

متوسطه ۲
ریاضی

۱۳۴



وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی



فصلنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

برای دانش آموزان دوره دوم متوسطه اهلبار دبیران ریاضی

شماره پیدرپی ۱۳۴ / پاییز ۱۴۰۴ / دوره سی و پنجم / ۴ صفحه

www.roshdmag.ir

از کلاه انیشتین و ۶۱۷۴ تا شبع لدا باغ

بیتا + تالسی

چگونه بازی را ببرم؟

بنزیا بزا

منطق ریاضی در ادب پارسی

و...



فاطمه رضاعه مدرسه

«در جامعه انقلابی
ما اگر شأن زن از مرد بیشتر
نباشد، کمتر نیست و روی این
اصل باید ویژگی‌های زن در زمینه‌های
گوناگون، مانند آموختن علم، جهاد، ارتباط
با مرد، نقش مادری (که [در] تمام این‌ها
زندگی حضرت زهرا (علیها السلام) یک نمونه
است)، مورد بررسی قرار گیرد.»

حضرت امام خامنه‌ای
(مدظله العالی) ۱۳۶۴/۱۲/۱۰



سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی

فصلنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
برای دانش آموزان دوره دوم متوسطه
همیار دبیران ریاضی
ز ۱۴۰۵ | دوره سی و نهم | ۸ صفحه
www.rosdnamag.ir

مدیر داخلی: مهدیه جبارپور
ویراستار ادبی: بهروز راستانی
طراح گرافیک: روح الله محمودیان
دبیر عکس: اعظم لاریجانی

بهنام آیتي پور | محرم ابردموسي | مهديت تحريه
محمد تقی طاهري | تنجاني | محمد رضا حسيني | رحيم
سيد محمد رضا هاشمي موسوي | احسان يار محمدی

وبگاه
www.roshdmag.ir
رایانامه
borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir
صفحه خرید مجلات
roshdmag.ir/u/2sg

تهران، ایرانشهر شمالی، پلاک ۲۷۰
تلفن دفتر مجله ۰۲۱-۸۸۸۳۱۱۶۱-۹
(داخلی ۵۲۳)
نمایر مجله ۰۲۱-۸۸۴۹۰۳۱۶
صندوق پستی ۰۲۱-۸۸۴۹۰۳۱۶

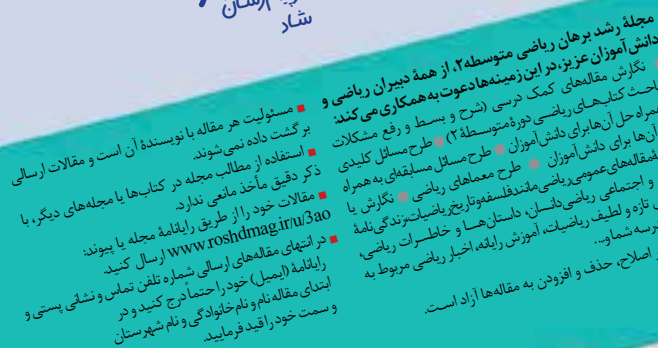
صندوق پستی دفتر مجله
۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
صندوق پستی امور مشترکین
۱۵۸۷۵/۳۳۳۱
تلفن امور مشترکین
۰۲۱-۸۸۸۶۷۳۰۸

سنگ، سرریز، بازی و برهان / از کلاه انیشتین و ۶۱۷۴۶ تا شیخ گدایا /
معجزه ۲ /
چگونه بازی را ببریم؟ / معجزه تقی طاهری تنجانی ۴۱ /
منطق ریاضی در ادب پارسی / بهنام آیتی پور ۷۱ /
لغت و لو / تالس نوجوان ایرانی / نرگس خبندانی ۱۲۱ /
بیاتالس / اثبات قضیه تالس به چندین روش متفاوت / بیتا معصوم ۱۵۱ /
پژوه نامه / راهبرد نقطه ثابت در حل یک مسئله (قسمت دوم) / معصومه مفیدی ۱۸۱ /
لرچی، خورشیدپرست ابر / احسان یار معری ۲۳۱ /
بنز یا بنز / پارادوکس مونتی هال به بیانی تازه / انیس ملک احمدی ۲۷۱ /
داستان های شیرین ریاضی (قسمت هشتم) / معاصیه حجم اجسام در
للاس هندسه / اسید معصوم ضاهاشمی موسوی ۲۹۱ /
نامساوی ییل / محمود البرزی ۳۶۱ /
تغییر عددی به روش ارسطو / حمید پورمند ۳۹۱ /
یک تعبیر هندسی برای میانگین همساز / مراد کریمی شهبازوندی ۴۱۱ /
پیشرو / نمونه سوال های امتحان نهایی بارویکردهای / نرگس خبندانی ۴۲۱ /
چشم انداز / نمونه سوال های آزمون سراسری بارویکردهای / نرگس خبندانی ۴۴۱ /
معلومی کن! / امین آقاخان نژاد ۴۶۱ /



بركة اشتراك
مجلات رشد

خانواده مجلات رشد همه تلاش خود را کرده است تا این مجله در دسترس عموم دانش آموزان قرار گیرد و همه کودکان و نوجوانان میهن عزیز اسلامی مان امکان تهیه آن را داشته باشند.



بازی و برهان

از کلاه انیشتین و ۱۷۴

تاشیح للرباخ

مجید حکمت

اسمیت انجام داد! او که به طور تفننی با رسم شکل های هندسی خود را سرگرم می کرد، با استفاده از نرم افزار Poly Form Puzzle Solver، با آزمون و خطا و طراحی های تجربی توانست به این مهم دست یابد. البته او بلافاصله با ریاضی دانان ارتباط گرفت و آنان کمکش کردند تا در چند مقاله ریاضی، اثبات علمی نیز ارائه شود.



تصویر ۱



تصویر ۲

خوب می دانید که اگر بخواهیم یک سطح را فقط با یک نوع چندضلعی منتظم بپوشانیم، آن چندضلعی از این سه حالت خارج نیست: مثلث متساوی الاضلاع؛ مربع؛ شش ضلعی منتظم. این سه شکل تنها گزینه هایی هستند که می توانند بدون شکاف یا هم پوشانی، صفحه را به طور کامل و یکنواخت بپوشانند. این ویژگی به خاطر زاویه داخلی آن هاست؛ به گونه ای که مجموع زاویه های داخلی آن ها در اطراف هر رأس ۳۶۰ درجه می شود.

این شکل ها از گذشته ایده ای برای کاشی کاری های تناوبی بوده اند. در این نوع پوشش، الگوها به صورت تکراری و قابل پیش بینی در سراسر سطح گسترش می یابند. اما در قرن بیستم، سؤال جدیدی در ذهن ریاضی دانان نقش بست: کاشی کاری های غیرتناوبی؛ یعنی کاشی کاری ای که در آن هیچ بخش از الگو با جابه جایی یا دوران در سطح کاشی کاری شده ظاهر نشود. آیا چنین چیزی امکان پذیر است؟

کلاه انیشتین و شبیح! پاسخی از دل تفنن...

در سال ۲۰۲۲ شکل جالبی پیدا شد: یک سیزده ضلعی غیرمنتظم و غیرمحدب با امکان پوشش سطح، که آن را «کلاه انیشتین» نامیدند (تصویر ۱). سپس با استفاده از کلاه انیشتین، یک شکل معرفی شد که از نظر ظاهری شبیه «شبیح» بود و می توانست سطح را به طور کامل و بدون تکرار دوره ای بپوشاند. دستاوردی شگفت انگیز! (تصویر ۲) و هنگامی بر شگفتی افزوده می شود که بدانیم کشف اصلی را کارمند بازنشسته یک چاپخانه به نام **دیوید**

عدد ۶۱۷۴: ثبات در دل تکرار

در حوزه عددی، نمونه‌ای مشابه از کشف حاصل از کنجکاوی با عدد را می‌توان در عدد ۶۱۷۴ مشاهده کرد، که به «ثابت کاپرکار» معروف است. دی. آر. کاپرکار هندی مدرس ریاضی بود. از آنجا که او زیاد با عددها سرگرم می‌شد و به دنبال یافتن رابطه‌های بین آن‌ها بود، دیگران کارهایش را بی‌اهمیت و بدیهی به حساب می‌آوردند، یافته‌هایش را نادیده می‌گرفتند و حتی مسخره می‌کردند. اما او دست‌بردار نبود. بالاخره در دهه ۱۹۴۰ با بازی ساده‌ای با عددهای چهاررقمی، متوجه شد که اگر رقم‌های هر عدد چهاررقمی (با رقم‌های غیریکسان) یک بار صعودی و یک بار نزولی نوشته شوند و از هم کم شوند و این روند همین‌طور تکرار شود، همیشه جواب به عدد ثابت ۶۱۷۴ ختم می‌شود (تصویر ۳).

$$۷۶۵۱ - ۱۵۶۷ = ۶۰۸۴$$

$$۸۶۴۰ - ۰۴۶۸ = ۸۱۷۲$$

$$۸۷۲۱ - ۱۲۷۸ = ۷۴۴۳$$

$$۷۴۴۳ - ۳۴۴۷ = ۳۹۹۶$$

$$۹۹۶۳ - ۳۶۹۹ = ۶۲۶۴$$

$$۶۶۴۲ - ۲۴۶۶ = ۴۱۷۶$$

$$۷۶۴۱ - ۱۴۶۷ = ۶۱۷۴$$

تصویر ۳

تفنن در ریاضی: محدودیت‌ها و فایده‌ها

نمونه‌هایی مانند کلاه انیشتین و عدد ۶۱۷۴ نشان می‌دهند که تفنن در ریاضی گاهی می‌تواند به کشف‌هایی منجر شود که سال‌ها ذهن دانشمندان را مشغول کرده‌اند. باید بدانید، این اتفاق‌ها بسیار نادرند، ولی توجه به این نکته مهم است که تفنن در ریاضی، اگرچه همیشه به کشف نمی‌انجامد، اما ذهن را تربیت می‌کند، علاقه را برمی‌انگیزد و گاهی درهای تازه‌ای به روی اندیشه می‌گشاید. همین کافی است که آن را جدی بگیریم، چون این‌ها نیز دستاوردهایی شخصی و مؤثر محسوب می‌شوند.

اما تفنن و بازی با عددها کافی نیست!

در کنار این مثال‌های الهام‌بخش، باید واقع‌بین هم بود. برای کشف‌های جدید و حل مسائل بنیادین، به دانش عمیق، ابزارهای پیشرفته و سال‌ها پژوهش جدی نیاز است. مثلاً حدس گلدباخ (هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ را می‌توان به صورت مجموع دو عدد اول نوشت) از سال ۱۷۴۲ مطرح شده و روش‌های ساده را پشت سر گذاشته است و اکنون تحصیلات پیشرفته دانشگاهی در زمینه نظریه اعداد لازمه بررسی و اثبات آن است.

پیروز و سربلند باشید.

چگونه بازی را ببرم؟

کمر دردش خوب نیست. چرا شماها به او کمک نمی‌کنید؟!
حامد گفت: «منتظر شما بودیم. پدر بزرگ مأموریت پذیرایی
از شما را به ما داده است!»

آقای صالحی گفت: «ما خودمان از خودمان پذیرایی می‌کنیم.
غریبه که نیستیم. شما هم بروید و گردوها را جمع‌آوری کنید.
وقتی تمام شد یک بازی با گردوها یادتان می‌دهم.»
گفتم: «چه بازی‌ای؟!»

آقای صالحی گفت: «گردوها را جمع‌آوری کنید و آن‌ها که
پوست سبز ندارند را جدا کنید و با خودتان بیاورید تا برایتان
بازی را شرح دهم.»

من و حامد به سرعت برای جمع‌آوری گردوها اقدام کردیم.
مسئله‌هایی که آقای صالحی مطرح می‌کرد، همیشه نکته‌های
آموزنده‌ای داشتند و روی پرورش فکرمان تأثیر زیادی
می‌گذاشتند.

ناهار که خوردیم، آقای صالحی اشاره کرد ظرف گردوهای
بدون پوست را روی میز بگذاریم. گردوها را روی میز ریختم.
آقای صالحی گفت: «۵۰ تا از گردوها را روی میز بگذار و بقیه
را داخل گونی بریز.» سپس رو به پدر بزرگ کرد و گفت: «با
اجازه پدر بزرگ می‌خواهم همه این گردوها را جایزه بدهم به
کسی که برنده بازی شود. اینجا ۵۰ گردو داریم. من و شما
به ترتیب از ۱ تا ۷ گردو را از روی گردوها بر می‌داریم. برنده
کسی است که در نوبت خود بتواند تعداد گردوها را به صفر
برساند.»

حامد گفت: «آقای صالحی فرقی می‌کند چه کسی بازی را
شروع کند؟»

آقای صالحی: «اگر راهبرد برد را بدانیم، نفر اول می‌تواند
شروع‌کننده خوبی باشد. حالا اول شما شروع کنید. اشکالی

محمد تقی طاهری تنجانی

پژوهشگر ریاضی و مؤلف کتاب‌های درسی

امروز روز مهمی برای پدر بزرگ بود. وقت برداشت گردو بود.
گردوها رسیده بودند. پدر بزرگ از یکی از اهالی روستا برای
چیدن گردوها از درختان کمک گرفته بود. صدای ترکه‌ای که
کارگر به شاخه‌های درخت گردو می‌زد، ضرب‌آهنگ موسیقی
باغ شده بود. در هر گوشه‌ای از باغ تعدادی گردو خودنمایی
می‌کردند که در اثر ضربه‌ای که توسط کارگر بر سرشان
خورده بود، در گوشه‌ای آرمیده بودند.

پدر بزرگ میهمان ویژه‌ای هم داشت. آقای صالحی به همراه
خانواده ناهار میهمان پدر بزرگ بودند. آقای صالحی دبیر
ریاضی ما در شهر بود و پدر بزرگ به من و پسرعمویم حامد
مأموریت استقبال و پذیرایی از آن‌ها را داده بود. نزدیک‌های
ظهر بود که آقای صالحی با خانواده رسیدند. من مشغول
ریختن چایی شدم و حامد برای آوردن وسایل پذیرایی به
درون عمارت رفت. دور میزی که زیر آلاچیق بود نشستیم.
آقای صالحی نگاهی به اطراف انداخت و کنجکاوانه پرسید:
«پدر بزرگ را نمی‌بینم!»

گفتم: «پدر بزرگ در انتهای باغ مشغول جمع‌آوری
گردوهاست.»

آقای صالحی تبسمی کرد و گفت: «با این سن و سال
پدر بزرگ نباید خودش را با جمع‌آوری گردوها اذیت کند. برای



۴

شماره ۱۳۴ | پاییز ۱۴۰۰

ندارد؟!»

من ۳ گردو را از روی میز برداشتم، آقای صالحی فوراً ۷ گردو برداشت.

من ۶ گردو و آقای صالحی ۲ گردو، من ۵ گردو و آقای صالحی ۳ گردو، من ۷ گردو و آقای صالحی ۱ گردو، من ۳ گردو و آقای صالحی ۵ گردو. حالا ۸ گردو مانده بود و نوبت من بود. هر چه بر می‌داشتم آقای صالحی تعداد را به صفر می‌رساند. من دو تا برداشتم ۶ تایی باقی‌مانده را آقای صالحی برداشت. آقای صالحی برنده بازی شده بود.

آقای صالحی گفت: «همان‌طور که همه دیدند من برنده

شدم. حالا من جایزه‌ام را به کسی می‌دهم که بتواند قاعده برنده‌شدن را پیدا کند. شما چندبار بازی را تکرار کنید تا قاعده‌ای برای برد پیدا کنید.» سپس قلم و کاغذ خواست و خلاصه بازی خودمان را روی کاغذ نوشت.

$50 \xrightarrow{(1)} 47 \xrightarrow{(2)} 40 \xrightarrow{(1)} 34 \xrightarrow{(2)} 32 \xrightarrow{(1)} 27 \xrightarrow{(2)} 24 \xrightarrow{(1)} 17 \xrightarrow{(2)} 16 \xrightarrow{(1)} 13 \xrightarrow{(2)} 8 \xrightarrow{(1)} 6 \xrightarrow{(2)} 0$

او گفت: «علامت $\xrightarrow{(1)}$ یعنی نوبت نفر اول و علامت $\xrightarrow{(2)}$ یعنی نوبت نفر دوم. منظور از $50 \xrightarrow{(1)} 47$ این



۵

شماره ۱۳۱ | پاییز ۱۴۰۳

است که از ۵۰ تا، نفر اول ۳ تا بر می‌دارد و ۴۷ تا می‌ماند. حالا بروید قاعده را پیدا کنید تا من و پدر بزرگ با هم گپ بزنیم.» به گوشه‌ای از باغ رفتیم. با سی گردو شروع کردیم. اول حامد و بعد من به ترتیب از ۱ تا ۷ گردو را برداشتیم. حامد برنده شد.

$$\begin{aligned} & 30 \xrightarrow{(1)} 25 \xrightarrow{(2)} 17 \xrightarrow{(1)} 16 \xrightarrow{(2)} 9 \xrightarrow{(1)} 8 \\ & 8 \xrightarrow{(2)} 2 \xrightarrow{(1)} 0 \end{aligned}$$

کار را با چهل، پنجاه و یک‌بار با صد تا گردو شروع کردیم. نکته‌ای که به دست آوردیم این بود که در مرحله ماقبل آخر، اگر تعداد به ۸ می‌رسید، برنده همان شخص بود که تعداد را به ۸ رسانده بود. این تصادفی نبود. به مرحله‌های بازی خودمان با آقای صالحی برگشتیم. آقای صالحی هر بار در نوبت خودش گردوهای باقی‌مانده را به ۸، ۱۶، ۲۴، ۳۲، ۴۰، رسانده بود. تصادفی نبود. قاعده را یافتیم.

به سرعت نزد آقای صالحی رفتم و گفتم: «آقای صالحی قاعده را یافتیم. اگر من شروع کننده بازی باشم، همیشه برنده‌ام و اگر شروع با من نباشد، به شرطی که نفر اول قاعده را بلد نباشد، برنده من هستم.»

آقای صالحی با کنجکاوی گفت: «بیا با ۲۰ گردو شروع کنیم.» نمودار تعداد گردوها در مرحله‌ای که اول من و بعد آقای صالحی بازی را انجام دادیم این طور بود:

$$20 \xrightarrow{(1)} 16 \xrightarrow{(2)} 11 \xrightarrow{(1)} 8 \xrightarrow{(2)} 6 \xrightarrow{(1)} 0$$

آفرین آفرین گفتن آقای صالحی تمامی نداشت. گفت: «جایزه برای تو، ولی حالا اگر ما در بازی در هر مرحله از ۱ تا ۱۰ می‌توانستیم برداریم، چطور بازی را شروع کنیم؟»

فکری کردم و گفتم: «در حالت قبل ۸ را از کجا آوردیم؟ لابد ۷+۱ بود. پس اینجا هم ۱۰+۱ است و باید تعداد گردوها را مضرب ۱۱ کنیم.»

آقای صالحی ضمن تأیید حدس من گفت: «حالا قلم و کاغذ را بیاورید تا قاعده کلی و اثبات آن را برایتان شرح دهم.

قضیه: اگر مجموعه A دارای n عضو باشد و دو بازیکن به نوبت و در نوبت خود مجاز باشند از ۱ تا k عضو مجموعه را حذف کنند، آنگاه آخرین عضو مجموعه را کسی حذف خواهد کرد که برای حریف $m(k+1)$ عضو باقی بگذارد ($m \in \mathbb{N}$).

اثبات: فرض می‌کنیم نفر اول در نوبت اول چند عضو (از ۱ تا k عضو) را حذف کند و برای حریف یعنی نفر دوم $m(k+1)$ عضو باقی بگذارد. پس اکنون نوبت نفر دوم است. نفر دوم هر تعداد عضو را حذف کند، نفر اول در نوبت خود مکمل آن را تا

$k+1$ واحد حذف می‌کند (اگر: $a+b=S$ ، آنگاه a را مکمل b تا S و b را مکمل a تا S می‌نامیم).

مثلاً اگر نفر دوم a عضو حذف کند، نفر اول $k+1-a$ عضو را حذف می‌کند. وقتی بار دیگر نوبت به نفر دوم می‌رسد، به تعداد $k+1$ عضو از $m(k+1)$ عضو کم شده است. پس عضوهای باقی‌مانده در این مرحله برابرند با:

$$m(k+1) - (k+1) = (m-1)(k+1)$$

یعنی در این مرحله یک واحد از m کم می‌شود. باز اگر نفر دوم از ۱ تا k عضو از $(m-1)(k+1)$ عضو حذف کند، نفر اول باز هم به تعداد مکمل آن تعداد تا $k+1$ را حذف می‌کند. یعنی بار دیگر به اندازه $k+1$ عضو از $(m-1)(k+1)$ عضو باقی‌مانده حذف می‌شود و تعداد عضوهای باقی‌مانده به $(m-2)(k+1)$ می‌رسد.

اگر این روند ادامه پیدا کند، در مرحله ماقبل آخر تعداد عضوهای باقی‌مانده $k+1$ عضو خواهد بود که حالا باز نوبت نفر دوم است. اکنون نفر دوم نمی‌تواند همه $k+1$ عضو را یکجا بردارد. زیرا او مجاز است تنها از ۱ تا k عضو را بردارد. هر چه نفر دوم بردارد، نفر اول بقیه عضوها را بر می‌دارد و برنده بازی می‌شود.

آقای صالحی که علاقه‌مندی ما را نسبت به سخنانش دید، گفت: «برداشتن گردوها یا افزودن بر آن‌ها تا آن را به تعداد معینی برسانیم، در قانونی که گفته شد خدشه‌ای وارد نمی‌کند. حالا بروید و این بازی را انجام دهید. ۳۰ گردو داریم، دو نفر به ترتیب در نوبت خود از ۱ تا ۵ گردو بر آن گردوها می‌افزایند. برنده کسی است که در نوبت خود تعداد گردوها را به ۱۰۰ برساند. کدام یک از دو بازیکن برنده بازی است؟! می‌توانید مسئله را این طور در نظر بگیرید که یک توده ۳۰ گردویی و یک توده ۷۰ گردویی داریم. با ۷۰ گردو شروع کنید. کسی برنده است که تعداد گردوها را به صفر برساند. حالا مراحل را از آخر به اول انجام دهید!»

من و حامد سر از پانمی‌شناختیم. خوش حال بودیم که یک بازی با راهبرد (استراتژی) برد آن را یاد گرفته‌ایم. حالا می‌توانیم با بچه‌های روستا گردو بازی کنیم!





منطوق ریاضی در ادب پارسی

بهنام آیتی پور

مردان خدا پرده نذر دریند یعنی همه جا غیر خدا هیچ ندیند
مصرع اول گزاره است: «انسان‌های عارف به ذات خدا از ذهنیت‌های باطل رها شدند.»
مصرع دوم هم گزاره است: «انسان‌های عارف به ذات حضرت دوست، در همه امور، مؤثری غیر از اراده حق قائل نبودند.»
نقیض یک گزاره: اگر p یک گزاره باشد، نقیض گزاره p را با $\sim p$ نمایش می‌دهیم و ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش گزاره p است.

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

جدول ۱

۷ عددی اول است نقیض ۷ عددی اول نیست.
۱۲ بر ۷ بخش‌پذیر است نقیض ۱۲ بر ۷ بخش‌پذیر نیست.

چند مثال در مورد گزاره‌های نقیض

زهر آن کوورقی خواند معانی دانست

این ضرب‌المثل گزاره‌ای درست است که کنایه از آن دارد که با مطالعه سطحی نمی‌توان به عمق معانی پی برد.
نقیض این گزاره می‌شود: «هر آن کوورقی خواند معانی دانست» که گزاره‌ای غلط است.

ریاضیات و ادبیات در بعضی موارد قرابت‌هایی دارند. گرچه ادبیات جولانگاه تخیل‌هاست و ریاضیات علم نظم و دقت در اندیشه است، اما هم‌گرایی این دو دانش ارجمند، به سبب هم‌منشأبودن این دو از اندیشه تابناک بشری است. در این مجال، گونه‌ای از این هم‌گرایی را پیگیری می‌کنیم.
در منطق ریاضیات، گزاره جمله‌ای خبری است که ارزش آن یا درست است یا نادرست. عبارت‌هایی با ارزش بینابین، گزاره نیستند.

شخصیت امیر کمی خوب و کمی بد است. این جمله گزاره نیست.

۳ < ۱ یک گزاره با ارزش درست است. ✓

مجموع زاویه‌های داخلی یک مثلث ۱۸۰ درجه است.

گزاره‌ای درست است. ✓

هر عدد اول فرد است. گزاره‌ای نادرست است. ✗

زیرا عدد ۲ عددی زوج و اول است.

به چند نمونه گزاره در عبارت‌های ادبی توجه بفرمایید:

کریمان (شیدان) جان فدای دوست کردند سگی بگذار، ما هم مردانیم
مصراع اول می‌گوید: «انسان‌های باکرامتی بودند که جان خود را به آستان کبریایی دوست تقدیم کردند.» این مصرع یک گزاره با ارزش درست است. اما مصرع دوم یک جمله امری است: «ای خوی حیوانیت، ما را رها کن و بگذار که به سیرت مردمان وارسته که در ذات کبریایی ماست، برگردیم.»



۷

شماره ۱۳۳ | پاییز ۱۴۰۵

نزد میخ آهنین در سنگ

با اندکی تساهل و تسامح این گزاره درست است. این ضرب‌المثل کنایه از انسان‌های سنگ‌دلی است که هیچ نصیحتی در دل آن‌ها اثر نمی‌کند. نقیض این گزاره می‌شود: «میخ آهنین در سنگ فرو می‌رود» که گزاره‌ای غلط است.

گاهی اوقات برای استدلال ناچاریم انواعی از ترکیب گزاره‌ها را به کار ببریم. به چند نوع ترکیب گزاره‌ای توجه کنید: ترکیب فصلی دو گزاره p و q را با علامت $p \vee q$ نشان می‌دهیم و ارزش درستی آن به قرار جدول ۲ است. در واقع، این ترکیب تنها زمانی نادرست است که دو گزاره نادرست باشند.

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

جدول ۲

۱۱ عددی اول است یا ۱۹ عددی اول است

د	د
---	---

ترکیب‌ها می‌توانند باعث ترکیب تعداد زیادی گزاره شوند. در این شعر سعدی دقت کنید:

سه کس را شنیدم که غیبت رواست وز این درگذشتی چهارم خطاست
یکی پادشاهی ملامت پسند کز او بر دل خلق بینی گزند
حلال است از او نقل کردن خبر مگر خلق باشند از او بر حذر
دوم پرده بر لبی حیالی تن که خود می‌در پرده بر خویشان
ز حوش مادر ای برادر نگاه که او می‌داند بده کردن به چاه
سوم کمتر از وی نادر است خوی ز فصل بدش هر چه دانی بگوی

از نظر سعدی، غیبت وقتی جایز است که در مقابل یکی از این بدی‌ها وجود داشته باشد: پادشاهی ستمگر، شخصیتی بی‌حیا، کاسبی با ترازوی نامیزان.

چه موقع مذمت غیبت جایز نیست؟ وقتی شخص مقابل هیچ‌یک از صفتهای فوق را نداشته باشد. به این چند مثال دقت کنید:

۱۱ عددی اول است یا ۱۲ عددی اول است

 د ن

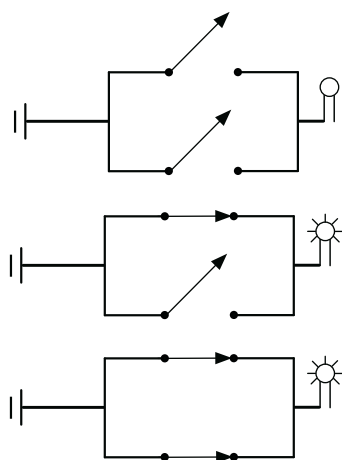
د

۱۲ عددی اول است یا ۱۸ عددی اول است

ن ن

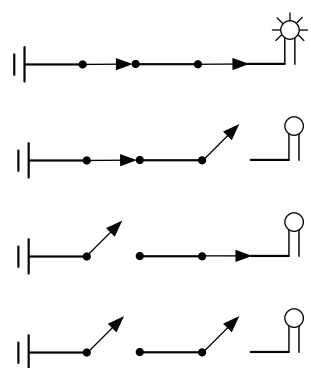
ن

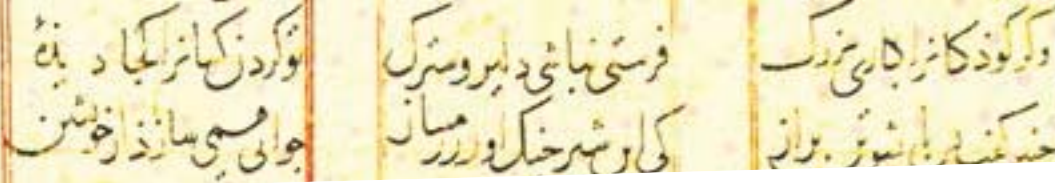
تعیین ارزش ترکیب گزاره‌ای فصلی را می‌توان با مدار موازی مدل‌سازی کرد.



ترکیب گزاره‌های عطفی بین دو گزاره p و q را با نماد $p \wedge q$ نمایش می‌دهیم. ارزش درستی و نادرستی آن به این صورت است: تنها زمانی ارزش این ترکیب گزاره‌ای درست است که هر دو گزاره p و q درست باشند (جدول ۳).

ارزش درستی این ترکیب را می‌توان با مدار سری مدل‌سازی کرد:





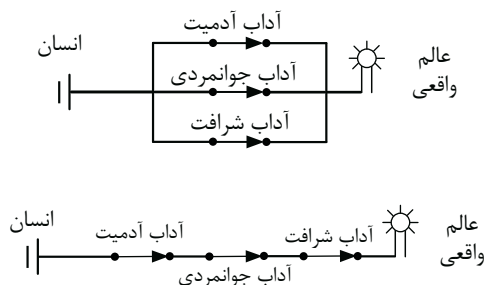
چند مثال

عضو n از مجموعه عددهای طبیعی یا زوج است یا فرد. ✓
هیچ عدد طبیعی ای نمی تواند هم زمان هم زوج باشد و هم فرد.

عضو x از عددهای حقیقی یا گنگ است یا گویا. ✓
هیچ عدد حقیقی ای نمی تواند هم زمان هم گنگ باشد هم گویا.

عضو x از عددهای طبیعی یا زوج است یا اول. x
۲ هم زوج است و هم اول. پس ترکیب یای مانع الجمع این دو گزاره نادرست است.
اگرچه در متون ادبی شیوه های گفته شده دقیقاً رعایت نشده اند، اما با اندکی اغماض، تساهل و تسامح می توان هم گونگی هایی یافت.

کدام گونه از ترکیب گزاره ها در این بیت مناسب است:
علم آدمیت است و جوانمردی و شرف
ورنه ددی به صورت انسان مصوری



در منطق جمله ای هست با این مضمون: اجتماع نقیضین محال است. یعنی اینکه جمع اضداد امکان پذیر نیست.
در این بیت چنین مصداقی را پیدا کنید:

خلوت دل نیست جای صحبت اضراد دیو چو بیرون رود فرشته در آید
دل یا جای دیو است یا جای فرشته، تا اهریمن از دلی نرود،
فرشته در آن دل نخواهد آمد؛ چون این دو ضد هم هستند.

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
ن	د	ن
د	ن	ن
ن	ن	ن

جدول ۳

در اکثر منابع، برای بیان ترکیب گزاره ای عطفی از کلمه «و» استفاده می شود. در این مقاله از کلمه «هم» استفاده می کنیم.

$$\underbrace{2 < 5 \text{ و } 3 > 1}_{\text{د}}$$

$$\underbrace{2 < 5 \text{ هم } 3 > 1}_{\text{د}}$$

$$\underbrace{\text{هم } 4 \text{ عددی اول است} \text{ و } \text{هم } 4 \text{ عددی زوج}}_{\text{ن}}$$

$$\underbrace{\text{هم } \sqrt{3} \text{ عددی صحیح} \text{ و } \text{هم } 3 \text{ عددی زوج است}}_{\text{ن}}$$

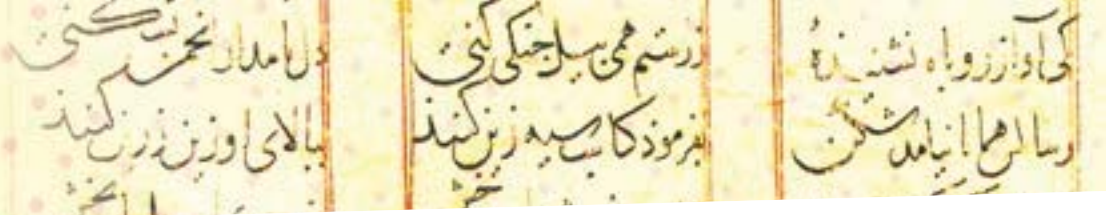
ترکیب گزاره ای یای مانع الجمع بین دو گزاره p و q را با $P \sqcup Q$ نمایش می دهیم. جدول درستی و نادرستی آن به صورت جدول ۴ است.

p	q	$P \sqcup Q$
د	د	ن
ن	د	د
د	ن	د
ن	ن	ن

جدول ۴

ترکیب گزاره ای $P \sqcup Q$ درست است، هرگاه فقط یکی از گزاره های p و q درست باشند. به عبارت دیگر، اگر p و q هم ارزش باشند، ترکیب گزاره ای $P \sqcup Q$ نادرست است.





در این ضرب‌المثل چنین مضمونی را پیدا کنید:

یک‌بام و دو‌هوا

نمی‌شود در یک زمان و در یک مکان هم هوا طوفانی باشد، هم هوا آرام باشد.

در بیت زیر دو هم‌بیانی گزاره‌های نقیض را پیدا کنید:

چون ز چشمه آمدی چونی تو خشک ورتوناف آهویی کوبوی مشک

امکان‌پذیر نیست شخصی هم از درون چشمه آمده باشد و هم خشک باشد. و امکان‌پذیر نیست که هم مایعی برگرفته از ناف آهو باشد و هم بوی مشک ندهد.

در این مصراع یک هم‌بیانی بین گزاره‌های متناقض پیدا کنید:

مکر آدمی نبود که اسیر دیو گشتی

از دیدگاه سعدی امکان‌پذیر نیست شخصی مقام بالای آدمیت را داشته باشد، اما در اسارت اوامر شیطان باشد.

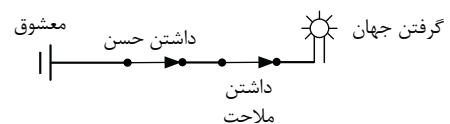
در مصرع زیر ترکیب عطفی بیابید:

عشق و شهاب و زندگی مجموعه مراد است



در بیت زیر ترکیب عطفی بیابید:

خسنت به اتفاق ملاحظت جهان گرفت آری به اتفاق می‌توان جهان گرفت



در بیت زیر یک ترکیب فصلی مانع‌الجمع پیدا کنید:

یازمردای تو میرم یا برآرم سرخ روی

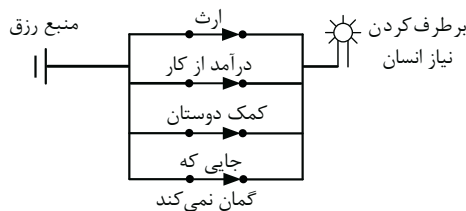
p: یا به سبب سودای رسیدن به تو می‌میرم و به تو نمی‌رسم،
q: یا به واسطه رسیدن به کوی تو سرافراز و سرخ‌رو می‌شوم.

در حکایت زیر یک ترکیب گزاره‌ای پیدا کنید:
پادشاهی را مهمی پیش آمد. گفت: «اگر این حالت به مراد من برآید، چندین درم دهم زاهدان را.» چون حاجتش برآمد و تشویش خاطرش برفت، وفای نذرش به وجود شرط لازم آمد. یکی را از بندگان خاص کیسه‌ای درم داد تا صرف کند بر زاهدان. گویند غلامی عاقل و هشیار بود. همه روزه بگردید و شبانگاه بازآمد و درم‌ها بوسه داد و پیش ملک بنهاد و گفت: «زاهدان را چندان که گردیدم، نیافتم.»
گفت: «این چه حکایت است؟ آنچه می‌دانم، در این ملک چهارصد زاهد است.»
گفت: «ای خداوند جهان، آنکه زاهد است نمی‌ستاند و آنکه می‌ستاند زاهد نیست.»

زاهد که دم گرفت و دینار زاهد تراز او یکی به دست آر

از دیدگاه غلام هوشیار، امکان‌پذیر نیست شخصی هم زاهد (روی گردان از مطامع دنیوی) باشد و هم سکه بستاند.

در این عبارت قرآنی می‌توان یک ترکیب فصلی تصور کرد (سوره طلاق، آیه ۳):
* وَبَرِّزْهُ مِنْ حَيْثُ لَا يَحْتَسِبُ ...
و از جایی که گمان نمی‌برد، او را روزی می‌دهد.



کدگذاری شیوه‌ای مؤثر در تسلط بر یادگیری است. مثلاً در جمله زیر شما دو کلمه بشقاب و خالی کردن را به زبان انگلیسی کدگذاری کرده‌اید تا به‌خاطر سپردن آن دو کلمه آسان شود:

پلیت (plate) خودت را دی‌پلیت (deplete) از میوه کردی.
بشقاب خودت را خالی از میوه کردی.
مقاله‌ای که نوشته‌ایم، نه با دیدگاه علمی، بلکه با هدف تسهیل آموزش از طریق کدگذاری است. در عین حال، بر این باوریم که ادبیات و ریاضی در برخی موارد موافقت‌هایی جذاب و علمی هم دارند که می‌تواند مورد پژوهش‌های علمی قرار گیرد.



تالس نوجوان ایرانی

گفت و گو با دانش آموز خلاق، بیتا محمدپور

مصاحبه کننده: نرگس نهبدانی

«پرورش خلاقیت» دانش آموزان و «شکوفایی استعدادها»ی آن‌ها بسیار اهمیت دارد و توجه ویژه معلمان را می‌طلبد. هر دانش آموزی استعدادهای خاصی دارد، ولی گاهی ممکن است زمینه شکوفایی برایش فراهم نشود و گاهی هم این شکوفایی و خلاقیت چشمگیر می‌شود. می‌خواهیم دانش آموزی را معرفی و با وی گفت و گو کنیم که مصداق بارز خلاقیت و نوآوری در یکی از مباحث ریاضی و هندسه است. با ما همراه باشید.

لطفاً خودتان را معرفی کنید.

بیتا محمدپور هستم، ۱۸ ساله که به تازگی از دبیرستان نمونه دولتی المهدی (عج) ناحیه ۵ مشهد مقدس در رشته تجربی فارغ التحصیل شده‌ام.

خانم بیتا محمدپور از علاقه و احساس نسبت به ریاضیات بگو:

ریاضی برای من شبیه یک بازی پرقانون است که اگر قوانینش را بلد باشی سختی ندارد. در حقیقت ریاضی حالم را خوب می‌کند و اعتماد به نفس عجیبی به من می‌دهد؛ از علاقه زیادم به ریاضی هر چه بگویم کم گفته‌ام.

می‌توانی روند شکل‌گیری مهارت ریاضی در خودت را بیان کنی؟

مشکل‌ترین و سخت‌ترین درس برای من در دوران ابتدایی ریاضی بود و این درس را به هیچ وجه دوست نداشتم. اما در کلاس ششم ریاضی جلوه‌ای دیگری از خودش را به من نشان داد که دبیر ارجمندم سرکار خانم حکم‌آبادی

نقش بسزایی در این زمینه داشتند. از ششم دبستان که تازه یاد گرفته بودم چگونه با ریاضی کنار بیایم، نسبت به قبل فوق‌العاده رشد فکری پیدا کردم. وقتی که وارد کلاس دهم شدم، دبیر ریاضی عزیزم سرکار خانم پورخواجه اصرار زیادی به پیدایش و خلق روش‌های متفاوت داشتند و توانستند مرا به این کار علاقه‌مند کنند. با این کار هم اعتماد به نفس من خیلی زیاد شد و هم مطمئن شدم برای هر مشکلی - نه صرفاً ریاضی - راه حل‌های زیادی وجود دارد. به همین ترتیب از حل کردن بعضی سؤال‌ها با روش‌های متفاوت شروع کردم تا اینکه «تالس» را برای اثبات انتخاب کردم!

خودت ماجرای اثبات «قضیه تالس» را تعریف کن. راستش هنگامی که تازه می‌خواستیم اثبات قضیه تالس را یاد بگیریم، ایده دانشمند یونانی، جناب تالس خیلی برای



۱۲

شماره ۱۳۳ | پاییز ۱۴۰۰



اشتراک لفظی دارد ولی خوب می‌دانم که انگشت کوچک دانشمند بزرگ تالس نیستم. البته همین جا هم باید از شما استاد محترم ریاضی که اثبات‌های شانزده‌گانه بسیار به‌هم‌ریخته مرا به شکل زیبا و علمی بازنویسی و ویرایش کردید، تشکر ویژه داشته باشم.

بسیار عالی! در این سن و سال توانسته‌ای در ریاضیات عمیق شوی و به کنکاش و جست‌وجو برای راهکارهای خلاقانه پردازی. این موضوع برای بسیاری از دانش‌آموزان جذاب خواهد بود. خب! پس اثبات‌های تو را «بیتالس» بنامیم! به نظر خودت کدام روش اثبات‌های بیتالس زیباتر و هوشمندانه‌تر است؟ چرا؟

اهمیت اثبات‌هایی که انجام داده‌ام به دلیل تفاوت با اثبات واقع در کتاب درسی است و گرنه ایده همگی به مانند اثبات اصلی تالس از تناسب مساحت‌ها به‌وجود می‌آید. از طرفی همان‌طور که استاد گران‌قدر جناب آقای نصیری هم متذکر شدند، مثلثات بر پایه قضیه تالس است و دو اثبات آخر را نمی‌توان اثبات نامید، ولی به جهت تفاوتش با روش‌های قبلی، دوستشان دارم.

آفرین بر این نگاه منطقی و زیبایی شما.

آیا در فرایند جست‌وجو برای اثبات‌های جدید، به بن‌بست یا راه‌های نادرستی هم برخورد کردی؟ چطور از این چالش‌ها گذشتی؟

قطعاً روش‌هایی بود که امتحان می‌کردم و جواب نمی‌دادند، ولی سعی می‌کردم دلیل اینکه چرا غلط است را پیدا کنم تا بلکه بتوانم به کمک آن، روش جدیدی خلق کنم.

پیدا کردن اثبات‌های جدید چه حسی در تو ایجاد می‌کرد و چه تأثیری بر نگرشت به ریاضیات داشت؟ هنگامی که تصمیم گرفتم این کار را انجام بدهم، اصلاً تصور نمی‌کردم بتوانم حتی به دو روش متفاوت اثباتش کنم. اما پیوسته ادامه دادم و به خودم ثابت کردم که می‌توانم! این موضوع اعتمادبه‌نفس عجیبی به من داد و مطمئن شدم که در زندگی و در زمینه علمی هر کاری که بخواهم انجام دهم، می‌توانم و موفق خواهم شد.

من جذاب بود. همیشه هم برایم سؤال بود که این موضوع چگونه به ذهن ایشان رسیده است! من این اثبات را حفظ می‌کردم و این کار برایم اذیت‌کننده بود. قصد نداشتم قضیه تالس را اثبات کنم، اما سرکار خانم دلبری دبیر ریاضی نازنینم مشوق من شدند. ابتدا به یکی دو روش اثباتش کردم، بعد همین‌طور ادامه دادم و شد این ۱۶ روش! خودم به‌عنوان یک آرزو اسم این روش‌ها را «بیتالس» گذاشتم، چون اتفاقاً اسم من با نام دانشمند بزرگ، جناب تالس



۱۴

شماره ۱۳۱ | پاییز ۱۴۰۱



نظرت درباره ایران؟

ایران کشوری دوست‌داشتنی با مردمی نجیب و تاریخی ارزشمند و کهن است. به نظرم باید شرایط خوبی فراهم باشد که نوجوانان و جوانان شایسته ایرانی در کشور خودشان درس بخوانند، برای پیشرفت ایران خدمت کنند و هرگز هم مجبور نشوند برای گذران زندگی به خارج از کشور مهاجرت کنند.

چه پیامی برای مسئولان داری؟

دوست دارم ایران از همه لحاظ به‌ویژه از نظر علمی به بالاترین نقاط برسد. در این بین نقش آموزش و پرورش و مسئولان آن بسیار اهمیت دارد. خواهش می‌کنم مسئولان متوجه باشند که تصمیمات آن‌ها درباره محتوای درس‌ها، انتخاب و گزینش معلمان و... بر سرنوشت جوانان تأثیر مستقیم می‌گذارد.

حرف آخر؟

می‌خواهم از خانواده عزیزم که همیشه همراه من بوده‌اند و از من حمایت کرده‌اند و از معلمان گران‌قدرم و همچنین **سرکار خانم صالحی**، مدیریت محترم دبیرستان که مرا به **آقای دکتر حکمت**، سرگروه ریاضی و سردبیر مجله رشد ریاضی برهان معرفی کردند، تشکر کنم. بابت تشویق‌ها و پیگیری‌های همه این عزیزان سپاسگزارم. همچنین بر خود لازم می‌دانم از نیکوکاران گران‌قدر مدرسه‌ساز، جناب آقای **دکتر حاتمی** برجسته که حامی تحصیل و پیشرفت دختران دانش‌آموز هستند، تقدیر ویژه داشته باشم.

برایت آرزوی موفقیت داریم و امیدواریم در آینده بسیار بیشتر بدرخشی و مایه سربلندی ایران عزیزمان باشی.

توجه: از این شماره به بعد، طی چند قسمت، اثبات‌های شانزده‌گانه قضیه تالس را که خانم محمدپور ارائه کرده‌اند، منتشر خواهیم کرد.

آیا علاقه داری که در دانشگاه در رشته ریاضیات و کاربردها تحصیل کنی؟ به چه رشته‌های دانشگاهی و شغلی دیگری علاقه‌مند هستی؟

من درس زیست‌شناسی را هم خیلی دوست دارم و برای آینده شغلی ترجیح می‌دهم که در رشته تجربی تحصیل کنم؛ البته ریاضی را هیچ‌گاه رها نخواهم کرد! علاقه شدیدی به رشته پزشکی دارم و هدفم این است که در دانشگاه علوم پزشکی تهران تحصیل کنم.

چه توصیه‌ای به دانش‌آموزان دیگر داری که فکر می‌کنند ریاضیات درس سختی است؟

من روزی از ریاضی متنفر بودم، ولی اکنون ریاضیات حال‌م را خوب می‌کند. در گذشته فکر می‌کردم ریاضی حفظی است، هر مسئله‌ای فقط یک راه‌حل دارد و نیازی به خواندن و تمرین کردن ندارد! خب این تفکر من اشتباه بود و همه‌چیز برعکس است. اگر دانش‌آموزان از زاویه دیگری ریاضی را ببینند، تمرین کنند و قدری ریاضت به خرج دهند، قطعاً درس ریاضی برایشان به درسی فوق‌العاده شیرین تبدیل خواهد شد.

چه پیامی برای دبیران ریاضی داری؟

دبیران ریاضی بهتر است دانش‌آموزان را به داشتن خلاقیت فکری تشویق کنند. اگر آن‌ها به دانش‌آموزان ثابت کنند که برای پاسخ به هر سؤال‌های گوناگون وجود دارد و هر کس به هر روش منطقی که بخواهد و به ذهنش برسد، می‌تواند مسئله‌های ریاضی را حل کند، خودبه‌خود دانش‌آموزان علاقه‌مند خواهند شد.



۱۴

شماره ۱۳۴ | پاییز ۱۴۰۰

بی‌تالس

اثبات قضیه تالس به چندین روش متفاوت ①

بینا محمدپور

دانش آموز دوازدهم تجربی دبیرستان نمونه المهدی (عج)،

مشهد مقدس، ناحیه ۵

قضیه تالس

در مثلث $\triangle ADE$ داریم: $BC \parallel DE$ (شکل ۱). ثابت کنید:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE}$$

موازی است، پس این دو ارتفاع با هم برابرند. در نتیجه از مشترک بودن قاعده این دو مثلث داریم:

$$S_{\triangle DBC} = S_{\triangle ECB} \quad (۱)$$

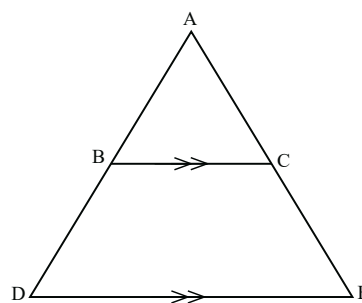
فاصله دو خط موازی $DH = EH'$

قاعده مشترک BC

* از رأس D عمودی بر ضلع AE و از رأس E عمودی بر ضلع AD رسم می‌کنیم. این دو خط عمود ارتفاع‌های مثلث‌های $\triangle ABE$ و $\triangle BED$ و $\triangle ACD$ و $\triangle ECD$ هستند (شکل ۳).

$$\frac{S_{\triangle AEB}}{S_{\triangle BED}} = \frac{\cancel{EM} \cdot AB}{\cancel{EM} \cdot BD} = \frac{AB}{BD} \quad (۲)$$

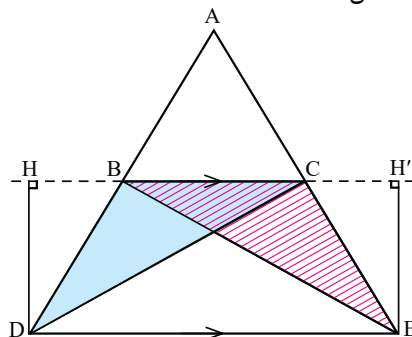
$$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ECD}} = \frac{\cancel{DN} \cdot AC}{\cancel{DN} \cdot CE} = \frac{AC}{CE} \quad (۳)$$



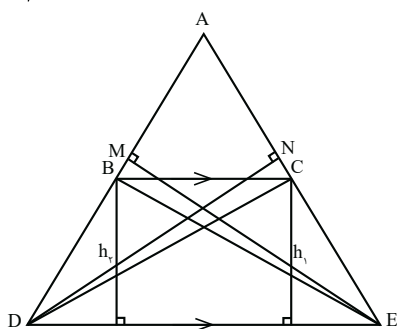
شکل ۱

روش اول

* رأس D را به نقطه C و رأس E را به نقطه B وصل می‌کنیم (شکل ۲).



شکل ۲



شکل ۳

* اگر مساحت دو مثلث $\triangle BED$ و $\triangle ECD$ را با قاعده مشترک در نظر بگیریم، داریم:

با توجه به اینکه $BC \parallel DE$ و ارتفاع وارد بر قاعده BC در دو مثلث $\triangle DBC$ و $\triangle ECB$ همان فاصله بین دو خط

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot CN \cdot AB}{\frac{1}{2} \cdot CN \cdot AD} = \frac{AB}{AD} \quad (2)$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABE}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot BM \cdot AC}{\frac{1}{2} \cdot BM \cdot AE} = \frac{AC}{AE} \quad (3)$$

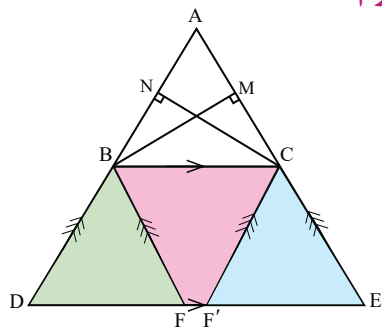
* مساحت مثلث‌های $\triangle ABE$ و $\triangle ACD$ را به صورت زیر می‌نویسیم و داریم:

$$\begin{cases} S_{\triangle ACD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle DBC} \\ S_{\triangle ABE} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ECB} \end{cases} \xrightarrow{\text{طبق رابطه (1)}} S_{\triangle ACD} = S_{\triangle ABE} \quad (4)$$

با استفاده از رابطه (4) در رابطه‌های (2) و (3) داریم:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \xrightarrow[\text{مخرج تناسب}]{\text{خاصیت تفريق در}} \frac{AB}{AD - AB} = \frac{AC}{AE - AC} \rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE} \quad \checkmark$$

روش سوم



شکل ۶

* دو ارتفاع مثلث $\triangle ABC$ را رسم می‌کنیم (شکل ۶). از نقطه B خطی موازی AE و از نقطه C خطی موازی AD رسم می‌کنیم.

* چهارضلعی‌های $BCEF$ و $BCF'D$ به دلیل موازی بودن اضلاعشان متوازی‌الاضلاع هستند.

* طبق شکل ۶، ارتفاع مثلث $\triangle ABC$ وارد بر ضلع AB و همچنین ارتفاع متوازی‌الاضلاع $BCF'D$ وارد بر ضلع BD است.

* همچنین طبق شکل، BM ارتفاع مثلث $\triangle ABC$ وارد بر ضلع AC و همچنین ارتفاع متوازی‌الاضلاع $BCEF$ وارد بر ضلع CE است. پس داریم:

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BCF'D}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot CN \cdot AB}{\frac{1}{2} \cdot CN \cdot BD} = \frac{AB}{BD} \quad (1)$$

$$\begin{cases} S_{\triangle BED} = \frac{1}{2} h_r \cdot DE \\ S_{\triangle ECD} = \frac{1}{2} h_r \cdot DE \end{cases} \xrightarrow{h_r = h_r} S_{\triangle BED} = S_{\triangle ECD} \quad (4)$$

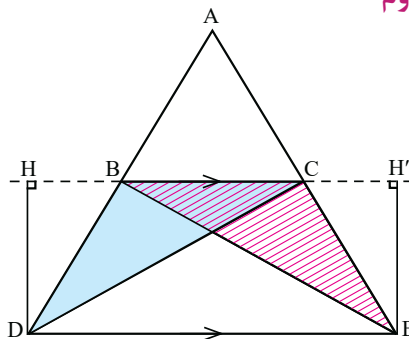
* از طرف دیگر داریم:

$$\begin{cases} S_{\triangle AEB} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ECB} \\ S_{\triangle ACD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle DBC} \end{cases} \xrightarrow{\text{طبق رابطه (1)}} S_{\triangle AEB} = S_{\triangle ACD} \quad (5)$$

با استفاده از رابطه‌های (4) و (5) در رابطه‌های (2) و (3) داریم:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE} \quad \checkmark$$

روش دوم

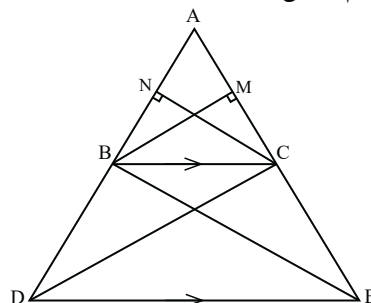


شکل ۴

* رأس D را به نقطه C و رأس E را به نقطه B وصل می‌کنیم (شکل ۴). با توجه به اینکه $BC \parallel DE$ و ارتفاع‌های وارد بر قاعده BC در دو مثلث $\triangle DBC$ و $\triangle ECB$ همان فاصله بین دو خط موازی است، پس این دو ارتفاع با هم برابرند و از مشترک بودن قاعده این دو مثلث داریم:

$$DH = EH' \xrightarrow{\text{فاصله دو خط موازی}} (1) \rightarrow S_{\triangle DBC} = S_{\triangle ECB}$$

* در مثلث $\triangle ABC$ ارتفاع‌های وارد بر ضلع AB و AC را رسم می‌کنیم (شکل ۵).



شکل ۵



۱۶

شماره ۱۳۳ | پاییز ۱۴۰۳

BC = قاعدہ مشترک

$\frac{AD}{AE} \xrightarrow{\text{مخرج}} \frac{AB}{AC} \xrightarrow{\text{تفاضل در}} \frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD}$

$\frac{AC}{AE - AC} = \frac{AB}{AD - AB} \Rightarrow \frac{AC}{CE} = \frac{AB}{BD}$

* رأس D را به نقطه C و رأس E را به نقطه B وصل می کنیم (شکل ۸). با توجه به اینکه $BC \parallel DE$ و ارتفاع های وارد بر قاعده BC در دو مثلث DBC و ECB همان فاصله بین دو خط موازی است، پس این دو ارتفاع با هم برابر و در نتیجه از مشترک بودن قاعده های این دو مثلث داریم:

پژوهشگاه دانش آگوری

راهبرد نقطه ثابت

در حل یک مسئله



محمد مهدی مفیدی

پژوهشگر و دبیر ریاضی ناحیه ۲ زنجان،
پژوهشسرای دکتر امیر علم غضنفریان

↑
راهبرد نقطه ثابت
(قسمت اول)

مسئله ۱: تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با این خاصیت که $f(f(x)) = x^2 - 2$ وجود ندارد.

در مقاله قبلی، با الهام از روش حل مسئله ۱، دو پرسش اساسی مطرح کردیم:

سؤال الف): با چه شرایطی یک چندجمله‌ای درجه ۲، هیچ‌گاه به صورت $f \circ f$ نیست (که در اینجا f تابعی با دامنه $\mathbb{R}$ است)؟

سؤال ب): تابعی مانند g با دامنه $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. آیا می‌توان شرایطی را روی نقطه‌های ثابت g و نقطه‌های ثابت $g \circ g$ قرار داد؛ به گونه‌ای که بتوان با قطعیت گفت: تابعی مانند f با دامنه $\mathbb{R}$ موجود نیست که $g = f \circ f$ ؟ این سؤال از سؤال قبلی کلی‌تر است، زیرا سؤال الف) به چندجمله‌ای‌های درجه ۲ مربوط بود.

قضیه‌های اصلی مقاله

ابتدا مسئله ساده زیر را حل کنید. از آن در بخش‌های متعددی از این مقاله استفاده خواهیم کرد (تمرین خوبی هم برای مفهوم نقطه ثابت است)؛ حل آن بر عهده خودتان.

مسئله ۲: برای تابع دلخواه f قرار دهید $g = f \circ f$. در این صورت، مجموعه نقطه‌های ثابت f زیرمجموعه نقطه‌های ثابت g است.

حال سعی می‌کنیم با «تقلید کامل» از حل مسئله ۱ که در قسمت قبلی مقاله ارائه شد، به سؤال الف) پاسخ دهیم.

قضیه ۱: دو عدد حقیقی a و b را با شرط $ab < \frac{-3}{4}$ در نظر بگیرید. در این صورت تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با این خاصیت وجود ندارد:

چکیده

در قسمت اول مقاله، ابتدا اهمیت بسیار زیاد پژوهش‌های دانش‌آموزی را خاطرنشان کردیم و به‌عنوان اولین «پژوهش‌نامه»، ثابت کردیم تابعی با دامنه $\mathbb{R}$ وجود ندارد که از ترکیب آن با خودش، تابع $x^2 - 2$ حاصل شود. سپس راهبرد حل این مسئله را به‌طور دقیق تحلیل و چند سؤال با هدف تعمیم این نتیجه طرح کردیم. در مقاله حاضر سعی می‌کنیم تا حدی به این سؤال‌ها پاسخ دهیم؛ به‌طور مثال ثابت می‌کنیم که اگر ترکیب تابع g با خودش، نقطه ثابتی خارج از نقاط ثابت g داشته باشد، با شرایط خاصی، تابع f وجود ندارد؛ به گونه‌ای که $f \circ f = g$.

کلیدواژه‌ها: تابع، نقطه ثابت یک تابع، ترکیب تابع‌ها

مقدمه

قسمت اول این مقاله در شماره ۱۱۷ مجله رشد برهان متوسطه دوم (پاییز ۱۳۹۹) منتشر شد و متأسفانه به دلایلی، چاپ قسمت دوم آن چندسالی به تأخیر افتاد. با پوزش از شما پژوهشگران عزیز، مطالب قسمت اول را می‌توانید از طریق رمزینۀ بالای صفحه دریافت کنید، اما مطالب اساسی قسمت اول را مرور می‌کنیم. در قسمت اول پس از معرفی «راهبرد نقطه ثابت»، از این مفهوم زیبا و قدرتمند در حل مسئله اصلی مقاله استفاده کردیم. گفتیم عدد c را «نقطه ثابت» تابع f گوئیم، اگر $f(c) = c$. مسئله‌ای که در قسمت اول مقاله طرح و پس از حل آن، درباره راهبردش به‌طور مفصل صحبت کردیم، این مسئله است:



۱۸

شماره ۱۳۴ | پاییز ۱۴۰۵

توجه کنید که عبارت‌های زیر رادیکال‌ها در مجموعه (*) همگی مثبت هستند (چرا؟). پس h نقطه‌های ثابت حقیقی دارد که دوتای آن‌ها، همان نقطه‌های ثابت g هستند (دو عبارت سمت چپ مجموعه (*)).

مرحله سوم: بررسی نقطه‌های ثابت h .

عناصر مجموعه (*) دوبه‌دو متمایزند؛ یعنی h دقیقاً ۴ نقطه ثابت دارد که «دوتای آن‌ها خارج از نقطه‌های ثابت g هستند.» بررسی این موضوع را به‌عنوان تمرین به خودتان واگذار می‌کنیم.

مرحله چهارم: رسیدن به تناقض اصلی و تکمیل حل مسئله.

فرض کنید: $x \in \left\{ \frac{-1 + \sqrt{-3-4ab}}{2a}, \frac{-1 - \sqrt{-3-4ab}}{2a} \right\}$

پس x نقطه ثابت h است، اما نقطه ثابت g نیست. با توجه به اینکه $f(x)$ نیز نقطه ثابت h است، پس:

$$f(x) \in \left\{ \frac{1 + \sqrt{1-4ab}}{2a}, \frac{1 - \sqrt{1-4ab}}{2a} \right\}$$

یا

$$f(x) \in \left\{ \frac{-1 + \sqrt{-3-4ab}}{2a}, \frac{-1 - \sqrt{-3-4ab}}{2a} \right\}$$

حالت اول: اگر $f(x) \in \left\{ \frac{1 + \sqrt{1-4ab}}{2a}, \frac{1 - \sqrt{1-4ab}}{2a} \right\}$

آنگاه با توجه به اینکه در این حالت $f(x)$ نقطه ثابت g است و اینکه $gof = fog$ ، می‌توان نوشت:

$$x = h(x) = g(g(x)) = g(f(f(x))) = f(f(g(f(x)))) = f(f(x)) = g(x)$$

که تناقض است، زیرا x نقطه ثابت g نیست.

حالت دوم: اگر

$$f(x) \in \left\{ \frac{-1 + \sqrt{-3-4ab}}{2a}, \frac{-1 - \sqrt{-3-4ab}}{2a} \right\}$$

آن‌گاه چون $f(x)$ نقطه ثابت g نیست، پس $f(x) \neq x$ (از مسئله ۲ کمک بگیرید). لذا

$$\{f(x), x\} = \left\{ \frac{-1 + \sqrt{-3-4ab}}{2a}, \frac{-1 - \sqrt{-3-4ab}}{2a} \right\}$$

پس:

$$f\left(\frac{-1 + \sqrt{-3-4ab}}{2a}\right) = \frac{-1 - \sqrt{-3-4ab}}{2a},$$

$$f\left(\frac{-1 - \sqrt{-3-4ab}}{2a}\right) = \frac{-1 + \sqrt{-3-4ab}}{2a}$$

$$f(f(x)) = ax^2 + b$$

برهان

قضیه را با برهان خلف ثابت می‌کنیم؛ فرض کنید تابعی مانند $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ وجود دارد که $f(f(x)) = ax^2 + b$. قرار دهید $g = fof$. پس $fog = gof$. برای فهم جزئیات برهان، آن را به چند مرحله تقسیم می‌کنیم:

مرحله اول: بررسی ویژگی نقطه‌های ثابت g .

نقطه‌های ثابت g با حل معادله $g(x) - x = 0$ به دست می‌آید. دقت کنید که عبارت درجه دوم

$$g(x) - x = ax^2 - x + b$$

دو ریشه حقیقی متمایز دارد، زیرا $\Delta = 1 - 4ab > 0$ (چرا؟) پس g دارای دو نقطه ثابت متمایز است. ثابت کنید که اگر x نقطه ثابت g باشد، $f(x)$ نیز نقطه ثابت g است.

مرحله دوم: ساخت تابع جدید h با استفاده از g و محاسبه نقطه‌های ثابت این تابع جدید.

با تعریف $h = gog$ ثابت کنید که اگر x نقطه ثابت h باشد، $f(x)$ نیز نقطه ثابت h است. حالا باید به این سؤال‌ها پاسخ دهیم: h چند نقطه ثابت حقیقی دارد؟ آیا h نقطه‌های ثابتی خارج از نقطه‌های ثابت g دارد؟ (توجه کنید که طرح همه این سؤال‌ها با توجه به مسئله‌ای است که در مقاله قبلی حل کردیم.) مشخص است که:

$$h(x) = g(g(x)) = a(ax^2 + b)^2 + b$$

برای محاسبه نقطه‌های ثابت h باید این معادله را حل کنیم:

$$h(x) - x = (ax^2 - x + b)(a^2x^2 + ax + ab + 1) = 0$$

توجه کنید که تجزیه عبارت $h(x) - x$ با استفاده از نرم‌افزار «مپل» انجام شده است؛ دستورهایی را که این تجزیه انجام می‌دهد، مشاهده کنید:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{aligned} & g := x \rightarrow a \times x^2 + b; \\ & g := x \rightarrow g(g(x)); \end{aligned} \right. \\ & \left[\begin{aligned} & h := x \rightarrow g(g(x)); \\ & h := x \rightarrow g(g(x)); \end{aligned} \right. \\ & \left[\begin{aligned} & \text{factor}(h(x) - x); \\ & (a^2x^2 + ab + ax + 1)(ax^2 + b - x) \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

بنابراین، نقطه‌های ثابت h عبارت‌اند از:

$$\left\{ \frac{1 + \sqrt{1-4ab}}{2a}, \frac{1 - \sqrt{1-4ab}}{2a}, \frac{-1 + \sqrt{-3-4ab}}{2a}, \frac{-1 - \sqrt{-3-4ab}}{2a} \right\} \quad (*)$$

چرا؟

(چرا؟) در نتیجه:

$$g\left(\frac{-1+\sqrt{-3-4ab}}{2a}\right) = f\left(f\left(\frac{-1+\sqrt{-3-4ab}}{2a}\right)\right) \\ = f\left(\frac{-1-\sqrt{-3-4ab}}{2a}\right) = \frac{-1+\sqrt{-3-4ab}}{2a}$$

که تناقض است، زیرا $\frac{-1+\sqrt{-3-4ab}}{2a}$ نقطه ثابت g نیست. با این تناقض قضیه ۱ ثابت می‌شود.

مثال از قضیه ۱: تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با این خاصیت که

$$f(f(x)) = -x^2 + 1 \quad \text{یا} \quad f(f(x)) = \frac{-3}{2}x^2 + 1 \quad \text{وجود ندارد.}$$

قلقلک ذهن!

تا اینجا مقدار زیادی از راه را طی کرده‌ایم، اما هنوز به سؤال اصلی جواب نداده‌ایم! کدام سؤال؟ تکلیف چندجمله‌ای درجه دوم کلی چیست؟ زیرا قضیه قبل برای حالت خاصی از چندجمله‌ای‌های درجه ۲ بود! اما اگر کمی دقت کنید، بدون اینکه به این سؤال جواب دهیم، «به این سؤال جواب داده‌ایم!» چگونه؟! همان ایده‌هایی را که در اثبات قضیه ۱ دیدید، می‌توان عیناً برای حالت کلی نیز تکرار کرد، اما متأسفانه راه طولانی و پیچیده خواهد شد. برای کوتاه کردن راه، یک میان‌بر می‌زنیم که در مقاله‌های پژوهشی ریاضی از ضروریات است. معمولاً این میان‌بر را «زیرمسئله» یا «لم» می‌خوانیم. مسئله زیر را خودتان حل کنید که در واقع همان «میان‌بر کوتاه اما زیبای» مقاله است؛ تمرین خوبی نیز برای مفهوم ترکیب توابع است. از این مسئله در اثبات قضیه بعدی استفاده خواهیم کرد. حالا ممکن است بپرسید این میان‌بر را چگونه به دست آوردید؟ پاسخ خواهیم داد: «با زحمت فراوان!» یک قانون مهم در پژوهش این است: «بدون عرق ریختن و پشتکار لازم، توفیق حل مسائل پژوهشی را نخواهید یافت.» آن قدر باید راه‌های متفاوت را امتحان کنید تا شاید یکی جواب دهد!

مسئله ۳: اگر دو تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ و $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ در رابطه $g(x) = f(x-a) + a$ صدق کنند، آنگاه می‌توان نوشت:

$$gog(x) = fof(x-a) + a$$

نتیجه ۱

سه عدد حقیقی a ، b و c را با دو شرط $a \neq 0$ و $4ac > (b-1)^2$ در نظر بگیرید. در این صورت، تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با این خاصیت که $f(f(x)) = ax^2 + bx + c$ وجود ندارد.

برهان خلف: فرض کنید تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با خاصیت مذکور وجود داشته باشد. تابع $ax^2 + bx + c$ را به صورت مربع کامل بنویسید:

$$f(f(x)) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

که $\Delta = b^2 - 4ac$. تابع جدید g را با استفاده از f به صورت زیر تعریف کنید:

$$g(x) = f\left(x - \frac{b}{2a}\right) + \frac{b}{2a}$$

حال با توجه به مسئله ۳:

$$gog(x) = fof\left(x - \frac{b}{2a}\right) + \frac{b}{2a} = ax^2 - \frac{\Delta}{4a} + \frac{b}{2a} \\ = ax^2 + \frac{2b - \Delta}{4a}$$

اما با توجه به فرض $4ac > (b-1)^2$ می‌توان نوشت:

$$a \cdot \frac{2b - \Delta}{4a} = \frac{2b - b^2 + 4ac}{4} < -\frac{3}{4}$$

پس تابع g را به گونه‌ای پیدا کردیم که در تمام شرایط قضیه ۱ صدق می‌کند! چرا؟ اما در قضیه ۱ ثابت کردیم که چنین تابعی وجود ندارد! این تناقض برهان را کامل می‌کند.

مثال: حال با استفاده از نتیجه ۱، به راحتی می‌توان مسئله‌ای را که در آخر مقاله قسمت اول طرح کرده بودیم، حل کرد: تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با این خاصیت که $f(f(x)) = x^2 + x - 2$ وجود ندارد، چرا؟

بررسی راهبردها

تکلیف چندجمله‌ای درجه ۲ در حالت کلی (البته با شرطی خاص) مشخص شد. اما هنوز یک سؤال بزرگ‌تر باقی است: چرا باید فقط با چندجمله‌ای‌های درجه دوم کار کنیم؟ آیا نمی‌توان با همین ایده‌ها قضیه‌های کلی‌تری ارائه کرد که به درد تابع‌های دیگر نیز بخورد؟ خدا را هزاران مرتبه شکر، جواب مثبت است و در آخر این مقاله، همین کار را خواهیم کرد. خودم پس از اثبات قضیه‌های بالا (چون به اندازه کافی بر ایده‌های حل این چند مسئله تسلط یافته بودم) این سؤال به ذهنم رسید که «دقیقاً کجای اثبات مستقل، از خاصیت‌های چندجمله‌ای‌های درجه ۲ است؟» پس از مدتی تلاش متوجه شدم، علت اصلی وجود نداشتن تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ به گونه‌ای که $f(f(x)) = ax^2 + b$ با شرط $\frac{-3}{4} < ab$ ، نقطه‌های ثابت fof نیست، بلکه نقطه‌های ثابت $fofofof$ است که خارج از نقطه‌های ثابت fof هستند. حاصل کار را در یک قضیه و چند نتیجه خلاصه می‌کنیم:



۲۰

شماره ۱۳۱ | پاییز ۱۴۰۵

قضیه ۲: تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید و تعریف کنید $g = f \circ f$ و $h = g \circ g$. فرض کنید x نقطه ثابت h باشد، اما نقطه ثابت g نباشد. مجموعه $F = \{x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x)))\}$ را در نظر بگیرید:

(الف) همه اعضای F نقطه‌های ثابت h هستند؛

(ب) هیچ‌یک از اعضای F نقطه ثابت g نیست؛

(ج) اعضای F دوه‌دو متمایزند؛ به عبارت دیگر، F دقیقاً چهار عضو دارد.

خلاصه برهان: برای اثبات (الف) کافی است توجه کنید که اگر y نقطه ثابت h باشد، $f(y)$ نیز نقطه ثابت h است. برای اثبات (ب) نیز کافی است ثابت کنید برای هر z از نقطه‌های ثابت h ، اگر z نقطه ثابت g نباشد، $f(z)$ نیز نقطه ثابت g نیست. اثبات کامل بخش (ج) را به خودتان واگذار می‌کنیم، اما برای مشخص شدن روش، یکی از حالت‌ها را بررسی و ثابت می‌کنیم $f(x) \neq f(f(x))$.

اگر $f(x) = f(f(x))$ آنگاه $f(x) = g(x)$. نیز $g(f(x)) = g(x)$ (زیرا در این حالت، بنا بر مسئله ۲، $f(x)$ نقطه ثابت f است، پس باید نقطه ثابت g نیز باشد). اما:

$$f(x) = h(f(x)) = g(g(f(x))) = g(f(x)) = g(g(x)) = h(x) = x$$

که تناقض است زیرا $f(x) \neq x$ چرا؟

نتیجه ۲

تابعی مانند $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید؛ به گونه‌ای که $g \circ g$ حداقل یک نقطه ثابت خارج از نقطه‌های ثابت g داشته باشد. در این صورت، تابعی مانند $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با خاصیت $f \circ f = g$ وجود ندارد؛ به شرطی که تعداد نقطه‌های ثابت $g \circ g$ خارج از نقطه‌های ثابت g حداکثر ۳ باشد.

برهان: توجه کنید که مجموعه F در قضیه ۲، دقیقاً چهار عضو دارد. به عبارت دیگر، شرط وجود f این است که تعداد نقطه‌های ثابت $g \circ g$ خارج از نقطه‌های ثابت g حداقل ۴ باشد. حالا با استفاده از نتیجه ۲، قضیه ۱ را به روش دیگری ثابت می‌کنیم که هم ساده‌تر است و هم خوشمزه‌تر!

نتیجه ۳

دو عدد حقیقی a و b را با شرط $ab < \frac{-3}{4}$ در نظر بگیرید. در این صورت تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با این خاصیت وجود ندارد:

$$f(f(x)) = ax^2 + b$$

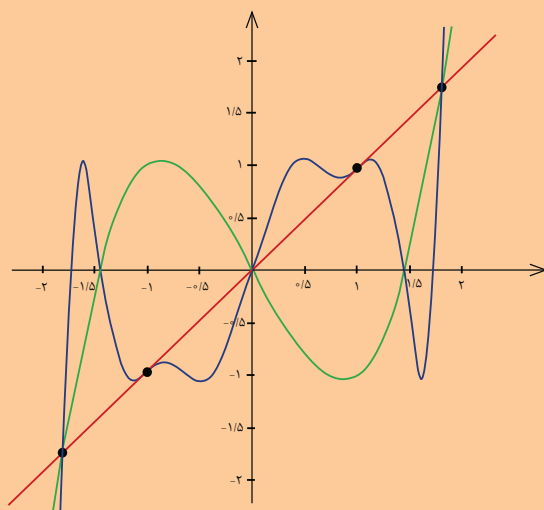
برهان: قضیه را با برهان خلف ثابت می‌کنیم. فرض کنید تابعی مانند $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ وجود دارد که $f(f(x)) = ax^2 + b$. قرار دهید $g = f \circ f$ و $h = g \circ g$. در قضیه ۱ ثابت کردیم که h دقیقاً ۲ نقطه ثابت خارج از نقطه‌های ثابت g دارد. بنا بر نتیجه ۲، تابع f موجود نیست، که تناقض است.

پاسخ به یک سؤال مهم: ممکن است بپرسید چرا از همان ابتدا نتیجه ۲ را ثابت نکردید که متحمل این همه زحمت نشویم؟! پاسخش ناگفته پیداست! موضوع سلسله مقاله‌های ما «پژوهک‌نامه» است. ما قصد آوردن مقاله نداریم، قصدمان توضیح روند تکمیل هر پژوهش است. جالب است بدانید، بسیاری از پژوهش‌های ناب در حوزه ریاضیات، «تقریباً» به همین صورت انجام می‌شوند و لازم است هر پژوهشگر ریاضی، روند صحیح پژوهش در ریاضیات را هم «ببیند»، هم «درک کند» و هم آن را با جدیت تمام «تمرین» کند.

چند نتیجه خاص اما بسیار لذت‌بخش

نتیجه ۴: تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با این خاصیت که $f(f(x)) = x^3 - 2x$ وجود ندارد.

برهان: با توجه به شکل ۱ (که با نرم‌افزار جنوجبرا رسم شده است)، نشان دهید که اگر $g(x) = x^3 - 2x$ آنگاه تابع $g \circ g$ دقیقاً دو نقطه ثابت خارج از نقطه‌های ثابت g دارد (البته توجه کنید که جزئیات اثبات را ارائه نکرده‌ایم).



شکل ۱



۲۱

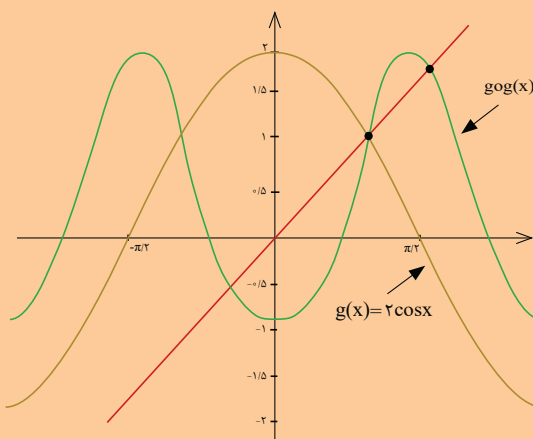
شماره ۱۳۱ | پاییز ۱۴۰۱

بعضی از آن‌ها فعلاً برای بنده هم نامشخص است؛ بررسی، تحقیق و تحلیل آن‌ها بر عهده پژوهشگران عزیز.

نتیجه ۵

تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با این خاصیت که $f(f(x)) = 2 \cos x$ وجود ندارد.

برهان: این نتیجه را مشابه برهان نتیجه ۴، با توجه به شکل ۲ (که با همان نرم‌افزار رسم شده است) و فرض $g(x) = 2 \cos x$ ثابت کنید.



شکل ۲

سؤال ۱: آیا عکس قضیه ۱ درست است؟ به‌طور دقیق‌تر، «اگر بدانیم تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با خاصیت $f(f(x)) = ax^2 + b$ ($a \neq 0$) وجود ندارد، آیا می‌توان نتیجه گرفت $ab < \frac{-3}{4}$ ؟»

سؤال ۲: آیا می‌توان نتیجه ۲ را به‌گونه‌ای «تعمیم» داد که تعداد نقطه‌های ثابت $g \circ g$ خارج از نقطه‌های ثابت g ، محدود به «حداکثر ۳» نباشد؟ این «حداکثر ۳» دستان را بسته است، زیرا اگر تابعی مانند g بیابیم که تعداد نقطه‌های ثابت $g \circ g$ خارج از نقطه‌های ثابت g ، مثلاً چهار، پنج و ... باشد، دیگر نمی‌توان از این نتیجه استفاده کرد.

سؤال ۳: آیا چندجمله‌ای $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ وجود دارد به‌گونه‌ای که خودش نقطه ثابت نداشته باشد، اما $g \circ g$ حداقل یک نقطه ثابت داشته باشد؟ برای تابع‌های دیگر، غیر از چندجمله‌ای‌ها، چه؟!

سؤال ۴: این تابع را در نظر بگیرید:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x = 1 \\ x & x \neq 0, 1 \end{cases}$$

بدون استفاده از «راهبرد نقطه ثابت»، ثابت کنید که تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با خاصیت $f(f(x)) = g(x)$ وجود ندارد.

زیبایی‌ها و لذت‌های موجود در پژوهش، به‌ویژه پژوهش در ریاضیات، «یُدِرک و لا یوصف» است، «به درک آید، اما به وصف ناید!» و به قول شیخ محمود شبستری در «گلشن راز»:

که وصف آن به گفت‌وگو محال است
که صاحب‌حال داند کان چه حال است
امید که لایق آن باشیم!

کلام آخر

شاید در ابتدای مقاله اصلاً فکر نمی‌کردید که این همه مطلب، فقط با استفاده از یک «مسئله کوچک» به‌دست آید. مرور مطلب این مقاله و مطلب قسمت قبل، کاملاً مشخص می‌کند که گاهی بررسی عمیق راهبرد به‌ظاهر ساده یک مسئله، چه نتیجه جالبی به‌دست می‌دهد؛ نتیجه‌های قدرتمندی که می‌توان از آن‌ها به‌صورت کاملاً مستقل در حل مسائل خیلی پیچیده‌تر استفاده کرد.

در اوایل کتاب ریاضی سال هفتم، مرحله‌های چهارگانه حل مسئله این‌گونه بیان شده‌اند: فهمیدن مسئله، انتخاب راهبرد مناسب، حل مسئله و «بازگشت به عقب». سه مرحله اول در قسمت قبلی مقاله طی شد، اما وظیفه مقاله حاضر بررسی عمیق‌تر راهبرد حل مسئله، طرح سؤال‌های جدید و پاسخ به این سؤال‌ها بود. متأسفانه اکثر افراد همان سه مرحله را برای حل مسئله طی می‌کنند. تفاوت پژوهشگر با دیگران دقیقاً در همین مرحله چهارم است، زیرا فقط به حل مسئله نمی‌اندیشد و آن را به‌راحتی رها نمی‌کند. البته این روحیه به‌راحتی به‌دست نمی‌آید. خوشا به حال اینان!

در آخر مقاله سه سؤال و یک مسئله طرح می‌کنیم که جواب



۲۲

شماره ۱۳۴ | پاییز ۱۴۰۴

کرجی، خورشید پشت ابر

احسان یار محمدی

پژوهشگر، دکترای مدیریت صنعتی - مالی

① نام من «محمد بن حسن حاسب الکرجی» است که سالیان سال بین محققان و دانشمندان به اشتباه «الکرجی» نامیده شده بودم. من یک ریاضی‌دان، مهندس و آب‌شناس برجسته بودم که در دوره‌های آل بویه و آل زیار پژوهش‌ها، آثار و کتاب‌های علمی زیادی از خود به یادگار گذاشته‌ام.

② علت اشتباه تاریخی در ذکر نام من از الکرجی به الکرجی، اشتباه کاتب در نسخه کتاب من با نام «الفخری فی صناعة الجبر و المقابلة» است که به دست ریاضی‌دان، تاریخ‌نگار ریاضی و خاورشناس آلمانی «فرانتس وپکه» افتاده بود. وپکه مرا به اشتباه الکرجی به جهانیان معرفی کرد.

③ بعدها زبان‌شناس و شرق‌شناس ایتالیایی «جورجو لوی دلا ویدا» با انجام تحقیق‌های گسترده اعلام کرد که نام صحیح من الکرجی است. هر چند که خیلی قبل‌تر «سَمَوَالِ الْمَغْرِبِی» ریاضی‌دان، اخترشناس و پزشک ممتاز جهان اسلام در کتاب «الباهر فی الجبر» اشاره کرده بود که نام درست من الکرجی است.

④ بعد از اینکه مشخص شد نام صحیح من الکرجی است، عده زیادی بر این گمان بودند که زادگاه من شهر کرج در استان البرز در نزدیکی تهران است، اما در واقع من متولد و بزرگ‌شده «کرج ابودلف» در نزدیکی شهر اراک در استان مرکزی هستم.

⑤ من به واسطه حمایت‌های وزیر بلندهمت و دانش دوست آل بویه، «ابن غالب محمد بن علی ابن خَلَف» که به «فخرالملک وزیر» شهرت داشت، به تحقیق و پژوهش در ریاضیات و علوم دیگر پرداختم.

⑥ بعد از سقوط آل بویه و به قدرت نشستن آل زیار، در دربار سلطان «منوچهر بن قابوس» خدمت دیوانی کردم. در آنجا مورد حمایت وزیر کاردان و با فرهنگ آل زیار، «عبدالرحیم بن معروف بن محمد ابوغانم قصری» قرار گرفتم و آثار ماندگاری از خود به یادگار گذاشتم.

محل جلوس سلطان
(جاسلطان)



استان
آذربایجان

کردستان
کوشا

کرج ابودلف

استان
ازندران

کویت
کویر

۲۳

شماره ۱۳۱ | پاییز ۱۴۰۱

من چندین کتاب ارزشمند علمی به زبان عربی
تألیف و تدوین کرده‌ام:

✱ الفخری فی صناعة الجبر و المقابلة

✱ انباط المیاء الخفیه

✱ البدیع فی الحساب

✱ علل الحساب و الجبر و المقابلة و شرحها

✱ العقود و الأبنیه فی الحساب

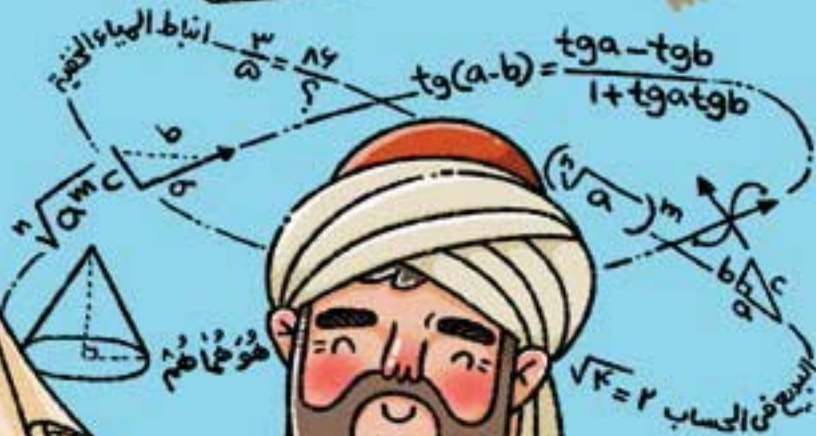
✱ المسائل و الأجوبة فی الحساب

علاقه من به «خوارزمی» همه چیزدان بی نظیر
ایران زمین که در زمینه جبر، ریاضی دانی پیشتاز به
شمار می‌آمد؛ باعث شد ادامه دهنده راه او باشم
و وقت بسیاری را صرف مسائل و قضایای جبر در
ریاضیات کنم.

به پاس قدردانی از حسن نظر، طبع بلند و بزرگواری
«فخرالملک وزیر» که همواره در انجام امور علمی
حامی و مشوق من بود، کتاب «الفخری فی صناعة
الجبر و المقابلة» را به وی تقدیم و به نام این وزیر
شایسته نام گذاری کردم.

کتابی با عنوان «الکافی فی
الحساب» با موضوع جبر،
حساب و هندسه به رشته تحریر
درآورده بودم که خاورشناس اهل
کشور آلمان، «آدولف هوخه‌ایم» به
زبان آلمانی ترجمه کرد و در سه جلد به
چاپ رساند.

من به تعیین جذر عددها علاقه زیادی
داشتم و به همین دلیل کتاب «الاجزار» را
برای محاسبه جذر عددها به رشته تحریر
درآوردم.



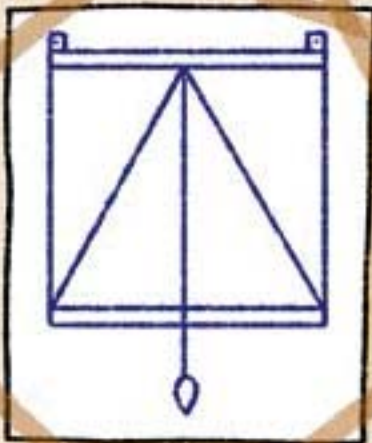
۲۴

شماره ۱۳۱ | پاییز ۱۴۰۳

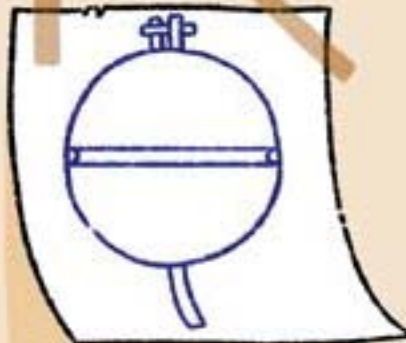
۱۶ برای صنعت ساخت و ساز یک «تراز مربع شکل» اختراع کردم که علاوه بر تعیین امتداد افقی سطح‌ها، اختلاف سطح‌ها را از روی علامت‌های درجه‌بندی شده نشان می‌داد و به کشیدن نخ و ریسمان برای ترازبندی احتیاج نداشت؛ بلکه اندازهٔ ارتفاع را روی صفحهٔ مدرج نشان می‌داد.



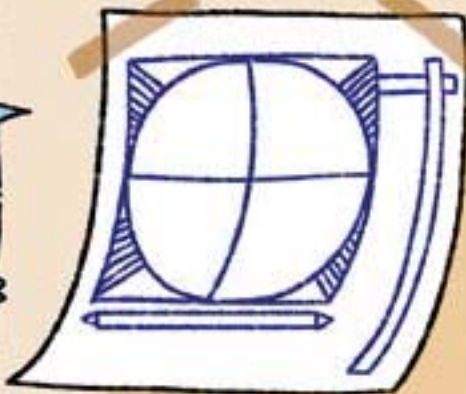
۱۷ برای جلوگیری از نشت آب در کانال‌ها، استخرها و لوله‌ها و ایمن کردن آن‌ها به منظور جلوگیری از هدررفت آب، نوعی مادهٔ درزگیر را با استفاده از آهک، روغن زیتون، شیر و تخم مرغ تهیه کردم که از آن می‌شد به عنوان چسبی قوی در عایق‌بندی سطح در تماس با آب استفاده کرد.



۱۸ برای اندازه‌گیری زاویه از طریق ارتفاع، یک «زاویه‌یاب» ابداع کردم که در واقع نوعی ارتفاع‌یاب بود. به کمک آن و با در اختیار داشتن ارتفاع دو بلندی، زاویهٔ مورد نظر محاسبه می‌شد.



۱۹ برای سنجش ارتفاع کوه‌ها و محاسبهٔ اندازهٔ بلندی‌ها، یک «ارتفاع‌یاب» ابداع کردم که بدون هیچ شک و شبهه‌ای می‌توان از آن به عنوان نخستین «دوربین زاویه‌سنج طول‌یاب» (دوربین تئودولیت) نام برد.



هر چند که امروزه آرامگاه من بر همگان پوشیده است و حتی برای زنده‌نگهداشتن نامم و سپاس بابت تمامی دستاوردهای علمی و مهندسی‌ام، بنای یادبودی ندارم، اما مطمئنم هیچ‌گاه خورشید پشت ابر نخواهد ماند و جایگاه و منزلت علمی من روزی بر همگان روشن خواهد شد.



۱. پیرهادی تواندشتی، محمود (۱۳۹۲). خورشید پنهان علم و دانش؛ شرح احوال، آثار و آراء محمّدبن حسن حاسب الکرجی، انتشارات شهرآرا، اراک.
۲. حق‌وردی، مجید (۱۳۹۹). محمّدبن حسن حاسب الکرجی: ریاضی‌دان، مهندس و آب‌شناس قرن چهارم و اوایل قرن پنجم هجری قمری. فصلنامهٔ تحلیلی، آموزشی و اطلاع‌رسانی رشد آموزش ریاضی، دورهٔ ۳۸، شمارهٔ ۱۳۶، صص: ۳۲ - ۳۱.
۳. قربانی، ابوالقاسم (۱۳۵۷). زندگی‌نامهٔ ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی از سدهٔ سوم تا سدهٔ یازدهم هجری، مرکز نشر دانشگاهی، تهران.

مسئله‌هایی در احتفال با پاسخ‌هایی دور از انتظار

احتفال شیرین

بنر با بُر؟

پارادوکس مونتی هال به بیانی تازه

انیس ملک احمدی

دانشجوی فیزیک، ایلام

«پارادوکس^۱ مونتی هال» برای دهه‌ها ذهن دانش‌آموزان و دانشمندان را به چالش کشیده است. این مقاله روشی ساده و شهودی ارائه می‌دهد که درک آن را برای همگان ممکن می‌سازد.

این مسئله ظاهری بسیار ساده و در عین حال بسیار گیج‌کننده دارد. در ظاهر انتخاب بین دو در است که هر کدام شانس ۵۰ درصدی دارند، اما محاسبه‌های دقیق و شبیه‌سازی‌های رایانه‌ای نشان می‌دهند که عوض کردن در با مجری، شانس برد را تا ۶۶ درصد افزایش می‌دهد؛ واقعیتی که درک آن برای دانشمندان هم گیج‌کننده است و همین موضوع درک درست آن را مشکل کرده است.

شرح پارادوکس

در بازی کلاسیک مونتی هال، «۳ در» وجود دارد (۱) در جایزه دارد و ۲ در خالی‌اند. شما یک در را انتخاب می‌کنید. مجری (که می‌داند جایزه کجاست) یک در را باز می‌کند و نشان می‌دهد که پوچ است. حال ۲ در باقی می‌ماند (در انتخابی شما و دری که مجری باقی می‌گذارد) و از شما می‌پرسد که حاضرید در خود را با در او عوض کنید؟ سؤال این است: «آیا عوض کردن در با مجری، شانس بردن در جایزه را افزایش می‌دهد یا خیر؟»

طبق مطالعاتی که روی پارادوکس مونتی هال و مقاله‌های علمی پیرامون آن داشتیم، همه روی «احتمال شرطی» یا «درهای بیشتر» تمرکز کرده‌اند، تا مسئله را قابل فهم‌تر کنند. اما از نظر نویسنده عامل گیج‌کننده‌ای در این مسئله وجود دارد که با حفظ چارچوب مسئله، اما با تغییر شیوه بیان مسئله، این عامل گیج‌کننده تا حد زیادی از بین می‌رود.



نتیجه تعویض	اقدام مجری	انتخاب شما
برد ✓	در پر	در پوچ A
برد ✓	در پر	در پوچ B
باخت ✕	در پوچ A یا B	در پر

توضیحات تکمیلی: در بیان مسئله و حل آن به شکل کلاسیک، آنچه در اختیار مجری است از نظر دور می ماند. ولی در بیان مسئله به شکل جدید، روی انتخاب و دارایی مجری مانور می دهیم.

مزیت های روش جدید

- نیاز به فرمول های پیچیده ندارد؛
- نرخ درک سریع را از ۱۵ درصد به ۸۵ درصد افزایش می دهد؛
- برای تدریس در مدرسه ها مناسب است؛
- حذف عنصر نمایشی باز کردن در، که ذهن را منحرف نمی کند؛
- محاسبه های پیچیده را به درک مستقیم تبدیل می کند.

پی نوشت

۱. ناساز نمایی

بیان جدید مسئله

برای درک بهتر، مسئله را به بیانی متفاوت ولی بدون اختلاف در معنا ارائه می کنیم:

در یک مسابقه تلویزیونی ۳ در داریم: یک در پر و دو در خالی هستند. مجری از شما می خواهد که اول یک در را به صورت شانس انتخاب کنید و بعد با توجه به انتخاب شما، مجری (که از پشت درها خبر دارد) دری را انتخاب می کند. به این صورت که اگر در پوچ را انتخاب کنید، آنگاه مجری در پر را برای خودش بر می دارد و اگر در پر را انتخاب کنید، آنگاه او در پوچ را بر می دارد و بعد از شما می پرسد که آیا در خود را با او عوض می کنید یا نه؟

نتیجه بسیار ساده است. از آنجا که تعداد درهای پوچ دو برابر در پر است و به احتمال $\frac{2}{3}$ در پوچ را انتخاب خواهید کرد و لذا به احتمال $\frac{1}{3}$ در پر در اختیار مجری است، پس عوض کردن در با مجری، شانس شما را دو برابر خواهد کرد. با نگاهی به جدول، پاسخ مونتیهال کاملاً روشن می شود.



۲۸

شماره ۱۳۴ | پاییز ۱۴۰۴

داستان‌های شیرین ریاضی (قسمت هشتم) محاسبه حجم اجسام در کلاس هندسه

سید محمد رضا هاشمی موسوی

اشاره

تا اینجا هفت داستان را تجربه کردید که مطالب آموزشی بسیاری به همراه داشتند. داستان‌های هدیه حاکم بزرگ به مخترع شطرنج، مسئله مشهور پنج کلاه و روش حل حسابی (مقدماتی) و تعمیم آن، روش ضرب ذهنی $m \times n$ در حالت عمومی، کلاس درس هندسه و یافتن خطای شکل (تشخیص انطباق نداشتن شکل با اطلاعات مسئله)، کشف بزرگ ارشمیدس و تشخیص تاج تقلبی پادشاه، محاسبه مساحت دایره به چند روش مقدماتی، و محاسبه محیط دایره با چند روش مقدماتی را مطالعه کردید. در داستان هشتم می‌خواهیم به محاسبه سطح و حجم کره که شبیه سطح دایره است و در واقع تعمیمی از سطح دایره محسوب می‌شود، بپردازیم. البته حجم را به صورت مستقل به دست می‌آوریم و سپس با استفاده از آن، مساحت سطح کره را محاسبه می‌کنیم. پس ابتدا به محاسبه حجم کره می‌پردازیم.

محاسبه حجم کره در کلاس درس هندسه

بچه‌ها چند دقیقه‌ای بود که در کلاس نشسته و منتظر معلم ریاضی بودند که در کلاس باز و معلم وارد کلاس شد. او مثل همیشه ابزاری در دست داشت. پس از سلام و عرض احترام بچه‌ها، معلم عنوان درس را روی تابلو نوشت:

محاسبه حجم کره و محاسبه فرمول آن به روشی عملی (کلاس صبح)

دانش‌آموزان از اینکه باز هم کار دارند، همه شاد و سرحال

بودند و رضایت از جلسه‌های قبلی (محاسبه مساحت و محیط دایره) روی چهره‌ها نقش بسته بود. در این لحظه سکوت بامعنایی کلاس را گرفت که یک‌دفعه یکی از بچه‌ها بلند شد و از جانب بچه‌ها از معلم تقدیر کرد و با شور و هیجان گفت: «آقا رفتیم منزل و همه فعالیت‌هایی را که داده بودید، با ابزاری که فراهم کردم، انجام دادم. نتایج را هم در دفتر چاهم یادداشت کردم. با فرمول هم انجام دادم و با اختلاف کمی به جوابی که می‌خواستم رسیدم!»

معلم: «آفرین به شما! فکر می‌کنم با این کارهای تجربی‌ای که انجام دادید، دیگر مساحت دایره و محیط دایره را فراموش نخواهید کرد!»

و بلافاصله به بچه‌ها گفت: «یکی بیاید اینجا کمک من تا کار تجربی محاسبه حجم را انجام دهیم.»

همه دانش‌آموزان با شور و شوق و هیجان دست بالا بردند. چندثانیه‌ای نگذشته بود که معلم یکی از دانش‌آموزانی را که از نظر درسی از همه بچه‌ها ضعیف‌تر بود، انتخاب کرد.

دانش‌آموز گفت: «آقا ما بیاییم؟!»

باورش نمی‌شد، چون معلم همیشه دانش‌آموزان خوب و ممتاز را پای تابلو می‌آورد. دانش‌آموز با هیجان پای تابلو رفت تا معلم را یاری دهد.

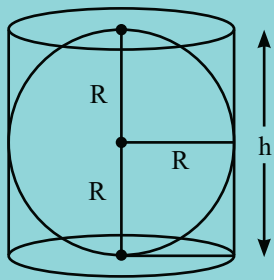
معلم فرایند کار تجربی برای محاسبه حجم کره به نام روش HM را به این شرح ارائه داد:

۱. ابتدا کره‌ای را به شعاع R در نظر می‌گیریم (شکل ۱).



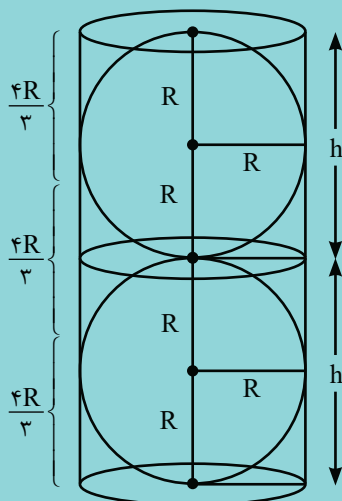
۲۹

شماره ۱۳۴ | پاییز ۱۴۰۴



شکل ۳

۴. دو استوانه مشابه را روی هم قرار می‌دهیم.



شکل ۴

۵. حجم استوانه را حساب می‌کنیم:

$$V_{\text{ستوانه}} = (\text{مساحت قاعده}) \times (\text{ارتفاع})$$

$$V_{\text{ستوانه}} = S \cdot h$$

$$= (\pi R^2) \cdot (2R)$$

$$V_{\text{ستوانه}} = 2\pi R^3$$

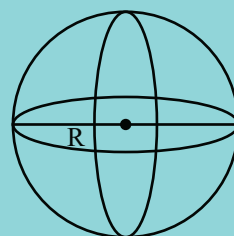
۶. حجم استوانه حاصل (دو برابر) را به سه قسمت برابر

تقسیم می‌کنیم. هر قسمت $\frac{2\pi R^3}{3}$ می‌شود.

۷. حجم استوانه دو برابر را حساب می‌کنیم (شکل ۴):

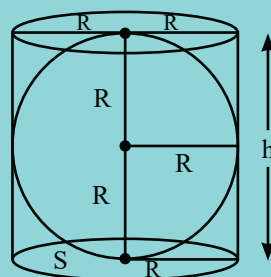
$$V_{\text{دو برابر}} = 2V_{\text{ستوانه}} = 2(2\pi R^3) = 4\pi R^3$$

۸. با توجه به حجم دو کره، حجم استوانه دو برابر را به صورت جزء جزء حساب می‌کنیم:



شکل ۱

۲. برای محاسبه حجم کره، استوانه محیطی آن را رسم می‌کنیم (شکل ۲).



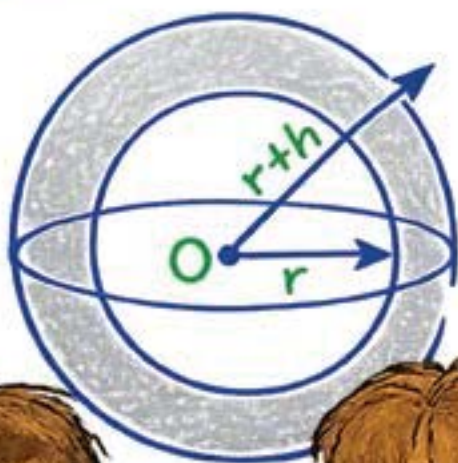
شکل ۲

۳. حال استوانه و کره دیگری مثل شکل ۳، با همین اندازه و ابعاد و حجم، به طور مشابه در نظر می‌گیریم.



۳۰

شماره ۱۳۴ | پاییز ۱۴۰۰



غیرمختلخل را محاسبه کرد.
سکوت کلاس را فرا گرفته بود و همه نگاه‌ها به تابلو بود. همه به فرمول حجم کره خیره شده بودند و با چهره‌های بشاش و با شور و هیجان و رضایت کامل از فرایند محاسبه بسیار ساده و قابل فهم معلم، به تابلو نگاه می‌کردند که یک‌دفعه همه با هم به تشویق معلم پرداختند.

معلم: «بچه‌ها مطلب سختی نبود. حالا این فرایند را با یک استوانه مدرج شیشه‌ای بزرگ و دو مهره اندازه هم که اگر روی هم قرار دهیم کامل در استوانه جا می‌گیرند (فضای استوانه کم یا زیاد نیاید) انجام می‌دهیم. آب رنگی هم آورده‌ام که داخل استوانه می‌ریزیم. بچه‌ها، می‌خواهید این کار را در کلاس انجام دهیم یا در آزمایشگاه ریاضی؟!»

دانش‌آموزها با زمزمه‌های متوالی و اشاره به معلم رساندند که در آزمایشگاه ریاضی انجام دهیم.

معلم: «پس ما برای جلسه بعد این آزمایش را انجام می‌دهیم. البته دوباره در آزمایشگاه ریاضی و از دوستان می‌خواهم با وسایلی که آورده‌ام این کار را انجام دهد.»

دانش‌آموز شروع کرد و با دقت همه فرایند را انجام داد. آخر سر با خارج کردن گلوله‌ها و ریختن آب‌مانده در ته استوانه، آب را داخل گوی تزریق کردند و چون آب رنگی بود، گوی‌های شیشه‌ای نشان می‌دادند که آب استوانه کامل داخل گوی را پر کرده است یا نه!

$$V_{\text{ر}} = 2V_0 + V_0' = 4\pi R^3 \quad (1)$$

(حجم V_0 برابر با حجم کره و حجم V_0' هم برابر با حجم استوانه دوبرابر، به جز حجم دو کره است.)

۹. با توجه به پیمانه‌های هم‌نهشت، حجم دوبرابر $V_{\text{ر}}$ را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم و حال به نسبت دو به یک می‌نویسیم:

$$V_{\text{ر}} = 4\pi R^3 = \frac{3}{3}(4\pi R^3) = \frac{2+1}{3}(4\pi R^3) \quad (2)$$

$$= \frac{2}{3}(4\pi R^3) + \frac{1}{3}(4\pi R^3)$$

۱۰. رابطه‌های (۱) و (۲) را با هم مقایسه می‌کنیم:

$$2V_0 + V_0' = \frac{2}{3}(4\pi R^3) + \frac{1}{3}(4\pi R^3)$$

یا می‌توان نوشت:

$$2V_0 + V_0' = 2\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) + \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$$

۱۱. از مقایسه دو طرف (و با توجه به پیمانه‌ها)، می‌توان نوشت:

$$V_0 = V_0' = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad (\text{حجم کره})$$

توجه: با روش HM می‌توان حجم همه جسم‌های صلب و



۱۴

شماره ۱۳۴ | پاییز ۱۴۰۴

داشتن مساحت‌های دو دایره بزرگ و کوچک، و در واقع با توجه به شکل ۵ می‌توان نوشت:

حجم کره کوچک - حجم کره بزرگ = حجم کمربند

$$= \frac{4}{3}\pi(r+h)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$$

توجه: برای دایره‌ها r^2 را از $(r+h)^2$ کم کردیم، ولی اینجا r^3 را از $(r+h)^3$ کم می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \text{حجم کمربند} &= \frac{4}{3}\pi(r+h)(r+h)^2 - \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi(r+h)(r^2 + h^2 + 2rh) - \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi(r^3 + rh^2 + 2r^2h + hr^2 + h^3 + 2rh^2) \\ &\quad - \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi(r^3 + 3r^2h + 3rh^2 + h^3) - \frac{4}{3}\pi r^3 \end{aligned}$$

پس از تفاضل:

$$\text{حجم کمربند} = 4\pi r^2h + 4\pi rh^2 + \frac{4}{3}\pi h^3$$

بنابراین می‌توان نابرابری زیر را نوشت:

$$h \times (\text{مساحت کره بزرگ}) \leq 4\pi r^2h + 4\pi rh^2 + \frac{4}{3}\pi h^3 \leq h \times (\text{مساحت کره کوچک})$$

حال کل نابرابری را بر h تقسیم می‌کنیم:

$$\text{مساحت کره بزرگ} \leq 4\pi r^2 + 4\pi rh + \frac{4}{3}\pi h^2 \leq \text{مساحت کره کوچک}$$

حالا کافی است $h \approx 0$ را در نظر گرفت. در این صورت کره بزرگ بر کره کوچک به تقریب منطبق خواهد شد. در واقع هرچه h کوچک‌تر می‌شود $\left(h \approx \frac{1}{n^{10}}\right)$ ، جمله‌های $4\pi rh$ و $\frac{4}{3}\pi h^2$ به صفر نزدیک‌تر می‌شوند و در محاسبه‌ها تأثیری ندارند. پس می‌توان نوشت:

$$h \approx 0: A \leq 4\pi r^2 \leq A$$

در واقع عبارت میانی ($4\pi r^2$) بین دو عبارت سمت چپ (مساحت کره کوچک) و عبارت سمت راست (مساحت کره بزرگ) فشرده شده است و وقتی $h \approx 0$ در نظر بگیریم، هر دو دایره در واقع هم مساحت و برابر با A خواهند شد و از این فشرده‌گی، نتیجه مطلوب حاصل می‌شود:

$$(h \approx 0): A = 4\pi r^2$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

بالاخره آب را داخل گوی ریختند و به‌طور دقیق گوی پر از آب رنگی شد و نتیجه کار درست بود. اینجا بود که با محاسبه‌ها و فرایند آقای معلم مطابقت داشت. در همین حین زنگ مدرسه به صدا درآمد.

معلم: «بچه‌ها بروید حیاط. پس از استراحت، بعد از ظهر مساحت کره را محاسبه می‌کنیم.»

دانش‌آموزان همه شاد و با شور و شوق بی‌وصف راهی حیاط مدرسه شدند.

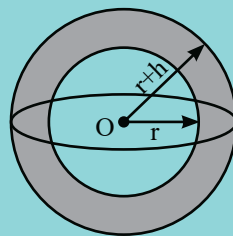
محاسبه مساحت کره با استفاده از حجم کره (جلسه بعد از ظهر)

دانش‌آموزها وارد کلاس شدند و چند لحظه بعد معلم هم وارد شد. پس از عرض احترام و ادب بچه‌ها، معلم گفت: «این ساعت را دو قسمت می‌کنیم: یک ۳۰ دقیقه برای اثبات مساحت کره ($A = 4\pi r^2$) و ۶۰ دقیقه بعد هم به آزمایشگاه ریاضی می‌رویم تا حجم برخی از جسم‌های فضایی، مثل مخروط، هرم و... را تا جایی که وقت اجازه بدهد، به‌صورت تجربی و با روش HM محاسبه می‌کنیم.»

بچه‌ها همه به‌گوش و در انتظار اثبات محاسبه سطح کره بودند.

در همین موقع معلم کار خود را شروع کرد و روی تابلو روند اثبات را نوشت: «فرض می‌کنیم کره‌ای به شعاع r داریم و همین‌طور کره‌ای بزرگ‌تر هم به شعاع $R = r + h$ معلوم است. این دو کره را رسم می‌کنیم (شکل ۵):

یک کمربند (یک نوار باریک به قطر h) پدید آمده است (در واقع یک تیوب چرخ ماشین را در نظر بگیرید).



شکل ۵

واضح است، نابرابری زیر را می‌توان نوشت:

$$h \times (\text{مساحت کره بزرگ}) \leq \text{حجم کمربند (تیوب)} \leq h \times (\text{مساحت کره کوچک})$$

توجه: همان‌طور که محیط دایره را محاسبه می‌کنیم، با



۴۲

شماره ۱۳۴ | پاییز ۱۴۰۵

ملاحظه می‌شود که اثبات به همان سادگی اثبات فرمول محیط دایره است.

می‌گیریم و یادداشت می‌کنیم (مقطع لوله همان قطر گوی است).

○ **گام پنجم:** آب رنگی را با سرنگ وارد گوی شیشه‌ای می‌کنیم. دقت کنید که گوی شیشه‌ای به‌طور کامل پر شود.

○ **گام ششم:** سطح مقطع لوله (πR^2) را در ارتفاع (h) آب رنگی یادداشت‌شده ضرب می‌کنیم (حاصل ضرب برابر با حجم گوی شیشه‌ای است).

h در واقع برابر با ثلث $(\frac{1}{3})$ ارتفاع لوله شیشه‌ای است:

$$V_0 = (\pi R^2)(h) = (\pi R^2)\left(\frac{4R}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad (\text{حجم کره})$$

در اینجا نتیجه می‌گیریم روش HM مقدار دقیق حجم کره را می‌دهد.

دانش‌آموزان با شور و ذوق بسیار کار را دنبال می‌کردند و با زمزمه، رضایت خود را از نتیجه به‌دست آمده نشان می‌دادند. یکی از آن‌ها در همین حین اجازه گرفت و گفت: «آقا روش HM برای همه حجم‌ها جواب می‌دهد؟»

معلم: بله، ما برخی از حجم‌های جسم سخت را حساب می‌کنیم و در یک جدول نمایش، مقدارهای به‌دست‌آمده حجم‌ها را ثبت می‌کنیم.

پس از گذشت ۵۰ دقیقه برخی از حجم‌ها محاسبه و در جدول ۱ ثبت شدند.

دانش‌آموزان با زمزمه‌هایی شور و هیجان خود را ابراز کردند و همه خوش حال بودند که همه مطالب به‌صورت تجربی به نتیجه رسیدند و حتی محاسبه‌های جسم‌های متفاوت هم در جدول ثبت شدند.

معلم: بچه‌ها، دقیقه‌های پایانی است و در اینجا با هم در چند دقیقه همه مطالب را مرور می‌کنیم. (پس از نوشتن نتیجه‌ها که در ادامه آمده است، زنگ به صدا درآمد و با شور زیاد بچه‌ها راهی منزل شدند.)

دانش‌آموزان با شور و شوق و هیجان ساعت را اعلام کردند که در واقع ۳۰ دقیقه به پایان رسیده بود و باید به آزمایشگاه ریاضی می‌رفتند و کار تجربی انجام می‌دادند.

معلم: «بچه‌ها، آرام بروید پایین، آزمایشگاه ریاضی.»

دانش‌آموزان همه با ذوق بی‌وصف راهی آزمایشگاه شدند. معلم هم که با آقای مدیر هماهنگ کرده بود، با تجدید هماهنگی با دفتر مدرسه، راهی آزمایشگاه شد.

معلم: «بچه‌ها، به دنبال آن آزمایش که در کلاس انجام دادیم، می‌خواهیم به روش HM تعدادی دیگر از حجم‌های جسم‌های فضایی را به‌صورت تجربی به‌دست آوریم و فرمول آن‌ها را هم بررسی کنیم. برای این کار، لوازم مورد نیاز آزمایش‌ها را روی تابلو می‌نویسم.»

لوازم مورد نیاز برای محاسبه حجم جسم‌های فضایی به روش HM:

۱. لوله استوانه‌ای و مدرج (شیشه‌ای)؛
۲. گوی‌هایی شیشه‌ای دارای روزه‌ای برای تزریق آب رنگی؛
۳. سرنگ با حجم مناسب؛
۴. آب یا مایع رنگی به میزان کافی.

• روش عمل

○ **گام اول:** دو گوی شیشه‌ای را که به اندازه قطر دهانه استوانه هستند، داخل استوانه و روی هم مستقر می‌کنیم.

○ **گام دوم:** به میزان کافی آب رنگی یا مایع رنگی را به داخل لوله استوانه‌ای وارد می‌کنیم تا هم سطح گوی بالایی شود؛ به‌طوری که سطح توپ داخل آب باشد (گوی نباید پایین‌تر از دهانه یا بالاتر از دهانه استوانه باشد).

○ **گام سوم:** گوی‌ها را از استوانه خارج می‌کنیم. مایع رنگی ته استوانه با یکی از خط‌های استوانه مدرج، هم‌تراز می‌شود (واحد لیتر).

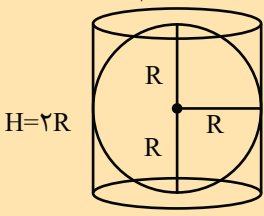
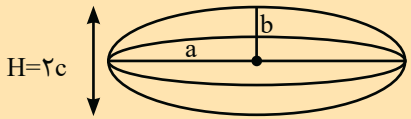
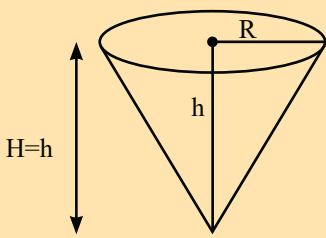
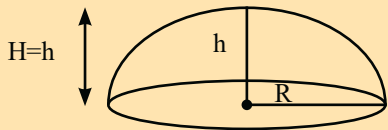
○ **گام چهارم:** ارتفاع مایع رنگی (آب رنگی) را اندازه



۳۳

شماره ۳۳ | پاییز ۱۴۰۴

جدول ۱. محاسبه حجم جسم‌های سخت با روش HM

ردیف	تعداد استوانه	تعداد مکمل استوانه	نصف طول	نصف عرض	H ارتفاع	شکل جسم‌های صلب
I	۲	۱	R	R	۲R	$V_M = \frac{4}{3} \pi R^2$ 
II	۲	۱	a	b	۲C	$V_M = \frac{4}{3} \pi abc$ حجم بیضی‌گون 
III	۲	۱	R	R	h	$V_H = \frac{1}{3} \pi R^2 h$ مخروط 
IV	۲	۲	R	R	h	$V_M = \frac{1}{2} \pi R^2 h$ سه‌می‌گون 
V	...	...	...	...	...	$V_M = \frac{n\pi}{m+n} abH$

نتیجه‌ها

معلم از جریان کلاس امروز این‌گونه نتیجه گرفت:

۱. به کمک شما مساحت دایره را به سه روش متفاوت محاسبه کردیم. قرار شد روشی را هم شما به‌عنوان فعالیت انجام دهید.

۲. با هم توانستیم به سه روش متفاوت محیط دایره را محاسبه کنیم و روشی را هم برای محاسبه به‌عنوان فعالیت به‌عهده شما گذاشتیم.

۳. حجم کره را با روش HM محاسبه کردیم و با آزمایش‌های متفاوت توانستیم حجم دیگر جسم‌های فضایی را به‌دست آوریم.

۴. با داشتن حجم کره، توانستیم سطح کره را محاسبه کنیم.

فعالیت: همه در خانه حجم کره و حجم بیضی‌گون را به روش HM محاسبه کنید. نشان دهید با تسهیم به نسبت به رابطه عمومی $V_m = \frac{n\pi}{m+n} abH$ (حجم) خواهیم رسید.

در پایان

اگر از عامل‌های مؤثر اجتماعی و نوع برنامه و شیوه کتاب‌های درسی بگذریم، بدون تردید، یکی از جدی‌ترین عامل‌هایی که در به وجود آوردن پژوهشگر و دانشمند نقش اساسی دارد، نحوه برخورد معلم با مسئله‌های علمی، و عکس‌العمل او در برابر رفتار دانش‌آموزان است. می‌شود در مقابل دانش‌آموزان مثل یک سخنران، گچ را به‌دست گرفت و فرمول‌هایی را بر تخته نوشت، با استفاده از قانون‌هایی که تنها به کمک حافظه در ذهن می‌مانند، نتیجه‌هایی را پیدا کرد و از دانش‌آموزان هم خواست تا آن‌ها را به‌خاطر بسپارند. این تقریباً همان راهی است که می‌رویم و محصولش هم همین است که می‌بینیم.

ولی می‌شود از درک و اندیشه خود دانش‌آموزان کمک گرفت و با یاری گرفتن از داستان‌ها و ماجراهای شگفت‌انگیز تاریخی و نشان دادن کاربرد ریاضیات در عمل و ترفندهای معلمی و دیگر موارد، اعتقاد دانش‌آموز را نسبت به خودش تحکیم بخشید و در او کششی به‌وجود آورد و او را به سمت راه درست فکر کردن راهنمایی کرد. و این همان راهی است که باید به آن دل ببندیم.

تردیدی نیست که این روش، دشواری‌هایی برای معلم به‌همراه دارد، او باید دائم مطالعه کند و تاریخ ریاضیات را

هم بشناسد و کاربرد آن را در عمل بداند. او باید برای طرح هر موضوع، نقشه‌ای داشته باشد، درباره پرسش‌هایی که باید در کلاس بشود، کاملاً اندیشیده باشد و غیر آن. ولی، به هر حال، این تنها راهی است که می‌تواند ما را به مقصود برساند. و در غیر این صورت، هر سال فارغ‌التحصیلان بیشتری خواهیم داشت، بدون اینکه هرگز بتوانیم به پژوهشگر و دانشمند برسیم.

ما در این داستان‌ها سعی کرده‌ایم که همه راه‌حل‌ها، مقدماتی و در سطح متوسطه باشند. اگر معلمان با تجربه ما هم قلم به دست بگیرند و همکاران جوان‌تر خود را در جریان آنچه در دوران تدریس و در درون کلاس‌ها بر آن‌ها گذشته است، آگاهی دهند، بزرگ‌ترین یاری را در ادامه این داستان‌ها خواهند کرد. در این راه پر فراز و نشیب و ناهموار مسیر معلمان را روشن خواهند کرد و اثرات سودمند از خود به‌جای خواهند گذاشت. معلم و دانش‌آموز هر دو در این مهم مؤثرند و نوشته‌هایشان جاودان خواهد ماند.

انشاءالله



منابع

۱. گروه مؤلفان (۱۳۹۲). فرهنگ ریاضیات. انتشارات مدرسه. تهران. چاپ پنجم.
۲. هاشمی موسوی، سیدمحمد رضا (۱۳۸۳). تصاعدهای حسابی و هندسی. انتشارات مدرسه. تهران. چاپ اول.
۳. یاکوله‌ویچ دیمان، ایوان (۱۳۶۳). داستان‌های ریاضی. ترجمه پرویز شهریاری. انتشارات آزاده. تهران. چاپ دوم.
۴. هاشمی موسوی، سیدمحمد رضا (۱۳۹۳). دیفرانسیل و انتگرال عمومی. انتشارات علمی و فرهنگی معراج قلم. تهران. چاپ اول.
۵. لانگ، سرژ (۱۳۷۱). بحث ریاضی با دانش‌آموز. ترجمه نعمت عبادیان. انتشارات مدرسه. تهران. چاپ اول.
۶. هاشمی موسوی، سیدمحمد رضا (۱۳۹۷). سری درس‌هایی از زندگی‌نامه ریاضی‌دانان ایران و جهان (مجموعه ۴۲ جلدی). انتشارات علمی و فرهنگی معراج قلم.



۴۵

شماره ۱۳۴ | پاییز ۱۴۰۴

نامساوی بل

اثبات قضیه با استفاده از مجموعه‌ها

محمود البرزی

دانشگاه صنعت نفت، تهران

چکیده

این مقاله قضیه نامساوی بل را با استفاده از رویکرد مجموعه‌ها به اثبات می‌رساند. در واقع اثبات قضیه نامساوی بل با نمودار ون ساده‌تر از رویکرد مجموعه‌هاست. لیکن، ارائه یک اثبات رسمی از قضیه مهم نامساوی بل، توضیح دقیق‌تری از آن قضیه می‌دهد. گرچه به نظر می‌رسد نامساوی بل از نظر ریاضی قضیه چندان پیچیده‌ای نیست، لیکن قضیه‌ای مهم با مفاهیمی عمیق در نظریه کوانتوم است که اثبات رسمی‌تری را طلب می‌کند.

کلیدواژه‌ها: نامساوی بل، نظریه کوانتوم، در هم تنیدگی کوانتومی

مقدمه

بنابر قضیه نامساوی بل (Bell, 1965)، چنانچه سه مجموعه A ، B و C را داشته باشیم، تعداد اعضای مجموعه A منهای تعداد اعضای اشتراک آن با مجموعه B به اضافه تعداد اعضای مجموعه B منهای تعداد اعضای اشتراک آن با مجموعه C بیشتر یا مساوی تعداد اعضای مجموعه A منهای تعداد

اعضای اشتراک آن با مجموعه C است:

$$n(A-B) + n(B-C) \geq n(A-C)$$

به عنوان مثال:

A = مجموعه دانش‌آموزان علاقه‌مند به موسیقی

B = مجموعه دانش‌آموزان علاقه‌مند به نقاشی

C = مجموعه دانش‌آموزان علاقه‌مند به ورزش

آنگاه:

$n(A)$ = تعداد دانش‌آموزان علاقه‌مند به موسیقی

$n(B)$ = تعداد دانش‌آموزان علاقه‌مند به نقاشی

$n(C)$ = تعداد دانش‌آموزان علاقه‌مند به ورزش

$n(A \cap B)$ = تعداد دانش‌آموزان علاقه‌مند به موسیقی و نقاشی

$n(B \cap C)$ = تعداد دانش‌آموزان علاقه‌مند به نقاشی و ورزش

$n(A \cap C)$ = تعداد دانش‌آموزان علاقه‌مند به موسیقی و ورزش

$n(A-B) = n(A) - n(A \cap B)$ = تعداد دانش‌آموزانی که به موسیقی

علاقه دارند اما به نقاشی علاقه ندارند



۳۶

شماره ۳۶ | پاییز ۱۴۰۴

$$\begin{aligned}
 n(B) &= 15 + 6 + 4 + 7 = 32 \\
 n(C) &= 12 + 8 + 4 + 7 = 31 \\
 n(A \cap B) &= 6 + 4 = 10 \\
 n(B \cap C) &= 4 + 7 = 11 \\
 n(A \cap C) &= 4 + 8 = 12 \\
 n(A - B) &= n(A) - n(A \cap B) = 28 - 10 = 18 \\
 n(B - C) &= n(B) - n(B \cap C) = 32 - 11 = 21 \\
 n(A - C) &= n(A) - n(A \cap C) = 28 - 12 = 16 \\
 n(A - B) + n(B - C) &\geq n(A - C) \\
 18 + 21 &\geq 16
 \end{aligned}$$

در این نمودار تعداد اعضای درون بخش‌ها هر چه باشد در نامساوی بل صدق می‌کند. بنابراین اثبات نامساوی بل از طریق مشاهده نمودار و امری ساده است. لیکن، ارائه یک اثبات رسمی توضیح دقیق‌تری از آن قضیه را ارائه می‌دهد. گرچه این قضیه از نظر ریاضی چندان پیچیده نیست، لیکن قضیه‌ای مهم با پیامدهای عمیق در نظریه کوانتوم است که اثبات رسمی‌تری را طلب می‌کند.

اثبات نامساوی بل با استفاده از نظریه مجموعه‌ها

فرض کنید سه مجموعه رویداد A ، B و C داریم. باید ثابت کنیم که تعداد دفعاتی که رویداد A رخ می‌دهد منهای تعداد دفعاتی که رویدادهای A و B با هم اتفاق می‌افتند، به علاوه تعداد دفعاتی که رویداد B رخ می‌دهد منهای تعداد دفعاتی که رویدادهای B و C با هم اتفاق می‌افتند، بیشتر یا مساوی تعداد دفعاتی است که رویداد A اتفاق می‌افتد منهای تعداد دفعاتی که رویدادهای A و C با هم اتفاق می‌افتند.

در نماد مجموعه‌ها باید نامساوی زیر را ثابت کنیم.

$$n(A - B) + n(B - C) \geq n(A - C)$$

به صورت الگوریتمی به روش زیر عمل می‌کنیم.

مرحله ۱: می‌دانیم که تساوی‌های زیر درست هستند.

$$\begin{aligned}
 n(A - B) &= n(A) - n(A \cap B) = n(A) - n(B \cap A) \\
 n(B - C) &= n(B) - n(B \cap C) = n(B) - n(C \cap B) \\
 n(A - C) &= n(A) - n(A \cap C) = n(A) - n(C \cap A)
 \end{aligned}$$

مرحله ۲: نامساوی زیر برقرار است:

$$n(B) \geq n(B \cap A) + n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C)$$

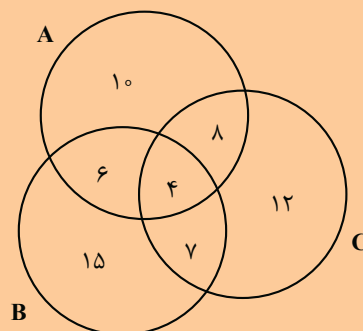
تعداد دانش‌آموزانی که به نقاشی علاقه دارند اما به ورزش علاقه ندارند

تعداد دانش‌آموزانی که به موسیقی علاقه دارند اما به ورزش علاقه ندارند

در مثال فوق نامساوی بل بیان می‌دارد که تعداد دانش‌آموزانی که به موسیقی علاقه‌مند هستند اما به نقاشی علاقه‌مند نیستند، به اضافه تعداد دانش‌آموزانی که علاقه‌مند به نقاشی هستند، اما به ورزش علاقه‌مند نیستند، بیشتر یا برابر با تعداد دانش‌آموزانی است که به موسیقی علاقه‌مند هستند اما به ورزش علاقه‌مند نیستند.

$$n(A - B) + n(B - C) \geq n(A - C)$$

اغلب برای تشریح و اثبات قضیه نامساوی بل از نمودار ون استفاده می‌شود. برای مثال با فرض تعداد عناصر فرضی هر مجموعه و اشتراک مجموعه‌ها می‌توان نمودار ون زیر را تشکیل داد.

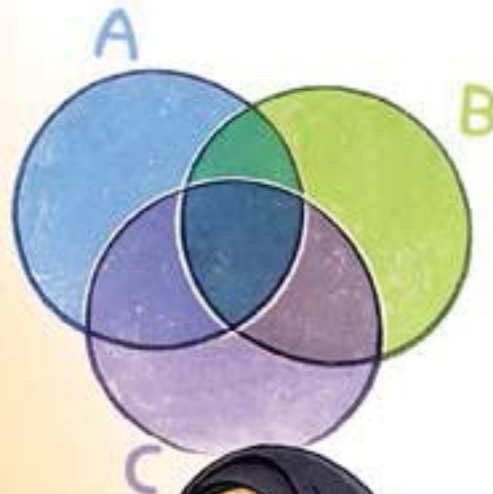


(اعداد درون نمودار نشان‌دهنده تعداد عناصر در هر بخش است.)

$$n(A) = 10 + 6 + 4 + 8 = 28$$



۳۷



یا با نماد احتمال:

$$P(A-B)+P(B-C)\geq P(A-C)$$

بدین طریق نامساوی بل ثابت می‌شود.

نکته اساسی

لازم است یک نکته تخصصی و کلی ذکر شود که جزئیات آن در اینجا نمی‌گنجد. یک فرض اساسی در به‌کارگیری نمودار ون و در نتیجه وجود نامساوی بل این است که رابطه رویدادهای A، B و C محلی و ایستاست. اگر رابطه رویدادها مانند درهم‌تنیدگی کوانتومی محلی نباشد، ممکن است نمودار ون قابل‌ساخت نباشد و نامساوی بل نقض شود. نقض نامساوی بل در پدیده درهم‌تنیدگی کوانتومی را می‌توان به‌عنوان دلیلی بر عدم محلی بودن پدیده‌های کوانتومی و عدم وجود متغیرهای پنهان دانست و بدین طریق عمل شبیح‌آمیز در فاصله دور که توسط انیشتین به طنز مطرح شده بود را می‌توان تأییدشده دانست (انیشتین، ۱۹۳۵).

مرحله ۳: نامساوی زیر نیز برقرار است:

$$n(A\cap C)\geq n(B\cap A\cap C)$$

نتیجه‌گیری

در این مقاله قضیه نامساوی بل با استفاده از نظریه مجموعه‌ها به اثبات رسید. اثبات قضیه نامساوی بل توسط نمودار ون ساده‌تر از رویکرد مجموعه‌هاست، لیکن، ارائه یک اثبات رسمی از قضیه مهم نامساوی بل، توضیح دقیق‌تری از آن قضیه را ارائه می‌دهد. هرچند نابرابری بل از نظر ریاضی قضیه چندان پیچیده‌ای نیست، لیکن قضیه‌ای مهم با پیامدهای عمیق در نظریه کوانتوم است که اثبات رسمی‌تری را طلب می‌کند.

مرحله ۴: می‌توانیم $n(B\cap A\cap C)$ را با $n(A\cap C)$ در نامساوی مرحله ۲ جایگزین کنیم.

از آنجایی که $n(A\cap C)$ بزرگ‌تر یا مساوی $n(B\cap A\cap C)$ است، نامساوی زیر بدون تغییر باقی می‌ماند. از این‌رو:

$$n(B)\geq n(B\cap A)+n(B\cap C)-n(A\cap C)$$

مرحله ۵: $n(A)$ به دو طرف نامساوی اضافه می‌شود. نامساوی بدون تغییر باقی می‌ماند.

$$n(A)+n(B)\geq n(A)+n(B\cap A)+n(B\cap C)-n(A\cap C)$$

مرحله ۶: عبارت‌های $n(B\cap A)$ و $n(B\cap C)$ به سمت چپ نامساوی منتقل می‌شوند.

$$n(A)-n(B\cap A)+n(B)-n(B\cap C)\geq n(A)-n(A\cap C)$$

مرحله ۷: با استفاده از نامساوی مرحله ۱، نامساوی مرحله ۶ به نامساوی زیر اصلاح می‌شود.

$$n(A-B)+n(B-C)\geq n(A-C)$$

منابع

1. Bell, J. (1964). On the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox, *Physics* 1,195-200.
2. Einstein, A; B. Podolsky and N. Rosen (1935). Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? *Physical Review* 47(10): 777-780.



۳۸

شماره ۳۸ | پاییز ۱۴۰۴

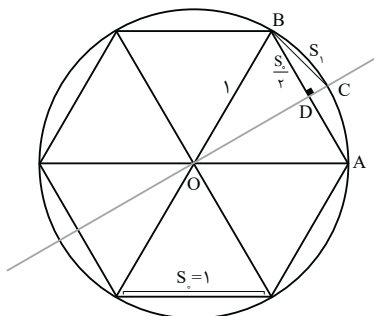
تخمین عدد پی به روش ارشمیدس

حمید پورمند

دبیر ریاضی دبیرستان شهید رجایی،
روستای ده محمد-عشق آباد، خراسان جنوبی

ابتدا باید ذکر شود که ریاضی دانان از دیرباز و از نخستین مواجهه‌های خود با محاسبه‌های مربوط به محیط و مساحت دایره، بر حسب تجربه دریافته بودند که همواره نسبت محیط به قطر هر دایره‌ای مقداری ثابت است. این مقدار ثابت و بسیار چالش برانگیز بعدها با نماد π نشان داده شد. ارشمیدس سعی داشت با محاط کردن شش ضلعی منتظم داخل یک دایره، به تخمینی مناسب از پی دست پیدا کند.

شکل زیر را در نظر بگیرید. همان‌طور که مشخص است، یک شش ضلعی منتظم در دایره‌ای به شعاع ۱ واحد محاط شده است. اگر این شش ضلعی منتظم به 12 ضلعی منتظم، 24 ضلعی منتظم و به همین ترتیب $2^n \times 6$ ضلعی‌های منتظم برای n هایی بزرگ تبدیل شود، رفته رفته به تقریب دقیق‌تر و نزدیک‌تری از مقدار محیط دایره خواهیم رسید.



بنابراین دنباله هندسی صفحه بعد که نشان دهنده تعداد اضلاع چندضلعی منتظم در هر مرحله است را این گونه می‌توان نوشت:

حتماً تاکنون بارها در ریاضیات (هندسه و مثلثات) یا در درس فیزیک با عدد π (پی) مواجه شده‌اید. همواره این کنجکاو وجود داشته که ریشه و خاستگاه این عدد چیست و چگونه بشر به آن پی برده است. به همین دلیل، در طول تاریخ افراد زیادی تلاش کرده‌اند پاسخی برای این مسئله و موارد مشابه آن بیابند.

بررسی‌های تاریخی نشان می‌دهند که نخستین آگاهی انسان نسبت به عدد پی به حدود ۴۰۰۰ سال پیش باز می‌گردد. در این بازه زمانی، هم تمدن بابل و هم مصر باستان از این عدد در محاسبه‌های خود بهره می‌برده‌اند. هر چند هنوز توافق قطعی درباره اینکه کدام یک از این دو تمدن زودتر به این عدد پی برده‌اند وجود ندارد، شواهد نشان می‌دهند بابلیان مقدار آن را $3/125$ و مصریان رقمی در حدود $3/1605$ در نظر می‌گرفتند. آن‌ها به دلیل نیاز به دقت در معماری و حل مسائل هندسی، به چنین تقریبی از عدد پی دست یافته بودند. البته در آن دوران، انسان هنوز از ماهیت گنگ و نامنظم این عدد بی‌خبر بود.

تا اینکه در قرن سوم پیش از میلاد، ریاضی‌دان بزرگ یونانی، ارشمیدس، با استفاده از روش چندضلعی‌های منتظم برای محاسبه محیط دایره، توانست مقدار عدد پی را با دقت بالاتری تخمین بزند و به نتایج دقیق‌تری نسبت به تلاش‌های پیشین دست یابد. در این مطلب قصد داریم روش ارشمیدس برای تخمین عدد پی را شرح دهیم.



۳۹

شماره ۳۹ | پاییز ۱۴۰۵



مؤلف در کنار دانش آموزان

$$S_1^2 = \left(\frac{S_0}{2}\right)^2 + DC^2 = \frac{S_0^2}{4} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{S_0^2}{4}}\right)^2$$

$$= \frac{S_0^2}{4} + 1 - 2\sqrt{1 - \frac{S_0^2}{4}} + 1 - \frac{S_0^2}{4} = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{S_0^2}{4}}$$

$$\rightarrow S_1 = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{S_0^2}{4}}}$$

با ادامه دادن به این کار برای سایر چندضلعی‌های منتظم، متوجه می‌شویم که رابطه بازگشتی زیر برای طول ضلع هر چندضلعی به دست می‌آید:

$$S_{n+1} = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{S_n^2}{4}}} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

اکنون می‌توانیم به تخمین عدد پی بپردازیم:

$$\pi = \frac{\text{محیط دایره}}{\text{قطر دایره}} \approx \frac{\text{محیط چندضلعی منتظم}}{2} \rightarrow \pi \approx \frac{6 \times 2^n \times S_n}{2}$$

$$\rightarrow \pi \approx 3 \times 2^n \times S_n$$

$$n = 0 \rightarrow S_0 = 1 \rightarrow \pi \approx 3 \times 2^0 \times 1 \rightarrow \pi \approx 3$$

$$n = 1 \rightarrow S_1 = 0.51763 \rightarrow \pi \approx 3 \times 2^1 \times 0.51763$$

$$\rightarrow \pi \approx 3.14159$$

...

$$n \rightarrow \infty \rightarrow \pi \approx 3.14159$$

اگرچه تاکنون کوشش‌های بسیاری برای به دست آوردن تقریب عدد پی انجام شده‌اند، روش فوق به عنوان یکی از جالب‌ترین روش‌های تخمین این نسبت چالش برانگیز در نظر گرفته می‌شود.

$$6, 12, 24, 48, \dots \rightarrow a_n = 6 \times 2^n \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

که a_n بیانگر تعداد اضلاع چندضلعی منتظم در مرحله n ام است.

اگر اندازه طول هر ضلع در مرحله n ام را با S_n نشان دهیم، می‌توان نشان داد که طول ضلع شش ضلعی منتظم محاط در دایره، برابر با همان شعاع دایره یعنی ۱ واحد است ($S_0 = 1$) و محیط شش ضلعی نیز برابر 6×1 یعنی ۶ واحد بوده که تقریباً معادل محیط دایره است. حالا هدف ما یافتن مقدار S_1 یعنی طول ۱۲ ضلعی منتظم محاط در دایره است. به این منظور لازم است اندازه ضلع DC را به دست آوریم و می‌توان با محاسبه طول ضلع OD و تفاضل آن از شعاع دایره (۱ واحد) این مقدار را به دست آورد. حال برای محاسبه طول OD، در مثلث OBD طبق قضیه فیثاغورس می‌توان نوشت:

$$OB^2 = BD^2 + OD^2 \rightarrow 1^2 = \left(\frac{S_0}{2}\right)^2 + OD^2 \rightarrow$$

$$OD = \sqrt{1 - \frac{S_0^2}{4}}, \quad DC = 1 - OD \rightarrow DC = 1 - \sqrt{1 - \frac{S_0^2}{4}}$$

فعلاً از جای گذاری مقدار S_0 صرف نظر می‌کنیم. حالا نوبت محاسبه S_1 از طریق نوشتن رابطه فیثاغورس در مثلث BDC است:



ف.و

شماره ۱۳۴ | پاییز ۱۴۰۵

یک تعبیر هندسی برای میانگین همساز

مراد کریمی شهماروندی

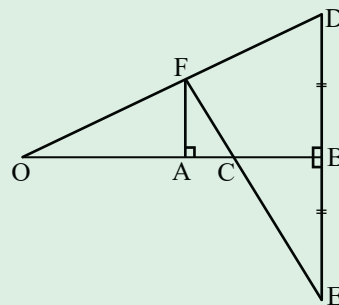
دبیر ریاضی دبیرستان های شهر کرد

اشاره

می دانیم اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، میانگین همساز آن ها را با حرف H نمایش می دهند و برابر است با: «دو برابر حاصل ضرب آن ها تقسیم بر مجموع آن ها»؛ یعنی:

$$H = \frac{2ab}{a+b}$$

در این مقاله می خواهیم شیوه ای زیرکانه برای تعیین میانگین همساز دو پاره خط OA و OB (شکل ۱) ارائه دهیم.



شکل ۱

ابتدا مرحله های رسم شکل را ملاحظه کنید:

مرحله اول: روی پاره خط OB پاره خط OA را به دلخواه جدا کنید.

مرحله دوم: روی عمود بر OB در نقطه B دو پاره خط BD و BE را مساوی هم جدا کنید.

مرحله سوم: پاره خط OD را رسم کنید.

مرحله چهارم: عمود بر OB در A را طوری رسم کنید که OD را در F قطع کند.

مرحله پنجم: پاره خط EF را رسم کنید تا OB را در C

قطع کند.

اکنون باید نشان دهیم، OC میانگین همساز برای پاره خط های OB و OA است؛ یعنی باید نشان دهیم:

$$OC = \frac{2OA \cdot OB}{OA + OB}$$

اثبات: می دانیم مثلث های $\triangle OAF$ و $\triangle OBD$ و مثلث های $\triangle AFC$ و $\triangle CBE$ به حالت تساوی دو زاویه، متشابه هستند. از تشابه آن ها داریم:

$$\triangle OAF \sim \triangle OBD \Rightarrow \frac{AF}{BD} = \frac{OF}{OD} = \frac{OA}{OB} \quad (1)$$

$$\xrightarrow{BD=BE}$$

$$\triangle AFC \sim \triangle CBE \Rightarrow \frac{AF}{BE} = \frac{FC}{CE} = \frac{AC}{BC} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{AF}{BD} = \frac{AF}{BE} = \frac{AC}{BC} = \frac{OC - OA}{OB - OC}$$

$$\Rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OC - OA}{OB - OC}$$

$$\Rightarrow OA(OB - OC) = OB(OC - OA)$$

$$\Rightarrow OC(OA + OB) = 2OA \cdot OB$$

$$\Rightarrow OC = \frac{2OA \cdot OB}{OA + OB}$$

منبع

ایوز، هاوارد (۱۳۹۲). آشنایی با تاریخ ریاضیات (ج ۱)، ترجمه محمدقاسم وحیدی اصل، انتشارات مرکز نشر دانشگاهی، تهران.



۴۱

شماره ۴۱ | پاییز ۱۴۰۰

پیشرو

نمونه سوال های امتحان کتابی

بارویلرد مفهومی

» پاسخ
سؤال ها



نرگس نهبندانی

دبیر ریاضی، ناحیه ۷ مشهد مقدس

۶. جدول های ارزش گزاره زیر را تشکیل داده و نشان دهید این گزاره همواره درست است.

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \vee p)] \Leftrightarrow q \equiv T$$

(ریاضی و آمار ۲، فصل ۱، درس ۱)

۷. اگر باقی مانده تقسیم a بر دو عدد ۶ و ۵ به ترتیب ۳ و ۲ باشد؛ باقی مانده تقسیم عدد a را بر ۳۰ بیابید.

(آمار و احتمال، فصل ۱، درس ۲)

۸. ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آنها کمتر نیست.

(آمار و احتمال، فصل ۱، درس ۱)

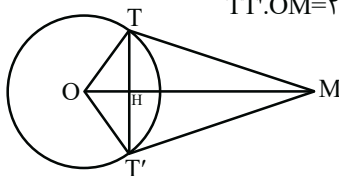
۹. ثابت کنید مماس مشترک های داخلی و خط المרכזین دو دایره همسرند.

(هندسه ۲، فصل ۱، درس ۲)

۱۰. در این شکل ثابت کنید:

$$(الف) (TT')^2 = 4OH \cdot HM$$

$$(ب) TT' \cdot OM = 2R \cdot MT$$



(هندسه ۲، فصل ۱، درس ۱)

۱. اگر α و β صفرهای سهمی $y = 4ax^2 - 7x + \beta$ و $\beta > \alpha$ باشد، α و β را حساب کنید. ($\beta \neq 0$)

(ریاضی ۲، فصل ۱، درس ۲)

۲. قرینه نقطه $A(2, 5)$ نسبت به خط $x - 2y + 3 = 0$ را حساب کنید.

(ریاضی ۲، فصل ۱، درس ۱)

۳. اگر دو تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & x \neq 1 \\ 2d - 1 & x = 1 \end{cases}$ و $g(x) = ax^2 + bx + c$ برابر باشند، a ، b و c را به دست آورید.

(حسابان ۱، فصل ۲، درس ۱)

۴. توپی را در اختیار داریم که از هر ارتفاعی رها شود، پس از زمین خوردن به اندازه $\frac{1}{3}$ ارتفاع اولیه خود بالا می رود.

فرض کنید این توپ را از زمین به هوا پرتاب کرده ایم تا به ارتفاع ۵ متری برسد، می خواهیم بدانیم پس از شروع پرتاب تا زمان ایستادن، این توپ چقدر مسافت طی می کند؟

(حسابان ۱، فصل ۱، درس ۱)

۵. مقادیر x و y را چنان تعیین کنید که داشته باشیم:

$$(الف) (x-2)^2 + (y+1)^2 = 0$$

$$(ب) |2x-1| + |x+y| = 0$$

$$(پ) x^2 + 2x + 1 + y^2 = 0$$

(ریاضی و آمار ۲، فصل ۱، درس ۱)



۴۲

شماره ۱۳۴ | پاییز ۱۴۰۴

۱۱. برای دو تابع $f = \{(-1, 1), (a, 2), (2, 7), (11, 1), (a, 2)\}$ و $g = \{(2, b), (4, 5), (10, 9), (b+1, 6)\}$ اگر $g \circ f^{-1} = \{(7, 10)\}$ باشد: $(4, 10) \in \text{gof}$

الف) a, b را مشخص کنید.

ب) مقدار $g^{-1}(b-a)$ را به دست آورید.

(ریاضی ۳، فصل ۱، درس ۳)

۱۲. مقدار $\frac{\tan^3 \alpha - \tan \alpha}{(1 + \tan^2 \alpha)^2}$ به ازای $\alpha = 7/5^\circ$ را به دست آورید.

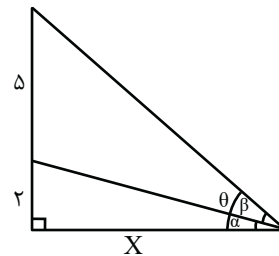
(ریاضی ۳، فصل ۲، درس ۲)

۱۳. اگر دامنه و برد $y = 2f(x+1) - 1$ به ترتیب $[-1, 7]$ و $[0, 4]$ باشد، دامنه و برد $y = 2f(\frac{x}{2} - 1) + 1$ را به دست آورید.

(حسابان ۲، فصل ۱، درس ۱)

۱۴. نشان دهید در شکل زیر رابطه بین زاویه β و x به این صورت است:

$$\tan \beta = \frac{5x}{x^2 + 14}$$



(حسابان ۲، فصل ۲، درس ۲)

۱۵. می‌خواهیم از بین ۵ دانش‌آموز پایه یازدهم و ۶ دانش‌آموز پایه دوازدهم افرادی را انتخاب کنیم و یک تیم ۶ نفره والیبال تشکیل دهیم. مشخص کنید به چند طریق می‌توانیم این تیم را تشکیل بدهیم؛ هرگاه بخواهیم: الف) به تعداد مساوی دانش‌آموز پایه یازدهم و دوازدهم در تیم حضور داشته باشند.

ب) کاپیتان تیم فرد مشخصی از پایه دوازدهم باشد.

پ) حداقل ۴ نفر از اعضای تیم، دانش‌آموز پایه دوازدهم باشند.

ت) فقط ۲ نفر از اعضای تیم از پایه یازدهم باشند.

(ریاضی و آمار ۳، فصل ۱، درس ۱)

۱۶. خانواده‌ای ۳ فرزند دارد:

الف) فضای نمونه آن را بنویسید.

ب) این احتمال را که خانواده فقط یک دختر داشته باشد محاسبه کنید.

ج) احتمال آنکه خانواده حداقل ۲ پسر داشته باشد را محاسبه کنید.

(ریاضی و آمار ۳، فصل ۱، درس ۲)

۱۷. معادله هم‌نهشتی $11 \equiv 2x \pmod{14}$ را حل کنید.

(ریاضی گسسته، فصل ۱، درس ۳)

۱۸. اگر $2, 3, 5, \dots, P$ تمام عددهای اول کوچک‌تر یا مساوی P باشند، ثابت کنید که $N = (2 \times 3 \times 5 \times \dots \times P) + 1$ یا اول است یا عامل اول بزرگ‌تر از P دارد.

(ریاضی گسسته، فصل ۱، درس ۱)

۱۹. به ازای چه مقادیری از m دستگاه معادلات

$$\begin{cases} -4x + (m-3)y = 3 \\ 2x - \frac{m-3}{2}y = 1 \end{cases}$$

یک جواب منحصر به فرد دارد؟

(هندسه ۳، فصل ۱، درس ۲)

۲۰. اگر $\begin{vmatrix} 1 & b & a \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$ باشد، مقدار $\begin{vmatrix} 1 & b & a+1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ بیابید.

(هندسه ۳، فصل ۱، درس ۲)



۴۴

چشم انداز

نمونه سؤال های آزمون سراسری
بارویک در مفهومی

نرگس نهبندانی

دبیر ریاضی، ناحیه ۷ مشهد مقدس

۵. در کدام گزینه استدلال انجام شده قیاس استثنایی نیست؟
(الف) مقدمه ۱: اگر n عددی فرد باشد، آنگاه n^2 نیز فرد است.

مقدمه ۲: $n=3$ نتیجه: 3^2 عددی فرد است.

(ب) مقدمه ۱: اگر x و y دو عدد فرد باشند، آنگاه $x+y$ زوج است.

مقدمه ۲: $x+y$ عددی زوج است.نتیجه: x و y فرد هستند.

(ج) مقدمه ۱: اگر احسان بالاترین تراز را در کنکور کسب کند، آنگاه نفر اول آزمون سراسری می شود.

مقدمه ۲: احسان بالاترین تراز را در آزمون سراسری کسب کرده است.

نتیجه: احسان نفر اول آزمون سراسری است.

(د) مقدمه ۱: اگر یک چهارضلعی مربع باشد، آنگاه آن

چهارضلعی یک لوزی است.

مقدمه ۲: چهارضلعی ABCD یک مربع است.

نتیجه: چهارضلعی ABCD یک لوزی است.

(ریاضی و آمار ۲، فصل ۱، درس ۲)

۶. چندتا از هم‌ارزی‌های زیر درست هستند؟

(الف) $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ (ب) $\sim(\sim p \wedge q) \equiv p \vee \sim q$ (ج) $\sim p \wedge (\sim p \vee \sim q) \equiv \sim p$ (د) $(\sim p \wedge F) \vee (\sim p \vee T) \equiv T$

(الف) ۴ (ب) ۳ (ج) ۲ (د) ۱

(ریاضی و آمار ۲، فصل ۱، درس ۱)

۷. اگر یکی از افزایش‌های مجموعه A به صورت $A_p = \{3, x\}$ و $A_1 = \{1, x-2, y\}$ و $A_p = \{2+y, x+3\}$ باشد، حاصل $x+y$

کدام است؟
 $A = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$

(الف) ۱۰ (ب) ۱۲ (ج) ۱۱ (د) ۱۳

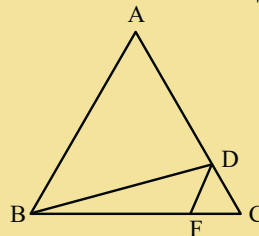
(آمار و احتمال، فصل ۱، درس ۲)

۱. اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 5x + 2 = 0$ باشند، مقدار $\frac{4\alpha + \beta^5}{5\beta^2}$ کدام است؟

(الف) ۲۱ (ب) ۲۰ (ج) ۱۹ (د) ۱۸

(ریاضی ۲، فصل ۱، درس ۲)

۲. در شکل زیر مثلث ABC متساوی‌الاضلاع و زاویه $\hat{B}DF = 60^\circ$ است. اگر $AB = 12x$ و $BF = \frac{1}{x}$ باشند، اندازه پاره خط BD کدام است؟

(الف) $2\sqrt{3}$ (ب) $6\sqrt{5}$ (ج) $3\sqrt{30}$ (د) $4\sqrt{10}$

(ریاضی ۲، فصل ۲، درس ۳)

۳. معادله $|x^2 - 2| = |x + 1| - 1$ چند جواب حقیقی دارد؟
(الف) دو جواب مثبت (ب) دو جواب منفی
(ج) یک جواب مثبت و یک جواب منفی (د) صفر

(حسابان ۱، فصل ۱، درس ۴)

۴. برد تابع $f(x) = \sqrt{1+mx} - 2\sqrt{x}$ بازه $\left[-1, -\frac{m}{4}\right]$ است. مقدار $f^{-1}(0)$ کدام است؟

(الف) $\frac{1}{4}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (ج) $\frac{1}{8}$ (د) $\frac{1}{16}$

(حسابان ۱، فصل ۲، درس ۳)



۴۴

شماره ۱۳۴ | پاییز ۱۴۰۵

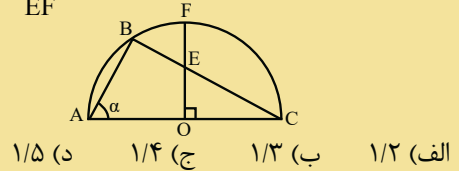
۸. برای دو پیشامد A و B از فضای نمونه S ، روابط $P(A \cup B) = \frac{1}{6}$ و $P(A-B) = P(A)P(B')$ برقرار است. اگر

$$P(A \cap B') = 0/25 \text{ باشد، مقدار } P(A \cup B') \text{ کدام است؟}$$

الف) $\frac{27}{40}$ (ب) $\frac{13}{20}$ (ج) $\frac{17}{20}$ (د) $\frac{31}{40}$

(آمار و احتمال، فصل ۲، درس ۴)

۹. در نیم‌دایره زیر اگر $\sin \alpha = 0/8$ باشد، مقدار $\frac{BE}{EF}$ کدام است؟



(هندسه ۲، فصل ۱، درس ۲)

۱۰. در یک دوزنقه متساوی‌الساقین، دایره‌ای به شعاع ۹ واحد محاط شده است. اگر طول قاعده کوچک دوزنقه، $\frac{27}{2}$ واحد باشد، فاصله نزدیک‌ترین نقاط دایره تا یک رأس قاعده بزرگ دوزنقه کدام است؟

الف) ۶ (ب) $3\sqrt{10} - 9$ (ج) ۹ (د) ۱۲

(هندسه ۲، فصل ۱، درس ۳)

۱۱. اگر $f(x) = \log_x^x$ و $g(x) = 2^{1-\sin^2 x}$ باشد، برد تابع به صورت $[a, b]$ می‌شود. حاصل $b-a$ کدام است؟

الف) $\frac{1}{4}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (ج) $\frac{3}{4}$ (د) ۱

(ریاضی ۳، فصل ۱، درس ۲)

۱۲. معادله مثلثاتی $\sin(\frac{\pi}{12} - x) + \sin x = \sin \frac{\pi}{12}$ در محدوده $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

الف) صفر (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۳

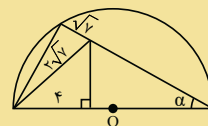
(ریاضی ۳، فصل ۲، درس ۲)

۱۳. اگر داشته باشیم: $x^{16} - 1 = (2x+2)f(x)$ ، باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(1-x)$ بر $x-2$ کدام است؟

الف) ۸ (ب) ۱۶ (ج) -۸ (د) -۱۶

(حسابان ۲، فصل ۲، درس ۲)

۱۴. در نیم‌دایره شکل مقابل، مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟



الف) $0/2\sqrt{3}$ (ب) $0/3\sqrt{3}$ (ج) $0/4\sqrt{3}$ (د) $0/5\sqrt{3}$

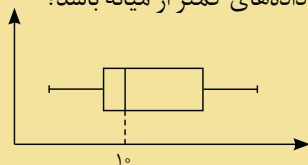
(حسابان ۲، فصل ۲، درس ۲)

۱۵. دانش‌آموزی برای پاسخ به سؤال‌های یک امتحان شامل ۱۰ سؤال چهارگزینه‌ای و ۵ سؤال دوگزینه‌ای، چند پاسخ‌نامه متفاوت می‌تواند داشته باشد، به طوری که فقط مجبور باشد حتماً به سؤال‌های دوگزینه‌ای پاسخ دهد؟

الف) 20^5 (ب) 50^5 (ج) 25^5 (د) 25^{10}

(ریاضی و آمار ۳، فصل ۱، درس ۱)

۱۶. داده‌های نمودار زیر عددهای زوج هستند. اگر مقدار ۴ داده بیشتر از میانه باشد، کدام می‌تواند بیشترین مقدار ممکن برای میانگین داده‌های کمتر از میانه باشد؟



الف) ۵ (ب) $7/5$ (ج) $8/5$ (د) ۹

(ریاضی و آمار ۳، فصل ۱، درس ۳)

۱۷. اگر رقم یکان دو عدد طبیعی $3a$ و $a+2$ یکسان باشد، آنگاه نسبت کوچک‌ترین عدد طبیعی دو رقمی a به بزرگ‌ترین عدد طبیعی یک رقمی a کدام است؟

الف) $1/5$ (ب) ۲ (ج) $2/25$ (د) $2/5$

(ریاضی گسسته، فصل ۱، درس ۳)

۱۸. از رابطه $7|6k-1$ می‌توان رابطه $49|36k^2 + mk - 41$ را نتیجه گرفت. اولین عدد طبیعی دو رقمی m کدام است؟

الف) ۴۴ (ب) ۴۵ (ج) ۴۹ (د) ۱۱

(ریاضی گسسته، فصل ۱، درس ۲)

۱۹. برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ با درایه‌های صحیح و

ماتریس $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & \sqrt{2}b & 0 \\ c & 0 & d \end{bmatrix}$ اگر $|A| = 2$ و $B^2 = 2I$ باشد،

حاصل ضرب درایه‌های غیرصفر ماتریس B^3 کدام است؟

الف) $32\sqrt{2}$ (ب) $2\sqrt{2}$ (ج) $-32\sqrt{2}$ (د) $-2\sqrt{2}$

(هندسه ۳، فصل ۱، درس ۲)

۲۰. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ و $A^{2n} = 128A$ ، مقدار طبیعی n کدام است؟

الف) ۷ (ب) ۸ (ج) ۴ (د) ۳

(هندسه ۳، فصل ۱، درس ۱)



۴۵

شماره ۱۳۴ | پاییز ۱۴۰۴

چگونه برای المپیاد ریاضی آماده شویم؟ معلوسش کن!

امین آقاجان نژاد

مدرس المپیاد

مقدمه

المپیاد ریاضی به عنوان رقابتی چالش برانگیز، نیازمند تسلط بر طیف وسیعی از راهبردهای حل مسئله است. در این مقاله یکی از این راهبردهای کلیدی را بررسی می‌کنیم که نه تنها در حل مسئله‌های المپیاد کاربرد دارد، بلکه می‌تواند به عنوان ابزاری قدرتمند در تقویت تفکر خلاقانه ریاضی مورد استفاده قرار گیرد. هدف این نوشتار، ارائه درکی عمیق از این روش و نمایش کاربردهای آن در مسئله‌های گوناگون است تا شرکت کنندگان در المپیاد را با فنی (تکنیکی) مؤثر و انعطاف پذیر آشنا کند. مطالعه این مقاله به داوطلبان کمک می‌کند با بینشی جدید به مسئله‌ها نگاه کنند و آمادگی خود را برای رویارویی با چالش‌های المپیاد افزایش دهند.

معکوسش کن!

«همیشه باید معکوس کنید!» ژاکوبی، ریاضی‌دان شهیر آلمانی در قرن ۱۹، بر این نکته تأکید می‌کرد که: «همیشه باید معکوس کنید.» او به کمک این طرز فکر توانست مسئله‌های «انتگرال‌های بیضوی» را که در زمان وی بسیار مورد بحث بودند، به تابع‌های بیضوی تبدیل کند که کار با آن‌ها به مراتب بسیار ساده‌تر از معکوسشان بود. این فن (تکنیک) و روش از قدیمی‌ترین راهبردهای حل مسئله است و از دیرباز برای حل مسئله‌ها به کار رفته است.

یونانیان باستان از این روش در مسئله‌های ترسیمی استفاده

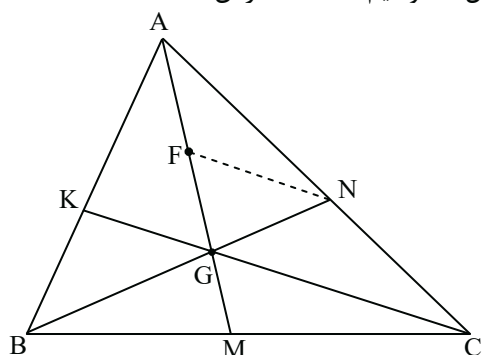
می‌کردند. آن‌ها فرض می‌کردند که شکلی رسم شده است و با عملیات عقبرونده به جوابی می‌رسیدند که دلخواهشان بود. در اولین درس کتاب هندسه ۱ پایه دهم نیز به طور خلاصه و غیرمستقیم به این روش یونانی‌ها اشاره شده است. در این درس با روش رسم یک مثلث در حالتی که طول سه ضلع آن معلوم باشد، آشنا شدیم. حال این مثال را در نظر بگیرید:

مثال ۱. مثلثی رسم کنید که طول سه میانه آن ۶، ۹ و ۱۲ واحد باشد.

حل: داده‌های مسئله با چیزی که انتظارش را داشتیم و آموخته‌ایم متفاوت است. ما روش رسم یک مثلث با دانستن طول سه ضلع آن را می‌دانیم، ولی در اینجا صحبت از طول سه میانه مثلث است نه ضلع‌های آن!

بیا باید به سبک یونانی‌های باستان از روش معکوس کردن استفاده کنیم؛ یعنی فرض کنیم مثلث ABC با طول میانه‌هایی که در صورت مسئله آمده، رسم شده است. پس مثلثی مطابق

شکل ۱ خواهیم داشت که در آن: $BN=6$



شکل ۱



۴۶

شماره ۴۳ | پاییز ۱۴۰۵

و $AM=9$ و $CK=12$. دربارهٔ میانه‌های یک مثلث می‌دانیم که در یک نقطه (G) هم‌رس‌اند و G هر میانه را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کند.

$$\frac{2}{3}AM = AG = 2GM, BG = 2GN, CG = 2GK = \frac{2}{3}CK$$

اگر وسط پاره خط AG را F بنامیم، داریم:

$$AF = FG = GM = \frac{1}{3}AM = 3$$

حال در مثلث AGC (نقطه F وسط ضلع AG و نقطه N وسط ضلع AC است)، FN موازی با ضلع CG و نصف آن است (طبق عکس قضیهٔ تالس). پس داریم:

$$FN = \frac{1}{2}CG = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}CK\right) = \frac{1}{3}CK = 4$$

پس هر ضلع مثلث FNG برابر یک سوم یکی از میانه‌های مثلث ABC است. یعنی FNG مثلثی است که طول هر سه ضلع آن برای ما معلوم است و در نتیجه مثلث FNG را می‌توان به حالت سه ضلع رسم کرد.

حال به مسئلهٔ اصلی برمی‌گردیم. هدف رسم مثلث ABC ، با توجه به معلوم‌بودن طول سه میانهٔ آن است. طبق مطالبی که در بالا ذکر شد، مرحله‌های رسم مثلث ABC به صورت زیر خواهد بود:

(الف) مثلث FNG را به حالت سه ضلع رسم می‌کنیم. (هر ضلع یک سوم طول یکی از میانه‌هاست).

(ب) GF را از سمت F به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا به نقطهٔ A برسیم.

(ج) GN را از سمت G به اندازهٔ دو برابر خودش امتداد می‌دهیم تا به نقطهٔ B برسیم.

(د) از A به N وصل می‌کنیم و به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا به نقطهٔ C برسیم.

(هـ) نقطه‌های A و B و C را به هم وصل می‌کنیم تا مثلث ABC رسم شود.^۱

آنچه را در حل مثال صورت گرفته است، دوباره مرور می‌کنیم: می‌خواستیم مثلثی با طول میانه‌های داده‌شده رسم کنیم، ولی ما رسم به حالت سه ضلع را می‌دانستیم. بنابراین فرض کردیم چنین مثلثی با میانه‌های معلوم رسم شده باشد. با روش معکوس کردن به مثلثی رسیدیم که هر سه ضلع آن معلوم شد (FNG). این همان مثلث دلخواه ما بود، چون می‌توانستیم به روش سه ضلع آن را رسم کنیم. با رسم این مثلث و برگشتن در همان مسیری که طی کرده بودیم تا به FNG برسیم، توانستیم مثلث اولیهٔ خواسته‌شده در صورت مسئله را رسم کنیم.

این فنی است که ما نام آن را «معکوس کردن» می‌گذاریم. این شیوه در جبر و مثلثات دبیرستانی نیز به کار گرفته می‌شود که به آن «روش قهقرای» می‌گویند. عمل به روش قهقرای در یک مسئله به معنای آن است که نتیجهٔ آن مسئله را بپذیریم و بر این اساس، پس از نتیجه‌گیری‌های متوالی از نتیجه، به آنچه معلوم است یا به حکمی که بتوان آن را به‌سادگی ثابت کرد، دست یابیم. پس از رسیدن به فرض یا معلوم، مرحلهٔ استدلال را معکوس می‌کنیم و به سوی حکم اصلی پیش می‌رویم.^۲ مثال ۲ را ببینید.

مثال ۲. در یک مسابقهٔ ورزشی، n بازیکن $P_1, P_2, \dots, P_n$ شرکت دارند که در آن $n > 1$ و هر یک از بازیکنان، یک بار با هر بازیکن دیگر مسابقه می‌دهد. قانون بازی طوری است که هیچ‌گاه به تساوی نمی‌انجامد. فرض کنید W_r و L_r به ترتیب تعداد بازی‌های برده و باخت بازیکن P_r باشد. نشان دهید که:

$$\sum_{r=1}^n W_r = \sum_{r=1}^n L_r$$

حل: به روش معکوس کردن فرض می‌کنیم که نتیجهٔ این مسئله درست باشد. در این صورت داریم:

$$\sum_{r=1}^n W_r = \sum_{r=1}^n L_r \Rightarrow \sum_{r=1}^n (W_r - L_r) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{r=1}^n (W_r + L_r)(W_r - L_r) = 0$$

ولی به ازای هر r داریم: $W_r + L_r = n - 1$ (زیرا مجموع برد و باخت هر بازیکن به تعداد کل بازی‌هایی است که انجام داده). پس در نتیجه:

$$(n-1) \sum_{r=1}^n (W_r - L_r) = 0 \Rightarrow \sum_{r=1}^n (W_r - L_r) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{r=1}^n W_r = \sum_{r=1}^n L_r$$

تساوی آخر درست است، زیرا تعداد کل بازی‌های برده و تعداد کل بازی‌های باخت n بازیکن، با هم مساوی‌اند. با معکوس کردن استدلال‌های بالا، نتیجهٔ اولیه حاصل می‌شود.^۳ روش معکوس کردن در ترکیبات شمارشی نیز کاربرد فراوان دارد؛ مخصوصاً در میحث‌های مربوط به جایگشت‌ها، ترکیب‌ها و ترتیب‌ها. این ایده زمانی کارایی دارد که مسئله‌ها به حالت‌های قبلی زیادی منجر نشوند. وضعیت در یک گام پیش چگونه بود؟ تعداد حالت‌های پیشین ممکن باید نسبتاً کم باشد. این روش در حالت‌های ناامیدکننده بسیار



در ادامه تمرین‌هایی برای تسلط بیشتر بر این روش آورده شده است:

۲. ثابت کنید که به ازای هر دو عدد حقیقی مثبت x و y داریم:

$$\frac{r}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

۴. در n لیوان با حجمی کافی در ابتدا به مقدار مساوی آب وجود دارد. در هر مرحله می‌توان از یک لیوان به مقداری به لیوان دیگری آب منتقل کرد که در آن (لیوان دوم) آب هست. به ازای کدام مقدار n می‌توان آب همه n لیوان‌ها را درون یک لیوان جمع کرد؟

۵. از چهار عدد ۱,۹,۹,۳ آغاز می‌کنیم و دنباله نامتناهی ۱,۹,۹,۳,۲,۳,۷,... را می‌سازیم که هر عضو جدید جمع چهار عدد قبلی به پیمانه ۱۰ است. (یعنی هر عضو جدید رقم یکان مجموع چهار عدد قبلی است.) آیا چهار تایی ۷,۳,۶,۷ هیچ‌گاه در این دنباله ظاهر می‌شود؟

مثال ۳. دور یک دایره ۴ یک و ۵ صفر نوشته‌ایم. بین هر دو عدد مساوی ۱ و بین هر دو عدد متمایز ۰ می‌نویسیم و عددهای اولیه را پاک می‌کنیم. این عمل را مجدداً تکرار می‌کنیم. آیا هیچگاه می‌توان به ۹ عدد ۱ رسید؟

حل: این مسئله را با روش معکوس کردن حل می‌کنیم. فرض کنید به ۹ عدد ۱ رسیده باشیم، آنگاه اولین باری که به آن رسیده‌ایم را در نظر بگیریم. در مرحله قبل همهٔ عددها با هم برابرند و چون همگی نمی‌توانند ۱ باشند (چون اولین بار است که به ۱۱۱۱۱۱۱۱ می‌رسیم)، پس همهٔ عددها برابر ۰ هستند. در مرحله قبل عددها باید یکی در میان ۱ و ۰ باشند که امکان ندارد؛ چون تعداد رقم‌ها ۹ تا و فرد است. در مثال ۴ برای شمارش جایگشت‌ها از روش معکوس کردن استفاده کرده‌ایم.

مثال ۴. عددهای n و ... و ۳ و ۲ و ۱ را به‌گونه‌ای مرتب کرده‌ایم که هر عدد یا از همهٔ عددهای قبلی بزرگ‌تر است و یا از همه کوچک‌تر است. به چند طریق می‌توان این عمل را انجام داد؟

حل: دنباله را به شکل معکوس کردن می‌سازیم. آخرین جمله باید ۱ یا ۲ باشد و هر جمله قبلی نیز باید بزرگ‌ترین یا کوچک‌ترین عدد از بین عددهای باقی‌مانده باشد. پس در هر جمله هر مرحله، به جز مرحله آخر، دو حالت داریم و جمعاً ۱-۲ انتخاب که تعداد چنین دنباله‌هایی است. از روش معکوس کردن در مثال‌های بی‌شماری بدون ذکر نام آن استفاده می‌شود؛ از قبیل روش «نزول نامتناهی» و نیز روش تعیین و محاسبه دنباله‌های بازگشتی.

در شماره بعدی درباره دنباله‌های بازگشتی و قضیه‌ها و

۱. در حقیقت با روشی مشابه روش این مثال می‌توان این قضیه را ثابت کرد که: «مثلث ABC با طول میانه‌های m_a , m_b و m_c قابل‌رسم است، اگر و تنها اگر طول میانه‌ها در نامساوی مثلث صدق کند.»

۳. برای مطالعه مثال‌های بیشتر می‌توانید به فصل اول کتاب باضات گسسته مراجعه کنید.

بازی عددها

محسن روایتی
دبیر ریاضی



برای مشاهده
پاسخ رمزینه را
پویش کنید

نقاشی با عدددها

روش بازی

عددهای بیرون هر سطر و ستون، تعداد ردیف‌های مربع سیاه را که در آن سطر یا ستون وجود دارند، نشان می‌دهند. برای مثال ۴، ۵، ۹ و ۲ نمایش ۴ ردیف مربع سیاه ۴، ۵، ۹ و ۲ تایی است. در واقع عددهای جدا نمایش‌دهنده حداقل یک فضای خالی بین آن‌ها هستند.



حدود، اہنما

[illegible]

پارک >>

روش بازی

گل‌ها را در بالا، پایین یا طرفین درخت‌ها قرار دهید. گل‌ها نباید به صورت سطر، ستونی یا قطری کنار یکدیگر قرار گیرند. تعداد گل‌های هر سطر و ستون بیرون از جدول نشان داده شده است. هر درخت فقط به یک گل وصل می‌شود.



جدول راهنما

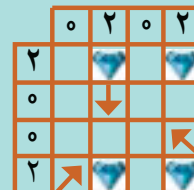
	۲	۱	۱	۳	۱	۳	○	۳
۳								
۱				↑				
۲							↖	
۱								
۱							↘	
۲		↗		↙				
○							↗	
۴								

الماس

روش بازی

عددهای بیرون جدول تعداد
الماس موجود در هر سطر و ستون
را نشان می‌دهند. هر پیکانه

(فلش) نشان‌دهندهٔ راستای قرارگیری یک یا چند الماس را نشان می‌دهد و داخل خانهٔ پیکانه، الماسی وجود ندارد. ممکن است الماس بلافاصله بعد از پیکانه یا با فاصله از آن قرار گیرد و ممکن است برای تمامی الماس‌ها پیکانه وجود نداشته باشد. لذا ممکن است قبل از پیکانه هم الماس‌هایی موجود باشند.



جدول راهنما



می‌توانید
داستان مصور (کمیک)
این شماره را
در صفحه ۲۳، ببینید.



بنز یا بیز!!!
پارادوکس مونتی‌هال را
در صفحه ۲۷
مطالعه کنید.