نظریه‌ی ۷ فاجعه

قسمت اول

ترجمه‌ی پرویز شهریاری

تولد ستاره‌ی جدید، باز شدن گل یا به وجود آمدن شهر، پیشامدهایی عادی هستند، ولی در واقع، هر یک از آن‌ها تعادلی را که قبلا برقرار بوده است، به صورتی ناگهانی به هم می‌زنند. تمامی عالم افلاکی در حرکت تکاملی خود، دم به دم با جهش‌هایی از یک حالت تعادلی به حالت تعادلی دیگر منتقل می‌شود. کارهای پروفسور رنه‌توم، ریاضی‌دان فرانسوی، می‌تواند در درک این جهش‌ها به ما کمک کند.

«**نظریه‌ی ویژگی‌های نگاشت‌های قابل دیفرانسیل گیری**» را، اگر در اصطلاح‌ها تجربه‌ی کافی نداشته باشیم، می‌توان به ترتیب دیگری هم بیان کرد، مثلا برای امان دادن به گوش، که ناچار به شنیدن اصطلاحی به این دور و درازی نباشد، می‌توان از اصطلاح کوتاه «**نظریه ی‌فاجعه‌ها**» استفاده کرد.

بیان آسان‌تر می‌شود، ولی معنا و مفهوم آن چیست؟ چه بسا که این کوتاه کردن اصطلاح، خواننده را به گمراهی و ذهن او را به طرف زلزله یا آتش‌سوزی، سقوط هواپیما یا ورشکستگی مالی بکشاند. ولی در این مقاله، به هیچ موضوعی از این قبیل، برخورد نخواهید کرد. در این‌جا درباره‌ی گلوله‌ای که در یک شیار خمیده می‌غلتد و قرصی که به کمک نیروهای وارد بر آن در حال تعادل است و با به هم خوردن و ناپایداری تعادل، حالت خود را از دست می‌دهد و ... صحبت می‌شود.

در این نظریه، به هر وضعی که موجب دگرگونی تندی در حالت یک دستگاه بشود و هر به هم خوردگی ناگهانی که در تداوم جریان یک روند به وجود آید، فاجعه گفته می‌شود.

پرفسور رنه‌توم به خصوص به مفهوم کلی و انتزاعی خود، روی نظریه‌ی فاجعه‌ها کار کرده است. نظریه‌ی فاجعه‌ها، شاخه‌ای از آنالیز ریاضی است.

این‌جا با رسم سروکار داریم، نه با ریاضیات

در این مقاله، کاری با دستگاه‌های پیچیده‌ی ریاضی نداریم، و اگر در بعضی موارد به مفهوم‌هایی از ریاضیات متوسل می‌شویم، می‌توان آن را نوعی سرگرمی در ترسیم به شمار آورد.

یکی از این مفهوم‌ها، مفهوم تابع است. برای خواننده‌ای که در کارخود از دستگاه‌های ریاضی استفاده نمی‌کند، با شنیدن این اصطلاح بلافاصله متوجه یک شکل می‌شود: دو محور مختصات و یک منحنی، که نماینده‌ی نمایش تغییرات یک تابع است.

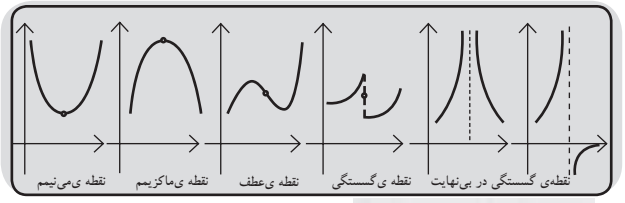
این تصور به طور کلی درست است، با وجود این، باید آن را دقیق‌تر کرد. وقتی که ریاضی‌دانان واژه‌ی «تابع» را به کار می‌برند، مقصودشان هرگونه تناظری است که بین کمیت‌های متغیر برقرار باشد، وقتی که یکی از آن‌ها (که آن را متغیر مستقل، یا آوند یا آرگومان تابع می‌نامند و به x نمایش می‌دهند) متناظر با دیگری (که آن را متغیر تابع یا مقدار تابع می‌نامندو به y نشان می‌دهند) باشد.

مقداری از آوند را انتخاب و جای آن را روی محور افقی دستگاه مختصات معین می‌کنیم. سپس مقداری از تابع را که متناظر با این مقدار آوند است، روی محور قائم مشخص می‌کنیم. روی صفحه‌ی مختصات، نقطه‌ای را با این مختصات نشانه می‌گذاریم. اگر پشت سر

هم، مقادیر تازه و تازه‌تری از آوند را در نظر بگیریم، روی صفحه‌ی مختصات، یک منحنی به دست می‌آوریم که معرف تابع به صورت عینی آن است، یعنی قانون تناظر بین متغیرهای مستقل و تابع را به صورتی قابل رؤیت نشان می‌دهد.

منحنی یک تابع، ممکن است شامل نقطه‌های خاصی باشد. ممکن است منحنی در ابتدا رو به پایین و سپس رو به بالا حرکت کند. دو قسمت انتهای سقوط و ابتدای رشد، در نقطه‌ی مینیمم به هم می‌رسند. برعکس هم می‌تواند باشد؛ منحنی ابتدا اوج بگیرد و سپس رو به حضیض رود. نقطه‌ی برخورد آخرین قسمت رو به اوج با نخستین قسمت رو به حضیض را ماکزیمم گویند. ممکن است خمیدگی منحنی ابتدا به طرفی و سپس به طرف دیگر باشد. جایی را که منحنی در آن جهت خمیدگی خود را تغییر می‌دهد، نقطه‌ی عطف گویند.

بالاخره، منحنی یک تابع ممکن است دچار گسستگی‌هایی بشود. برای مثال، منحنی در ارتفاعی پاره می‌شود و به صورت



نقطه‌های خاص در توابع یک متغیره

جهشی، حرکت خود را از نقطه‌ی پایین‌تر یا بالاتری ادامه می‌دهد. یا همان‌طور که آوند به مقداری نزدیک می‌شود، منحنی تابع به سمت بی‌نهایت (در جهت مثبت یا منفی) می‌رود و به ازای این مقدار آوند، پاره می‌شود و ما شاهد آن هستیم که چگونه منحنی از بی‌نهایت (گاه بی‌نهایت مثبت و گاه بی‌نهایت منفی) بازمی‌گردد.

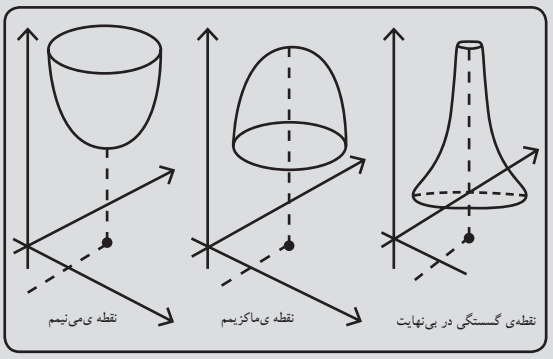
بازهم اندکی رسم

برای نمایش هر یک از تابع‌هایی که تا این‌جا بررسی کردیم، هر بار، تنها دو محور مختصات را در نظر داشتیم: یکی برای مقادیر آوند، و دیگری برای مقادیر تابع.

ولی در ریاضیات به تابع‌هایی هم می‌پردازند که شامل چند و مثلاً دو آوند هستند. در این مورد، برای نشان دادن مقادیر آوندها به دو محور نیاز داریم. در این حالت، هر جفت مقدار آوندها، متناظر است با مقدار معینی از تابع.

برای روشن شدن وضع، محور سومی به این دو محور اضافه و مقادیر تابع را روی آن جدا می‌کنیم. سه مختص (دو آوند و یک مقدار تابع)، نقطه‌ای از فضا را مشخص می‌کنند. با انتخاب انواع ممکن ترکیب‌های دو آوند، و پیدا کردن نقطه‌ی متناظر آن‌ها در فضا، سطحی به دست می‌آید که همان شکل عینی تابع دو متغیری است.

روی این سطح‌ها هم ممکن است به نقطه‌های خاص برخورد کنیم. نقطه‌ی مینیمم، نقطه‌ی ماکزیمم و گسستگی در بی‌نهایت.



نقطه‌های خاص در توابع دو متغیره

تصویرهای بالا معنای این اصطلاح‌ها را روشن می‌کند.

احتیاط کنید! یخ‌بندان است

می‌توان با انتخاب سطح‌های عجیب و غریبی از تابع‌های دو متغیری، مجموعه‌ی بزرگی از دیدنی‌های نادر را تشکیل داد.

برای مثال، این یکی از نمونه‌های بسیار جالب است: آیا موجی را دیده‌اید که به شیب ملایم ساحل برخورد می‌کند؟ نام دقیق این «موج‌ها» «مجموعه‌ی تابع‌های بسل» است. یا این کنده‌ی کج و کوله‌ی درخت را در نظر بگیرید که سطح مدول تابع گامای اولر است.

اگر در هر شکلی، تصویری هندسی از یک تابع چند متغیری می‌بینید و اگر با دیدن هر تابع، متوجه پدیده‌ای فیزیکی می‌شوید که به وسیله‌ی این تابع شرح داده می‌شود، در این صورت طبیعی است که هر ویژگی شکل، انعکاسی از ویژگی جریان پدیده‌ای باشد و برعکس: هر جریان نامتعارف و غیرعادی یک پدیده در تصویری عجیب و غریب منعکس شود که نماینده‌ی یک تابع است. در حالت خاصی که پدیده‌ی مفروض با یک متغیر شرح داده می‌شود، به نقطه‌های خاص منحنی نمایش تغییرات تابع برمی‌خوریم.

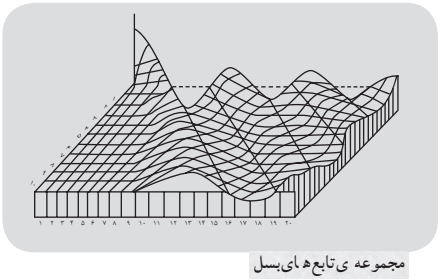
برای مثال، ترمز کردن اتومبیل را در نظر می‌گیریم. منحنی حرکت آن را رسم می‌کنیم. زمان را روی محور افقی و فاصله‌ی متناظری را که اتومبیل طی کرده است، روی محور قائم نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر، مسافت را تابعی از زمان در نظر می‌گیریم. روشن است که منحنی به سمت یک خط افقی می‌رود.

اتومبیل بعد از پیمودن مسافت معینی می‌ایستد.

مسافتی که بعد از ترمز کردن طی شده است، تا حد زیادی به ناهمواری جاده بستگی دارد. هر چه این ناهمواری بیشتر باشد، این مسافت کمتر است. همان‌طور که دیده می‌شود، ناهمواری جاده برای

روند مورد نظر ما، یک متغیر واقعی است. در نتیجه، آن را هم به عنوان آوندی از تابع خود (فاصله‌ای که اتومبیل طی کند) در نظر می‌گیریم.

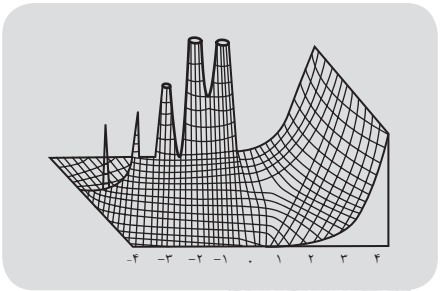
بنابراین، تغییرات تابع را باید در یک دستگاه مختصات سه بعدی نمایش دهیم. روی یکی از محورها، زمان را قرار می‌دهیم، روی دیگری، ناهمواری جاده و روی سومی، فاصله‌ای را که در زمان معین و با ناهمواری معین جاده پیموده می‌شود (سرعت اولیه‌ی اتومبیل را در همه‌ی حالت‌ها، یکسان گرفته‌ایم).



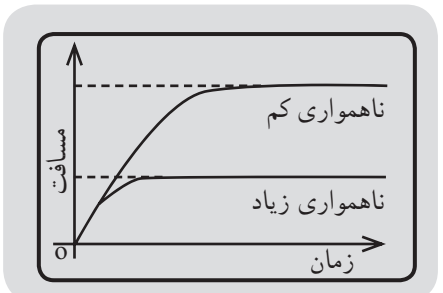
مجموعه ی تابع های بسل

به سطحی که نمایش این تابع دو متغیری است، با دقت نگاه کنید. می‌بینید که وقتی ناهمواری را صفر بگیریم، اتومبیل هیچ تمایلی به ایستادن، یا حتی کند شدن ندارد. مثل این که حدی برای حرکت خیالی آن وجود ندارد و مقطع سطح ما بالا و بالاتر می‌رود (اتومبیل ما با سرعتی ثابت پیوسته به پیش می‌رود).

بوی فاجعه به روشنی در این جا به مشام می‌رسد! رانندگی با اتومبیلی که روی چهار چرخ خود می‌لغزد، ممکن نیست!

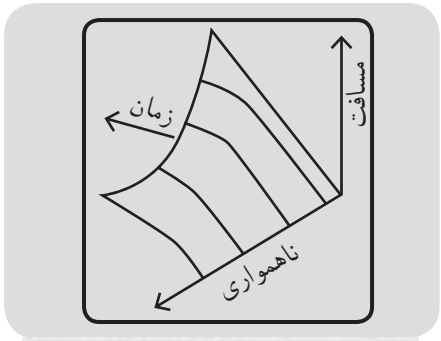


سطح مدول تابع گامای اولر



منحنی حرکت اتومبیلی که ترمز کرده است، به ناهمواری جاده بستگی دارد.

اگر ناهمواری جاده در تمامی طول مسیر ناهمسان باشد، سطح ما پیچیده‌تر به نظر می‌آید. تغییر اساسی وقتی پیش می‌آید که مثلاً



در اینجا مسافتی را که اتومبیل در حال ترمز پیموده است، به صورت تابعی از دو متغیر زمان و ناهمواری جاده نشان داده‌ایم.

اتومبیل به قسمتی از جاده برخورد کند که یخ‌بندان باشد، زیرا بلافاصله حالت ترمز به حالت لغزیدن تبدیل می‌شود. در سطحی که مسافت پیموده شده به وسیله‌ی اتومبیل، سرعت و شتاب آن را نشان می‌دهد، شکستگی و انقطاع پیش می‌آید، یعنی همان ویژگی‌هایی که پیش‌تر درباره‌ی آن‌ها صحبت کردیم.

پدیده‌ای در برابر ماست که می‌تواند به فاجعه به معنای طبیعی و عادی آن بینجامد و در عین حال، مثالی از فاجعه به معنای ریاضی آن است. واقعیت این است که نظریه‌ی فاجعه‌ها (اگر بخواهیم آن را به صورت‌های عینی توضیح دهیم) تعمیمی از نظریه‌ی ویژگی‌های تابع، به خصوص ویژگی‌های پیچیده‌ای مثل شکستگی و ناپیوستگی منحنی‌ها و سطح‌هایی است که معرف رفتار تابع هستند.

آزمایشی با نیروسنج

در نقطه‌های دور افتاده‌ی آنالیز ریاضی فرونمی‌رویم و خود را به شاخه‌ی عینی‌تری از ریاضیات، یعنی نظریه‌ی کنترل، محدود می‌کنیم.

برای شروع به آزمایشی می‌پردازیم. موضوع آزمایش، یک نیروسنج معمولی است. قلاب نیروسنج را می‌گیرید و آن را با نیرویی می‌کشید، عقربه‌ی آن روی نشانه‌ای که متناظر با تغییر طول فنر است، می‌ایستد.

مقدار نیرویی که بر قلاب وارد می‌کنید و آن را می‌کشید، معرف تأثیری بیرونی بر یک چیز و طول فنر، معرف حالت درونی آن چیز است.

در نظریه‌ی کنترل، معمولاً از کمیت‌های متغیر درونی که حالت یک چیز را نشان می‌دهند و متغیرهای بیرونی یا کنترل کننده، یعنی کمیت‌هایی که حالت یک چیز به آن‌ها بستگی دارد، صحبت می‌کنند.

حالا نیروی وارد بر قلاب را کمی بیشتر کنید، عقربه‌ی نیروسنج کمی پایین‌تر می‌آید.

آیا درستی این حکم، طبیعی به نظر نمی‌رسد که: تغییر کوچک کمیت‌های متغیر بیرونی، موجب تغییر کوچکی در کمیت‌های درونی می‌شود؟ ولی واقعیت این است که این حکم همیشه درست نیست!

ادامه دارد