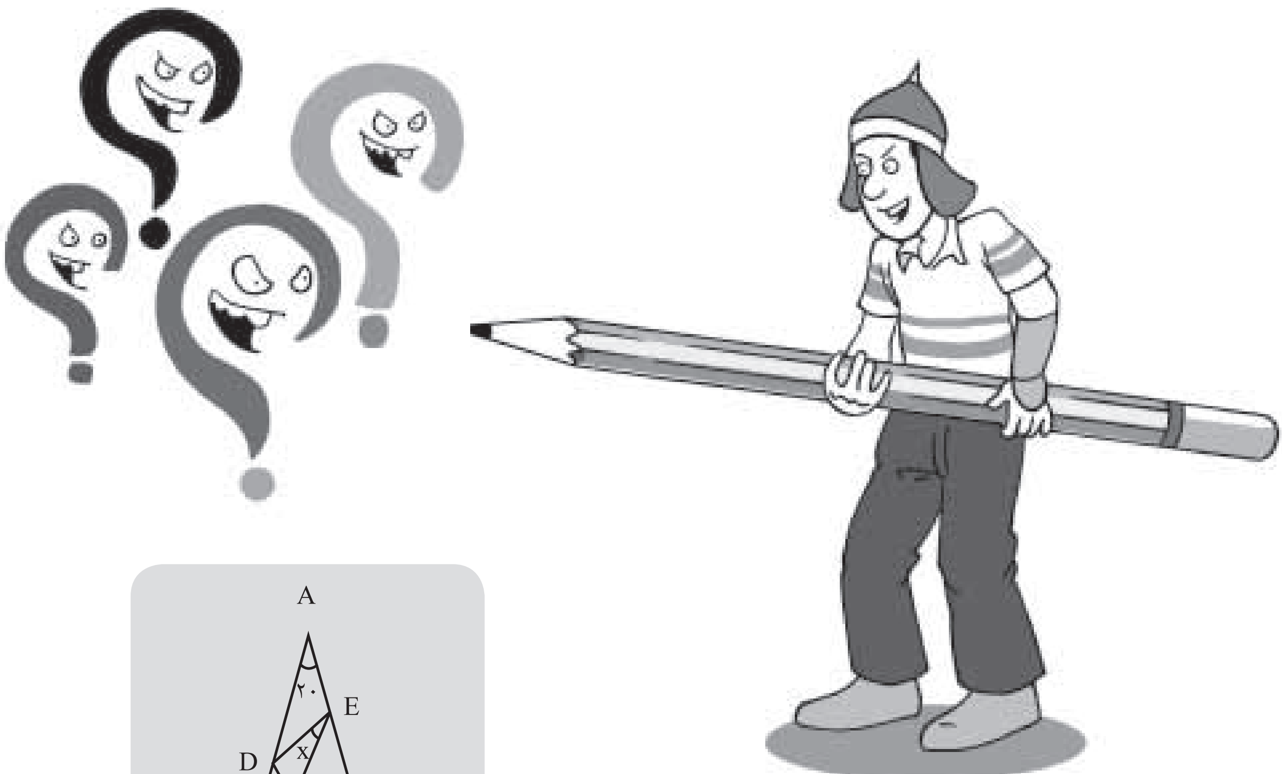
چند مسئله‌ی پیکارجو

درباره‌ی تعیین زوایا در شکل‌های هندسی و ارائه‌ی راه حل‌هایی برای آن‌ها

هوشنگ شرقی



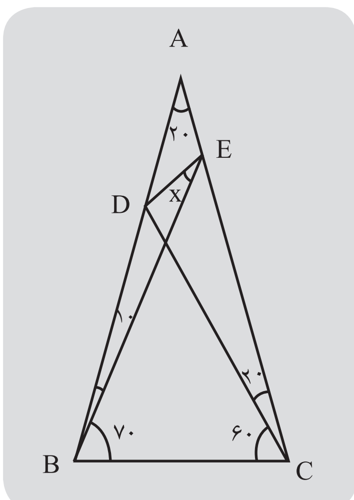
اشاره

چند روز پیش، آقای امیری سردبیر مجله، حل مسئله‌ای را از من خواست. قبلاً هم سابقه‌ی این کار را داشت و یک بار مسئله‌ای از نظریه‌ی اعداد و نظریه‌ی احتمال را به من داد که حل آن در نهایت به نگارش چند مقاله در مجله‌ی برهان انجامید. این بار مسئله‌ی او مسئله‌ای از هندسه به این صورت بود: در شکل مقابل ABC مثلث متساوی‌الساقین است و زاویه‌ی رأس آن ۲۰° است و در نتیجه: $\hat{B} = \hat{C} = ۸۰^\circ$

پاره‌خط‌ها ی CD , BE چنان رسم شده‌اند که:

$D\hat{C}E = ۲۰^\circ, D\hat{B}E = ۱۰^\circ$

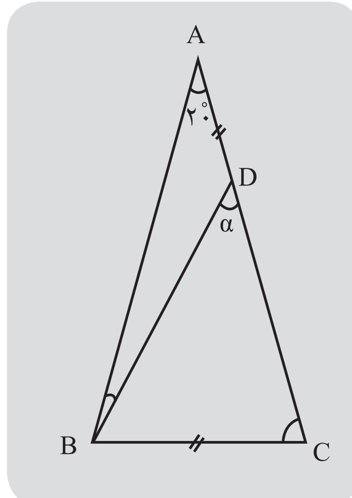
اندازه‌ی زاویه‌ی $D\hat{E}B = x$ را به دست آورید.



من با مسائلی از این دست قبلاً هم در منابع گوناگونی روبه‌رو شده بودم. بنابراین نخستین کاری که کردم مراجعه به این منابع و دیدن مسائل مشابه بود. در کتاب بازآموزی و بازشناخت هندسه (از انتشارات مدرسه) ترجمه‌ی عبدالحسین مصحفی مسئله‌ای شبیه این هست. منتها در آن‌جا دو زاویه‌ی کناری مجاور به دو ساق مثلث، به جای ۱۰ و ۲۰ درجه، ۲۰ و ۳۰ درجه هستند. خواستم راه حل آن را در این مورد هم به کار ببندم، ولی خیلی توفیقی به دست نیاوردم. ناچار مسئله را به روش مثلثاتی حل کردم و جواب را به دست آوردم که شرح آن را خواهم داد. $x = ۲۰^\circ$ به دست آمد، ولی خیلی مایل بودم که روشی کاملاً هندسی برای آن به دست آورم. پس از مدتی تفحص روی مسئله به مسئله‌ای مشابه که آن را قبلاً دیده بودم برخوردم. بین این مسئله و مسئله‌ی معروف‌تر مقابل ارتباطی دوسویه

وجود داشت:

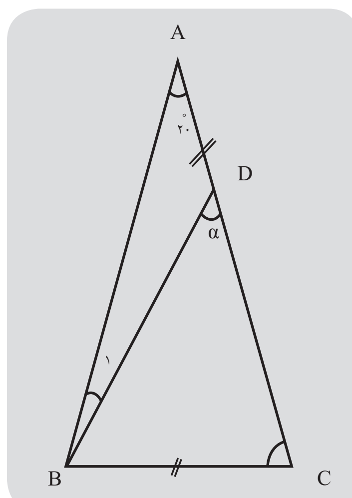
در شکل زیر $AB = AC$ و $\hat{A} = ۲۰^\circ$ و $AD = BC$ اندازه‌ی زاویه‌ی α چیست؟



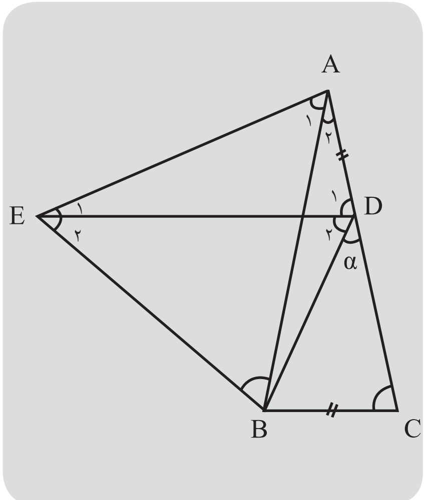
البته راه حل این مسئله را قبلاً دیده بودم و می‌دانستم ولی آنچه با آن سروکار داشتم عکس این مسئله بود و نه خود آن و این کار را کمی دشوارتر می‌کرد. با راهنمایی همکار پیشکسوت در درس هندسه، آقای میرحبیب‌اللّهی، که به راستی از نخبگان این رشته هستند، این قسمت هم حل و کار تمام شد. این جدال دو سه روزه با این مسئله به من انگیزه‌ی نگارش این مقاله را داد که در آن هم به این دو مسئله و ارتباط آن‌ها با یکدیگر بپردازم و هم چند مسئله‌ی مشابه را مطرح کنم که این مسئله‌ها دسته‌ی بسیار خوبی از مسائل پیکارجوی هندسه را تشکیل می‌دهند.

مسئله ی ۱: در شکل زیر $AB = AC$ و $\hat{A} = ۲۰^\circ$ و $AD = BC$. اندازه‌ی زاویه‌ی $B\hat{D}C = \alpha$ را به دست آورید.

حل:



روش اول: مثلث ADE را هم‌نهشت با مثلث ABC به‌صورت زیر رسم و E را به B وصل می‌کنیم. مطابق شکل می‌توان نوشت:



$$\hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ = \hat{D}_۱ = \hat{B} = \hat{C} = ۸۰^\circ, \hat{A}_۲ = ۲۰^\circ$$
$$\Rightarrow \hat{A}_۱ = ۶۰^\circ, AE = AB$$

بنابراین، مثلث ABE متساوی‌الساقین است و چون یک زاویه‌ی ۶۰° دارد، پس متساوی‌الاضلاع است و لذا داریم:

$$EB = AE = DE, \quad \hat{E}_۱ + \hat{E}_۲ = ۶۰^\circ, \quad \hat{E}_۱ = \hat{A}_۲ = ۲۰^\circ$$
$$\Rightarrow \hat{E}_۲ = ۴۰^\circ$$

پس مثلث EBD متساوی‌الساقین است و زاویه‌ی رأس آن ۴۰° است و بنابراین:

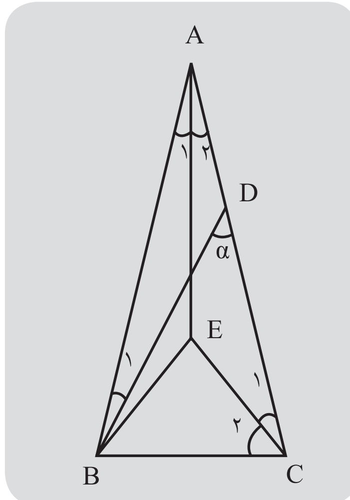
$$E\hat{D}B = E\hat{B}D = \frac{۱۸۰^\circ - ۴۰^\circ}{۲} = ۷۰^\circ$$
$$\Rightarrow \hat{D}_۲ = ۷۰^\circ, \hat{D}_۱ = ۸۰^\circ,$$
$$\alpha = ۱۸۰^\circ - (۸۰^\circ + ۷۰^\circ) = ۳۰^\circ$$

روش دوم: مطابق شکل، نیمساز زاویه‌ی $\hat{A}$ را رسم و روی BC مثلث متساوی‌الاضلاع EBC را بنا می‌کنیم. می‌توان نوشت:

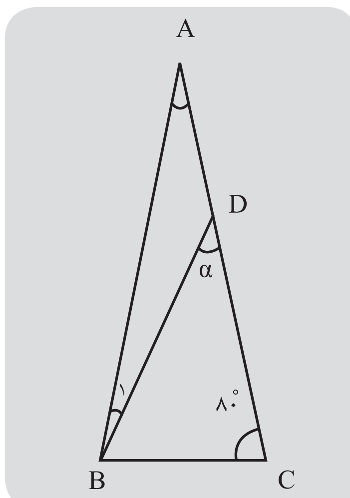
$$\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ = ۱۰^\circ, \hat{C}_۱ = ۸۰^\circ - \hat{C}_۲ = ۲۰^\circ$$
$$EC = BC = AD, AC = AB$$
$$\Rightarrow \Delta ABD \cong \Delta AEC \text{ (ض‌زض)} \Rightarrow \hat{B}_۱ = \hat{A}_۲ = ۱۰^\circ$$
$$\hat{\alpha} = \hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ + \hat{B}_۱ = ۳۰^\circ$$

روش سوم (روش مثلثاتی):

راه حل مثلثاتی، یک راه حل قابل اطمینان در تمام این‌گونه



مسائل است. در این روش معمولاً به کمک قضیه‌ی سینوس‌ها (در هر مثلث نسبت هر ضلع به سینوس زاویه‌ی مقابل مقداری ثابت است: $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$) و اطلاعات مسئله سعی می‌کنیم با حذف ضلع‌ها از معادله‌های نوشته شده، به یک معادله‌ی مثلثاتی برسیم و از آن‌جا زاویه‌ی مجهول را به دست آوریم. یادآور می‌شویم که در این روش، آشنایی با اتحادهای مثلثاتی و روش‌های مختلف ساده کردن عبارت‌های مثلثاتی الزامی است. برای مثال در همین مسئله، ابتدا قضیه‌ی سینوس‌ها را در دو مثلث ABD و BDC می‌نویسیم:



$$\Delta ABD: \frac{AD}{\sin B_1}=\frac{BD}{\sin 20^\circ}, \alpha=\hat{B}_1+20^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{B}_1=\alpha-20^\circ \Rightarrow \frac{AD}{\sin(\alpha-20^\circ)}=\frac{BD}{\sin 20^\circ}$$

$$\frac{AD}{BD}=\frac{\sin(\alpha-20^\circ)}{\sin 20^\circ} \quad (1)$$

$$\Delta BDC: \frac{BC}{\sin\alpha}=\frac{BD}{\sin 80^\circ},$$

$$BC=AD \Rightarrow \frac{AD}{BD}=\frac{\sin\alpha}{\sin 80^\circ} \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \frac{\sin(\alpha-20^\circ)}{\sin 20^\circ}=\frac{\sin\alpha}{\sin 80^\circ}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(\alpha-20^\circ)}{\sin\alpha}=\frac{\sin 20^\circ}{\sin 80^\circ}, \sin 80^\circ=\cos 10^\circ,$$

$$\sin 20^\circ=2\sin 10^\circ\cos 10^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{\sin 20^\circ}{\sin 80^\circ}=\frac{\sin 20^\circ}{\cos 10^\circ}=2\sin 10^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(\alpha-20^\circ)}{\sin\alpha}=2\sin 10^\circ, \frac{\sin(\alpha-20^\circ)+\sin\alpha}{\sin(\alpha-20^\circ)}$$

$$=\frac{2\sin 10^\circ+1}{2\sin 10^\circ-1}=\frac{\sin 10^\circ+\frac{1}{2}}{\sin 10^\circ-\frac{1}{2}}=\frac{\sin 10^\circ+\sin 30^\circ}{\sin 10^\circ-\sin 30^\circ}$$

و به کمک دستورهای تبدیل عبارت‌های مثلثاتی از جمع به ضرب در دو طرف تساوی، خواهیم داشت:

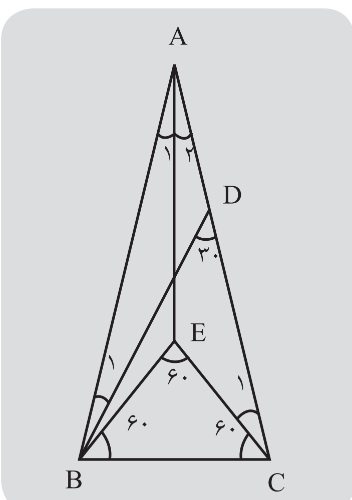
$$\frac{2\sin(\alpha-10^\circ)\cos(-10^\circ)}{2\sin(-10^\circ)\cos(\alpha-10^\circ)}=\frac{2\sin 20^\circ\cos(-10^\circ)}{2\sin(-10^\circ)\cos 20^\circ}$$

$$\Rightarrow tg(\alpha-10^\circ)=tg20^\circ \Rightarrow \alpha-10^\circ=20^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha=30^\circ$$

مسئله ی ۲ (عکس مسئله‌ی ۱): در شکل زیر می‌دانیم $AB=AC$ و $\hat{A}=20^\circ$ و $B\hat{D}C=30^\circ$ ثابت کنید: $AD=BC$

اثبات:



روش اول (روش مثلثاتی):

$$\Delta ABD: \frac{AD}{\sin B_1}=\frac{BD}{\sin A}, B\hat{D}C=\hat{A}+\hat{B}_1$$

$$\Rightarrow \hat{B}_1 = 10 \Rightarrow \frac{AD}{\sin 10^\circ} = \frac{BD}{\sin 20^\circ}$$

$$\Rightarrow AD = \frac{BD.\sin 10}{\sin 20} = \frac{BD.\sin 10}{2\sin 10 \cos 10} = \frac{BD}{2\cos 10} (1)$$

$$\Delta BDC: \frac{BC}{\sin D_1} = \frac{BD}{\sin C} \Rightarrow \frac{BC}{\sin 30^\circ} = \frac{BD}{\sin 80}$$

$$\Rightarrow BC = \frac{BD \sin 30}{\sin 80^\circ} = \frac{BD \times \frac{1}{2}}{\cos 10} = \frac{BD}{2\cos 10} (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow AD = BC$$

روش دوم (روش هندسی):

نیمساز زاویه‌ی $\hat{A}$ را رسم و مثلث متساوی‌الاضلاع BEC را روی BC بنا می‌کنیم.

$$B\hat{D}C = \hat{A} + \hat{B}_1 \Rightarrow \hat{B}_1 = 10^\circ, \hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 10^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B}_1, \hat{C}_1 = \hat{A} = 20^\circ, AC = AB$$

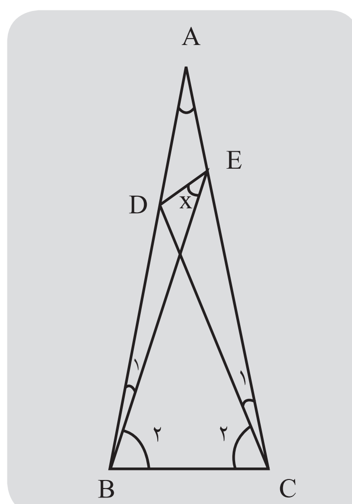
$$\Rightarrow \Delta ACE \cong ABD \text{ (ز‌ض‌ز)} \Rightarrow CE = AD,$$

$$BE = CE = BC \Rightarrow AD = BC$$

مسئله‌ی ۳ (مسئله‌ی اصلی): در شکل زیر $AB = AC$ و $\hat{B}_1 = 10^\circ$ و $\hat{C}_1 = 20^\circ$ و $\hat{A} = 20^\circ$؛ مطلوب است تعیین اندازه‌ی زاویه‌ی $D\hat{E}B = x$.

حل: روش اول (روش مثلثاتی):

قضیه‌ی سینوس‌ها را در مثلث‌های BDE، CDE و BCD می‌نویسیم:



$$\Delta BDE: \frac{BD}{\sin x} = \frac{DE}{\sin 10} (1)$$

$$\Delta BDC: \frac{BD}{\sin 60} = \frac{CD}{\sin 80} (2)$$

$$\Delta CDE: \frac{DE}{\sin 20} = \frac{CD}{\sin(x+30)} (3)$$

$$(\Delta CBE: B_2 = 70^\circ, \hat{C} = 80^\circ, \hat{E} = 30^\circ)$$

از تلفیق روابط فوق خواهیم داشت:

$$(1),(2) \Rightarrow \frac{BD}{DE} \times \frac{CD}{BD} = \frac{\sin x}{\sin 10} \times \frac{\sin 80}{\sin 60}$$

$$\Rightarrow \frac{CD}{DE} = \frac{\sin x \sin 80}{\sin 10 \sin 60}, \frac{CD}{DE} = \frac{\sin(x+30)}{\sin 20}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x \sin 80}{\sin 10 \sin 60} = \frac{\sin(x+30)}{\sin 20} \Rightarrow \frac{\sin(x+30)}{\sin x}$$

$$= \frac{\sin 80 \sin 20}{\sin 10 \sin 60} = \frac{\overbrace{(2\sin 10 \cos 10)}^{\sin 20}\overbrace{(\cos 10)}^{\sin 80}}{\sin 10 \sin 60} = \frac{2\cos^2 10}{\sin 60}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x \cos 30 + \cos x \sin 30}{\sin x} = \frac{4\cos^2 10}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \cos 30 + \frac{1}{2}\operatorname{cotg} x = 4\frac{\cos^2 10}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{cotg} x = \frac{4\cos^2 10}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{cotg} x = 4\cos^2 10$$

$$\Rightarrow \operatorname{cotg} x = \frac{8\cos^2 10 - 3}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \operatorname{cotg} x = \frac{8(\frac{1+\cos 20}{2}) - 3}{\sqrt{3}} = \frac{4\cos 20 + 1}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{3}\cos 20 = tg30 + 4tg30 \cos 20$$

$$= \frac{\sin 30 + 4\sin 30 \cos 20}{\cos 30}$$

$$= \frac{\sin 30 + 4 \times \frac{1}{2}(\sin 50 + \sin 10)}{\cos 30}$$

$$= \frac{\sin 30 + 2\sin 50 + 2\sin 10}{\cos 30}$$

$$= \frac{\sin 30 + \sin 10 + \sin 50 + \sin 10 + \sin 50}{\cos 30}$$

$$= \frac{2\sin 20 \cos 10 + 2\sin 30 \cos 20 + \sin 50}{\cos 30}$$

$$= \frac{2\sin 20 \cos 10 + 2 \times \frac{1}{2} \times \sin 70 + \sin 50}{\cos 30}$$

$$= \frac{۲\sin ۲۰\cos ۱۰ + \sin ۷۰ + \sin ۵۰}{\cos ۳۰}$$

$$= \frac{۲\sin ۲۰\cos ۱۰ + ۲\sin ۶۰\cos ۱۰}{\cos ۳۰}$$

$$= \frac{۲\cos ۱۰(\sin ۶۰ + \sin ۲۰)}{\cos ۳۰}$$

$$= \frac{۲\cos ۱۰ \times ۲\sin ۴۰\cos ۲۰}{\cos ۳۰}$$

$$= \frac{۴\cos ۱۰\cos ۵۰\cos ۲۰}{\cos ۳۰}$$

حال با توجه به اتحاد مثلثاتی زیر:

$$\cos ۳\alpha = ۴\cos\alpha\cos(۶۰ - \alpha)\cos(۶۰ + \alpha)$$

و با ضرب صورت و مخرج کسر در $\cos ۷۰$ خواهیم داشت:

$$\cot g x = \frac{۴\cos ۱۰\cos ۵۰\cos ۷۰\cos ۲۰}{\cos ۳۰\cos ۷۰}$$

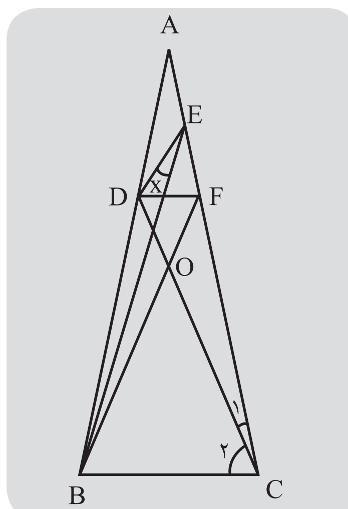
$$= \frac{\cos ۳۰\cos ۲۰}{\cos ۳۰\cos ۷۰} = \frac{\cos ۲۰}{\cos ۷۰} = \frac{\cos ۲۰}{\sin ۲۰} = \cot g ۲۰$$

$$\Rightarrow x = ۲۰^\circ$$

ملاحظه می‌شود که این راه حل قدری طولانی و دور از ذهن است. راه حل بهتر، روش هندسی است که در زیر ارائه می‌شود. گفتنی است که باید از نتیجه‌ی مسئله‌ی ۲ استفاده شود.

روش دوم (روش هندسی):

از نقطه‌ی D خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا AC را در F قطع کند و F را به B وصل می‌کنیم. روشن است که DFCB ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین است و در نتیجه قطرهای آن با هم برابرند و $OC = OB$ و $OD = OF$ و چون $\hat{C}_۱ = ۲۰^\circ$ و $\hat{C}_۲ = ۶۰^\circ$، پس مثلث OBC و نیز مثلث OFD هر دو متساوی‌الاضلاع هستند.



در نتیجه: $OB = OC = BC$ و $OF = OD = DF$ و نیز با توجه به برابری $\hat{A} = F\hat{B}D = ۲۰^\circ$ نتیجه می‌شود: $AF = BF$ و چون داریم: $\Delta BEC: B\hat{E}C = ۱۸۰^\circ - (\hat{C} + E\hat{B}C) = ۳۰^\circ$ پس طبق نتیجه‌ی مسئله‌ی ۲ داریم: $AE = BC$. اکنون با توجه به این نابرابرها می‌توان نوشت:

$$EF = AF - AE = BF - BC = BF - OB$$
$$= OF = DF$$

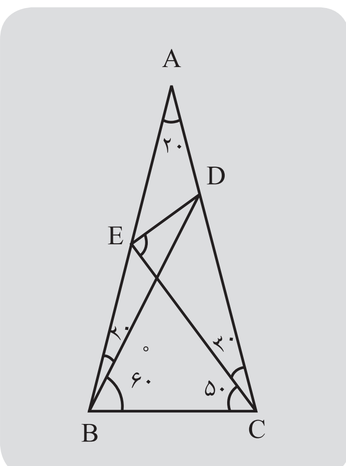
و با توجه به برابری $EF = DF$ نتیجه می‌شود که مثلث EFD در رأس F متساوی‌الساقین است و در نتیجه:

$$F\hat{E}D = E\hat{D}F = \frac{۱۸۰ - ۸۰}{۲} = ۵۰^\circ \Rightarrow x = ۲۰^\circ$$

حال به چند مسئله‌ی مشابه دیگر می‌پردازیم:

مسئله ی۴: در شکل زیر مثلث ABC در رأس A متساوی‌الساقین است و $\hat{A} = ۲۰^\circ$ و مطابق شکل $D\hat{B}E = ۲۰^\circ$ و $D\hat{C}E = ۳۰^\circ$. مطلوب است تعیین اندازه‌ی زاویه‌ی $D\hat{E}C$.

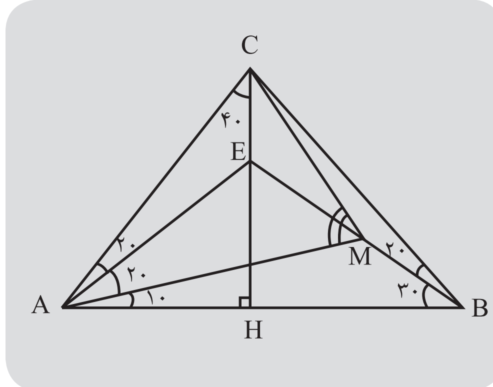
این مسئله شباهت زیادی به مسئله‌ی ۳ دارد و راه حل‌های هندسی و مثلثاتی آن نیز بسیار شبیه به آن است. بنابراین، هر دو راه حل را به عنوان تمرین به خوانندگان واگذار می‌کنیم (پاسخ: ۸۰°)



مسئله ی ۵: در درون مثلث ABC، نقطه‌ی M را در نظر گرفته‌ایم و برای آن داریم: $M\hat{B}A = ۳۰^\circ$ و $M\hat{A}B = ۱۰^\circ$. به شرط $A\hat{C}B = ۸۰^\circ$ و $AC = BC$ مقدار زاویه‌ی $A\hat{M}C$ را پیدا کنید. (المپیاد ریاضی یوگسلاوی، ۱۹۸۳)

حلّ: محل برخورد ارتفاع CH از مثلث متساوی‌الساقین ABC را با امتداد خط راست BM، نقطه‌ی E می‌گیریم. می‌توان نوشت:

$$\Delta ACE \cong \Delta BCE$$
$$\Rightarrow E\hat{B}C = E\hat{A}C = ۵۰ - ۳۰ = ۲۰^\circ,$$
$$EA = EB \Rightarrow E\hat{A}B = E\hat{B}A = ۳۰^\circ$$



$$\Rightarrow E\hat{A}M = ۲۰^\circ, ACE = \frac{۱}{۲}A\hat{C}B = ۴۰^\circ$$

$$A\hat{M}E = M\hat{A}B + M\hat{B}A = ۱۰^\circ + ۳۰^\circ = ۴۰^\circ$$

یعنی مثلث‌های AME و ACE به حالت دو زاویه و ضلع بین هم‌نهشت‌اند و در نتیجه داریم:

$$AM = AC \Rightarrow A\hat{M}C = M\hat{C}A = \frac{۱۸۰^\circ - ۴۰^\circ}{۲} = ۷۰^\circ$$

تمرین: مسئله را به روش مثلثاتی حل کنید (راهنمایی: به معادله‌ی مثلثاتی $\frac{\sin(۲۲۰ - \alpha)}{\sin ۲۰} = \frac{\sin\alpha}{\sin ۴۰}$ برسید).

مسئله ی ۶: نقطه‌ی p را روی ضلع BC از مثلث ABC طوری انتخاب کرده‌ایم که $A\hat{P}C = ۶۰^\circ$ و $PC = ۲PB$. اگر $A\hat{B}C = ۴۵^\circ$ باشد، اندازه‌ی $A\hat{C}B$ را به دست آورید. (المپیاد ریاضی آلمان شرقی ۱۹۶۴)

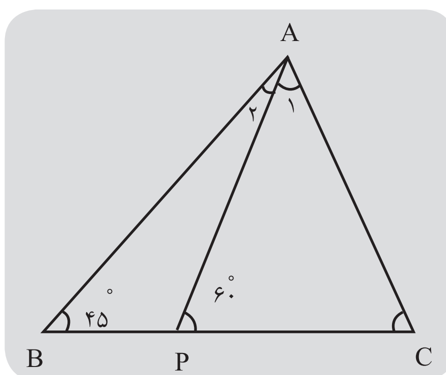
حل (روش مثلثاتی):

$$\Delta APC: \frac{AC}{\sin ۶۰^\circ} = \frac{AP}{\sin C} = \frac{PC}{\sin A_۱}$$

$$\Delta APB: \frac{AB}{\sin ۱۲۰^\circ} = \frac{AP}{\sin ۴۵} = \frac{PB}{\sin A_۲}$$

$$\Rightarrow \frac{PC}{\sin(۱۲۰ - C)} = \frac{AP}{\sin C}, \frac{PB}{\sin ۱۵^\circ} = \frac{AP}{\sin ۴۵},$$

$$PC = ۲PB$$



$$\Rightarrow \frac{\sin(۱۲۰ - C)\sin ۴۵^\circ}{\sin C.\sin ۱۵^\circ} = ۲$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(۱۲۰ - C)}{\sin C} = \frac{۲\sin ۱۵}{\sin ۴۵}$$

$$= \frac{۲ \times \frac{\sqrt{۶} - \sqrt{۲}}{۴}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = \sqrt{۳} - ۱$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(۱۲۰ - C) + \sin C}{\sin(۱۲۰ - C) - \sin C} = \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳} - ۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۲\sin ۶۰ \cos(۶۰ - C)}{۲\sin(۶۰ - C)\cos ۶۰} = \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳} - ۲}$$

$$\Rightarrow tg۶۰ \cot g(۶۰ - C) = \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳} - ۲}$$

$$\Rightarrow \cot g(۶۰ - C) = \frac{۱}{\sqrt{۳} - ۲} = -(۲ + \sqrt{۳})$$

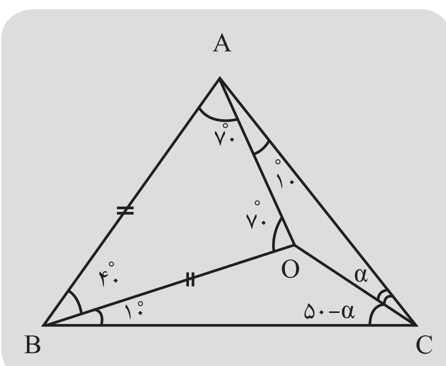
$$\Rightarrow \cot g(C - ۶۰) = ۲ + \sqrt{۳} = \cot g ۱۵^\circ$$

$$\Rightarrow C - ۶۰^\circ = ۱۵^\circ \Rightarrow \hat{C} = ۷۵^\circ$$

تمرین: مسئله را به روش هندسی حل کنید (راهنمایی: قرینه‌ی C نسبت به AP را $C_۱$ بنامید و $C_۱$ را به A و B وصل کنید و نشان دهید مثلث $BC_۱P$ قائم الزاویه است).

مسئله ی ۷: در مثلث متساوی‌الساقین ABC به رأس A، $\hat{A} = ۸۰^\circ$ نقطه‌ی O را داخل مثلث طوری در نظر گرفته‌ایم که $AB = OB$ و $O\hat{B}C = ۱۰^\circ$ باشد. اندازه‌ی زاویه‌ی $O\hat{C}A$ را به دست آورید.

حلّ: مطابق شکل روشن است که چون $O\hat{B}C = ۱۰^\circ$ پس $O\hat{B}A = ۴۰^\circ$ و چون $OB = AB$ پس $O\hat{A}B = B\hat{O}A = \frac{۱۸۰ - ۴۰}{۲} = ۷۰^\circ$ و در نتیجه $O\hat{A}C = ۱۰^\circ$. حال، قضیه‌ی سینوس‌ها را در مثلث‌های OBC و OAC و OAB می‌نویسیم:



$$\frac{OC}{\sin 10} = \frac{OB}{\sin(50-\alpha)}, \frac{OC}{\sin 10} = \frac{OA}{\sin\alpha},$$

$$OB = AB = AC, \frac{OB}{\sin 70} = \frac{OA}{\sin 40} \Rightarrow$$

$$\frac{\sin(50-\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{\sin 70}{\sin 40} = \frac{\cos 20}{2\sin 20 \cos 20} = \frac{1}{2\sin 20}$$

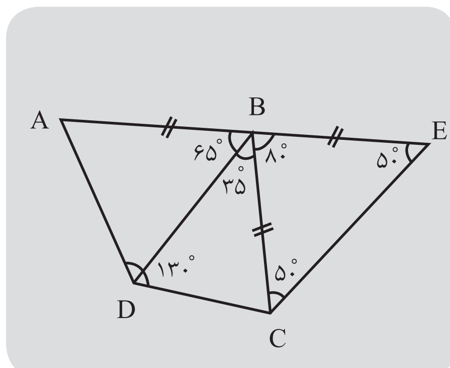
اکنون می‌توان دید که $\alpha = 20^\circ$ در برابری فوق صدق می‌کند (امتحان کنید) و در نتیجه پاسخ مساوی ۲۰° است.

مسئله ی ۸: در چهارضلعی محدب ABCD می‌دانیم که $A\hat{B}D = 65^\circ$ و $C\hat{B}D = 35^\circ$ و $A\hat{D}C = 130^\circ$ و $AB = BC$. اندازه‌ی زاویه‌ی $B\hat{A}D$ را به دست آورید.

حل: مطابق شکل زیر و در امتداد AB، BE را مساوی AB و BC جدا می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$C\hat{B}E = 180^\circ - (65^\circ + 35^\circ) = 80^\circ, CB = BE$$

$$\Rightarrow B\hat{E}C = B\hat{C}E = 50^\circ$$



لذا چون دو زاویه‌ی روبه‌روی $A\hat{D}C$ و $A\hat{E}C$ مکمل هم هستند، پس چهارضلعی AECD محاطی است و از A و E و C و D یک دایره می‌گذرد و چون دایره‌ای به مرکز B و به شعاع AB نیز از A و C و E می‌گذرد و از هر سه نقطه‌ی غیرواقع بر یک خط راست، یک و تنها یک دایره می‌گذرد، پس دایره‌ی محیطی چهارضلعی AECD همین دایره و به مرکز B است. بنابراین $BD = AB = BC = BE$ و مثلث ABD در رأس B متساوی‌الساقین است و در نتیجه:

$$A\hat{D}B = B\hat{A}D = \frac{180 - 65}{2} = 57/5^\circ$$

تمرین

۱- در مثلث ABC، طول میانه‌ی رأس B و ارتفاع رأس C با هم برابرند. زاویه‌ی حاده‌ی بین این میانه و ارتفاع را به دست آورید. (جواب: ۶۰°)

۲- در مثلث ABC، اندازه‌ی زاویه‌ی A مساوی ۷۵° و طول ارتفاع CH نصف طول ضلع AB است. زاویه‌ی B چند درجه است؟ (جواب: ۳۰°)

۳- در مثلث ABC، $AB>AC$ و M وسط BC است و دو زاویه‌ی $\hat{B}$ و $M\hat{A}C$ متمم یکدیگرند. اندازه‌ی $\hat{A}$ را به دست آورید. (جواب: ۹۰°)

۴- زاویه‌ی رأس مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$ مساوی ۱۰۰° است. در امتداد AB و از طرف B، AM را مساوی BC جدا می‌کنیم. زاویه‌ی $B\hat{C}M$ چند درجه است؟ (جواب: ۱۰°)

۵- در مثلث متساوی‌الساقین طول نیمساز زاویه‌ی رأس مساوی نصف طول هر یک از نیمسازهای زوایای مجاور به دو ساق است. اندازه‌ی زاویه‌ی رأس را به دست آورید. (جواب: ۱۰۸°)

۶- مثلث ABC در رأس A متساوی‌الساقین است و $\hat{A} = 80^\circ$ و نقطه‌های D و E را روی BC و AC طوری در نظر گرفته‌ایم که: $B\hat{A}D = 50^\circ$ و $A\hat{B}E = 30^\circ$. مقدار زاویه‌ی $B\hat{E}D$ را به دست آورید. (جواب: ۴۰°)

(المپیاد ریاضی انگلستان-۱۹۷۰)

ادب ریاضی

«ابوالحسن احمدبن ابراهیم اقلیدسی» ریاضیدان قرن چهارم هجری است. وی حدود پنج قرن پیش از کاشانی، کسرهای اعشاری را در کتاب خود به‌کار برده و اعمال اصلی را درباره‌ی آن‌ها انجام داده است. با این حال، مثل این‌که این کسرها را از پیشینیان خود اخذ کرده باشد، به آن‌ها توجه خاصی نداشته و به اهمیت آن‌ها پی‌نبرده؛ بلکه آن‌ها را در ردیف کسرهای متعارف و کسرهای شصتگانی به‌کار گرفته است و پس از وی، حدود پنج قرن، کسی از کار او اطلاعی کسب نکرده است. بنابراین کتاب او در استعمال این کسرها توسط دیگران تأثیری نداشته است. اما کاشانی به قول خودش، کسرهای اعشاری را به قیاس با کسرهای شصتگانی اختراع کرده و نام کسر اعشاری را بر این کسرها نهاده و آگاهانه و به‌طور اصولی قاعده‌های عمل با آن‌ها را شرح داده است و آن‌ها را به وجهی پیگیر، در محاسبات به‌کار برده و استعمال آن‌ها را به دیگران توصیه کرده است. کتاب «مفتاح‌الحساب» او در بسط این کسرها- بعد از خودش- مؤثر بوده است.

در قدیم، عنوان اقلیدسی به کسانی داده می‌شد که کتاب اصول اقلیدس را برای فروش رونویسی می‌کردند.