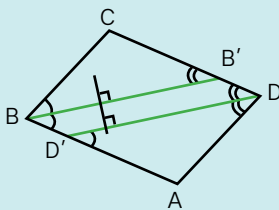
حالا امکانات لازم را برای اثبات ادعا داریم. چهارضلعی مجموع ثابت ABCD را در نظر بگیرید. زاویه ABC و نیمساز آن را نیز در نظر بگیرید. طبق گزاره اول، مجموع فاصله نقاط روی پاره خط عمود بر این نیمساز از ضلع های AB و BC عدد ثابتی است.



شکل ۷

پس چون کل چهارضلعی مجموع ثابت است، مجموع فاصله این نقطه ها از ضلع های AD و CD نیز عدد ثابتی است. پس طبق گزاره دوم، پاره خط بر نیمساز زاویه CDA عمود است. بنابراین این پاره خط بر هر دو نیمساز عمود است و در نتیجه این دو نیمساز موازی هستند. (در چه حالتی دو نیمساز بر هم منطبق می شوند؟) در یک چهارضلعی نیمسازها موازی هستند، تنها اگر متوازی الاضلاع باشد. بررسی کنید.

راهنمایی: به مثلث های ADD' و CBB' در شکل ۸ توجه کنید.



شکل ۸

خب! پس یک **چهارضلعی مجموع ثابت است، اگر و تنها اگر متوازی الاضلاع باشد**. تا شماره بعدی، که به شکل های با تعداد ضلع های بیشتر حمله می کنیم، درباره شکل های مجموع ثابت سه بعدی فکر کنید. به جای مثلث متساوی الساقین، شکل های محدب با طول ضلع برابر، مستطیل، متوازی الاضلاع و پاره خط عمود بر زاویه، چه معادل هایی را قرار می دهید؟