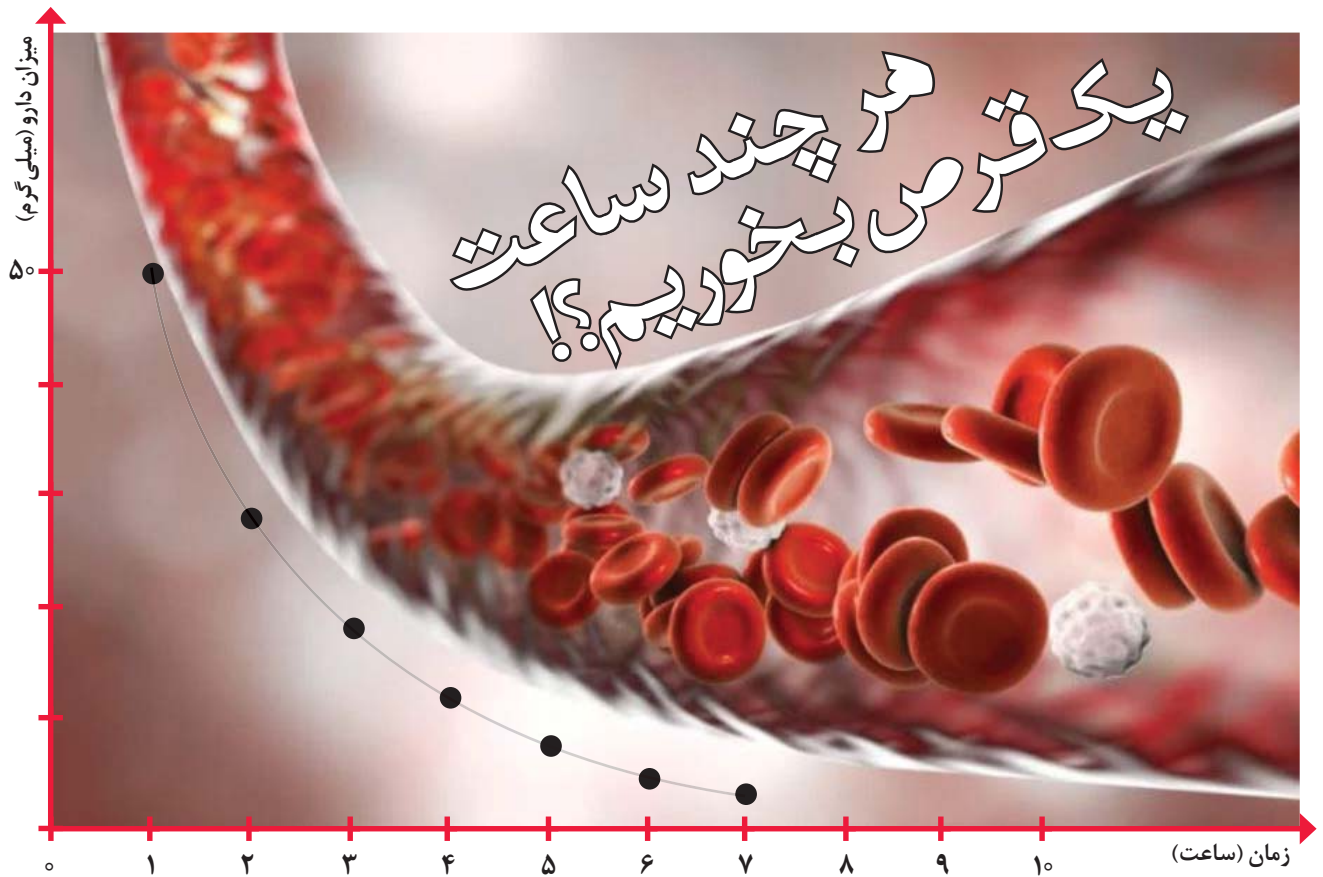




- شخصی 100mg دارویی را مصرف کرده است که نیمه عمر آن یک ساعت است. نمودار «میزان دارو در خون - زمان» برای آن رسم شده است.
- میزان دارو در بدن شخص پس از چند نیمه عمر کمتر از 20 میلی گرم خواهد بود؟
- آیا می توانید مشخص کنید، میزان دارو در بدن شخص در چه زمانی صفر خواهد شد؟ چرا؟
- اگر a_1 میزان اولیه دارو پس از مصرف در بدن شخص و a_n میزان داروی موجود در بدن شخص پس از n امین نیمه عمر باشد، رابطه بازگشتی میزان دارو در بدن شخص چگونه است؟

مقدمه

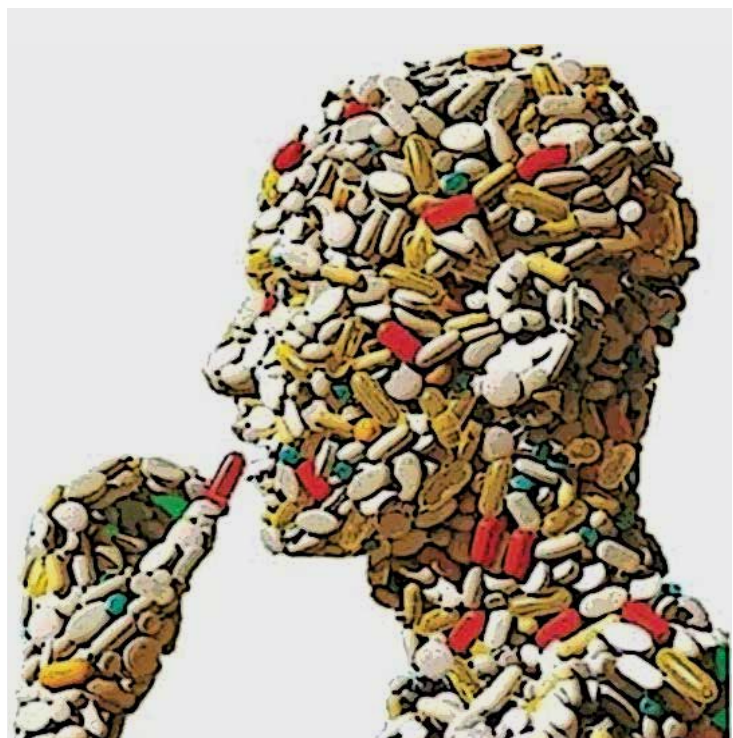
شاید کمتر به محاسبات ریاضی پنهان در کشف دارو و واکسن کرونا یا هر داروی دیگری توجه کرده ایم. کشف و پیش بینی محاسباتی «ساختار پروتئین کیسول ویروس کرونا» برای درمان این هیولای ناخوانده، نیازمند محاسبات دقیق ریاضی و آماری است که در درمان بیماری بسیار حائز اهمیت هستند.

به این بهانه و در مقاله پیش رو به ارتباط میان

همه گیری بیماری «کرونا» در جهان و تلاش شبانه روزی و گروهی دانشمندان شاخه های گوناگون پزشکی، محققان دارو و داروسازان، مهندسان ژنتیک و میکروبیولوژی، ویروس شناسان، و ... برای مقابله با این بیماری، یک بار دیگر اهمیت و ارزش «علم» را که شاید در قیل و قال روزمرگی هایمان کمرنگ شده بود، یادآوری کرده است. در این میان

دو مفهوم پزشکی و ریاضی، یعنی نیمه عمر دارویی و دنباله های هندسی می پردازیم؛ ارتباطی که شاید جوابی ملموس برایمان به همراه داشته باشد: «علاوه بر زیبایی ذاتی مفاهیم ریاضی، در عمل و در زندگی روزمره نیز ریاضی کاربردهای بسیار حیاتی دارد.» در مراحل درمان یک بیماری، پس از شناخت ماهیت بیماری و داروهای مورد نیاز برای مقابله با آن، یکی از مهم ترین مسائل، «میزان دارو» و چگونگی «ثابت نگه داشتن میزان دارو» در خون بیمار است. با گذشت زمان به دلیل دفع یا جذب دارو پس از هر بار مصرف، میزان آن در بدن کاهش می یابد. حال آنکه برای مقابله با میکروب یا ویروس بیماریزا، میزان داروی موجود در خون حتی الامکان باید ثابت بماند. در درصد بالایی از داروها، «ماده مؤثر» آن با توجه به «نیمه عمر دارو» کاهش می یابد.

نیمه عمر دارو مدت زمانی است که میزان دارو در خون به نصف میزان اولیه از زمان مصرف کاهش می یابد. نیمه عمر دارو به ویژه در بیماری های عفونی، درمان فشار خون، مشکلات کلسترول یا داروهای آرام بخش اهمیت ویژه ای دارد.



با توجه به تعریف دنباله a_n و نیز تعریف نیمه عمر، هر جمله دنباله از حاصل ضرب عدد ثابت در جمله قبلی به دست می آید؛ یعنی:

$$a_1 = 100$$

- ضابطه تابعی (جمله عمومی) دنباله را مشخص کنید.

$$a_1 = 100$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \times 100$$

$$a_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \times 100 \right) = \left(\frac{1}{2} \right)^2 \times 100$$

$$\Rightarrow a_n = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \times 100$$

به دنباله هایی از عددها که هر جمله دنباله از ضرب یک عدد ثابت در جمله قبلی به دست می آید، «دنباله هندسی» گفته می شود. عدد ثابت را «نسبت مشترک» می نامند و عموماً با r نشان می دهند.

یک دنباله هندسی دنباله ای است به صورت:

$$a, ar, ar^2, ar^3, \dots$$

که در آن a جمله اول و $r \neq 0$ نسبت مشترک دنباله است.

جمله n ام این دنباله هندسی از رابطه $a_n = a_1 r^{n-1}$ به دست می آید.

برای درمان شخصی که به نوعی گلو درد عفونی مبتلاست، پزشک معالج قرص های آنتی بیوتیک حامل 80 mg آنتی بیوتیک تجویز کرده است. با توجه به آنکه نیمه عمر این آنتی بیوتیک ۸ ساعت است و شخص بیمار موظف به مصرف این قرص ها در پایان هر ۸ ساعت پس از خوردن قرص قبلی است:

۱. با کامل کردن جدول ۱، میزان آنتی بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار را پس از ۳ و ۶ بار مصرف دارو مشخص کنید.

۲. با یک «رابطه بازگشتی»، میزان آنتی بیوتیک را در بدن شخص بیمار پس از n بار مصرف قرص مشخص کنید.

۳. آیا می توانید رابطه ای میان تعداد مصرف قرص و میزان آنتی بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار مشخص کنید؟

۴. با جایگذاری مقادیر $n=1$ تا $n=5$ در رابطه به دست آمده از قسمت ۳، صحت عددهای

به دست آمده از جدول زیر را بررسی کنید.

حل: اگر « S_n » میزان آنتی بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار پس از n بار مصرف قرص باشد، با توجه به فرض های مسئله داریم:

جدول ۱

S_n	زمان مصرف	تاریخ مصرف	n تعداد مصرف
$S_1 = 80 \text{ mg}$	۰۰:۰۱ بامداد	۱۵ اسفند	۱
$S_2 = \frac{1}{4}S_1 + 80 = 40 + 80 = 120$	۰۸:۰۰ صبح	۱۵ اسفند	۲
$S_3 = \frac{1}{4}S_2 + 80 = 60 + 80 = 140$	۰۴:۰۰ بعدازظهر	۱۵ اسفند	۳
$S_4 = \quad + 80 =$	۰۰:۰۰ بامداد	۱۶ اسفند	۴
$S_5 = \quad =$	—	۱۶ اسفند	۵

برای نوشتن ضابطه تابعی دنباله S_n بر حسب n ، برای ساده تر شدن محاسبات تعیین ضابطه، اگر میزان آنتی بیوتیک هر قرص را Amg در نظر بگیریم (در این مسئله $A=80 \text{ mg}$ است)، با استفاده از رابطه بازگشتی به دست آمده در قسمت قبل داریم:

$$S_1 = A$$

$$S_2 = A + \frac{1}{4}S_1 = \dots\dots\dots$$

$$S_3 = \dots\dots\dots + \dots\dots\dots = A + \frac{1}{4}(A + \frac{1}{4}A) = A + \frac{1}{4}A + (\frac{1}{4})^2 A$$

و به همین صورت برای محاسبه S_4 :

$$S_4 = A + \frac{1}{4}A + (\frac{1}{4})^2 A + \dots\dots + (\frac{1}{4})^3 A$$

پس برای محاسبه مجموع آنتی بیوتیک در بدن شخص پس از n بار مصرف:

$$S_n = A + \frac{1}{4}A + (\frac{1}{4})^2 A + \dots\dots + (\frac{1}{4})^{n-1} A \quad (1)$$

اگر طرفین رابطه (۱) را در ضریب $\frac{1}{4}$ ضرب کنیم:

$$\frac{1}{4}S_n = \frac{1}{4}A + (\frac{1}{4})^2 A + \dots + (\frac{1}{4})^n A \quad (2)$$

با تفاضل رابطه (۱) از (۲) رابطه زیر به دست می آید:

$$S_n - \frac{1}{4}S_n = A - (\frac{1}{4})^n A \Rightarrow \frac{3}{4}S_n = A(1 - (\frac{1}{4})^n)$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{4}{3}A(1 - (\frac{1}{4})^n)$$

بنابراین، با فرض این مسئله $A=80 \text{ mg}$ ، مجموع میزان آنتی بیوتیک پس از n بار مصرف می شود:

$$S_n = 160(1 - (\frac{1}{4})^n)$$

با توجه به رابطه به دست آمده برای S_n داریم:

$$S_1 = 160(1 - (\frac{1}{4})^1) = 160 \times \frac{3}{4} = 120$$

$$S_2 = \dots$$

$$S_3 = \dots\dots$$

براساس آنچه که در این فعالیت برای محاسبه S_n انجام شد، مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی را می توانیم مشخص کنیم:

اگر جمله عمومی یک دنباله هندسی به صورت $a_n = ar^{n-1}$ باشد، حاصل مجموع:

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} \quad (r \neq 1)$$

از رابطه:

$$S_n = a \times \frac{1-r^n}{1-r}$$

به دست می آید.

۵. مقادیر a و r را در فعالیت بالا مشخص کنید.

۶. ضابطه های دنباله a_n و S_n را بنویسید. با توجه به این ضابطه معنی a_p و S_p چیست؟

حل: اگر در فعالیت قبلی، به دلایلی شخص بیمار

مجبور به مصرف قرص آنتی بیوتیک به مدت

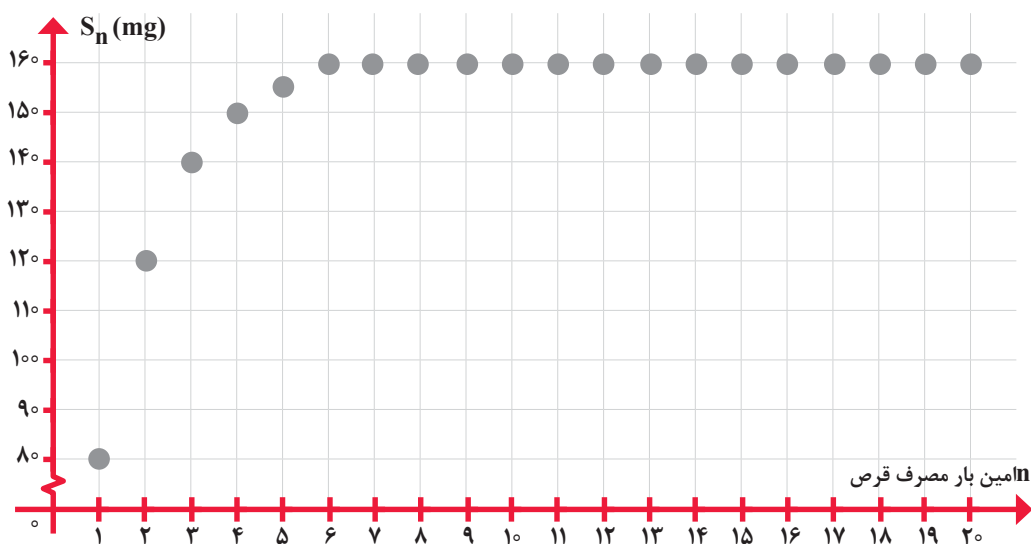
نامحدود باشد، با استفاده از جدول و نمودار

۲ میزان آنتی بیوتیک موجود در بدن شخص

بیمار در طول ۲۰ بار مصرف دارو مشخص

می شود:

S_n	مقدار مصرف n	S_n	مقدار مصرف n
$S_{14} = \frac{1}{3}S_{13} + 80 = 159/9902$	$n=14$	$S_6 = 157/5$	$n=6$
$S_{15} = \frac{1}{3}S_{14} + 80 = 159/9951$	$n=15$	$S_7 = \frac{1}{3}S_6 + 80 = 158/75$	$n=7$
$S_{16} = \frac{1}{3}S_{15} + 80 = 159/9975$	$n=16$	$S_8 = \frac{1}{3}S_7 + 80 = 159/375$	$n=8$
$S_{17} = \frac{1}{3}S_{16} + 80 = 159/9987$	$n=17$	$S_9 = \frac{1}{3}S_8 + 80 = 159/6875$	$n=9$
$S_{18} = \frac{1}{3}S_{17} + 80 = 159/9993$	$n=18$	$S_{10} = \frac{1}{3}S_9 + 80 = 159/837$	$n=10$
$S_{19} = \frac{1}{3}S_{18} + 80 = 159/9996$	$n=19$	$S_{11} = \frac{1}{3}S_{10} + 80 = 159/9218$	$n=11$
$S_{20} = \frac{1}{3}S_{19} + 80 = 159/9998$	$n=20$	$S_{12} = \frac{1}{3}S_{11} + 80 = 159/9609$	$n=12$
		$S_{13} = \frac{1}{3}S_{12} + 80 = 159/9804$	$n=13$



جدول و نمودار ۲

۹. با استفاده از رابطه $S_n = 160(1 - (\frac{1}{3})^n)$ ، چگونه می‌توان حدس قسمت قبل را بررسی کرد؟ با افزایش n ، مقادیر دنباله $(\frac{1}{3})^n$ چگونه بر مقادیر دنباله S_n تأثیر می‌گذارند؟

حل: با توجه به جدول و نمودار S_n ، با افزایش n ، جملات دنباله S_n می‌یابند. جدول،

۷. جملات دنباله S_n افزایش می‌یابند یا کاهش؟ کدام دو جمله متوالی دنباله S_n بیشترین اختلاف را دارند؟ کدام دو جمله کمترین اختلاف را دارند؟ چرا؟

۸. آیا با افزایش تعداد دفعات مصرف دارو، میزان آنتی‌بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار به عدد ثابتی نزدیک می‌شود؟

مقدار مصرف n	$a_n = (\frac{1}{p})^n$	$S_n = 160(1 - (\frac{1}{p})^n)$	$160 - S_n$
n = ۶	$a_6 = 0/015625$	$S_6 = 157/5$	۲/۵
n = ۷	$a_7 = 0/00781$	$S_7 = 158/75$	۱/۲۵
n = ۸	$a_8 = \dots\dots\dots$	$S_8 = \dots\dots\dots$	0/۶۲۵
n = ۹	$a_9 = \dots\dots\dots$	$S_9 = \dots\dots\dots$	
n = ۱۰	$a_{10} = \dots\dots\dots$	$S_{10} = \dots\dots\dots$	
n = ۱۱	$a_{11} = \dots\dots\dots$	$S_{11} = \dots\dots\dots$	
n = ۱۲	$a_{12} = \dots\dots\dots$	$S_{12} = \dots\dots\dots$	
n = ۱۳	$a_{13} = \dots\dots\dots$	$S_{13} = \dots\dots\dots$	
n = ۱۴	$a_{14} = \dots\dots\dots$	$S_{14} = \dots\dots\dots$	
n = ۱۵	$a_{15} = \dots\dots\dots$	$S_{15} = \dots\dots\dots$	
n = ۱۶	$a_{16} = \dots\dots\dots$	$S_{16} = \dots\dots\dots$	
n = ۱۷	$a_{17} = \dots\dots\dots$	$S_{17} = \dots\dots\dots$	
n = ۱۸	$a_{18} = 0/000003$	$S_{18} = 159/9993$	0/000۷
n = ۱۹	$a_{19} = 0/000001$	$S_{19} = 159/9996$	0/000۴
n = ۲۰	$a_{20} = 0/0000009$	$S_{20} = 159/9998$	0/000۲

● جملات دنباله a_n کاهش پیدا می کند و به نزدیک می شوند.

● جملات دنباله S_n و به می شوند.

● اختلاف S_n ها با عدد ثابت ۱۶۰ mg و به نزدیک می شود.

بنابراین، برای تعیین میزان آنتی بیوتیک در بدن بیمار که پس از n بار مصرف دارو از رابطه $S_n = 160(1 - (\frac{1}{p})^n)$ به دست می آید، زمانی که n عدد بزرگی است (به ویژه زمانی که n تا بی نهایت ادامه پیدا کند): به دلیل کوچک بودن مقدار دنباله $a_n = (\frac{1}{p})^n$ ، می توانیم از آن صرف نظر کنیم و میزان آنتی بیوتیک را ۱۶۰ mg در نظر بگیریم. بدیهی است که هر قدر عدد n افزایش یابد، مطابق محاسبات بالا، S_n به مقدار ۱۶۰ نزدیک و نزدیک تر می شود.

مطابق جدول جملات و بیشترین اختلاف را دارند و میزان این اختلاف mg است.

اگر بیمار ۲۰ بار قرص مصرف کرده باشد، جملات و کمترین اختلاف را دارند که این میزان $S_{19} - S_{20}$ و از تفاضل هر دو جمله متوالی دیگر کمتر است.

۱۰. جملات و نمودار S_n ظاهراً نشان می دهند که با افزایش مصرف قرص، میزان آنتی بیوتیک در بدن بیمار به mg نزدیک می شود و از این مقدار افزایش پیدا نمی کند.

۱۱. برای حدس قسمت قبل، با کامل کردن جدول ۳ به کمک ماشین حساب داریم:

با توجه به تنها ۲۰ بار مصرف دارو کاملاً مشخص است که اگر شخص بیمار مقدار مصرف دارو را به ۵۰ یا ۱۰۰ یا افزایش دهد:

* پی نوشت

1. Common ratio