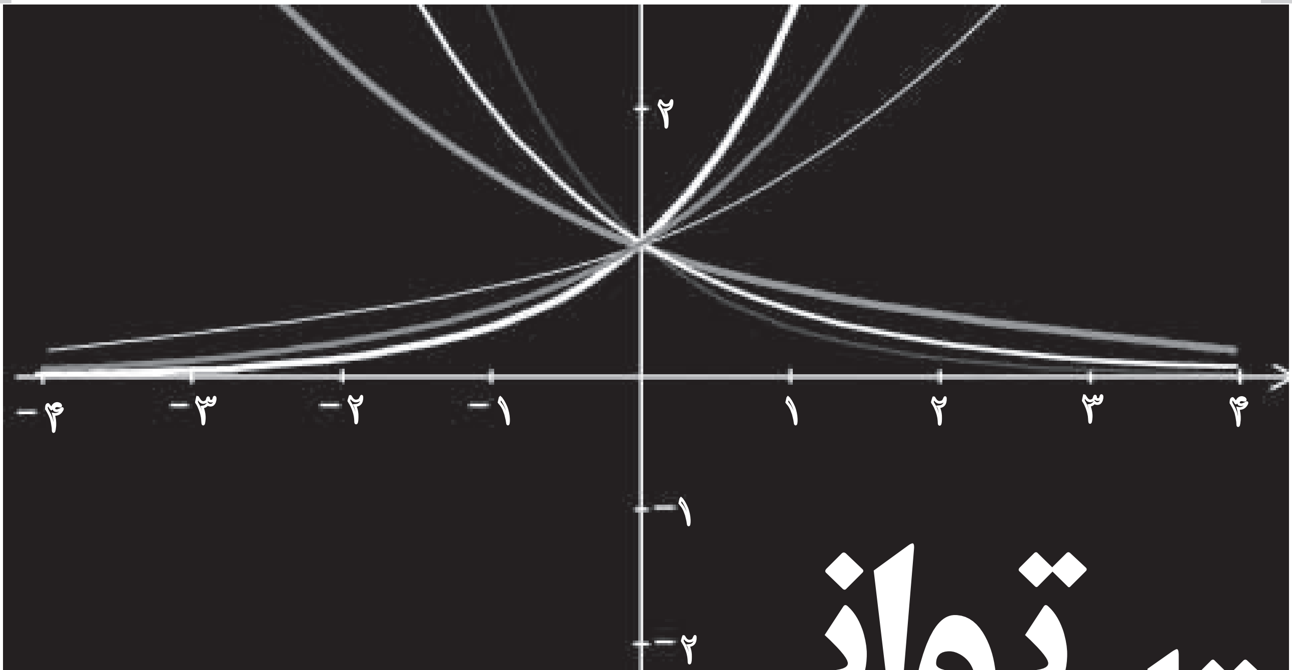


تابع توانی

(سال دوم متوسطه)

میرشهرام صدر

اشاره: در این مقاله ابتدا به معرفی توان حقیقی اعداد می‌پردازیم، سپس تابع توانی را معرفی می‌کنیم و رسم نموداری این تابع را با ضابطه‌های مختلف با حل چند مسئله توضیح خواهیم داد.

توان حقیقی

فرض کنیم a عددی حقیقی و مثبت و x یک عدد حقیقی دلخواه باشد. برای محاسبه‌ی a^x سه حالت در نظر می‌گیریم.

حالت اول: $x\in\mathbb{Z}$

در صورتی که x عددی صحیح و مثبت باشد، داریم:

$$a^x=\underbrace{a\times a\times\ldots\times a}_{x\ \text{مرتبه}}$$

چنان‌چه $x=۰$ داریم: $a^x=۰$

و در حالتی که x عددی صحیح و منفی باشد، داریم:

$$x\in\mathbb{Z}^-\Rightarrow -x\in\mathbb{Z}^+$$

$$a^x=\frac{۱}{a^{-x}}=\underbrace{\frac{۱}{a}\times\frac{۱}{a}\times\ldots\times\frac{۱}{a}}_{-x\ \text{مرتبه}}$$

برای مثال:

$$۲^{-۵}=\frac{۱}{۲^{-(-۵)}}=\frac{۱}{۲^{۵}}=\underbrace{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\ldots\times\frac{۱}{۲}}_{-(-۵)\ \text{مرتبه}}$$

حالت دوم: $x\in\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$

چنان‌چه x عددی گویا و ناصحیح باشد، در این صورت $x=\frac{m}{n}$ که در آن $n\neq ۰$ و $m,n\in\mathbb{Z}$ داریم:

$$a^x=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}\qquad \left(\frac{m}{n}>۰\right)$$

برای مثال:

$$۲^{\frac{۳}{۵}}=\sqrt[۵]{۲^{۳}}=\sqrt[۵]{۸}$$

$$۲^{-\frac{۳}{۵}}=\frac{۱}{۲^{\frac{۳}{۵}}}=\frac{۱}{\sqrt[۵]{۸}}\times\frac{\sqrt[۵]{۸^{۴}}}{\sqrt[۵]{۸^{۴}}}=\frac{\sqrt[۵]{۸^{۴}}}{۸}$$

حالت سوم: $x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$

حال به توان اصم اعداد می‌پردازیم. برای تعریف دقیق توان اصم اعداد، نیاز به ذکر مباحثی از دنباله‌ها و سایر مطالب ریاضی داریم که از ورود به آن پرهیز می‌کنیم. با این حال می‌کوشیم به قسمی این قبیل توان‌ها را معرفی کنیم. برای مثال، عددی به صورت $۳^{\sqrt{۲}}$ را در نظر می‌گیریم. این توان باید به گونه‌ای تعریف شود که در قوانین عمومی توان که قبلاً یادآوری کردیم، صدق کند. می‌دانیم $\sqrt{۲}$ تقریباً برابر ۱/۴۱۴۲۱۳۵۶۲ است. بنابراین $\sqrt{۲}$ بین ۱ و ۱/۵ است. پس $۳^{\sqrt{۲}}$ نیز باید بین $۳^{۱}$ و $۳^{۱/۵}$ باشد. بنابراین $۳^{\sqrt{۲}}$ عددی بین ۳ و ۵/۱۹۶۱۵ خواهد بود.

$$۳<۳^{\sqrt{۲}}<۵/۱۹۶۱۵$$

اما فاصله از ۳ تا ۵/۱۹۶۱۵ خیلی زیاد است و باید با تقریب‌های

بهتری از $\sqrt{۲}$ این فاصله را کم‌تر کنیم. این بار $\sqrt{۲}$ را بین ۱/۴ و ۱/۴۲ مورد توجه قرار می‌دهیم. پس $۳^{\sqrt{۲}}$ نیز عددی بین $۳^{۱/۴}$ و $۳^{۱/۴۲}$ خواهد بود. با محاسبه‌ی این دو عدد با ماشین حساب، به تقریب بهتر زیر برای $۳^{\sqrt{۲}}$ می‌رسیم:

$$۳^{۱/۴} = ۴/۶۵۵۵۳ \qquad ۳^{۱/۴۲} \cong ۴/۷۵۸۹$$

بنابراین $۳^{\sqrt{۲}}$ عددی بین ۴/۶۵۵۵۳ و ۴/۷۵۸۹ است. فاصله‌ای که در این حالت به دست آوردیم، خیلی کوتاه‌تر از فاصله‌ی به دست آمده در حالت قبلی است. اگر بخواهیم این تقریب را بهتر کنیم و فاصله‌ای کوتاه‌تر به دست آوریم، باید از تقریب‌های بهتر $\sqrt{۲}$ استفاده کنیم. برای مثال:

$$۱/۴۱۴ < \sqrt{۲} < ۱/۴۱۴۳$$

در این حالت داریم:

$$۴/۷۲۷۶ \simeq ۳^{۱/۴۱۴} < ۳^{\sqrt{۲}} < ۳^{۱/۴۱۴۳} \simeq ۴/۷۲۹۲۵$$

در این تقریب دیده می‌شود که تا دو رقم اعشار، می‌توان $۳^{\sqrt{۲}}$ را برابر ۴/۷۲ در نظر گرفت. به هر حال از آن‌جا که بسط $\sqrt{۲}$ نامختوم است، می‌توانیم $\sqrt{۲}$ را بین دو عددی که خیلی به هم نزدیک باشند قرار دهیم و بدین ترتیب $۳^{\sqrt{۲}}$ را با تقریب بسیار خوبی محاسبه کنیم. اگر بتوانیم اختلاف دو عدد گویایی را که برای تقریب $\sqrt{۲}$ به کار می‌بریم، به ۰ نزدیک کنیم. مقادیر تقریبی برای $۳^{\sqrt{۲}}$ به حدی میل خواهد کرد که آن حد، مقدار $۳^{\sqrt{۲}}$ است.

گاه این سؤال مطرح می‌شود که $۳^{\sqrt{۲}}$ چه‌قدر است؟ این سؤال وارد نیست، زیرا $۳^{\sqrt{۲}}$ برای خود عددی است که به مقدار آن از طریق حد نزدیک می‌شویم. مقادیر تقریبی آن را نیز قبلاً به دست آوردیم. توان‌های اصم نیز در همان قوانین عمومی توان صدق می‌کنند. فقط به یاد داشته باشید برای آن‌که توانی به صورت a^x (x یک عدد اصم است) قابل تعریف باشد، لازم است $a > ۰$. پس a باید مثبت باشد، زیرا برای تعریف a^x باید a را به توان اعداد گویایی که به x نزدیک می‌شوند، برسانیم و چون ممکن است هر عدد گویایی به جای x قرار گیرد، باید a هم به گونه‌ای باشد که جمله‌ی بی‌معنا به دست نیاید. ساده‌ترین شرطی که می‌توان برای این منظور اعمال کرد، همان مثبت بودن a است.

تابع توانی

تعریف: عدد حقیقی و مثبت a (به طوری که $a \neq ۱$) را در نظر بگیرید. تابع با ضابطه‌ی زیر را تابع نمایی می‌گوییم.

$$\begin{cases} f:\mathbb{R} \to (۰,\infty) \\ f(x) = a^x \qquad (a > ۰, a \neq ۱) \end{cases}$$

مسئله ی۱: در تابع نمایی فرض کنید $۰ < a < ۱$. در این صورت a بزرگ‌تر است یا $a^۲$؛ $a^۵$ بزرگ‌تر است یا $a^۶$؛ به طور کلی با بزرگ و بزرگ‌تر شدن x، مقدار $f(x) = a^x$ چه تغییری می‌کند؟

حل: هرگاه عددی بزرگ‌تر از ۱ باشد؛ مربعش از آن عدد بزرگ‌تر است، یعنی $x > ۱ \Rightarrow x^۲ > x$. بنابراین داریم:

$$۰ < a < ۱ \Rightarrow \frac{۱}{a} > ۱ \Rightarrow \left(\frac{۱}{a}\right)^۲ > \frac{۱}{a} \Rightarrow \frac{۱}{a^۲} > \frac{۱}{a}$$
$$\Rightarrow a^۲ < a$$
$$۰ < a < ۱ \Rightarrow \frac{۱}{a} > ۱ \Rightarrow \left(\frac{۱}{a}\right)^۶ > \left(\frac{۱}{a}\right)^۵ \Rightarrow \frac{۱}{a^۶} > \frac{۱}{a^۵}$$
$$\Rightarrow a^۶ < a^۵$$

با بزرگ و بزرگ‌تر شدن مقدار x حاصل $f(x) = a^x$ کوچک و کوچک‌تر می‌شود، زیرا فرض کنیم m و n دو عدد طبیعی باشند به طوری که $n>m$؛ در این صورت داریم:

$$۰ < a < ۱ \Rightarrow \frac{۱}{a} > ۱ \Rightarrow \left(\frac{۱}{a}\right)^n > \left(\frac{۱}{a}\right)^m \Rightarrow \frac{۱}{a^n} > \frac{۱}{a^m}$$
$$\Rightarrow a^n < a^m$$

برای روشن‌تر شدن مطلب، فرض کنیم $۰ < a = \frac{۱}{۳} < ۱$. در این صورت با توجه به جدول زیر ملاحظه می‌کنید که با بزرگ‌تر شدن مقدار x، حاصل $f(x) = (\frac{۱}{۳})^x$ کوچک‌تر می‌شود.

$$f(-۱) = \left(\frac{۱}{۳}\right)^{-۱} = (۳^{-۱})^{-۱} = ۳$$

$$f(-۲) = \left(\frac{۱}{۳}\right)^{-۲} = (۳^{-۱})^{-۲} = ۳^۲ = ۹$$

$$f(-۳) = \left(\frac{۱}{۳}\right)^{-۳} = (۳^{-۱})^{-۳} = ۳^۳ = ۲۷$$

x	...	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳	۴	...
$f(x) = (\frac{۱}{۳})^x$	...	۲۷	۹	۳	۱	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۹}$	$\frac{۱}{۲۷}$	$\frac{۱}{۸۱}$	...

هم‌چنین با دقت در این جدول ملاحظه می‌کنیم که هر چه مقدار x کوچک‌تر می‌شود، حاصل $f(x) = (\frac{۱}{۳})^x$ بزرگ‌تر خواهد شد.

مثال: نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = (\frac{۱}{۲})^x$ را رسم کنید.

حل: نمودار این تابع را به کمک نقطه‌یابی و با استفاده از جدول ذیل رسم می‌کنیم.

$$x = ۱ \Rightarrow f(۱) = \left(\frac{۱}{۲}\right)^۱ = \frac{۱}{۲};$$

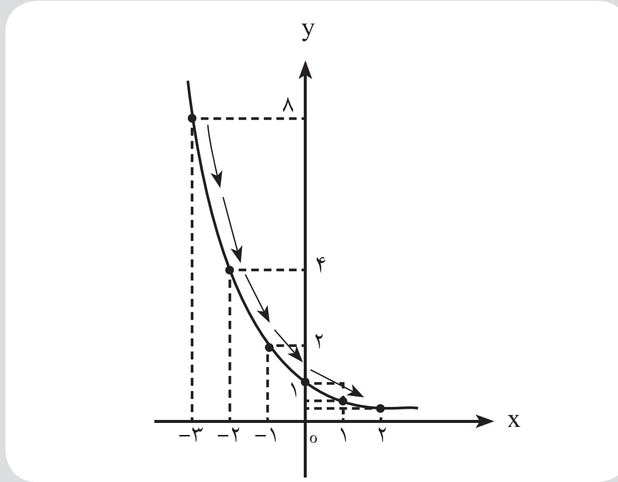
$$x = ۲ \Rightarrow f(۲) = \left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ = \frac{۱}{۴};$$

$$x = ۰ \Rightarrow f(۰) = \left(\frac{۱}{۲}\right)^۰ = ۱;$$

$$x = -۲ \Rightarrow f(-۲) = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۲} = (۲^{-۱})^{-۲} = ۴;$$

$$x = -۳ \Rightarrow f(-۳) = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۳} = (۲^{-۱})^{-۳} = ۸$$

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)=(\frac{1}{2})^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

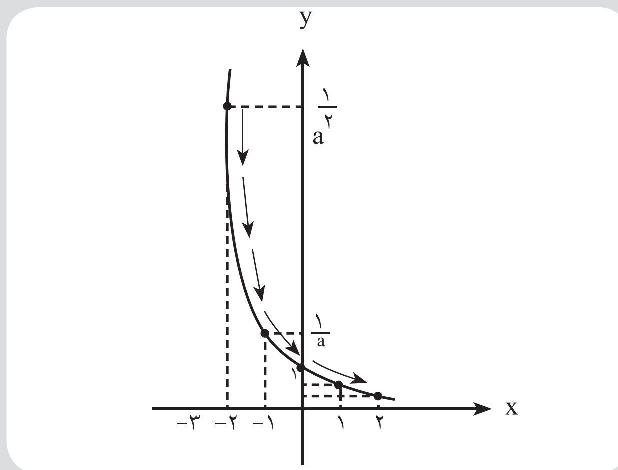


توجه: نمودار تابع $f(x)=a^x$ برای $0<a<1$ شبیه به نمودار تابع $y=(\frac{1}{2})^x$ است، زیرا در این تابع با افزایش x مقدار $f(x)=a^x$ کاهش می‌یابد.

	x	-2	-1	0	1	2
$(0<a<1)$	$f(x)=a^x$	$\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a}$	1	a	a^2

چون $0<a<1$، پس طبق مسئله‌ی ۱ داریم:

$$\frac{1}{a^2}>\frac{1}{a}>1>a>a^2$$



مسئله‌ی ۲: در تابع نمایی فرض کنید $a>1$، در این صورت a بزرگ‌تر است یا a^2؛ a^5 بزرگ‌تر است یا a^6؛ به طور کلی با بزرگ و بزرگ‌تر شدن x، حاصل $f(x)=a^x$ چه تغییری می‌کند؟

حل: اگر دو طرف نابرابری $a>b$ را در عدد مثبت $c>0$ ضرب کنیم، داریم $ac>bc$. بنابراین خواهیم داشت:

$$a>1 \xrightarrow{(a>0)} a\times a>1\times a \Rightarrow a^2>a$$

(می‌دانید که چرا $a>0$؟ زیرا $a>1$ و $1>0$ پس $a>0$)

اکنون اگر دو طرف رابطه‌ی $a^2>a$ را در $a^4>0$ ضرب کنیم، داریم:

$$a^2\times a^4>a\times a^4 \Rightarrow a^6>a^5$$

با بزرگ و بزرگ‌تر شدن مقدار x، حاصل $f(x)=a^x$ بزرگ و بزرگ‌تر می‌شود.

برای روشن‌تر شدن مطلب فرض کنیم $a=3>1$، در این صورت با توجه به جدول زیر ملاحظه می‌کنیم که با بزرگ‌تر شدن مقدار x، حاصل $f(x)=3^x$ بزرگ‌تر می‌شود.

$$f(-1)=3^{-1}=\frac{1}{3};f(-2)=3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9};$$
$$f(-3)=3^{-3}=\frac{1}{3^3}=\frac{1}{27}$$

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)=3^x$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

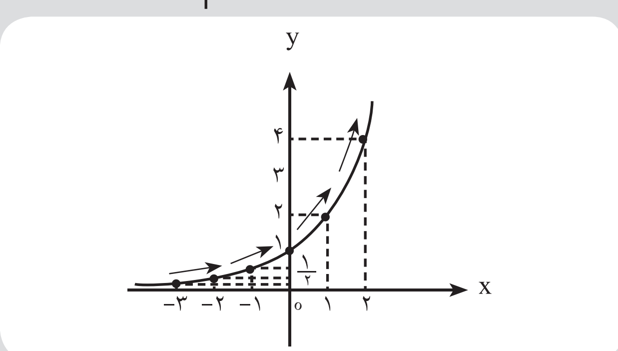
هم‌چنین با دقت در این جدول ملاحظه می‌کنیم که هر چه مقدار x کوچک‌تر شود، حاصل $f(x)=3^x$ کوچک‌تر خواهد شد.

مثال: نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=2^x$ را رسم کنید.

حل: نمودار تابع را با استفاده از نقطه‌یابی و به کمک جدول ذیل رسم می‌کنیم:

$$x=1\Rightarrow f(1)=2^1=2;x=2\Rightarrow f(2)=2^2=4;$$
$$x=0\Rightarrow f(0)=2^0=1;x=-1\Rightarrow f(-1)=2^{-1}=\frac{1}{2};$$
$$x=-2\Rightarrow f(-2)=2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4};$$
$$x=-3\Rightarrow f(-3)=2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$$

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)=2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

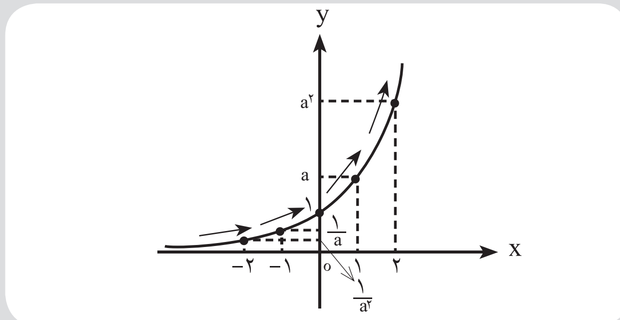


توجه: نمودار تابع $f(x) = a^x$ برای $a > ۱$، شبیه به نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = ۲^x$ است، زیرا در این تابع با افزایش x، مقدار $f(x) = a^x$ افزایش می‌یابد.

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
$(a>۱)\quad f(x) = a^x$	$\frac{۱}{a^۲}$	$\frac{۱}{a}$	۱	a	$a^۲$

چون $a > ۱$، پس طبق مسئله‌ی ۲ داریم:

$$a^۲ > a > ۱ > \frac{۱}{a} > \frac{۱}{a^۲}$$



مسئله ی۳: آیا تابع نمایی با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \mathbb{R} \to (۰,\infty) \\ f(x) = a^x \end{cases}$ یک به یک و پوشاست.

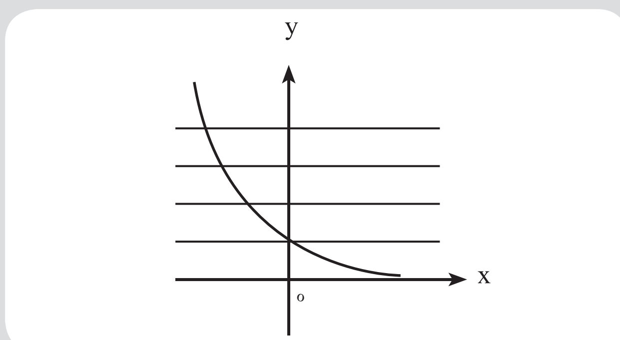
حل: مسئله را در دو حالت $a > ۱, ۰ < a < ۱$ بررسی می‌کنیم.

حالت اول) $۰ < a < ۱$، در این صورت با توجه به نمودار این تابع ملاحظه می‌کنیم که هر خط افقی نمودار تابع را در یک نقطه قطع می کند، پس تابع یک به یک است، از طرفی به کمک تعریف ریاضی تابع یک به یک داریم:

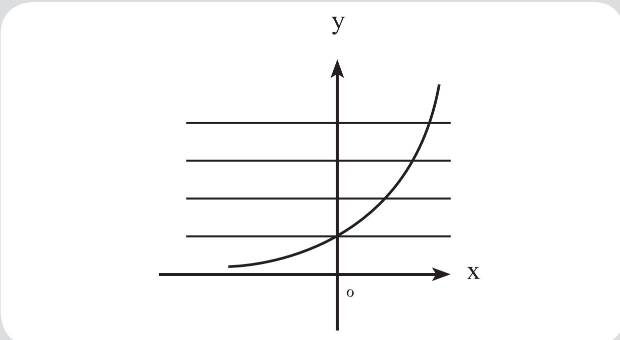
$$f(x_۱) = f(x_۲) \Rightarrow a^{x_۱} = a^{x_۲} \Rightarrow x_۱ = x_۲$$

در نتیجه $f(x) = a^x$ یک به یک است.

وقتی بازه‌ی $(۰,\infty)$ را روی محور yها مشخص و از هر نقطه‌ی این بازه خطی موازی محور xها رسم کنیم، این خط نمودار تابع را قطع می‌کند. پس این تابع پوشاست.

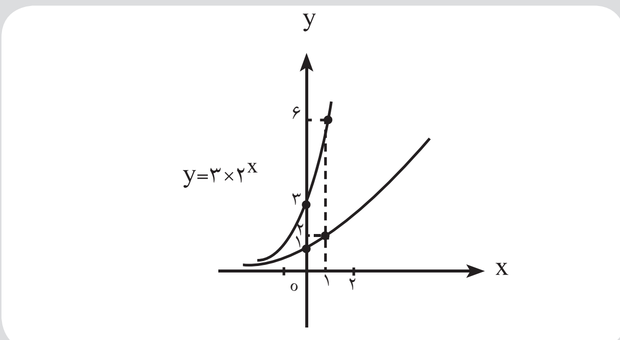


حالت دوم) $a > ۱$، در این صورت با توجه به نمودار این تابع ملاحظه می‌کنیم که هر خط افقی نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند. پس تابع یک به یک است، هم‌چنین وقتی بازه‌ی $(۰,\infty)$ را روی محور yها مشخص و از هر نقطه‌ی آن خطی موازی محور xها رسم کنیم، این خط نمودار تابع را قطع می‌کند، پس در این حالت نیز تابع پوشاست.



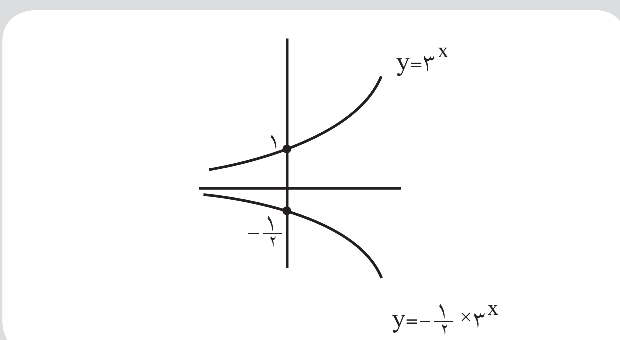
مسئله‌ی ۴: نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = ۳ \times ۲^x$ را رسم کنید.

حل: کافی است به ازای هر x مقدار ۲^x را که روی منحنی $y = ۲^x$ قرار دارد، در ۳ ضرب کنیم تا نقطه‌ی مربوط به همان x روی منحنی $y = ۳ \times ۲^x$ به دست آید.



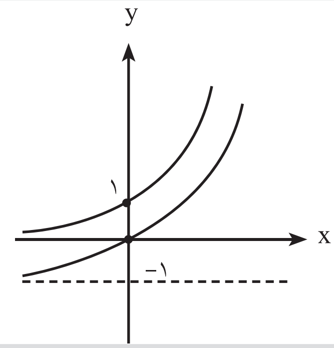
مسئله ی ۵: نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = \frac{-۱}{۲} \times ۳^x$ را رسم کنید.

حل: کافی است نقاط روی نمودار $y = ۳^x$ را در $\frac{-۱}{۲}$ ضرب کنیم. در نتیجه داریم:



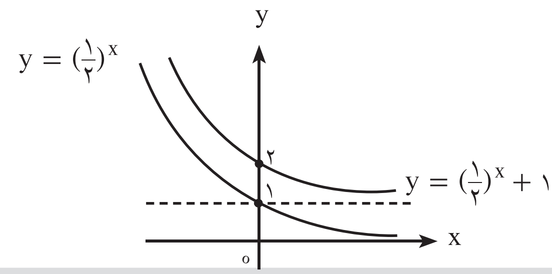
مسئله ی۶: نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = ۲^x - ۱$ را رسم کنید.

حل: کافی است نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = ۲^x$ را ۱ واحد در امتداد محور yها و به سمت پایین انتقال دهیم.



مسئله‌ی ۷: نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = (\frac{1}{2})^x + 1$ را رسم کنید.

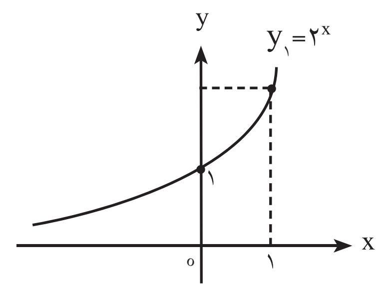
حل: کافی است نمودار تابع ضابطه‌ی $y = (\frac{1}{2})^x$ را در امتداد محور yها، ۱ واحد به سمت بالا انتقال دهیم.



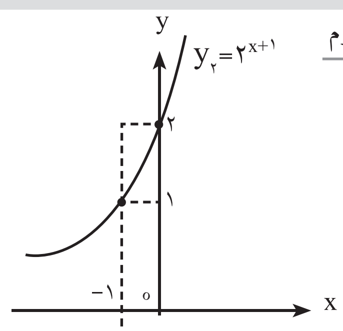
مسئله ی۸: نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = \frac{1}{3}2^{x+1} - 1$ را رسم کنید.

حل: نمودارهای زیر مراحل شکل‌گیری نمودار تابع بالا را نشان می‌دهند.

مرحله ی‌اول

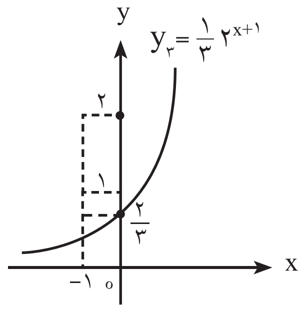


مرحله ی‌دوم

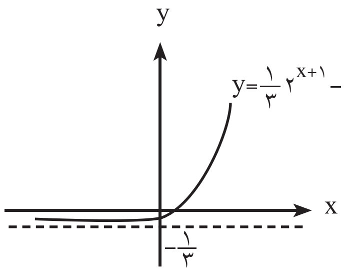


نمودار $y_1=2^x$ را در امتداد محور xها، ۱ واحد به سمت چپ انتقال دادیم.

مرحله ی‌سوم



عرض هر نقطه‌ی نمودار $y_2=2^{x+1}$ را در $\frac{1}{3}$ ضرب کردیم.



نمودار y_3 را در امتداد محور yها، ۱ واحد به طرف پایین انتقال دادیم.

نتیجه: با ترکیب مطالبی که تا به حال خوانده‌ایم، می‌توانیم نمودار توابعی به صورت $y = a \times b^{x+c}$ را رسم کنیم. برای رسم نمودار این قبیل توابع کافی است ابتدا نمودار تابع $y = b^x$ را رسم کنیم، سپس با انتقال c− واحد در امتداد محور xها، نمودار تابع $y = b^{x+c}$ را به دست آوریم و سرانجام با ضرب عرض نقاط در مقدار a به نمودار $y = a \times b^{x+c}$ برسیم.

***

«پیاژه» بر این باور است که تصورها و اعمال منطقی ذهن و به‌طور کلی، هوش انسان، زاییده‌ی درونی‌شدن اعمال او است. به‌عقیده‌ی پیاژه، تشریح حقایق و مفاهیم ریاضی، به‌صورتی که در روش تدریس زبان معمول است، برای دانش‌آموز کافی نیست. برای آن‌که تصورهای حاصله، دقیق و مفاهیم مورد نظر روشن باشند، دانش‌آموز باید شخصاً به تجربه و آزمایش بپردازد و اشیا را از نزدیک دستکاری کند.