رابطه‌ی فیثاغورس، اثبات و کاربردهای آن

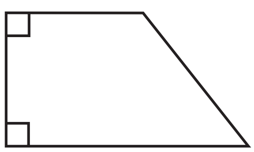
موسی هاشملو

کلید واژه‌ها: فیثاغورس، مثلث قائم‌الزاویه، عدد گنگ، عدد گویا، مساحت مثلث، حجم مکعب، هرم، تشابه .

اشــاره: ابتــدا بــه تاریخچــه‌ای مختصر دربــاره‌ی پیدایــش مکتــب و راز و رمــز فیثاغورســیان اشــاره می‌کنیم و سپس به روش‌هایی که به اثبات رابطه‌ی فیثاغورس می‌انجامنــد می‌پردازیم و در آخر برخی از کاربردهای آن را بررسی می‌کنیم.

تاریخچه

تقســیم‌بندی زمین‌های اطراف نیل، که هر سال بر اثر طغیان آب از بین می‌رفت سبب می‌شد که هرچند یک بار این تقسیم‌بندی تجدید شود. شیوه‌ی تقسیم‌بندی به این صورت بود که مثلثی بــا ابعــاد ۳ و ۴ و ۵ (واحد طول) با ســنگ‌چین یا نی یــا چوب یا مــوادی دیگر می‌ســاختند. آنان می‌دانســتند که مثلثی با این ابعــاد دارای یک زاویه‌ی قائمه (یعنی دارای دو پاره‌خط راســت عمود بر هم) اســت. بنابراین با این روش به سادگی، قطعه زمین‌هایی مانند شکل زیر را که دارای گوشه یا گوشه‌هایی قائم بودند، تقسیم می‌کردند.



فیثاغــورس رابطه‌ی بین ضلع‌های مثلث مصری را پیدا کرد که با رابطه‌ی $۵^۲=۴^۲+۳^۲$ بیان می‌شــود. فیثاغورس نشــان داد که این رابطه برای هر مثلث قائم‌الزاویه با ضلع‌های a، b و c به صورت زیر $a^2+b^2=c^2$ درست است و رابطه‌هایی برای این ضلع‌ها پیدا کرد.

امروزه مثلث‌های قائم‌الزاویــه‌ای که ضلع‌های آن‌ها با عددهای طبیعی بیان شوند، **مثلث‌های فیثاغورسی** نامیده می‌شوند.

این مطلــب را متعلق به فیثاغورس می‌داننــد که در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربعی که روی وتر ســاخته شــود برابر است با مجموع مربع‌هایی که روی دو ضلع دیگر ساخته می‌شود.

راز مکتب فیثاغورسی

ابتدا گمان می‌کردند که ضلع‌های هر مثلث قائم‌الزاویه را می‌توان با عددهای طبیعی بیان کرد، ولی بررسی‌های ریاضی‌دان‌های مکتب فیثاغورسی نشان داد که این تصور درست نیست، برای مثال، مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین

یک مثلث فیثاغورسی نیست، زیرا نمی‌توان عددهایی صحیح پیدا کرد که در رابطه‌ی زیر صدق کنند:

$$a = b: \qquad a^2 + a^2 = c^2 \qquad \text{یا} \qquad 2a^2 = c^2$$

(امروزه می‌دانیم که تساوی اخیر، معادل تساوی زیر است:

$$c = a\sqrt{2} \qquad \text{یا} \qquad \frac{c}{a} = \sqrt{2}$$

(می‌توان ثابت کرد که $\sqrt{2}$ را نمی‌توان به صورت یک کسر نوشت، یعنی عددی گویا مساوی $\sqrt{2}$ وجود ندارد.)

این کشف برای فیثاغورسی‌ها مصیبت‌بار بود، زیرا این اعتقاد آن‌ها را که همه‌ی پدیده‌ها با عددهای طبیعی قابل بیان هستند، دچار شکست کرد. کشف این مطلب که دنیای عددها با دنیای ساختمان‌های هندسی متفاوت است، چنان اثر بزرگی داشت که دانشمندان فیثاغورسی آن را به عنوان رازی مخفی کردند و بررسی‌های هندسی را به طور کلی از حساب جدا کردند.

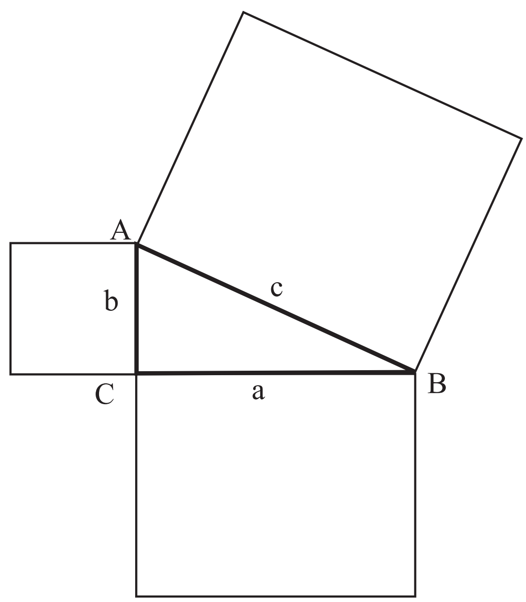
این مطلب به طور جدی مانع پیشرفت حساب در یونان شد، در حالی‌که هندسه را به نحو سریعی تکامل داد.

افتخار تفکر ریاضی فیثاغورسی

مشهورترین کشف فیثاغورسی این است:

«مربعی که روی وتر مثلث قائم‌الزاویه ساخته شود برابر است با مجموع مربع‌هایی که روی ضلع‌های مجاور به زاویه‌ی قائمه ساخته می‌شوند.» عکس این مطلب هم صحیح است: ($a^2 + b^2 = c^2$)

اگر ضلع‌های a، b و c از مثلثی در شرایط فیثاغورسی:صدق کنند، در این صورت مثلث مفروض قائم‌الزاویه است و زاویه‌ی قائمه‌ی آن روبه‌روی ضلع c (وتر مثلث) است (مطابق شکل زیر).



به ویژه مثلثی جالب است که سه ضلع آن با عددهای صحیح بیان شود و شرط فیثاغورسی در مورد آن‌ها برقرار باشد.

برای مثال، مثلث با ضلع‌های ۳، ۴ و ۵ شرط فیثاغورسی را قبول دارد:

$۳^۲+۴^۲=۵^۲$

و این ساده‌ترین و معروف‌ترین مثلث فیثاغورسی است.

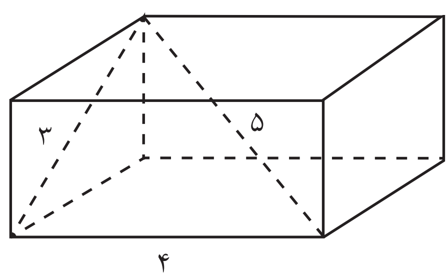
در این جا چند مثلث فیثاغورسی آورده‌ایم:

a=۳	b=۴	c=۵
a=۵	b=۱۲	c=۱۳
a=۱۵	b=۸	c=۱۷
a=۷	b=۲۴	c=۲۵
a=۲۱	b=۲۰	c=۲۹
a=۹	b=۴۰	c=۴۱
a=۱۰	b=۲۴	c=۲۶

به سادگی دیده می‌شود که همه‌ی این مثلث‌ها در شرط فیثاغورسی $a^2 + b^2 = c^2$ صدق می‌کنند و بنابراین قائم‌الزاویه‌اند.

در مصر قدیم و سایر کشورهای شرق آسیا از مثلثی که ضلع‌های آن ۳، ۴ و ۵ باشد، برای ساختن زاویه‌ی قائمه (یعنی برای رسم دو خط راست عمود بر هم) در عمل استفاده می‌کرده‌اند. تصادفی نیست که باستان‌شناسان چنین نسبت‌هایی را در اندازه‌های سنگ‌های تراشیده شده‌ی هرم خفرون پیدا کرده‌اند. این حقیقت بسیار جالب است که اتاق فرعون در هرم مشهور خئوپس اندازه‌هایی دارد که کاملاً به عددهای ۳، ۴ و ۵ مربوط‌اند. اگر قطر تمام اتاق را ۵ واحد بگیریم، بزرگ‌ترین دیوار آن ۴ و قطر کوچک‌ترین دیوار آن مساوی ۳ واحد است.

مطابق شکل زیر:



(اتاق فرعون در هرم خئوپس)

در دوران باستان، مثلثی را که ضلع‌های آن ۳، ۴ و ۵ باشد، شکلی اسرارآمیز و جادویی به حساب می‌آوردند. چنین مثلثی خاصیّت‌های جالب دیگری هم دارد. محیط آن با عدد ۱۲ بیان می‌شود و مساحت آن برابر با ۶ است، یعنی عددی که درست بعد

از سه عدد ضلع‌ها قرار گرفته است؛ بالاتر از همه می‌توان سه عدد پیدا کرد که مجموع مکعب‌های آن‌ها خود مکعب کاملی باشد، برای مثال:

(رابطه‌ی منتسب به افلاطون) $3^3+4^3+5^3=6^3$

این رابطه به معنای آن است که حجم مکعبی به ضلع ۶ واحد برابر با مجموع حجم‌های سه مکعب با ضلع‌های مساوی ۳، ۴ و ۵ واحد است (این قضیه منتسب به افلاطون است).

عددهای فیثاغورسی خاصیت‌های جالب دیگری هم دارند که در این‌جا بدون اثبات آن‌ها را ذکر می‌کنیم:

۱) یکی از «ضلع‌های مجاور به زاویه‌ی قائمه» مضربی از ۳ است.

۲) یکی از «ضلع‌های مجاور به زاویه‌ی قائمه» مضربی از ۴ است.

۳) یکی از سه عدد فیثاغورسی مضربی از ۵ است.

بدون تردید، هنوز هم نجارهای روستاها موقع ساختن خانه‌ها یا انبارهای چوبی برای این‌که زاویه‌ی قائمه به دست آورند از مثلثی به ضلع‌های ۳، ۴ و ۵ استفاده می‌کنند؛ و این درست همان شیوه‌ای است که در هزاران سال قبل برای ساختمان معبدهای بزرگ در مصر، بابل، چین و احتمالاً در مکزیک به کار می‌رفته است.

بنابراین، فیثاغورس این خاصیت مثلث قائم‌الزاویه را کشف نکرد، بلکه او برای نخستین بار توانست این خاصیت را تعمیم دهد، آن را ثابت کند و از نظر علمی به جنبه‌های عملی آن برسد.

روش‌هایی برای اثبات رابطه‌ی فیثاغورس

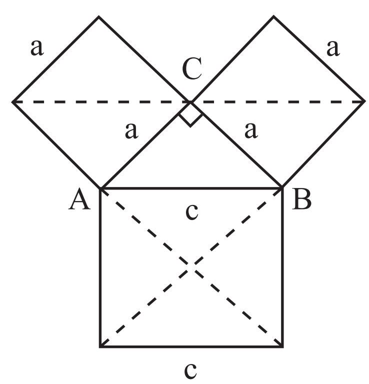
مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین اولین حالت خاص مورد نظر فیثاغورس بوده است که با توجه به شکل زیر، به سادگی می‌توان نتیجه‌ی مورد نظر را در آن به دست آورد:

$a^2+b^2=c^2$ و $a=b$

$a^2+a^2=c^2$

و یا

$2a^2=c^2$

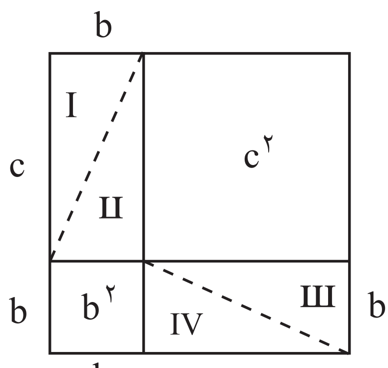


بدیهی است که سطح مربع‌های دو ضلع قائمه که هر یک به دو مثلث مساوی تقسیم شده‌اند، مربع وتر که به چهار مثلث مساوی تقسیم شده است را می‌پوشانند.

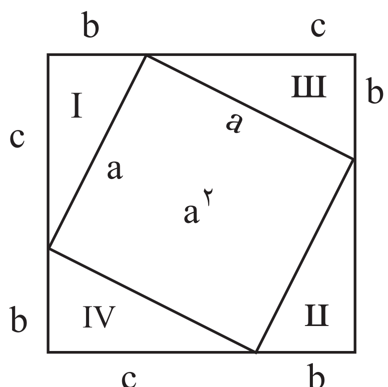
تقریباً هر قرنی که می‌گذرد روش‌های جدیدی برای اثبات این قضیه ارائه می‌شود یا لااقل فکر روش‌های جدید اثبات به وجود می‌آید. هنوز هم افزایش تعداد این اثبات‌ها به پایان نرسیده است. اقلیدس در کتاب مقدمات خود به ۸ طریق این رابطه را ثابت کرده است. خواجه نصیرالدین طوسی نیز آن را در سال ۱۵۹۴ ثابت کرد. در این جا به بیان چند روش جالب که به هم‌ارزی شکل‌ها و تساوی مساحت‌ها مربوط می‌شود، می‌پردازیم.

روش اول:

این روش، اثبات احتمالی خود فیثاغورس است:



(شکل ۱)



(شکل ۲)

مربعی می‌سازیم که ضلع آن مساوی مجموع b و c یعنی ضلع‌های مجاور به زاویه‌ی قائمه از مثلث قائم‌الزاویه‌ی مفروض باشد (شکل (۱)). این مربع را به دو مربع b^2، c^2 و دو مستطیل مساوی به ضلع‌های b و c تقسیم می‌کنیم.

این مستطیل‌ها را به نوبه‌ی خود به چهار مثلث قائم‌الزاویه‌ی مساوی I، II، III و IV، تقسیم می‌کنیم. این مثلث‌ها را آن‌طور که در شکل (۲) دیده می‌شود قرار می‌دهیم. در این صورت

بلافاصله مربع $a^۲$ به دست می‌آید و چون مربع (۱) با مربع (۲) معادل و برابر است؛ می‌توان نوشت:

$$\text{شکل (۱)}\quad b^۲+c^۲+۴bc=a^۲+۴bc\quad \text{شکل (۲)}$$

از حذف $۴bc$ از دو طرف تساوی بالا:

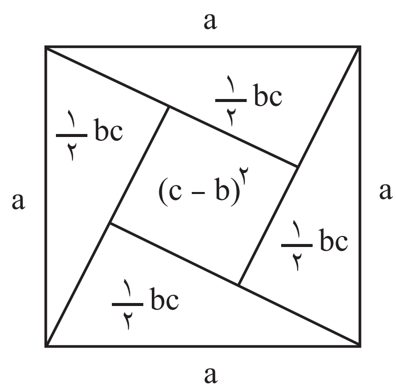
$$b^۲+c^۲=a^۲$$

نتیجه: با توجه به شکل‌های (۱) و (۲)، اگر از مربع به ضلع $b+c$ مقدار $۲bc$ را کم کنیم، از یک طرف $b^۲+c^۲$ و از طرف دیگر $a^۲$ را می‌دهد، یعنی:

$$a^۲+b^۲=c^۲$$

روش دوم:

اثبات بها سکارا (مؤلف معروف قرن دوازدهم).
ریاضی‌دان بزرگ هند، زیر این شکل تنها یک کلمه نوشته است: نگاه کنید.



با توجه به شکل داریم:

$$a^۲=(c-b)^۲+۴(\frac{۱}{۲}bc)$$

یا:

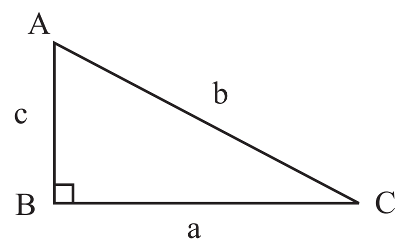
$$a^۲=c^۲+b^۲-۲bc+۲bc$$

یا:

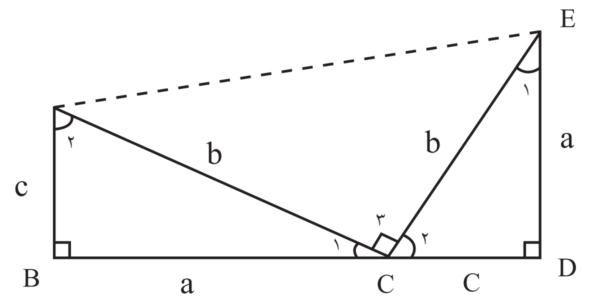
$$a^۲=b^۲+c^۲$$

روش سوم

مثلث قائم‌الزاویه‌ی زیر را در نظر می‌گیریم:



مثلثی با همان ابعاد با قاعده‌ی b را در کنار آن، مانند شکل زیر قرار می‌دهیم:



نقطه‌ی E را با خط راستی به A وصل می‌کنیم تا ذوزنقه‌ی ABDE حاصل شود. بدیهی است که $\angle c_۱+c_۲=۹۰^\circ$ و در نتیجه داریم:

$$\angle c=۹۰^\circ$$

از طرفی می‌دانیم که مساحت ذوزنقه چنین است:

$$\text{مساحت ABCD}=\frac{۱}{۲}\times\text{ارتفاع}\times\text{مجموع دو قاعده}=\frac{۱}{۲}(a+c)(a+c)$$
$$=\frac{۱}{۲}(a+c)^۲$$

از طرفی دیگر، مساحت ذوزنقه برابر مجموع مساحت سه مثلث قائم‌الزاویه است:

$$\text{مساحت ذوزنقه‌ی ABCD}=\frac{۱}{۲}a.c+\frac{۱}{۲}a.c+\frac{۱}{۲}b.b$$
$$=ac+\frac{۱}{۲}b^۲$$

بنابراین داریم:

$$\text{مساحت ذوزنقه‌ی ABCD}=\frac{۱}{۲}(a+c)^۲=ac+\frac{۱}{۲}b^۲$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{۲}(a+c)^۲=ac+\frac{۱}{۲}b^۲$$

طرفین تساوی اخیر را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$(a+c)^۲=۲ac+b^۲$$

$$a^۲+c^۲+۲ac=۲ac+b^۲$$

و یا پس از اختصار لازم داریم:

$$a^۲+c^۲=b^۲$$