رویکرد هندسی و رویکرد جبری در آموزش هندسه (۱۳)

محمد هاشم رستمی

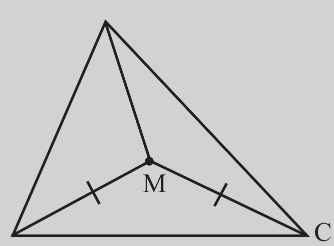
اشاره

به‌منظوراستفاده‌ی بیشتر دانش‌آموزان ارجمند از این مقاله، از شماره‌ی قبل به حل مسئله‌های هندسه در صفحه (هندسه‌ی مسطحه) پرداختیم. در این شماره ادامه‌ی این مطالب را پی می گیریم.

مثال ۳: سه نقطه‌ی A، B و C داده شده‌اند. نقطه‌ای در صفحه‌ی گذرنده بر این سه نقطه بیابید که از این سه نقطه به یک فاصله باشد. آیا این نقطه یکتاست؟

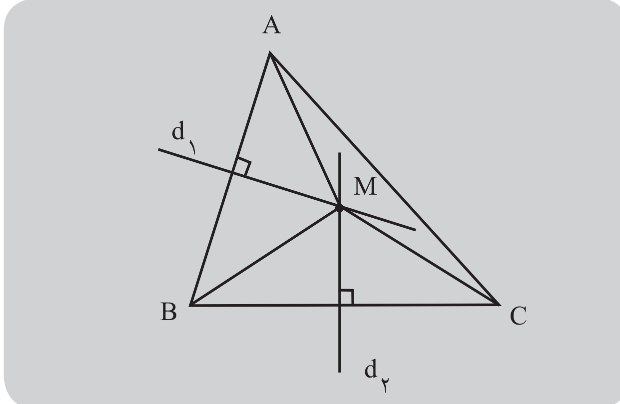
الف) حل با روش هندسی

فرض می‌کنیم مسئله حل شده باشد و نقطه‌ی M جواب مسئله باشد یعنی نقطه‌ای باشد که از سه نقطه‌ی A، B و C به یک فاصله است، یعنی داریم $MA = MB = MC$. چون $MA = MB$ است، پس نقطه‌ی M از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله است.

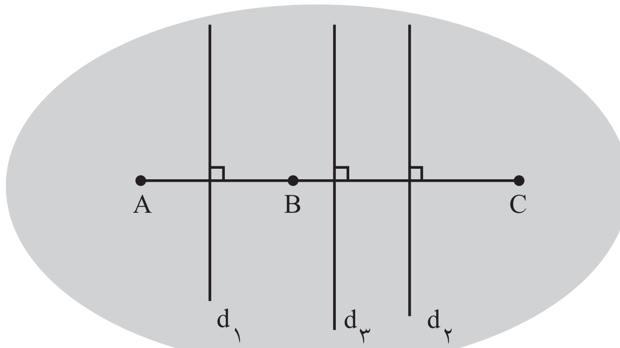


بنابراین نقطه‌ی M روی عمودمنصف پاره خط AB است. هم‌چنین $MB = MC$ است پس نقطه‌ی M از دو نقطه‌ی B و C به یک فاصله است، یعنی نقطه‌ی M روی عمودمنصف پاره خط BC است و هم‌چنین $MA = MC$ است، پس نقطه‌ی M روی عمودمنصف پاره‌خط AC قرار دارد. در نتیجه نقطه‌ی M محل برخورد عمود منصف‌های سه پاره خط AB، BC و AC است. از این جا راه حل مسئله به این صورت مشخص می‌شود:

عمودمنصف دو پاره خط از سه پاره خط AB، BC و AC را رسم می‌کنیم. برای مثال عمودمنصف پاره خط AB را رسم می‌کنیم و خط d_1 می‌نامیم. هم‌چنین عمودمنصف پاره خط BC را رسم می‌کنیم و خط d_2 می‌نامیم. نقطه‌ی برخورد این دو خط، نقطه‌ی M جواب مسئله است.

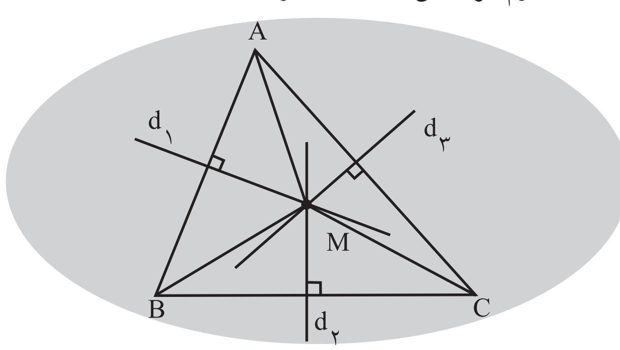


نکته ی ۱. خط‌های d_1 و d_2 در صورتی یکدیگر را قطع می‌کنند که سه نقطه‌ی A، B و C روی یک خط راست نباشد، زیرا اگر سه نقطه‌ی A، B و C روی یک خط راست قرار داشته باشد خط‌های d_1، d_2 و d_3 که به ترتیب عمودمنصف پاره خط‌های AB، BC و AC هستند. با هم موازی خواهند بود (شکل). چرا؟



راهنمایی. از هر نقطه یک و تنها یک خط موازی خط مفروض می‌توان رسم کرد.

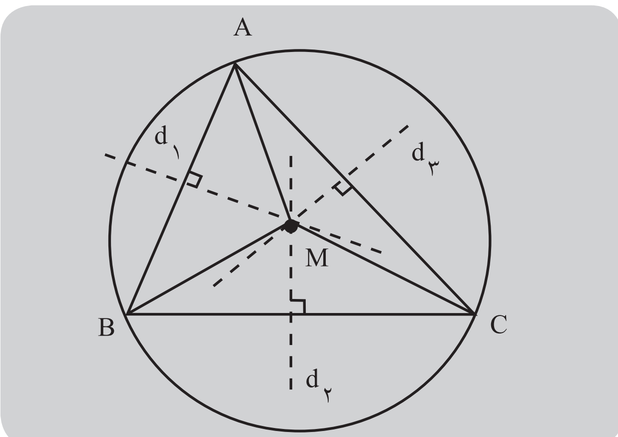
نکته‌ی ۲. هنگامی که سه نقطه‌ی A، B و C روی یک خط راست نباشد، خط‌های d_1، d_2 و d_3، یعنی همان عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های AB، BC و AC از یک نقطه می‌گذرند (همرس‌اند). بنابراین برای تعیین نقطه‌ی M، یعنی جواب مسئله، کافی است عمودمنصف دو تا از پاره‌خط‌های AB، BC و AC، یعنی دو خط از سه خط d_1، d_2 و d_3 را رسم کنیم تا نقطه‌ی برخورد آن‌ها M به دست آید. عمودمنصف پاره خط سوم نیز از این نقطه (M) خواهد گذشت.



نکته ی ۳. نقطه‌ی M که از سه نقطه‌ی غیرواقع بر یک خط راست A، B و C به یک فاصله است؛ یعنی برای آن نقطه داریم $MA = MB = MC$، مرکز دایره‌ای است که بر سه نقطه‌ی A، B و C می‌گذرد. این دایره را دایره‌ی محیطی مثلث ABC می‌نامند که دایره‌ای یکتاست، یعنی بر هر سه نقطه‌ی غیر هم‌خط A، B و C تنها و تنها یک دایره می‌گذرد که مرکز آن، محل برخورد عمودمنصف‌های ضلع‌های مثلث ABC است. وجود این نقطه را دیدیم؛ یکتایی آن را هم می‌توان به سادگی ثابت کرد. بدین ترتیب که فرض می‌کنیم نقطه‌ی دیگری مانند M' وجود داشته باشد که از سه نقطه‌ی A، B و C به یک فاصله باشد؛ یعنی داشته باشیم $M'A = M'B = M'C$.

حال باید ثابت کنیم که این نقطه بر نقطه‌ی M منطبق است. از $M'A = M'B$ نتیجه می‌شود که نقطه‌ی M' روی عمودمنصف پاره خط AB، یعنی روی خط d_1 است و از $M'B = M'C$ نتیجه می‌شود که نقطه‌ی M' روی عمودمنصف پاره خط BC، یعنی روی خط d_2، است، پس M' نقطه‌ی برخورد d_1 و d_2، یعنی همان نقطه‌ی M است. به بیان دیگر، M' بر M منطبق است، پس M نقطه‌ای یکتاست.

نقطه‌ی M مرکز دایره‌ی محیطی مثلث را با حروف دیگر مانند



O، ... نیز نمایش می‌دهند.

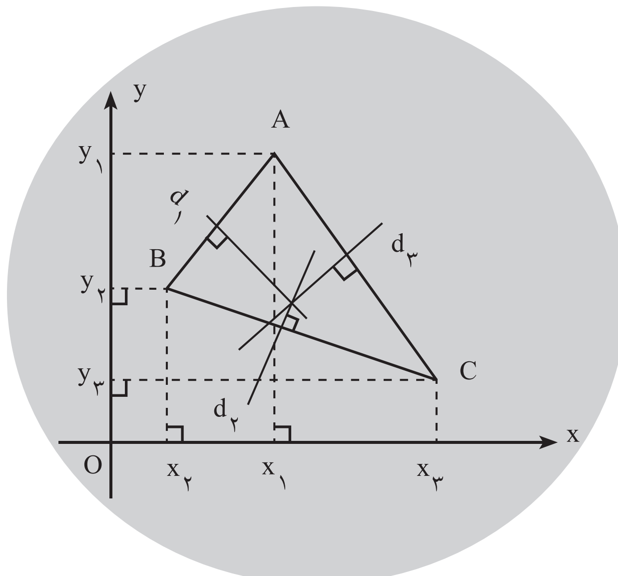
ب) اثبات با رویکرد جبری - مختصاتی

مسئله را بار دیگر بیان می‌کنیم:

سه نقطه‌ی A، B و C داده شده‌اند. نقطه‌ای در صفحه‌ی گذرنده بر این سه نقطه بیابید که از این سه نقطه به یک فاصله باشد. آیا این نقطه یکتاست؟

دستگاه مختصات قائم xoy را در صفحه‌ی گذرنده بر این سه نقطه در نظر می‌گیریم. اگر ویژگی خاصی را برای چگونگی در نظر گرفتن این دستگاه مختصات قائم در نظر نگیریم، مختصات نقطه‌های A، B و C در این دستگاه مختصات، به صورت کلی $A = (x_1, y_1)$، $B = (x_2, y_2)$ و $C = (x_3, y_3)$ خواهد بود. اکنون باید معادله‌ی

عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های AB، BC و AC را بنویسیم و در صورتی که سه نقطه‌ی A، B و C هم‌خط نباشند، ثابت کنیم که این سه عمودمنصف همرس‌اند. نوشتن معادله‌ی عمودمنصف‌ها و اثبات همرسی آن‌ها در این دستگاه مختصات طولانی و دشوار است، بنابراین دستگاه مختصات قائم را به گونه‌ای دیگر انتخاب می‌کنیم تا محاسبات ساده‌تر شود. برای این کار روش‌های مختلفی وجود دارد.



برای مثال می‌توانیم محور xها را روی خط BC و محور yها را روی ارتفاع AH (خطی که از A بر BC عمود می‌شود) اختیار کنیم. در این صورت نقطه‌ی H مبدأ مختصات خواهد شد؛ در این دستگاه مختصات، مختصات نقطه‌های A، B و C به صورت زیر خواهد بود:

$A=(0,y_1), B=(x_2,0), C=(x_3,0)$

اکنون عمودمنصف‌های ضلع‌های AB، BC و AC را که به ترتیب آن‌ها را d_1، d_2 و d_3 می‌نامیم می‌نویسیم و نقطه‌ی برخورد آن‌هارا به دست می‌آوریم. داریم:

وسط پاره خط AB H'
$$\begin{cases} x_{H'}=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{0+x_2}{2}=\frac{x_2}{2} \\ y_{H'}=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{y_1+0}{2}=\frac{y_1}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow H'=(\frac{x_2}{2},\frac{y_1}{2}), m/AB=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{0-y_1}{x_2-0}$$

$$=\frac{-y_1}{x_2}\Rightarrow m/d_1=\frac{x_2}{y_1}$$

$$\Rightarrow AH': y-\frac{y_1}{2}=\frac{x_2}{y_1}(x-\frac{x_2}{2}) \quad \Rightarrow d_1: y=\frac{x_2}{y_1}x-\frac{x_2^2}{2y_1}+\frac{y_1}{2}$$

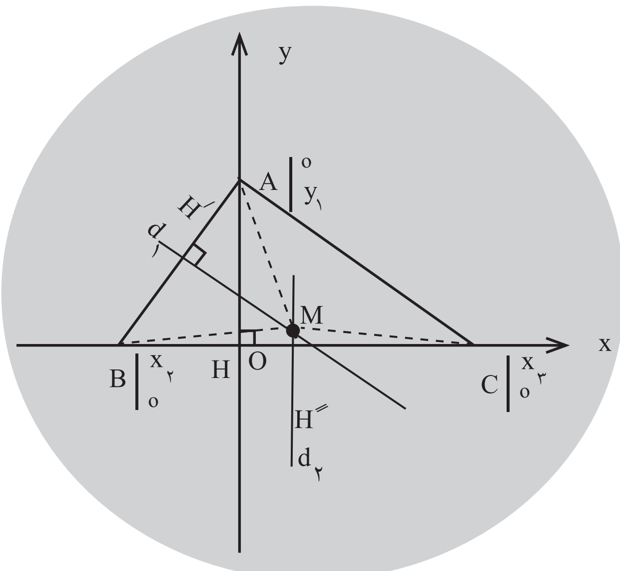
وسط پاره خط BC $H''=(\frac{x_2+x_3}{2},0)$,

$$m/AB=\frac{0-0}{x_2-x_1}=0\Rightarrow m/d_2\to\infty$$

$$\Rightarrow d_2: x=\frac{x_2+x_3}{2}$$

$$\begin{cases} d_1: & y=\frac{x_2}{y_1}x-\frac{x_2^2}{2y_1}+\frac{y_1}{2}\Rightarrow y=\frac{x_2}{y_1}(\frac{x_2+x_3}{2})-\frac{x_2^2}{2}+\frac{y_1}{2} \\ d_2: & x=\frac{x_2+x_3}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow M=(\frac{x_2+x_3}{2},\frac{x_2^2+x_2x_3-x_2^2y_1+y_1^2}{2y_1})$$



در صورتی که معادله‌ی عمودمنصف ضلع AC که آن را d_3 می‌نامیم نیز بنویسیم، خواهیم دید که مختصات نقطه‌ی M در معادله‌ی d_3 صدق می‌کند، یعنی عمودمنصف‌های سه ضلع AB، BC و AC از مثلث ABC از یک نقطه می‌گذرند که این نقطه همان مرکز دایره‌ی محیطی مثلث ABC است.

نکته‌ی مهم ۱. می‌توانیم دستگاه مختصات قائم xoy را چنان اختیار کنیم که محور xها روی خط BC و محور yها عمودمنصف پاره خط BC باشد. در این دستگاه مختصات $A=(x_1,y_1)$، $B=(x_2,0)$ و $C=(-x_2,0)$ خواهد بود. معادله‌ی عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های AB، BC و AC را مانند روش بالا می‌نویسیم و نقطه‌ی برخورد آن‌ها یعنی مختصات خط‌های M را به دست می‌آوریم. محاسبه را خودتان انجام دهید.

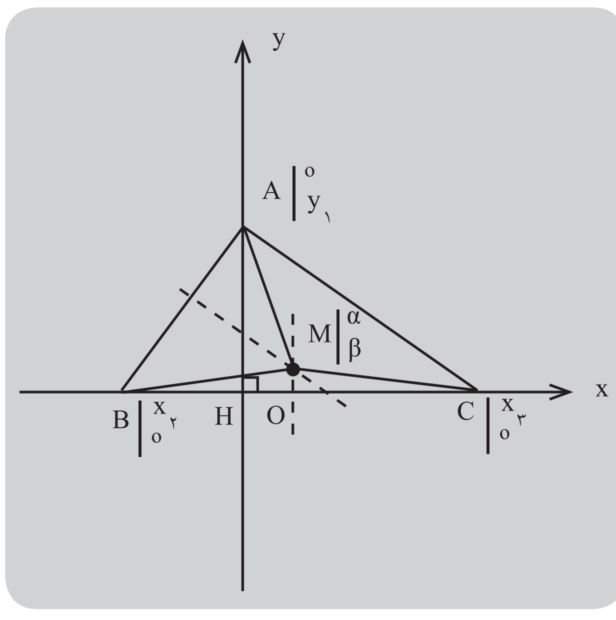
نکته‌ی مهم ۲. پس از انتخاب دستگاه مختصات قائم مناسب، همانند

روش هندسی می‌توانیم مسئله را حل شده فرض کنیم، یعنی فرض کنیم $M=(\alpha,\beta)$ نقطه‌ی جواب مسئله است، یعنی نقطه‌ای است که برای آن داریم $MA=MB=MC$. در این صورت ثابت می‌کنیم که این نقطه روی عمودمنصف‌های پاره خط‌های AB، BC و AC (ضلع‌های مثلث ABC) قرار دارد. برای این کار اگر BC محور xها و ارتفاع AH محور yها اختیار شده باشند، یعنی $A=(۰,y_۱)$، $B=(x_۲,۰)$ و $C=(x_۳,۰)$ باشند، داریم:

$$MA=MB\Rightarrow MA^۲=MB^۲$$
$$\Rightarrow (۰-\alpha)^۲+(y_۱-\beta)^۲=-(x_۲-\alpha)^۲+(۰-\beta)^۲$$
$$\Rightarrow \alpha^۲+y_۱^۲+\beta^۲-۲\beta y_۱=x_۲^۲+\alpha^۲-۲\alpha x_۲+\beta^۲$$
$$\Rightarrow ۲\alpha x_۲-۲\beta y_۱+y_۱^۲-x_۲^۲=۰$$

این معادله، معادله‌ی عمودمنصف پاره خط AB است ($x=\alpha$، $y=\beta$). به همین ترتیب از $MB=MC$ و جایگذاری برحسب مختصات نقطه‌ها معادله‌ی عمود منصف پاره خط BC به دست می‌آید. هم‌چنین معادله‌ی عمودمنصف پاره خط AC را از $MA=MC$ می‌توان به دست آورد. این سه عمودمنصف از یک نقطه می‌گذرند. از آن جا راه حل مسئله همانند روش جبری مشخص می‌شود، یعنی مشخص می‌شود که برای تعیین مختصات نقطه‌ی M کافی است معادله‌ی عمودمنصف‌های دو پاره خط از پاره‌خط‌های AB، BC و AC را بنویسیم و نقطه‌ی برخورد آن‌ها را به دست آوریم.

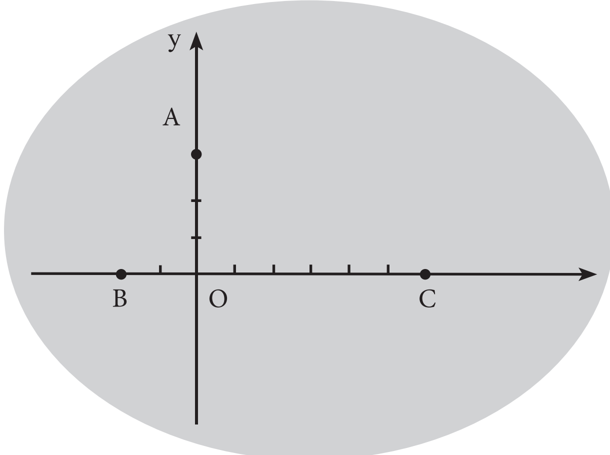
(مختصات نقطه‌ی M جواب مسئله)



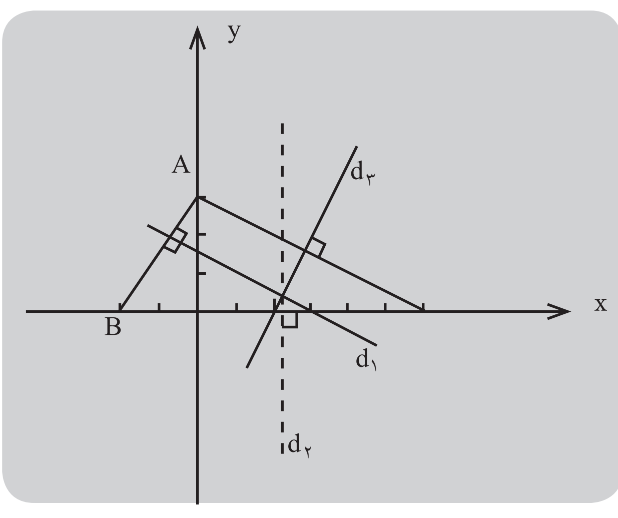
نکته‌ی مهم ۳. اگر سه نقطه‌ی A، B و C هم‌خط باشند به سادگی با نوشتن معادله‌ی عمودمنصف‌های پاره خط‌های AB، BC و AC دیده می‌شود که این سه عمودمنصف موازی‌اند.

اینک به چند مثال از رویکرد جبری مختصاتی توجه کنید.

مثال ۱: سه نقطه‌ی $A=(۰,۴)$، $B=(-۲,۰)$ و $C=(۶,۰)$ در دستگاه مختصات قائم xoy داده شده‌اند. نقطه‌ی M را در این صفحه‌ی مختصات چنان بیابید که از سه نقطه‌ی A، B و C به یک فاصله باشند.



حل: سه نقطه‌ی A، B و C را دو به دو به هم وصل می‌کنیم. عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های AB، BC و AC را به ترتیب $d_۱$، $d_۲$ و $d_۳$ می‌نامیم. می‌دانیم $d_۱$ مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه‌ی مختصات است که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله و $d_۲$ مکان هندسی نقطه‌ی از صفحه‌ی مختصات است که از B و C به یک فاصله است، هم‌چنین $d_۳$ مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه‌ی مختصات است که از A و C به یک فاصله است. پس نقطه‌ی M محل برخورد این سه عمودمنصف است. که همرس‌اند، زیرا سه نقطه‌ی داده‌شده‌ی A، B و C هم‌خط نیستند (روی یک خط راست قرار ندارند). بنابراین معادله‌ی دو خط از سه خط $d_۱$، $d_۲$ و $d_۳$ را می‌نویسیم و مختصات نقطه‌ی برخورد آن‌ها را که همان نقطه‌ی M است به دست می‌آوریم:



$$A=(۰,۴),B=(-۲,۰),C=(۶,۰)$$

وسط پاره خط AB $H_۱=(-۱,۲),m/AB=\frac{۰-۴}{-۲-۰}=۲$

$$\Rightarrow m/d_۱=-\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow d_۱: y - ۲ = -\frac{۱}{۲}(x + ۱) \Rightarrow d_۱: y = -\frac{۱}{۲}x + \frac{۳}{۲}$$

BC وسط پاره خط $H_۲ = (۲,۰), m/BC = ۰$

$$\Rightarrow m/d_۲ \to \infty \Rightarrow d_۲: x = ۲$$

$$\begin{cases} d_۱: y = -\frac{۱}{۲}x + \frac{۳}{۲} \\ d_۲: x = ۲ \end{cases} \Rightarrow M = (۲, \frac{۱}{۲})$$ نقطه‌ی جواب مسئله

نکته ی ۱: اگر بخواهیم، می‌توانیم درستی جواب را با محاسبه‌ی اندازه‌ی پاره‌خط‌های MA، MB و MC امتحان کنیم.

$$MA = \sqrt{(۰ - ۲)^۲ + (۴ - \frac{۱}{۲})^۲} = \frac{\sqrt{۶۵}}{۲}$$

$$MB = \sqrt{(-۲ - ۲)^۲ + (۰ - \frac{۱}{۲})^۲} = \frac{\sqrt{۶۵}}{۲}$$

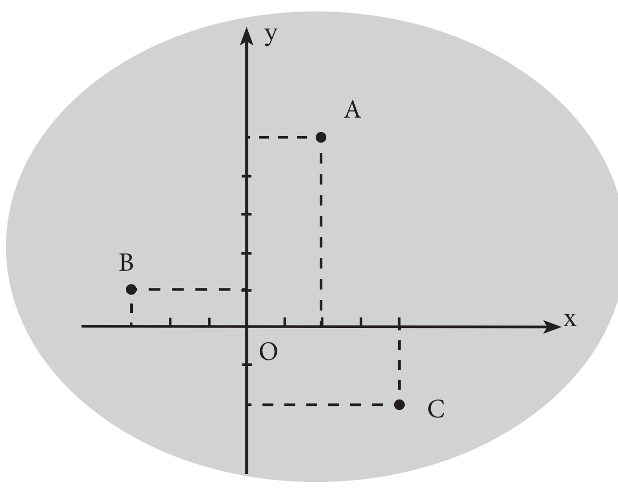
$$MC = \sqrt{(۶ - ۲)^۲ + (۰ - \frac{۱}{۲})^۲} = \frac{\sqrt{۶۵}}{۲}$$

$$\Rightarrow MA = MB = MC = \frac{\sqrt{۶۵}}{۲}$$

پس محاسبه‌ها درست بوده است.

نکته ی ۲: مختصات نقطه‌های A، B و C نشان می‌دهند که پاره خط BC روی محور xها و رأس A روی محور yها که در این‌جا، ارتفاع نظیر رأس A است، قرار دارد. به همین علت محاسبه‌ها ساده‌تر از حالتی است که نقطه‌ها روی محورها نباشند.

مثال ۲: سه نقطه‌ی $A = (۲,۵)$، $B = (-۳,۱)$ و $C = (۴,-۲)$ در دستگاه مختصات قائم xoy داده شده‌اند. نقطه‌ی M را در صفحه‌ی این دستگاه مختصات چنان بیابید که از سه نقطه‌ی A، B و C به یک فاصله باشند.



حل: سه نقطه‌ی A، B و C را دو به دو به هم وصل می‌کنیم و عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های AB، BC و AC را به ترتیب $d_۱$، $d_۲$ و $d_۳$ می‌نامیم. می‌دانیم که نقطه‌ی جواب مسئله که آن را M می‌نامیم، محل برخورد یا نقطه‌ی همرسی این سه خط است، پس معادله‌ی دو خط از این سه خط را می‌نویسیم و مختصات نقطه‌ی M محل برخورد آن‌ها را به دست می‌آوریم. داریم:

$A = (۲,۵), B = (-۳,۱), C = (۴,-۲)$

AB وسط پاره خط $H' = (-\frac{۱}{۲}, ۳)$,

$$m/AB = \frac{۱ - ۵}{-۳ - ۲} = \frac{۴}{۵}$$

$$\Rightarrow m/d_۱ = -\frac{۵}{۴} \Rightarrow d_۱: y - ۳ = -\frac{۵}{۴}(x + \frac{۱}{۲})$$

$$\Rightarrow d_۱: y = -\frac{۵}{۴}x + \frac{۹۹}{۸}$$

BC وسط پاره‌خط $H'' = (\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۲})$,

$$m/BC = \frac{-۲ - ۱}{۴ + ۳} = \frac{-۳}{۷} \Rightarrow m/d_۲ = \frac{۷}{۳}$$

$$\Rightarrow d_۲: y + \frac{۱}{۲} = -\frac{۷}{۳}(x - \frac{۱}{۲}) \Rightarrow d_۲: y = \frac{۷}{۳}x - \frac{۵}{۳}$$

$$\begin{cases} d_۱: y = -\frac{۵}{۴}x + \frac{۱۹}{۸} \\ d_۲: y = \frac{۷}{۳}x - \frac{۵}{۳} \end{cases} \Rightarrow -\frac{۵}{۴}x + \frac{۱۹}{۸} = \frac{۷}{۳}x - \frac{۵}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{۴۳}{۱۲}x = \frac{۹۷}{۱۲} \Rightarrow x = \frac{۹۷}{۸۶} \Rightarrow y = \frac{۷}{۳} \times \frac{۹۷}{۸۶} - \frac{۵}{۳}$$

$$\Rightarrow y = \frac{۸۳}{۸۶} \Rightarrow M = (\frac{۹۷}{۸۶}, \frac{۸۳}{۸۶})$$