

مفهوم و کار بست سورها

مقدمه

در این شماره از دوره‌ی ریاضی درباره‌ی «سور»ها به بحث و گفت‌وگو نشستیم. بحث از آنجا آغاز شد که یکی از دانش‌آموزان خواستار معنای لغوی کلمه‌ی «سور» و وجه تسمیه‌ی این کلمه شد. در ادامه‌ی دوره‌ی ریاضی، دانش‌آموزان سؤال‌هایی درباره‌ی نحوه‌ی به‌کارگیری سورها در ریاضیات داشتند و به دنبال گزاره‌هایی بودند که با چند سور به گزاره تبدیل می‌شدند. مشروح این گفت‌وگو در پی آمده است.

شده است. کلمه‌ی All به معنای هر، همه، جمیع و همه‌چیز است. همچنین، عبارت «به ازای بعضی مقادیر» سور وجودی است و آن را با نماد « $\exists$ » نمایش می‌دهند. این نماد هم از حرف اول کلمه‌ی «Exist» گرفته شده است. کلمه‌ی Exist به معنای وجود داشتن و به ازای بعضی مقادیر است.

سؤال ما این است که چرا به $\forall$ سور عمومی گفته می‌شود. البته می‌دانیم کلمه‌ی عمومی در آن با لغت All قابل درک است، اما اصطلاح سور در کجا آمده است و چرا کلمه‌ی سور را در این عبارت به کار می‌بریم؟

معلم:

در زمان‌های گذشته، به‌طور معمول دورتادور هر شهر را با دیوارهای محدود می‌کردند که به آن در زبان فارسی «بارو» می‌گویند. به‌طور حتم تا به حال، بارها کلمه‌ی «قلعه» یا عبارت «برج و بارو»

معلم:

عبارت‌های «به ازای هر» و «به ازای بعضی مقادیر» معروف به سور هستند. سورها در مطالعه‌ی گزاره‌ها به کار می‌روند. این عبارت‌ها قبل از گزاره‌ها قرار می‌گیرند و به این وسیله گزاره‌هایی با ارزش «راست» یا «دروغ» ایجاد می‌کنند.

دانش‌آموز اول:

می‌دانیم عبارت «به ازای هر» سور عمومی است و آن را با نماد « $\forall$ » نمایش می‌دهند. در کتاب درسی آمده است که ارائه‌ی این نماد از حرف اول کلمه‌ی «All» گرفته



را شنیده‌اید. در هر قلعه ساختمانی وجود دارد که به آن «برج» و دیواره‌های گرداگرد آن را «بارو» می‌گویند.

سور کلمه‌ای عربی است و معنای آن در زبان فارسی «بارو» می‌شود که همان حصار یا دیوار گرداگرد شهر است. همچنان که بارو، محدوده یا قلمروی قلعه را مشخص می‌کند. سورها در ریاضیات محدوده یا قلمروی اعضای مورد بحث در گزاره‌ها را مشخص می‌کنند.

دانش آموز دوم:

چگونه سورها محدوده یا قلمروی اعضای مورد بحث را مشخص می‌کنند؟

معلم:

سورها به تنهایی کارایی ندارند. سورها هنگامی کارا می‌شوند که در ابتدای یک گزاره‌نما درمی‌آیند و قلمرو متغیر یا متغیرهای گزاره‌نما را مشخص می‌کنند. بنابراین سورها، محدوده یا قلمرو متغیر یا متغیرهای گزاره‌نما را مشخص می‌کنند. برای مثال، گزاره زیر را در نظر بگیرید:

$$\forall x \in R : x + x = 2x \quad (\text{گزاره ۱})$$

سور عمومی به کاررفته در این مثال نشان می‌دهد که قلمروی متغیر x ، مجموعه اعداد حقیقی است. برای هر عدد حقیقی x ، گزاره نمای $x + x = 2x$ دارای ارزش «راست» می‌شود. پس ارزش گزاره (۱) همواره راست است.

گزاره‌نماها بدون سورها فاقد ارزش هستند، زیرا ممکن است آن‌ها برای بعضی از مقادیر متغیر راست و برای بعضی از مقادیر دیگر متغیر دروغ باشند.

دانش آموز سوم:

گزاره‌نمای $x^2 + 1 > 0$ را در نظر بگیرید. این گزاره‌نما سور ندارد، ولی به ازای هر عدد حقیقی x ، دارای ارزش «راست» است. ارزش این گزاره‌نما را چگونه توجیه می‌کنید؟

معلم:

به این گزاره‌نما «گزاره کلی» می‌گویند. سور از قبل در آن مستتر است. در واقع خودتان گفتید که این گزاره‌نما به ازای هر عدد حقیقی x برقرار است. یعنی یک سور عمومی در آن به صورت زیر نهفته است:

$$\forall x \in R : x^2 + 1 > 0$$

در هندسه، بسیاری از گزاره‌های کلی را مطالعه کرده‌اید. برای مثال وقتی می‌گوییم:

«در مثلث قائم‌الزاویه رابطه فیثاغورس برقرار است.»
یعنی در هر مثلثی که قائم‌الزاویه باشد، رابطه فیثاغورس برقرار است. همچنین، اصل نامساوی مثلثی در مثلث می‌گوید:
«در هر مثلثی، مجموع طول‌های هر دو ضلع از طول ضلع سوم بزرگ‌تر است.»

دانش آموز چهارم:

سورها قلمروی متغیر یا متغیرهای گزاره‌نما را مشخص می‌کنند. مثالی ارائه دهید که در آن چند متغیر و چند سور به کار رفته باشند.



معلم:

تابع خطی با ضابطه $f(x) = 2x + 1$ را در نظر بگیرید. می‌دانیم در این تابع x متغیر مستقل است و هر مقدار حقیقی را می‌پذیرد و به ازای هر مقدار x ، یک مقدار منحصر به فرد برای y (متغیر وابسته) از برد تابع یافت می‌شود. به زبان سورها می‌توان نوشت:

$$\forall x \in R \exists y \in R : y = 2x + 1$$

اکنون تابع درجه دوم با ضابطه $f(x) = x^2 + 1$ را در نظر بگیرید. به زبان سورها می‌توان نوشت:

$$\forall x \in D_f \exists y \in R_f : y = x^2 + 1$$

می‌دانیم $D_f = R$ و همواره $y = x^2 + 1 \geq 1$: بنابراین:

$$R_f = [1, +\infty)$$

همان‌طور که ملاحظه کردید، مجموعه مقادیری که می‌توانند به جای متغیر مستقل تابع قرار گیرند، دامنه تابع را تشکیل می‌دهند و مجموعه مقادیری که برای متغیر وابسته به دست می‌آیند، برد تابع است:

به‌طور معمول در ضابطه تابع، برای متغیر مستقل از سور عمومی و برای متغیر وابسته از سور وجودی استفاده می‌کنند.

دانش آموز پنجم:

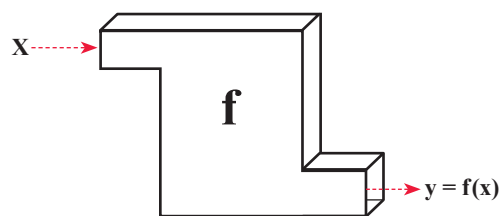
با توجه به ضابطه تابع خطی مثال قبل، چنانچه بنویسیم:

$$\forall y \in R \forall x \in R : y = 2x + 1$$

این عبارت با آنچه که شما نوشته‌اید چه تفاوتی دارد؟

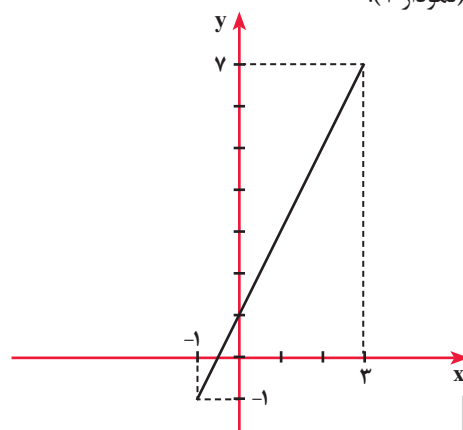
معلم:

ارزش این گزاره نادرست است، چون برای X و Y از سور عمومی استفاده کرده است، برای مثال $X=1, Y=2$ قرار دهید، ملاحظه خواهید کرد که برابری $Y=2X+1$ به ازای این مقادیر نادرست خواهد شد. اگر تابع را به صورت یک ماشین در نظر بگیریم؛ از قسمت ورودی ماشین، متغیر مستقل وارد می شود و در خروجی، متغیر وابسته با توجه به ضابطه تابع بیرون می آید (شکل ۱).



شکل ۱

در حقیقت، Y نتیجه عملیاتی است که تحت ضابطه تابع f روی X اعمال می شود. همان طور که قبلاً گفته شد، X متغیر مستقل است و می تواند هر مقداری از دامنه تابع باشد. بنابراین باید متغیر مستقل X را با سور عمومی بنویسیم. از طرف دیگر، Y متغیر وابسته است و به دلیل ورود X به ماشین به وجود آمده است. بنابراین متغیر Y را با سور وجودی می نویسیم. تابع با ضابطه $Y=2X+1$ با $D_f = [-1, 3]$ را در نظر بگیرید. با توجه به نمودار این تابع ملاحظه می کنیم که برای هر $X \in [-1, 3]$ ، یک مقدار $Y \in [-1, 7]$ وجود دارد، به طوری که در ضابطه تابع صدق می کنند (نمودار ۱).



نمودار ۱

بنابراین می توان نوشت:

$$\forall x \in [-1, 3] \exists y \in [-1, 7] : y = 2x + 1$$

حال فرض کنید رابطه $Y=2X+1$ را داشته باشیم و از قسمت ورودی ماشین، متغیر مستقل Y وارد شود، به طوری که: $Y \in [-1, 7]$

و در خروجی ماشین، برای هر Y ، یک مقدار $X \in [-1, 3]$ موجود باشد. در این صورت ضابطه تابع به صورت زیر است:

$$y = 2x + 1 \Rightarrow 2x = y - 1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{2}$$

در اینجا X متغیر وابسته و تابعی از متغیر مستقل Y است و می توان نوشت:

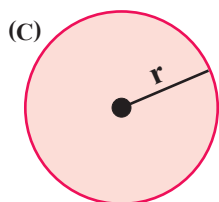
$$\forall y \in [-1, 7] \exists x \in [-1, 3] : x = \frac{y-1}{2}$$

سؤال: آیا می توانید مساحت دایره ای به شعاع r را به صورت یک تابع بیان کنید؟

دانش آموز دوم:

اگر مساحت دایره (C) ، به شعاع r را با $s(r)$ نمایش دهیم، (شکل ۲) خواهیم داشت:

$$s(r) = \pi r^2$$



شکل ۲

معلم:

در این تابع r متغیر مستقل است. برای تعریف دایره، r دارای چه شرطی است و برای متغیر r چه سوری را به کار می بریم؟

دانش آموز دوم:

طبق تعریف، دایره مجموعه نقاطی از صفحه است که فاصله آن ها از نقطه ای ثابت برابر با مقدار ثابت r (شعاع دایره) باشد. پس شعاع فاصله بین دو نقطه متمایز در صفحه است و می دانیم این فاصله مقداری مثبت است، بنابراین: $r > 0$. از طرف دیگر، r می تواند هر مقدار دلخواه مثبت باشد. بنابراین برای آن از سور عمومی استفاده می کنیم.

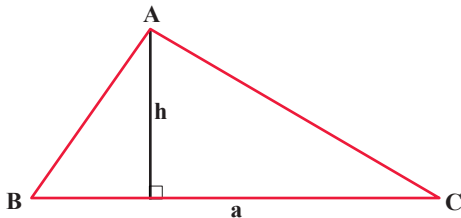


معلم:

حال در مورد $s(r)$ یا متغیر وابسته به r چه می توان گفت؟ آیا $s(r)$ هر مقداری را می پذیرد؟

معلم:

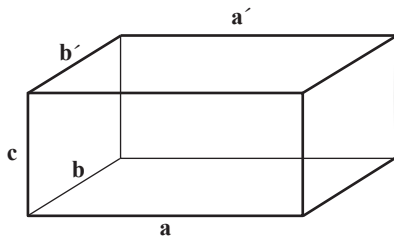
بله. برای مثال، مساحت مثلثی با اندازه قاعده a و ارتفاع h ، تابعی دومتغیره بر حسب a و h به صورت زیر است (شکل ۳):



شکل ۳

$$\forall a > 0, \forall h > 0; \exists s \in \mathbb{R}: s(a, h) = \frac{1}{2}ah$$

همچنین، حجم یک مکعب با ابعاد a ، b و c تابعی سه متغیره به صورت زیر است (شکل ۴):



شکل ۴

$$v(a, b, c) = a \times b \times c$$
$$\forall a > 0, \forall b > 0, \forall c > 0$$
$$; \exists v \in \mathbb{R}: v(a, b, c) = abc$$

در ادامه مثالی از تابعی چندمتغیره در فیزیک می آوریم. کاری که برای بالا بردن جسمی به جرم m تا ارتفاع h انجام می شود، برابر است با:

$$w = mgh$$

که در آن ارتفاع جسم از مبدأ انرژی پتانسیل بر حسب متر است (مبدأ انرژی پتانسیل جایی است که انرژی پتانسیل در آنجا صفر باشد. به طور معمول این مبدأ را سطح زمین می گیرند). همچنین g در این فرمول شتاب جاذبه زمین و مقداری ثابت برابر با $9/8$ نیوتن بر کیلوگرم است. w بر حسب ژول و در واقع کار لازم برای غلبه بر نیروی گرانشی است. این مقدار کار در جسم به صورت انرژی پتانسیل ذخیره می شود و از رابطه $E_p = mgh$ ، انرژی پتانسیل قابل محاسبه است.

دانش آموز سوم:

$s(r)$ هر مقداری را نمی پذیرد و فقط بعضی از مقادیری را می پذیرد که مساحت دایره باشند. پس برای متغیر وابسته $s(r)$ ، از سور وجودی استفاده می کنیم.

معلم:

مجموعه مقادیر $s(r)$ متعلق به چه مجموعه ای است؟ یعنی اگر بنویسیم $s(r) \in X$ ، چه مجموعه ای است؟

دانش آموز سوم:

واضح است که X برد تابع s است؛ یعنی: $X = R_s$. یا X می تواند هم دامنه تابع باشد، یعنی $X = \mathbb{R}$.

معلم:

منظورم این است که آیا $s(r)$ ، r هر دو از یک واحد هستند؟

دانش آموز دوم:

$s(r)$ مساحت دایره است و می دانیم مساحت از واحد مربع است.

معلم:

با این بحث مشخص شد که تابع مساحت دایره، به صورت زیر است:

$$\forall 0 < r \in \mathbb{R} \quad \exists s(r) \in \mathbb{R} : s(r) = \pi r^2$$

دانش آموز چهارم:

آیا می توان تابعی نوشت که در آن دو متغیر مستقل وجود داشته باشد و برای نوشتن آن از دو سور عمومی استفاده کنیم؟

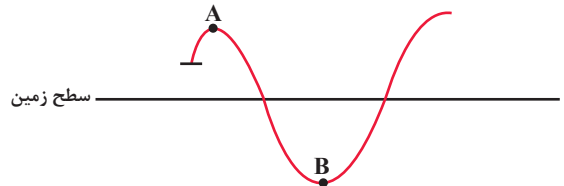
معلم:

دستورها یا فرمول هایی که در هندسه خوانده اید، می توانند پاسخی مناسبی برای شما باشند.

دانش آموز چهارم:

منظورتان، فرمول های مربوط به مساحت یا حجم های شکل های هندسی است؟

«انرژی پتانسیل گرانشی» را نسبت به سطح زمین می‌سنجند. برای مثال جسمی در وضعیت A (شکل ۵) نسبت به سطح زمین دارای انرژی پتانسیل گرانشی مثبت و در وضعیت B نسبت به سطح زمین دارای انرژی پتانسیل گرانشی منفی است.



شکل ۵

انرژی پتانسیل گرانشی بر حسب ژول و یک عدد حقیقی است. بنابراین خواهیم داشت:

اگر: $h=0$ ، آنگاه: $E_p=0$ ؛

اگر: $h>0$ ، آنگاه: $E_p>0$ ؛

اگر: $h<0$ ، آنگاه: $E_p<0$ ؛

در رابطه $E_p = mgh$ ، m جرم و متغیر مستقل است و می‌تواند هر مقدار حقیقی مثبت باشد. h دومین متغیر مستقل این رابطه است و می‌تواند هر مقدار حقیقی باشد. بنابراین E_p عددی حقیقی و متغیر وابسته به دو متغیر مستقل m و h است. دستور محاسبه انرژی پتانسیل به زبان ریاضی به این صورت است:

$$\forall 0 < m \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}; \exists E_p \in \mathbb{R} : E_p(m, h) = mgh$$

دانش آموز پنجم:

از جمع‌بندی مطالب متوجه شدم که وقتی از سورها استفاده می‌کنیم، فرمول‌ها و توابع دقیق‌تر معرفی می‌شوند. به طوری که نوع متغیرها از نظر مستقل یا وابسته، و همچنین، محدوده یا قلمرو هر متغیر



مشخص می‌شود.

معلم:

سورها در بیان خاصیت‌ها، فرمول‌ها و توابع کاربرد دارند و آن‌ها را دقیق‌تر بیان می‌کنند. برای مثال، برای نوشتن خاصیت عضو خنثی در عمل جمع اعداد حقیقی، چنانچه بنویسیم:

$$x + 0 = x$$

منظور این است که:

$$\forall x \in \mathbb{R}; \exists 0 \in \mathbb{R} : x + 0 = x$$

چون یک عضو خنثی موجود است، می‌توان از سور یکانی با نماد $\exists!$ استفاده کرد؛ یعنی داریم:

$$\forall x \in \mathbb{R}; \exists! 0 \in \mathbb{R} : x + 0 = x$$

همچنین، برای اینکه مشخص کنیم معادله $x^2 = 2$ در مجموعه اعداد حقیقی دارای ریشه است، می‌توان نوشت:

$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 2$$

در نتیجه، در گفت‌وگوهای ریاضیاتی ناگزیر از سورها استفاده می‌کنیم تا منظورمان را به مخاطب دقیق‌تر برسانیم.

در اتحادها که برابری‌های کلی همیشه برقرار هستند، از «سور عمومی» استفاده می‌کنیم؛ مانند:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (x \text{ بر حسب رادیان})$$

اما در معادله‌ها که به ازای بعضی از مقادیر حقیقی برقرار هستند، از «سور وجودی» استفاده می‌کنیم؛ مانند:

$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 = 0$$

بنابراین، اتحادها گزاره‌نمایی هستند که با «سور عمومی»، و معادله‌ها گزاره‌نمایی هستند که با «سور وجودی» به گزاره‌ای بارزش راست تبدیل می‌شوند.

گزاره‌ای که با سور عمومی دارای ارزش راست هستند، می‌تواند با سور وجودی هم نوشته شود، یعنی اتحادها را می‌توان با سور وجودی هم نوشت. اما گزاره‌ای را که با سور وجودی دارای ارزش راست است، نمی‌توان با سور عمومی نوشت، مانند معادله‌ها.

یک سور دیگر به نام «سور صفر» داریم. وقتی هیچ مقداری برای متغیر موجود نباشد، از آن استفاده می‌کنیم و آن را با نماد $\nexists$ نمایش می‌دهیم. برای مثال:

$$\nexists x \in \mathbb{R} : x^2 + 2 = 0$$

بنابراین، برای مشخص کردن معادله‌هایی که در اعداد حقیقی فاقد جواب هستند، از این سور استفاده می‌کنیم؛ مانند:

$$\nexists x \in \mathbb{R} : \sqrt{x-2} + |x+3| = 0$$

امیدوارم از این دوره‌می لذت برده باشید. لطفاً مشکلات خود را در زمینه درس‌های ریاضی برای ما بنویسید تا در دوره‌می‌های دیگر به آن‌ها بپردازیم. تا دوره‌می دیگر بدرود.