

متوسطه ۲
ریاضی

۱۳۳۳



وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی



فصلنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

برای دانش آموزان دوره دوم متوسطه اهلکار دبیران ریاضی

شماره پی در پی ۱۳۳۳ | بهار ۱۴۰۴ | دوره سی و چهارم | ۴۸ صفحه

www.roshdmag.ir

ریاضیات بهار و بهار ریاضیات

روزهای تولد یلسان

ریاضی با جناب سعیدی

کسر جادویی

عبور خود را از درون برآه ۴!

از معلم حان روشن یافتیم





- سرمقاله / ارتباط فرمول های دنباله های حسابی و هندسی / معید خلعت / ۲
- ریاضیات بکار و بکار ریاضیات / دکتر سید ماک جلودان نژاد / ۳
- روزهای تولد یلسان / معهود نصیری / ۵
- امان از ظرف های نااستاندارد! / معمرتقی طاهری تنجانی / ۱۰
- داستان های شیرین ریاضی / معاسبه معیط دایره / ۱۲
- سید معهود ضاهاشمی موسوی / ۱۲
- یافتن معیط و مساحت شکل هندسی هلال / علیرضا حق آقاند / ۱۷
- ریاضی باجنب سعدی / معید خلعت / ۲۴
- میانگین حسابی و هندسی ریشه های معادله درجه دوم / خسرو داودی، آرش رستگار / ۲۶
- حساب انگشتی / جعفر زیدی / ۳۰
- کسر جادویی / معهود ضاهاشمی موسوی / ۳۶
- تخمین زدن عددی / ندا توانایی / ۳۸
- چگونه می توان یک خودرور از درون یک بره ۸۴ عبور داد؟ / زهرانظیفی / ۴۱
- پیشرو / نمونه سؤال های امتحان کفایی بارویگر مفهوم / ۴۳
- نرگس غنبدانی، مریم معهود / ۴۳
- چشم انداز / نمونه سؤال های آزمون سراسری بارویگر مفهوم / ۴۵
- نرگس غنبدانی، مریم معهود / ۴۵
- لغنی درنگ / معمرتقی طاهری تنجانی / ۴۸



فصلنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
برای دانش آموزان دوره دوم متوسطه
شماره ۱۳ بهار ۱۴۰۴ / دوره سی و چهارم / ۴۸ صفحه
www.roshdmag.ir

مدیر مسئول: سید سعید بدیعی
سر دبیر: مجید حکمت
دستیار سر دبیر: نرگس غنبدانی
مدیر هنری: مجید کاظمی
مدیر داخلی: الهام الیکایی
ویراستار ادبی: بهروز راستانی
طراح گرافیک: روح الله محمودیان

بهنام آیتی پور / محرم ایردموسی / رحیم خیر الله زاده
محمدرضا سید صالحی / محمد تقی طاهری تنجانی
حسین نامی ساعی / محمود نصیری
سید محمدرضا هاشمی موسوی / احسان یار محمدی

وبگاه
www.roshdmag.ir
رایانامه
borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir
صفحه خرید مجلات
www.roshdmag.ir/2sg
نشانی دفتر مجله
تهران، ایرانشهر شمالی، پلاک ۲۷۰
تلفن دفتر مجله
۰۲۱-۸۸۸۲۱۱۶۱-۹
نمابر مجله
۰۲۱-۸۸۴۹۰۳۱۶
صندوق پستی دفتر مجله
۱۵۸۷۵/۶۵۵۵
صندوق پستی امور مشترکین
۱۵۸۷۵/۳۳۳۱
تلفن امور مشترکین
۰۲۱-۸۸۴۹۰۳۱۶

خانواده مجلات رشد همه تلاش خود را کرده است تا این مجله در دسترس عموم دانش آموزان قرار گیرد و همه کودکان و نوجوانان میهن عزیز اسلامی ما امکان تهیه آن را داشته باشند.



برنامه رستگار



وب نوشت
نظر سنجی
مجلات رشد



برگه اشتراک
مجلات رشد



مجله رشد بوهان ریاضی متوسطه ۲ از همه دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز در این زمینه ها دعوت به همکاری می کند. نگارش مقاله های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات میباحث کتاب های ریاضی دوره متوسطه ۲) طرح مسائل کلبی حل آن ها برای دانش آموزان طرح مسائلی فلسفی به همراه مقاله های عمومی ریاضی ملند فلسفه و تاریخ ریاضیات، زندگینامه علمی و اجتماعی ریاضی دانسان، داستان ها و خاطرات ریاضی، نکته های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه اخیر ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما...
■ مجله در اصلاح، حذف و افزودن به مقاله ها آزاد است.

■ مسئولیت هر مقاله با نویسنده آن است و مقالات ارسالی بر گشت داده نمی شوند.
■ استفاده از مطالب مجله در کتاب ها یا مجله های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد.
■ مقالات خود را از طریق آدرسهای مجله یا پیوند: www.roshdmag.ir/3ao ارسال کنید.
■ در انتهای مقاله های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و رایانامه (ایمیل) خود را حتما درج کنید و در ابتدای مقاله نام و نام خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمایید.

ارتباط فرمول‌های دنباله‌های حسابی و هندسی

روابط ریاضی و زیباییات

حسابی به رابطه‌های دنباله هندسی، براساس یک قاعده منطقی تغییر می‌کنند. یعنی مثلاً عملگر جمع در رابطه دنباله حسابی به عملگر ضرب در رابطه دنباله هندسی تبدیل می‌شود و همچنین عملگر ضرب در دنباله حسابی به توان در دنباله هندسی تغییر می‌یابد (جدول شماره ۲ را ببینید).

جدول ۲

دنباله حسابی	دنباله هندسی
جمع	ضرب
ضرب	توان
تفریق	تقسیم
تقسیم	ریشه‌گیری

البته باید دقت داشته باشیم که نمایه‌ها (اندیس‌ها) شماره جمله‌ها هستند و ماهیتی غیر از مقدار جمله‌ها دارند. لذا رابطه بین آن‌ها تغییری نمی‌کند.

خب، تا اینجا برای دانش‌آموز جالب است، ولی حالا پس از گفتن این رابطه‌ها، معمولاً برای دانش‌آموز متفکر این سؤال مطرح می‌شود که: «چرا این ارتباط فرمول‌های ریاضی برای مجموع جمله‌های دنباله حسابی و مجموع جمله‌های دنباله هندسی^۲ صدق نمی‌کند؟! پس آیا به مثال نقضی برخوردیده‌ایم؟!»

در این صورت وقتی معلم خلاق ریاضیات، دانش‌آموز را متوجه «حاصل ضرب» جمله‌های دنباله هندسی می‌سازد، دانش‌آموز تحلیلگر پاسخ خود را دریافت می‌کند!

پیروز و سربلند باشید!

پی‌نوشت‌ها

۱. این رابطه با استفاده از رابطه‌های میحث تشابه مثلث‌ها که در کتاب‌های هندسه ۱ و ریاضی ۲ رشته‌های ریاضی - فیزیک و علوم تجربی وجود دارند، قابل اثبات است.
۲. میحث مجموع جمله‌های دنباله‌های حسابی و هندسی فقط در محتوای کتاب‌های درسی دانش‌آموزان ریاضی - فیزیک و علوم انسانی وجود دارد.

اگر ریاضیات با استدلال و با ذکر کاربردها و زیبایی‌های آن آموزش داده شود، مخاطب خیلی بهتر آن را دریافت می‌کند. گاهی حتی توجه به ظاهر رابطه‌های ریاضی، باعث زیباتر شدن ریاضی می‌شود. برای مثال دانش‌آموزان می‌دانند که در مثلث قائم‌الزاویه $a^2 + b^2 = c^2$ ؛ ولی شاید گمان نکنند که بین $\frac{1}{a^2}$ و $\frac{1}{b^2}$ هم رابطه مشابهی وجود داشته باشد. اما دیدن رابطه $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h_c^2}$ آن‌ها را بر سر ذوق می‌آورد.^۱

در عالم ریاضیات نمونه‌های بسیاری از این روابط وجود دارد؛ گاهی دانش‌آموز متوجه زیبایی این رابطه‌هاست و گاهی این هنر دبیر مدبر ریاضی اوست که وی را متوجه زیبایی این رابطه‌ها سازد و کلاس را به شوق آورد.

بسیاری از دانش‌آموزان فرمول‌های مربوط به دنباله‌های حسابی و هندسی را می‌آموزند ولی آیا همه آنان متوجه رابطه بین فرمول‌های دنباله‌های حسابی و فرمول‌های دنباله‌های هندسی می‌شوند؟! در جدول ۱ فرمول‌های مطرح دنباله‌ها را مشاهده می‌کنید:

جدول ۱

دنباله حسابی	دنباله هندسی	
$a_n = a + d(n-1)$	$a_n = aq^{n-1}$	جمله عمومی
$d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$	$q = \sqrt[m-n]{\frac{a_m}{a_n}}$	قدرنسبت
$b = \frac{a+c}{2}$	$b = \sqrt[3]{ac}$	واسطه

وقتی این دو دسته فرمول را از نظر ظاهری بررسی می‌کنیم، متوجه می‌شویم که عملگرهای ریاضی از رابطه‌های دنباله



۳

شماره ۱۳۳ | بهار ۱۴۰۴

ریاضیات بهار و بهار ریاضیات

دکتر سید مالک جاودان نژاد



بهار ریاضیات

به اعتقاد بسیاری از کسانی که در زمینه تاریخ ریاضیات کار می‌کنند، مبدأ و آغاز ریاضیات در عمق تاریخ بشری ناپیداست؛ تا جایی که پرسش عدد چیست و نخستین بار چگونه پدید آمد از دشوارترین پرسش‌های تاریخ علم است. به هر حال، تاریخ ریاضیات راه پرپیچ و خمی را پیموده است. اما در کل تاریخ ریاضیات را به چهار دوره با عنوان‌های زیر تقسیم‌بندی می‌کنند.

- دوره تولد ریاضیات؛
- دوره ریاضیات مقدماتی؛
- دوره ریاضیات با کمیت‌های متغیر؛
- دوره ریاضیات معاصر.

دوره سوم نه تنها برای خود ریاضیات، بلکه برای تعبیرها و کاربردهای ریاضیات در طبیعت، صنعت و علوم متفاوت، دوره‌ای پررونق بوده است و از این حیث شایسته است که این دوره را بهار ریاضیات بدانیم. در این دوره، ریاضیات با پرداختن به تحقیق و بررسی مفهوم تابع و کمیت‌های متغیر آن، به بررسی جریان‌ها و فرایندها پرداخته است. تعبیر هندسی محورهای مختصات و هندسه تحلیلی، آنالیز ریاضی و بیان قوانین اساسی فیزیک به زبان ریاضیات در این دوره اتفاق افتاده است. مطالعه تاریخ ریاضیات را به همه علاقه‌مندان به این رشته توصیه می‌کنم.

برای ریاضی‌دانانی که در زمینه‌هایی مانند جبر، هندسه و... کار می‌کنند، «تعویض پذیری» یکی از ویژگی‌ها و مفهومی مهم و عوامل مرزبندی در برخی گرایش‌های تخصصی است. هر چند ابتدا تعویض‌پذیری بیشتر بر اساس جابه‌جایی عنصرهای ساختار جبری در یک عمل دوتایی بوده است، اما بعدها پا را از این تفاوت ظاهری فراتر گذاشت و به تفاوت در ماهیت‌ها انجامید. امروزه تفاوت جبر تعویض‌پذیر و جبر تعویض‌ناپذیر را صرفاً در اینکه در اولی همواره داریم: $xy=yx$ و در دیگری در حالت کلی داریم: $xy \neq yx$ ، نمی‌دانیم، بلکه این دو در مبدأ، خاستگاه، و مأوا و مقصد تفاوت‌های اساسی دارند. خاستگاه یکی نظریه اعداد صحیح و خاستگاه دیگری جبر ماتریس‌هاست. امروزه این دو دارای موضوع‌ها و مفهوم‌های اختصاصی خود هستند.

در همین راستا گاهی توجه به تعویض‌پذیری برخی مفهوم‌های کلی، به‌ویژه مفهوم‌های موجود در اضافه‌های توصیفی و ملکی، البته نه از جنبه ریاضیات و بررسی ساختاری، بلکه از جنبه ذوقی، خالی از لطف نیست. در عنوان این نوشته تعویض‌پذیری موجود در اضافه‌های ملکی «ریاضیات بهار» و «بهار ریاضیات» عنوان شده است. ریاضیات بهار به جلوه‌ها و استعاره‌های ریاضیات در فصل بهار و بهار ریاضیات به دوره شکوفایی و پررونق تاریخ ریاضیات اشاره دارد. در ادامه چند سطری در این باره تقدیم علاقه‌مندان می‌شود.



۳

شماره ۳۳۳ | بهار ۱۴۰۴



ریاضیات بهار

برای زنبوران عسل می‌شوند. زنبور عسل به‌طور غریزی از نظریهٔ اعداد، هندسهٔ اقلیدسی، و بهینه‌سازی آگاهی دارد. می‌داند هر زاویهٔ یک n -ضلعی منتظم برابر است با $\frac{(n-2)180}{n}$ و چون می‌داند نباید فضای پرتی بین لانه‌ها باقی بماند، معادلهٔ نظریهٔ اعداد $360 \mid \frac{(n-2)180}{n}$ را حل می‌کند و به جواب‌های $n=3, 4, 6$ می‌رسد؛ اقتصاد و بهینه‌سازی می‌داند، لذا به فکر فرو می‌رود که با یک مساحت یکسان، کدام یک از سه شکل مثلث متساوی‌الاضلاع، مربع و یا شش‌ضلعی منتظم محیط کمتری خواهند داشت؟ قلم به دست می‌گیرد، محاسبه می‌کند تا اینکه می‌فهمد شش‌ضلعی منتظم جواب مسئله است. در اینجا مجال نوشتن محاسبه‌های او نیست. همهٔ این‌ها ظاهر امر ریاضی است، اما یقیناً او به امور دیگری از جمله ارتباطات اجتماعی و امنیت ... نیز می‌اندیشد که همهٔ این‌ها تا حدود زیادی بررسی شده‌اند.

طبیعت پر است از اندیشمندان و متفکرانی بی‌زبان چون زنبور که بی‌هیچ ادعایی، علوم را کاربردی، مرتبط و بین‌رشته‌ای می‌دانند. اکنون آیا شایسته نیست نحل، بقره، نمل، عنکبوت و فیل نام‌های سوره‌ها و آیه‌های خدا باشند؟

این رشته سر دراز دارد...

ریاضیات بهار اشاره به تأویل و تعبیر قاعده‌ها و قانون‌های ریاضیات در فصل بهار دارد. ابتدا ارتباطی ذوقی بین این دو برقرار کنیم. اگرچه در اصل، ریاضیات منسوب و برگرفته از «ریاضت» (به معنای رام کردن اسب توسن) است، اما بعید به نظر می‌رسد که با «ریاض» به معنی باغ‌ها و بوستان‌ها هیچ قرابت معنایی نداشته باشد. لذا با این واسطه، می‌توان ریاضیات را به بهار که فصل شکوفایی باغ و بوستان است، متصل کرد. وجه دیگر اشتراک ریاضیات و بهار عبارت است از زایش، فزونی و فزاینده‌گی. در واقع، ریاضیات از منظری علم بررسی عدد است و عدد به معنای زایش، تزاید و متعددی‌شدن است و ما را به کثرت (در سایه وحدت) می‌رساند. بهار نیز فصل زایش طبیعت است و نوعی رستاخیز. بهار آینهٔ رحمت خداست، چرا که می‌فرماید: «فَانْظُرْ إِلَى آثَارِ رَحْمَتِ اللَّهِ كَيْفَ يُخَيِّ الْأَرْضَ بَعْدَ مَوْتِهَا إِنَّ ذَلِكَ لَمُخَيِّ الْمَوْتَى وَ هُوَ عَلَى كُلِّ شَيْءٍ قَدِيرٌ.» (سورهٔ روم، آیه ۵۰).

از این‌ها گذشته، بهار علاوه بر فصل زایش بودن، نمایشگاه سالانهٔ جلوهٔ زیبایی‌های روابط ریاضیات در طبیعت است. گل‌های عاشق آفتاب‌گردان، دنباله‌ومارپیچ زیبای **فیونا تچی**، و نسبت طلایی را در قابی زیبا به تصویر می‌کشند.

گل‌های آفتاب‌گردان رشد می‌کنند و این مزرعه‌ها، بهشتی



۴

شمارهٔ ۳۳۳ | بهار ۱۴۰۴

مسئله‌هایی در احتمال با پاسخ‌هایی دور از انتظار

روزهای تولد یکسان

محمود نصیری



متوجه آن نشوید. اما در یک مسئله ترکیبیاتی، برعکس آن، ممکن است به جوابی هم رسیده باشیم، اما اگر روش حل ما نادرست هم باشد، ممکن است که متوجه نادرست بودن آن نشویم.

مانند مسئله معروفی به نام «مسئله مونتی‌هال» که قبلاً در مجله رشد ریاضی آن را بررسی کرده‌ایم. حتی مسئله‌هایی وجود دارند که وقتی به پاسخ واقعی آن‌ها می‌رسیم، ممکن است با آنچه قبلاً تصور می‌کردیم، تفاوت اساسی داشته یا حتی در موردهایی دور از انتظار باشد. اکنون برای نمونه چند مثال از این نوع مسئله‌ها را بیان می‌کنیم.

مسئله روز تولد

فرض کنیم تعداد روزهای هر سال ۳۶۵ روز باشد. (سال‌های کبیسه را در نظر نمی‌گیریم). همچنین فرض کنیم که کودکان به‌طور یکنواخت با احتمال‌های برابر به تصادف در روزهایی از سال متولد شده باشند.

اگر پرسشی به این صورت مطرح شود که: احتمال آنکه کودکی در ماه مرداد متولد شده باشد، چقدر است؟ مسلماً فوراً پاسخ خواهید داد که برابر $\frac{31}{365}$ است. زیرا تعداد روزهای مرداد ۳۱ است.

اکنون پرسش را کمی مشکل‌تر مطرح می‌کنیم: اگر دو نفر به تصادف انتخاب کنیم، با چه احتمالی هر دو در یک شبانه‌روز متولد شده‌اند؟

بیشتر ما بر این باور هستیم که از احتمال درک شهودی داریم و می‌توانیم پاسخ برخی از مسئله‌های احتمال را که ظاهراً ساده به نظر می‌رسند، به‌طور شهودی پیدا کنیم. اما در جایی این توانایی شهودی با بیشتر شاخه‌های دیگر ریاضیات در تضاد است. مثلاً افراد کمی وجود دارند که ادعا کنند برای محاسبه یک انتگرال یا تجزیه یک عدد بزرگ به حاصل ضرب عامل‌های اول توانایی شهودی دارند.

در ادامه خواهیم دید که این درک شهودی از احتمال و اینکه به سادگی می‌توانیم پاسخ را پیدا کنیم، در خیلی از موارد اشتباه است و معمولاً در بیش از نیمی از این مسئله‌ها، شهود آن‌ها را به بیراهه می‌برد و در نتیجه به جواب نادرست منجر می‌شود. بنابراین برای اجتناب از خطا باید از استدلال‌های غیررسمی دوری کرد و به جای آن کوشید با تکیه بر رویکردهای دقیق و استدلال‌های رسمی، بر اساس قوانین و اصول احتمال، روش‌هایی برای حل ارائه داد.

به‌طور کلی، مسئله‌های ترکیبیاتی که معمولاً زیربنای مسئله‌های احتمال هستند، با مسئله‌های شاخه‌های دیگر ریاضیات دارای ماهیت متفاوت هستند. کمتر این اتفاق رخ می‌دهد که شما یک مسئله حساب دیفرانسیل یا حساب یا مسئله هندسه را حل کنید و اگر اشتباه حل شده باشد



۵

شماره ۳۳۳ | بهار ۱۴۰۴



هر برآمد این آزمایش را به صورت زوج مرتب (i, j) نشان می‌دهیم که i روز تولد نفر اول و j روز تولد نفر دوم است. واضح است که زوج $(7, 10)$ با زوج $(10, 7)$ متفاوت است. برای هر کدام از i و j ، 365 امکان وجود دارد، پس فضای نمونه‌ای شامل 365^2 عضو است. برآمدهایی که هر دو نفر تولدهای یکسان داشته باشند، شامل $(1, 1), (2, 2), \dots, (365, 365)$ است که تعداد آن‌ها 365 است. پس احتمال موردنظر برابر

$$\frac{1}{365} = \frac{365}{365^2} \text{ است.}$$

اما صبر کنید، روش ساده‌تری هم می‌توانیم بیان کنیم کمی به تفکر بیشتر نیاز دارد. اگر تجربه کمتری داشته باشیم ممکن است روش اول زودتر به ذهن برسد. فرض کنیم تولد یکی از دو نفر هر روزی از سال باشد. احتمال آنکه تولد نفر دوم نیز همان روز باشد، برابر $\frac{1}{365}$ است؛ به همین سادگی! به عبارت دیگر، به تصادف تولد نفر اول را روز i انتخاب می‌کنیم و سپس و تنها پس از آن، تولد تصادفی نفر دوم را روز j انتخاب می‌کنیم. مقدار i هر چه باشد، احتمال آنکه j برابر i باشد برابر $\frac{1}{365}$ است، زیرا فقط به ازای یک مقدار j است که برابر i می‌شود. چون این به ازای هر مقدار i درست است، احتمال $j=i$ برابر $\frac{1}{365}$ است.

اکنون به مسئله‌هایی که هدف اصلی هستند می‌رسیم: فرض کنیم در یک مهمانی به تصادف n نفر داشته باشیم، احتمال اینکه فردی در این مهمانی روز دهم مرداد متولد شده باشد چقدر است؟

اما در اینجا پرسش اصلی‌تر که به دنبال آن مطرح می‌شود این است که: چند نفر در یک مهمانی حضور داشته باشند تا احتمال اینکه تولد فردی روز دهم مرداد باشد از $\frac{1}{2}$ بیشتر باشد.

فرض کنیم n تعداد افرادی باشد که باید در مهمانی حضور داشته باشند. به نظر می‌رسد که اگر از متمم پیشامد استفاده کنیم محاسبه ساده‌تر می‌شود. یعنی احتمال آن را پیدا کنیم که هیچ فردی در دهم مرداد متولد نشده باشد. فرض کنیم i پیشامد آن باشد که فرد i در دهم مرداد متولد نشده باشد. اگر $n=1$ ، احتمال آنکه فرد در دهم مرداد متولد نشده باشد برابر

$\frac{364}{365}$ است. اکنون اگر $n=2$ ، متولد نشدن فرد دوم مستقل از متولد نشدن فرد اول است و آن نیز برابر $\frac{364}{365}$ است، پس اگر E_1 و E_2 پیشامدهای متولد نشدن فرد اول و فرد دوم، در دهم مرداد باشند، چون E_1 و E_2 مستقل اند، پس:

$$P(E_1, E_2) = P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2) = \left(\frac{364}{365}\right)^2$$

به طور کلی، احتمال اینکه هر n نفر در دهم مرداد متولد نشده باشند برابر $\left(\frac{364}{365}\right)^n$ است، زیرا هر دو به دوی n پیشامد مستقل هستند. اکنون اگر E پیشامد آن باشد که هیچ مهمانی در دهم مرداد متولد نشده باشد، آنگاه مکمل آن یعنی $\bar{E}$ پیشامد آن است که حداقل یک مهمان در دهم مرداد متولد شده باشد.

(توجه داشته باشیم که چرا مکمل آن، همه مهمان‌هایی که در دهم مرداد متولد شده‌اند، نیستند.) بنابراین، احتمال آنکه بعضی از شرکت کنندگان در مهمانی

$$\text{در دهم مرداد متولد شده باشند برابر } 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n \text{ است.}$$

در نتیجه کمترین n ، به طوری که احتمال داشته باشد برخی از مهمانان در دهم مرداد متولد شده باشند، همان کمترین n است که: $\frac{1}{2} > 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n$ ، در نتیجه: $\frac{1}{2} < \left(\frac{364}{365}\right)^n$.



محاسبه کنیم.

$$\begin{aligned} \left(\frac{364}{365}\right)^n &= \left(1 - \frac{1}{365}\right)^n \approx e^{\frac{-n}{365}} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-n}{365} \ln e < \ln \frac{1}{2} \\ \Rightarrow -\frac{n}{365} &< -\ln 2 \Rightarrow \frac{n}{365} > \ln 2 \\ \Rightarrow n > 365 \ln 2 &\approx 0.693 \times 365 = 252.245 \Rightarrow n \geq 253 \end{aligned}$$

کمترین n برابر ۲۵۳ به دست می آید. شاید از این جواب تعجب کنید. ممکن است حدس می زدید که پاسخ حدود نصف ۳۶۵ مثلاً در حدود ۱۸۳ نفر باشد. مشاهده می کنیم که باید ۲۵۳ نفر در یک مهمانی حضور داشته باشند، تا این احتمال وجود داشته باشد که فردی در دهم مرداد متولد شده باشد. اکنون مسئله کلی تر را مطرح می کنیم:

چند نفر در یک مهمانی حضور داشته باشند تا احتمال اینکه حداقل دو نفر از آن ها روز تولد یکسانی داشته باشند از $\frac{1}{2}$ بیشتر باشد. (لزومی ندارد این تولد روز خاصی از سال باشد.)

حدس بزنید چند نفر در این مهمانی باید وجود داشته باشند، آیا فکر می کنید با توجه به مسئله قبلی عددی بزرگ باشد؟ وقتی پاسخ را پیدا کنیم شگفت زده خواهیم شد! این بار نیز از پیشامد مکمل استفاده می کنیم. یعنی ابتدا احتمال پیشامد مکمل را محاسبه می کنیم؛ احتمال اینکه هیچ دو نفری روز تولد یکسانی نداشته باشند و کوچک ترین n را به گونه ای جست و جو کنیم که این احتمال کمتر از $\frac{1}{2}$ باشد. توجه داشته باشید که مانند قبل فرض بر این است که سال ها را کیبسه در نظر نمی گیریم؛ هر چند که در نظر گرفتن این ملاحظات تأثیر چندانی در پاسخ ندارد. همچنین در این جمع دوقلو نداریم و هر یک از ۳۶۵ روز سال می تواند با احتمال های (شانس های) برابر، روز تولد هر فردی باشد. و نیز مشخص است که روز تولد یکی از روزهای یک ماه است، اما احتمالاً در سال های متفاوت می تواند باشد.

فرض کنیم D_i پیشامد i تولد اولیه باشد که همگی در روزهای متفاوت رخ داده اند، همچنین فرض کنیم B_n پیشامد آن باشد که حداقل دو مهمان از n مهمان دارای روزهای تولد یکسان باشند. می خواهیم $P(B_n)$ را محاسبه کنیم. اما توجه داشته باشیم که B_n مکمل D_n است؛ یعنی $B_n = \bar{D}_n$. نتیجه: $P(B_n) = 1 - P(D_n)$.

پیشامد D_n یعنی هیچ دو نفری روز تولد یکسان ندارند، پس $B_n = \bar{D}_n$ مکمل آن، یعنی حداقل دو نفر روز تولد یکسان دارند.

اما کمترین مقدار n را چگونه محاسبه کنیم؟

مبحث های ریاضی همچون زنجیری به هم پیوسته اند و در مورد های زیادی یکی به کمک دیگری می شتابد. در این مثال و همچنین مثال بعدی خواهیم دید که چگونه تابع های نمایی و لگاریتمی به ما کمک می کنند که مقدار n را پیدا کنیم. در ریاضیات دبیرستانی عدد π کاملاً شناخته شده است؛ با وجود آنکه عددی گنگ است و اثبات گنگ بودنش کار ساده ای نیست. عدد معروف دیگری در ریاضی داریم که معمولاً در کشورهای زیادی دانش آموزان در دوره دبیرستان با آن آشنا می شوند. این عدد، به «عدد نپر» معروف است که با e نشان داده می شود و مقدار تقریبی آن با سه رقم اعشار ۲/۷۱۸ است.

یکی از روش های تعریف این عدد به کمک دنباله $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ است. اگر n را هر اندازه بزرگ هم اختیار کنیم، حاصل حتی به $\frac{2}{3}$ نمی رسد. در واقع اگر n به بی نهایت میل کند، حد این دنباله عدد e است. البته این دنباله، در کتاب های درسی کشور قبلاً وجود داشته، اما متأسفانه حذف شده است.

اگر a عددی حقیقی باشد، عبارت $(1+a)^n$ در ریاضی و به ویژه در احتمال کاربردهای خوبی دارد. اگر a به اندازه کافی کوچک باشد، آنگاه رابطه تقریبی زیر را می توان نتیجه گرفت:

$$(1+a)^n \approx e^{na}$$

اکنون به کمک این رابطه و لگاریتم در مبنای e که آن را با $\ln$ نشان می دهیم، می توانیم n را در رابطه $\left(\frac{364}{365}\right)^n < \frac{1}{2}$



۷

شماره ۱۳۳۱ | بهار ۱۴۰۴

مهمان n ام بر تولد هر یک از $n-1$ مهمان اولیه منطبق نیست (پیشامد A_n)؛ یعنی:

$$D_n = A_n \cap D_{n-1}$$

در نتیجه:

$$P(D_n) = P(A_n | D_{n-1}) \cdot P(D_{n-1})$$

$$= (1 - \frac{n-1}{365}) P(D_{n-1})$$

و مانند حالت‌های قبلی هر $P(D_i)$ از قبلی محاسبه می‌شود. بنابراین:

$$P(D_n) = (1 - \frac{n-1}{365}) P(A_{n-1} | D_{n-2}) P(D_{n-2})$$

$$= (1 - \frac{n-1}{365}) (1 - \frac{n-2}{365}) P(D_{n-2}) = \dots$$

$$= (1 - \frac{n-1}{365}) (1 - \frac{n-2}{365}) \dots (1 - \frac{2}{365}) (1 - \frac{1}{365})$$

به عبارت دیگر، اگر D_i مفروض باشد، به این معنی است که اولین تأمین مهمان i روز تولدهای متفاوتی داشته باشند. مهم نیست که آن تولدها چگونه هستند، مهمان بعدی باید تولدش یکی از $i-1$ روز باقی‌مانده باشد. همچنین توجه داشته باشیم که اگر: $i < z$ ، آنگاه $D_i \subset D_z$ ، یعنی اگر اولین z تولدها متفاوت باشند و i کوچک‌تر از z باشد، آنگاه اولین i تولدها نیز حتماً متفاوت‌اند. به عبارت دیگر، اگر $D_1, D_2, \dots, D_p, D_{p+1}, \dots, D_z$ متمایز باشند، آنگاه $D_1, D_2, \dots, D_p, D_{p+1}, \dots, D_z$ نیز متمایزند؛ یعنی همه تولدها متفاوت هستند. بنابراین:

$$D_i = D_1 \cap D_2 \cap D_3 \dots \cap D_i$$

اکنون، بنابر قانون ضرب احتمال‌ها داریم:

$$P(D_n) = (1 - \frac{1}{365}) (1 - \frac{2}{365}) (1 - \frac{3}{365}) \dots (1 - \frac{n-1}{365})$$

و البته $P(B_n) = 1 - P(D_n)$. زیرا هدف محاسبه $P(B_n)$ است که حداقل دو نفر روز تولد یکسان داشته باشند.

اکنون برای محاسبه $P(D_n)$ به‌طور تقریب می‌توانیم از لگاریتم استفاده کنیم. لگاریتم طبیعی یا همان لگاریتم در مبنای عدد نپر که تقریباً 2.7 است را به، $\ln x$ یا $\log_e x$ نشان

ابتدا از این فرض کلیدی استفاده می‌کنیم که تولد اولین مهمان مهم نیست، تولد اولین مهمان با فرصت برابر هر یک از 365 روز سال می‌تواند باشد. بنابراین مهم نیست تولد اولین مهمان چه روزی باشد، در واقع مانند آن است که احتمال آن را برابر $1 = \frac{365}{365}$ در نظر می‌گیریم. در نتیجه برای مهمان دوم روز تولد 364 روز از 365 روز می‌تواند باشد، به‌طوری که اولین و دومین مهمان تولدهای متفاوت دارند. بنابراین:

$$P(D_2) = \frac{364}{365} = 1 - \frac{1}{365}$$

اکنون فرض کنیم $n=3$ ، یعنی می‌خواهیم از سه نفر هیچ کدام روز تولد یکسان نداشته باشند. اینجاست که احتمال شرطی به کمک می‌آید. پیشامد D_3 را می‌توانیم به‌صورت اشتراک پیشامد D_2 ، یعنی پیشامد دو نفر اولی (دو نفر قبلی) که تولدهای متفاوت دارند با پیشامد A_3 ، یعنی نفر سوم که تولد او با تولد هر یک از دو نفر قبلی متفاوت است در نظر گرفت. در نتیجه بنابر قانون ضرب احتمال‌ها:

$$P(D_3) = P(A_3 \cap D_2) = P(D_2) P(A_3 | D_2)$$

$$= (1 - \frac{1}{365}) (1 - \frac{2}{365}) = 0.9918$$

زیرا احتمال شرطی $P(A_3 | D_2)$ احتمالی است که وقتی دو روز قبلی در تقویم خط خورده باشند، روزی را انتخاب می‌کنیم که هنوز خط نخورده است؛ پس:

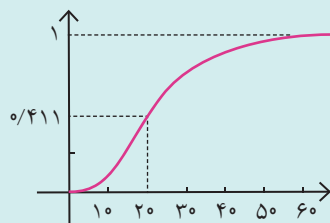
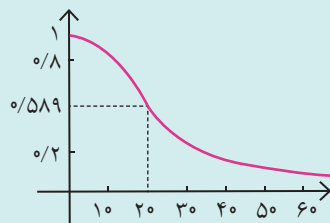
$$P(A_3 | D_2) = \frac{363}{365} = \frac{365-2}{365} = 1 - \frac{2}{365}$$

D_n را پیشامدی تعریف کردیم که هیچ دو نفر یا دو مهمانی در بین n نفر تولد یکسانی ندارند.

تولد $n-1$ مهمان اول متفاوت هستند (پیشامد D_{n-1}) و تولد



می‌شوند، با افزایش تعداد افراد، یعنی n ، به‌طور غیرمنتظره برای $P(D_n)$ کوچک و برای $P(B_n)$ بزرگ به‌نظر می‌رسد. اکثراً حدس می‌زنند برای آنکه $P(B_n)$ از $\frac{1}{2}$ بیشتر باشد تعداد افراد گروه باید حدود ۱۰۰ نفر باشند. اما مشاهده می‌کنیم که حدود فقط ۲۳ نفر می‌توانند این احتمال را از ۵۰٪ یا $\frac{1}{2}$ بیشتر کنند. برای $n=100$ این احتمال تقریباً ۰/۹۹۹۹۹۹۷، نزدیک به ۱ است. عددها تقریبی هستند. (جدول ۱)



در دو نمودار بالا افزایش B_n و کاهش D_n را وقتی n زیادتر می‌شود مشاهده می‌کنیم. n روی محور افقی و مقدار احتمال روی محور قائم نشان داده شده است. در پایان براساس آنچه گفته شد و با توجه به جدول شماره ۱ نتایج دور از انتظار زیر را داریم:

۱. برای اینکه در یک مدرسه با احتمال ۹۹ درصد، تاریخ تولد حداقل دو دانش‌آموز یکسان باشد، آن مدرسه حداقل باید ۵۷ دانش‌آموز داشته باشد.
۲. برای اینکه در یک جلسه، با احتمال ۵۰ درصد، دو نفر دارای تاریخ تولد (روز و ماه) یکسان باشند، آن جلسه باید دارای حداقل ۲۳ نفر باشد.

می‌دهیم. در این لگاریتم رابطه تقریبی زیر در نزدیکی صفر بسیار در محاسبه‌ها اهمیت دارد:

$$\log_e(1+x) \approx x \text{ یا } \ln(1+x) \approx x$$

در واقع خط $y=x$ در $x=0$ بر نمودار $y=\ln(1+x)$ مماس است. پس نزدیک صفر می‌توانیم مقدار آن را با مقدار تابع خط مماس تقریب بزنیم، در نتیجه:

$$\begin{aligned} \ln P(D_n) &= \ln\left(1 - \frac{1}{365}\right) + \ln\left(1 - \frac{2}{365}\right) + \dots + \ln\left(1 - \frac{n-1}{365}\right) \\ &\approx -\frac{1}{365} - \frac{2}{365} - \dots - \frac{n-1}{365} = -\frac{1}{365}(1+2+\dots+n-1) \\ &= -\frac{1}{365} \frac{n(n-1)}{2} = \frac{-n(n-1)}{730} \end{aligned}$$

اما اگر: $\log_e x = t$ ، آنگاه: $x = e^t$ ، پس:

$$P(B_n) \approx 1 - e^{\frac{-n(n-1)}{730}} \text{ و } P(D_n) \approx e^{\frac{-n(n-1)}{730}}$$

برای مثال اگر $n=77$ ، احتمال اینکه دو مهمان دارای تولدهای یکسان باشند برابر است با:

$$P(B_n) \approx 1 - e^{\frac{-77 \times 76}{2 \times 365}} \approx 1 - e^{-8.016} = 0.99967$$

که مشاهده می‌کنیم به عدد ۱ بسیار نزدیک است. و اگر $n=100$ اختیار کنیم تقریباً این احتمال برابر ۱ است.

اکنون فرض کنیم می‌خواهیم این احتمال از $\frac{1}{2}$ بیشتر شود. فکر می‌کنید n باید چقدر باشد؟

$$P(B_n) \geq \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - e^{\frac{-n(n-1)}{730}} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow e^{\frac{-n(n-1)}{730}} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-n(n-1)}{730} \leq \ln \frac{1}{2}$$

از دو طرف در مبنای e لگاریتم می‌گیریم:

$$\frac{-n(n-1)}{730} \leq -\ln 2 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{730} \geq \ln 2$$

$$\frac{n^2}{730} \geq \frac{-n(n-1)}{730} \geq \ln 2$$

در نتیجه:

$$\frac{n^2}{730} \geq \ln 2 \Rightarrow n^2 \geq 730 \ln 2 \Rightarrow n \geq \sqrt{730 \ln 2} \approx 22.49$$

مشاهده می‌کنیم که $n \geq 23$ که بسیار دور از انتظار است.

مقدار عددی $P(D_n)$ و $P(B_n)$ در جدول زیر آمده است. این احتمال‌ها برای افرادی که برای اولین بار با این مسئله روبه‌رو

n	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۳	۲۵	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰	۷۷
$P(D_n)$	۰/۹۷۳	۰/۸۸۳	۰/۷۴۷	۰/۵۸۹	۰/۴۹۳	۰/۴۳۱	۰/۲۹۴	۰/۱۰۹	۰/۰۳۰	۰/۰۰۶	۰/۰۰۰۳۳
$P(B_n)$	۰/۰۲۷	۰/۱۱۷	۰/۲۵۳	۰/۴۱۱	۰/۵۰۷	۰/۵۶۹	۰/۷۰۶	۰/۸۹۱	۰/۹۷۰	۰/۹۹۴	۰/۹۹۹۶۷

جدول ۱



۹

شماره ۱۳۳۱ | بهار ۱۴۰۴



محمد تقی طاهری تنجانی

دکتر فرهاد: دو حالت ممکن است رخ دهد: یا دو کفه مساوی‌اند. یا یکی سنگین‌تر است.

آقای توانا: خب اگر مساوی باشند که ظرف سنگین‌تر بین این ۶ ظرف نیست. پس بین سه ظرف باقی‌مانده است. کافی است در هر کفه یک ظرف را قرار دهیم. ظرف ناستاندارد در کفه‌ای است که سنگین‌تر است. اگر دو کفه مساوی بودند، ظرف ناستاندارد ظرفی است که خارج از ترازو و نزد ماست! و اگر هم دو کفه مساوی نباشند، ظرف ناستاندارد بین ۳ ظرف کفه‌ای است که سنگین‌تر است. با یک توزین دیگر ظرف مشخص می‌شود.

دکتر فرهاد: یعنی در هر صورت دو بار توزین کافی است. جالبی این روش وقتی است که تعداد ظرف‌ها زیاد باشد، مثلاً اگر ۹۰۰ ظرف باشد، به روش من باید ۹۰۰ بار توزین انجام می‌دادیم، ولی به این روش فکر کنم با ۶ بار توزین، بطری غیراستاندارد پیدا می‌شد. جالب بود!

آقای توانا: حالا یک راه‌حل ابتکاری دیگر هم هست؛ البته اگر بتوانیم مهر و موم (پلمپ) ظرف‌ها را باز کنیم.

دکتر فرهاد: می‌شنوم. خیلی علاقه‌مند شدم.

آقای توانا: ظرف‌ها را از ۱ تا ۹ شماره‌گذاری می‌کنیم. از ظرف اول یک قرص، از ظرف دوم ۲ قرص و به همین ترتیب از ظرف نهم ۹ قرص برمی‌داریم. تعداد این قرص‌ها ۴۵ تاست. حالا با یک بار وزن کردن تشخیص می‌دهیم مربوط به کدام بطری است.

دکتر فرهاد: چطوری؟!

آقای توانا: وزن ۴۵ قرص در حالت استاندارد ۴۵۰ میلی‌گرم است. حالا اگر ۱۰ میلی‌گرم بیشتر بود، مربوط به ظرف شماره ۱ است و اگر ۲۰ گرم بیشتر بود مربوط به ظرف دوم.

دکتر فرهاد: و بالاخره اگر وزن کل ۵۴۰ میلی‌گرم شد،

داداش تو فکری. مگه کشتی‌ها غرق شدند؟! دنیا ارزشش را نداره که ببینم پکر باشی!

این‌ها جمله‌هایی بودند که آقای توانا، دبیر ریاضی دبیرستان، به برادرش دکتر فرهاد که دکترای داروسازی داشت، همراه لبخند ملیحی می‌گفت.

دکتر فرهاد: نه داداش گلم! کشتی‌ها غرق نشدن. کوه کشتی که غرق بشه؟! توی فکر بودم. امروز توی داروخانه با یه مشکلی روبه‌رو شدیم، به اون فکر می‌کردم.

آقای توانا: خب چی هست؟ کمکی از دست من برمی‌یاد؟! **دکتر فرهاد:** مسئله خاصی نیست. امروز که ۹ ظرف یک داروی خاص را که هر یک حاوی ۱۰۰۰ قرص بودند، توی قفسه‌ها می‌چیدم، تلفنی خبر دادند که تا وقتی تمام ظرف‌ها بررسی نشده‌اند، آن‌ها را نفروشم. چون وزن قرص‌های یکی از ظرف‌ها، هر کدام ۱۰ میلی‌گرم بیشتر از قرص سایر ظرف‌هاست! می‌شد از هر بطری قرصی را بردارم و آزمایش کنم، ولی ترازویی که با این دقت میلی‌گرم را نشان دهد نداشتم. با یک ابتکار یک ظرف را در یک کفه ترازو قرار دادم و با آزمایش کردن سایر بطری‌ها، بطری ناستاندارد را یافتم. توی فکر بودم که آیا روش ساده‌تری برای این کار نبود؟

آقای توانا: خب داداش شما کم‌فکرترین کار را انجام دادی، ولی ما ریاضی‌خوان‌ها راه‌های جالبی برای این جور مسئله‌ها داریم.

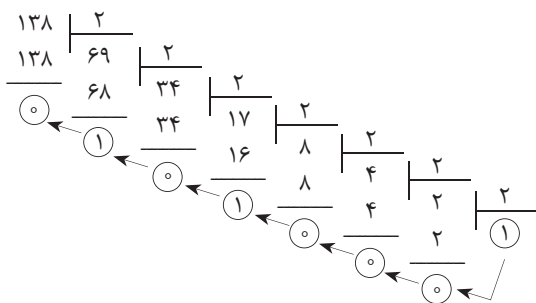
دکتر فرهاد: مثلاً چه راه‌حلی؟ راهی هست که کمترین توزین را داشته باشیم و در ضمن پلمپ ظرف‌ها را باز نکنیم؟

آقای توانا: بله! اگر ترازوی دو کفه‌ای داشته باشیم یک راه ساده آن است که ظرف‌ها را به ۳ دسته سه‌تایی تقسیم کنیم. حالا در هر کفه ۳ ظرف از یک دسته‌ها را قرار می‌دهیم. چه پیش می‌آید؟



۱۵

شماره ۱۳۳ | بهار ۱۴۰۰



حالا از سمت راست باقی مانده‌ها را می‌نویسیم که می‌شود: ۱۰۰۰۱۰۱۰. این همان عدد ۱۳۸ در مبنای ۱۰ است که آن را در مبنای ۲ نوشتیم. یک دسته دوتایی، یک دسته ۳ تاایی و یک دسته ۲ تاایی. حالا ظرف‌ها را از شماره ۱ تا ۹ شماره‌گذاری می‌کنیم. از ظرف یک ۱ قرص، از ظرف دو ۲ قرص، از ظرف سه ۲ قرص، از ظرف چهار ۳ قرص و به همین ترتیب از ظرف آخر ۲۸ قرص برمی‌داریم. جمع این عددها می‌شود ۵۱۱. در حالت استاندارد این تعداد قرص یک وزنی دارد. اختلاف وزن حالت استاندارد را با وزنی که به دست آورده‌ایم حساب می‌کنیم. مثلاً اگر ۲۲۰ میلی گرم بیشتر بود، پس تعداد ۲۲ قرص غیراستانداردند. حالا این عدد ۲۲ را در مبنای ۲ می‌نویسیم می‌شود ۱۰۱۱۰. وجود ۱ در این عدد بیانگر شماره به‌طور غیراستاندارد است. از سمت راست هر کدام از ۱۱ها معادل شماره ظرف‌های غیراستاندارد هستند. در اینجا می‌شود ظرف‌های شماره دو، سه، و پنج.

دکتر فرهاد: خیلی جالب بود. من را بردی به بیش از سی سال پیش و درس ریاضی و مبحث مبنا. البته آن موقع ما درک درستی از این مطلب نداشتیم. عجب کاربرد جالبی بود. **آقای توانا:** همین‌طور است که می‌فرمایید. اغلب بچه‌ها به کاربردهای مسئله توجهی ندارند. کم هستند دانش‌آموزانی که فکر کنند این مطالبی که می‌خوانند روزی به کارشان می‌آید. راستی داداش چایتان سرد شد. بدهید عوضش کنم.

دکتر فرهاد: ممنون می‌شوم داداش!

آقای توانا: (در حالی که به طرف سماور می‌رود) داداش حالا کجاهایش را دیده‌ای! این مسئله توزین قصه‌ها دارد. ان‌شاءالله هر وقت حس و حال مدرسه را داشتی، بیا تا از این قصه‌ها برایت بگویم که خیلی هم کاربردی‌اند.

دکتر فرهاد: متشکرم داداش. حتماً از محضر استادی چون شما بیش از این‌ها باید استفاده کنیم. ان‌شاءالله در فرصت مناسب (نگاهی به ساعتش می‌کند) تا من چایی را می‌خورم خانم بچه‌ها لطفاً آماده بشید زحمت را کم کنیم که فردا روز کاری پرمشغله‌ای دارم.

مربوط به بطری نهم است. خیلی جالب بود. البته داداش کار شما مرا یاد لطیفه‌ای می‌اندازد. یک بچه چوپان که برای تحصیل رشته ریاضی به دانشگاه رفته بود، بعد از فراغت از تحصیل نزد پدرش بازگشت. پدرش پرسید: چه چیزی یاد گرفته‌ای که به کار من بخورد! گفت: پدرجان! برای شمارش تعداد رأس‌های گله، یک روش بدیع یاد گرفته‌ام! کافی است همه دست و پاهای گوسفندان را بشماریم و در آخر چون هر گوسفند ۴ دست و پا دارد تقسیم بر ۴ کنیم تا تعداد رأس‌های گله به دست آید!

آقای توانا: داداش! با ما هم شوخی؟ ریاضی‌دان‌ها کارشان حل مسئله است و تمامی راه‌ها را بررسی می‌کنند و کاری به مقرون به صرفه بودن آن روش ندارند. حالا داداش روی این مسئله فکر کن که اگر تعداد ظرف‌های غیراستاندارد را نمی‌دانستیم، چگونه باید توزین می‌کردیم. مثلاً اگر سه تا یا پنج‌تای آن‌ها قرص‌هایشان ۱۰ میلی گرم اضافه‌تر داشتند.

دکتر فرهاد: آه! این که خیلی سخت شد!

آقای توانا: خب مسئله جدیدی شد. چون ممکن است یکی دو تا و یا همه آن‌ها غیراستاندارد باشند. یقیناً با روشی که گفتم مسئله حل نمی‌شود، اما روش دیگری برای این کار هست. برای این روش کمی اطلاعات ریاضی لازم داریم.

دکتر فرهاد: مثلاً چه اطلاعاتی؟ اگر در سطح مدرسه‌ای باشد، چیزهایی یادم هست!

آقای توانا: چیز سختی نیست. ما در اینجا از مبنای ۲ برای کارمان استفاده می‌کنیم. هر عدد اعشاری را می‌شود به هر مبنایی از ۲، ۳، و... برد. وقتی می‌گوییم ۱۳۸، منظورمان هشت یکی، سه ده‌تایی و یک صدتایی است؛ چون مبنای کارمان اعشاری (دهدهی) است. حالا اگر بخواهیم این عدد را به مبنای ۲ ببریم باید دسته‌های یکی، ۲ تاایی، ۴، ۸، ۱۶ تاایی و... را مشخص کنیم. برای این کار ۱۳۸ را متوالیاً بر ۲ تقسیم می‌کنیم.



داستان‌های شیرین ریاضی محاسبه محیط دایره

سید محمد رضا هاشمی موسوی

اشاره

با مرور داستان‌های قبل، به این واقعیت پی می‌بریم که همیشه می‌توان به بسیاری از مسئله‌ها، فرمول‌ها، قاعده‌ها و قانون‌های ریاضی، با استفاده از روش‌های مقدماتی هم دست یافت. برای رسیدن به این هدف والا باید مسئله‌ها و فرمول‌های مشهور و مهم را مطرح و با روش‌های مقدماتی حل کنیم.

تا اینجا با داستان‌های ماجرای هدیه حاکم بزرگ به مخترع شطرنج و دو داستان مشابه آن، حل مسئله مشهور پنج کلاه و تعمیم آن به روش مقدماتی، حساب و روش ضرب ذهنی $m \times n$ در حالت عمومی، کلاس درس هندسه و یافتن خطای شکل (تشخیص عدم تطبیق اطلاعات مسئله)، کشف بزرگ ارشمیدس و تشخیص تاج تقلبی پادشاه، و محاسبه مساحت دایره با چند روش مقدماتی آشنا شدیم.

در داستان حاضر می‌خواهیم چند روش برای محاسبه محیط دایره ارائه دهیم که بسیار مقدماتی و شگفت‌انگیزند و به درک و فهم محاسبه محیط دایره بسیار کمک می‌کنند.

محاسبه محیط دایره با چند ضلعی‌های محیطی و محاطی در کلاس درس هندسه

طبق معمول معلم هندسه وارد کلاس شد. در دستش تعدادی ابزار و یک قرقره نخ ضخیم بود. دانش‌آموزان کنجکاوانه به این وسایل نگاه می‌کردند. معلم ابزار را روی میز گذاشت و پس از صحبت‌های مقدماتی و یادآوری روش‌های عملی برای محاسبه مساحت دایره، روی تخته نوشت:

درس امروز:

«روش‌های عملی برای حساب کردن محیط دایره» (جلسه اول)

بچه‌ها مانند قبل بسیار خوش حال شدند، چون کار عملی بود و مثل بازی و سرگرمی به نظر می‌رسید. آن‌ها از فرمول‌ها و روابط حفظ‌کردنی هیچ دل خوشی نداشتند، زیرا جز خستگی و در آخر هم یک سری محفوظات عاری از درک و فهم مطلب، چیزی برایشان نداشت.

معلم: بچه‌ها امروز می‌خواهم به کمک شما محیط دایره را به صورت عملی اندازه‌گیری کنم و روش‌های ممکن را تا جایی که زمان اجازه دهد، ارائه دهم. می‌بینید که ابزار لازم برای آزمایش را هم به همراه آورده‌ام. این دفعه هم یک کمک می‌خواهم.



۱۲

شماره ۱۳۳ | بهار ۱۴۰۴

محیط دایره را بیوشاند. بهتر است نخ را روی محیط دایره بچسبانیم.

در همین حین، شاگرد به ترتیب کارها را عمل می‌کرد که پس از چند دقیقه شاگرد اعلام کرد که کل محیط دایره را با نخ پوشانده است. معلم تشکر کرد و مقوا را بالا گرفت تا همه ببینند که این کار به‌طور واقعی انجام شده است.

معلم: حالا طول نخ را اندازه می‌گیریم.

دانش‌آموز: آقا، آیا این کار دقیق و با فرمول قابل مقایسه است؟

معلم: همان‌طور که گفتم کار عملی همیشه خطا دارد و با فرمول دایره، خطا را پیدا می‌کنیم. حالا می‌خواهیم از درست‌بودن روش کار اطمینان حاصل کنیم.

دانش‌آموز: آقا مقدارها را داخل فرمول می‌گذاریم و محیط را حساب می‌کنیم.

معلم: این عدد را برای مقایسه با کار عملی (آزمایش) نیاز داریم. بیا پای تخته حساب کن.

دانش‌آموز: آقا، ابتدا فرمول محیط دایره را می‌نویسیم. شعاع دایره را داریم و عدد π را هم $3/14$ در نظر گرفتیم. محیط دایره این‌طور حساب می‌شود:

$$P = 2\pi R = 2(3/14)(10\text{ cm}) = 62/8\text{ cm}$$

معلم: آفرین!

اشاره کرد تا شاگرد بنشیند.

معلم: بچه‌ها این مقدار واقعی عدد محیط نیست، چون عدد پی را با دو رقم اعشار در نظر گرفتیم.

دانش‌آموزان با زمزمه‌های بلند اعتراض خود را رساندند.

معلم: توجه داشته باشید که مقدار واقعی عدد π مشخص نیست و فقط برای محاسبه تعداد اعشار مورد نیاز، عدد π را انتخاب می‌کنیم:

$$\pi \approx 3/1415926536 \approx 3/14 \text{ (عدد پی با } 10 \text{ رقم اعشار)}$$

حال با این توضیح برگردیم به محاسبه عملی محیط دایره.

بچه‌ها کافی است طول نخ روی محیط دایره را حساب کنیم تا محیط دایره رسم‌شده به دست آید.

دانش‌آموز: آقا با متر حساب کردم و $61/4$ محیط دایره رسم شده است!

معلم: حالا این مقدار را از مقداری که دوستان به دست آورده است کم کنید و ببینید چه میزان اختلاف است. در واقع این اختلاف میزان خطای کار عملی ماست!

دانش‌آموزان: آقا ما بیاییم!...

همه‌همه کلاس را گرفت و معلم برای اینکه نظم کلاس به هم نخورد، بلافاصله یکی را از آخر کلاس که قد بلندی هم داشت انتخاب و اشاره کرد پای تابلو بیاید.

معلم: در جلسه‌های قبل به‌طور مفصل درباره مساحت دایره و روش‌های اندازه‌گیری آن صحبت کردم و فرمول‌هایی هم برای محاسبه مساحت و محیط دایره نوشتم. امروز هم در دو جلسه‌ای که هندسه داریم، به محاسبه عملی محیط دایره می‌پردازیم. بچه‌ها این فرمول‌های واقعی محیط و مساحت دایره‌ای به شعاع R هستند:

$$S = \pi R^2 \text{ و } P = 2\pi R$$

معلم پای تخته اشاره کرد که ساکت تا کار آزمایش را شروع کنیم و ادامه داد:

معلم: برای محاسبه محیط دایره اولین روش ساده این است که با یک تکه نخ ضخیم و متر اندازه‌گیری کنیم و سپس با فرمول محیط دایره، محیط را به‌دست آوریم. روشن است که تفاضل این دو مقدار میزان خطا را مشخص می‌کند. ابتدا دایره‌ای به شعاع $R = 10\text{ cm}$ روی مقوا با پرگار رسم می‌کنیم.

معلم اشاره کرد و شاگرد شروع به کار کرد.

معلم: حالا نسخ را روی دایره منطبق می‌کنیم تا نخ کل



۱۳

شماره ۳۳۳ | بهار ۱۴۰۴

دانش آموز: آقا اجازه! مقدار $۶۱/۴\text{cm}$ را از $۶۲/۸\text{cm}$ کم کنیم؟

معلم: بله.

دانش آموز: آقا شما خطا را با Δ نشان می‌دادید؛ پس:
 $\Delta = ۶۲/۸\text{cm} - ۶۱/۴\text{cm} = ۱/۴\text{cm}$ (خطا)

معلم: بچه‌ها، ببینید کار عملی ما با مقدار واقعی $۱/۴\text{cm}$ اختلاف دارد و در واقع خطای کار عملی ما $۱/۴\text{cm}$ است. دانش‌آموزان باز با زمزمه‌های پی‌درپی و بلند، تعجب خود را رساندند.

دانش آموز: آقا پس سر امتحان با یک تکه نخ و متر خیاطی مادرم محیط دایره را حساب می‌کنم و دیگر فرمول به کار نمی‌برم! (خنده بچه‌ها)

معلم با خنده‌ای نوازشگر و راضی از اینکه بچه‌ها مطلب را فهمیده‌اند به سخنانش ادامه داد:

معلم: بچه‌ها مهم این است که مفهوم را درک کردید و به فرمول هم مسلط هستید!

بچه‌ها این یک آزمایش ساده بود که به نتیجه هم رسید، اما مطلب اصلی ما اثبات فرمول محیط دایره است که یک ربع دیگر شروع می‌کنیم.

سپس نخ‌هایی به طول‌های متفاوت از ۱۰cm تا ۴۰cm به همه بچه‌ها داد و گفت: «بچه‌ها دایره‌هایی به اندازه نخ‌هایی که دادم رسم کنید و اولین کسی که تمام کرد، بیاید پای تابلو و محاسبه‌های خود را نشان دهد.»

دانش آموزان همه با تعجب به هم نگاه می‌کردند. با این مسئله معکوس آشنا نبودند و نمی‌دانستند از کجا باید شروع کنند. آیا باید دایره‌های زیادی بکشند و نخ را روی آن‌ها هم پوشانی کنند؟!

باز زمزمه‌های بلند به‌عنوان از کجا باید شروع کنیم در کلاس طنین‌انداز شد. همه‌ها بالا گرفت و کلاس هنوز به جایی نرسیده بود و نمی‌دانستند کار را چگونه باید شروع کنند. برخی از دانش‌آموزان هم داشتند دایره‌ها را امتحان می‌کردند. یکی از بچه‌ها با کشیدن ۲۰ دایره با شعاع‌های متفاوت به جواب نرسیده بود!

معلم برای جمع کردن قضیه گفت: «بچه‌ها برای رسم دایره مطلوب چه چیزی نیاز است؟»

دانش آموزان: آقا شعاع دایره که نداریم!

معلم: کافی است که طول نخ را بر ۲π تقسیم کنید تا شعاع R به دست آید. درست است؟

دانش‌آموزان گفتند: «بله آقا!»

برای همه دانش‌آموزان معما حل شد و در عرض کمتر از دو دقیقه دایره‌ها را رسم کردند.

دانش آموز: آقا بیاییم این گفته شما را بنویسیم؟

معلم: بله، بیا پای تخته و روش به‌دست آوردن R را بگو.

دانش آموز ممتاز: فرض می‌کنیم طول نخ ما P_{cm} باشد. حالا این P را بر ۲π تقسیم می‌کنیم:

(طول نخ) $P = ۲\pi R_{\text{cm}} = P_{\text{cm}}$ (محیط دایره)

$$R_{\text{cm}} = \frac{P_{\text{cm}}}{2\pi} = \frac{P_{\text{cm}}}{2(3/14)}$$

طول نخ من $L=۳۴\text{cm}$ است، پس:

$$R_{\text{cm}} = \frac{۳۴\text{cm}}{2(3/14)} \approx ۵/۴۱۴\text{cm}$$

بنابراین دایره من به شعاع $۵/۴۱۴\text{cm}$ باید رسم شود.

معلم: بله، آفرین! بفرمایید بنشینید. بچه‌ها این مفهوم عکس عمل ما را هم متوجه شدید. اگر محیط دایره را داشته باشیم (طول نخ L) به‌سادگی می‌توانیم از فرمول محیط دایره شعاع دایره را حساب کنیم. فکر می‌کنم الان زنگ پایان کلاس زده شود و دیگر روش‌ها برای بعد از ظهر می‌ماند. زنگ به صدا در آمد.



۱۴

شماره ۱۳۳۳ | بهار ۱۴۰۴

معلم: بسیار عالی، می‌توانی بیایی توضیحاتی بدهی تا مقدمات کار ما مهیا شود؟

دانش‌آموز ممتاز: بله، آقا.

معلم: بیا پای تابلو و کار کاشانی را که یک ایده بسیار بکر بوده است توضیح بده.

دانش‌آموز ممتاز: ابتدا کمی در مورد این ریاضی‌دان شهیر توضیح می‌دهم. غیاث‌الدین کاشانی (۸۳۲-۷۹۰ قمری/ ۱۴۲۹-۱۳۸۸ میلادی) ریاضی‌دان ایرانی، متولد کاشان است. کارهای علمی و ریاضی وی را، به‌خصوص در نجوم، همه می‌شناسند. روی کسرهای اعشاری کار کرده و معادله‌های جبری درجه ۳ و حتی درجه ۴ را بررسی کرده است. مبدع روش‌های کنونی انجام چهار عمل اصلی حساب (به‌ویژه ضرب و تقسیم) است. کتاب درسی مفتاح‌الحساب را نوشته و در آن عدد پی (π) را تا ۱۶ رقم اعشار محاسبه کرده است که تا ۱۵۰ سال بعد کسی نتوانست آن را گسترش دهد. محاسبه جیب (سینوس) زاویه ۱° (تا دو رقم صحیح شصتگانی) و اختراع ابزار اخترشناسی از دیگر کارهای اوست.

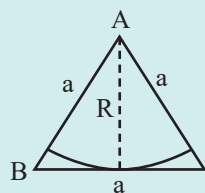
معلم: بسیار عالی. حالا خیلی خلاصه روش کاشانی را برای محاسبه محیط دایره توضیح دهید.

دانش‌آموز ممتاز: ابتدا دایره‌ای به شعاع دلخواه R در نظر می‌گیریم. حال باید یک چندضلعی (مثل ۶ ضلعی) را داخل دایره محاط کنیم و یک شش‌ضلعی هم بیرون دایره محاط کنیم (شکل ۱).



شکل ۱

به‌جای محاسبه محیط دایره، محیط چندضلعی محاطی و محیطی را حساب می‌کنیم و واضح است که محیط دایره مقداری بین این دو دارد. ضلع مثلث‌های متساوی‌الاضلاع داخلی هر یک R است و ضلع مثلث‌های متساوی‌الاضلاع خارجی را هم حساب می‌کنیم (شکل ۲):



شکل ۲

روش‌های عملی برای اثبات فرمول محیط دایره (جلسه دوم)

معلم وارد کلاس شد و بلافاصله عنوان بالا را برای جلسه هندسه بعد از ظهر در نظر گرفت و روی تابلو بسیار درشت نوشت.

معلم: بچه‌ها همان‌طور که زمینه‌سازی شد می‌خواهیم به چند روش ابتکاری که برای محاسبه محیط دایره ارائه شده است، اشاره کنیم؛ از محاسبه شگفت‌انگیز **غیاث‌الدین کاشانی** تا محاسبه ابتکاری **سرژ لانگ!**

دانش‌آموزان با زمزمه‌هایی رضایت خودشان را از کلاس صبح و کلاس‌های قبلی (چند روش اثبات عملی برای مساحت دایره) ابراز داشتند. باز همه‌ها بالا گرفت که معلم با اشاره سکوت را درخواست کرد.

دانش‌آموز ممتاز: آقا اجازه! من مطالعاتی درباره کارهای ریاضی‌دان بزرگ مشهور خودمان، **غیاث‌الدین جمشید کاشانی** و کارهای برجسته و شگفت‌انگیز ایشان، به‌خصوص برای محیط دایره و چندضلعی‌های محاطی و محیطی دایره داشته‌ام.



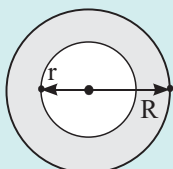
۱۵

شماره ۱۳۳ | بهار ۱۴۰۴

جمشید کاشانی، ریاضی‌دان ایرانی، بلندترین قله (مانند قله اورست) را فتح کرد که تا ۱۵۰ سال بعد هم کسی نتوانست قدم به آن عرصه بگذارد!

معلم: بچه‌ها تا اینجا با سیر تاریخی محاسبه عدد پی و محاسبه محیط دایره آشنا شدید. حالا نوبت به روشی بسیار بکر و شگفت است که سرژ لانگ در کتاب خودش و برای کلاس ریاضی درس هندسه ارائه داده است. روش کار با رسم یک دایره داخل دایره‌های دلخواه شروع می‌شود.

پس ما شروع می‌کنیم با رسم یک دایره داخل دایره دیگر و تحدید مساحت بین دو دایره (مساحت قسمت سایه‌خورده را حساب می‌کنیم - شکل ۳). پس قطر نوار h شعاع دایره کوچک r ، و $R=r+h$ شعاع دایره بزرگ‌تر است. حال مساحت نوار را می‌نویسیم:



شکل ۳

$$d = S_p - S_l = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi((r+h)^2 - r^2)$$

روشن است:

$$\begin{aligned} (r+h)(r+h) &= r(r+h) + h(r+h) \\ &= r^2 + \underbrace{rh+rh}_{2rh} + h^2 = r^2 + 2rh + h^2 \end{aligned}$$

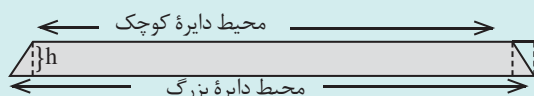
پس می‌توان نوشت:

$$d = \pi(r^2 + 2rh + h^2 - r^2) = (2rh + h^2)\pi$$

از طرف دیگر، نوار توسط دایره کوچک و بزرگ تحدید شده است و این تحدید را می‌توان به صورت نابرابری مضاعف زیر نشان داد:

$$h \times (\text{محیط دایره بزرگ}) \leq \text{مساحت کمر بند (نوار)} \leq h \times (\text{محیط دایره کوچک})$$

برای تشریح نابرابری بالا، کافی است دقت کنیم که اگر نوار (کمر بند) را برش بزنیم و باز شود (شکل ۴)، مساحت کمر بند که دوزنقه است دو قاعده دارد:



شکل ۴

اگر این نوار را مستطیل در نظر بگیریم و طول این مستطیل را محیط دایره کوچک فرض کنیم، مساحت نوار با تقریب

$$R^2 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 = a^2 ; a^2 - \frac{1}{4}a^2 = R^2 ; \frac{3}{4}a^2 = R^2$$

$$R = \frac{\sqrt{3}}{2}a ; a = \frac{2\sqrt{3}}{3}R ; \text{محیط ۶ ضلعی محاطی } P_1 = 6R$$

$$P_p = 6a = 4\sqrt{3}R \quad \text{محیط ۶ ضلعی محیطی}$$

هر ضلع شش ضلعی خارجی (محیط) دایره را برابر با $\frac{2\sqrt{3}}{3}R$ حساب کردیم. پس محیط دایره به تقریب بین دو مقدار زیر است:

$$6R = P_1 < \left(\begin{array}{c} \text{محیط دایره} \\ \text{به شعاع } R \end{array} \right) P < P_p = 4\sqrt{3}R \approx 6.928R$$

پس:

$$6R < P < 6.928R$$

معلم: بله، بسیار عالی! بچه‌ها تشویق کنید دوستان را و من هم توضیحاتی مکمل خواهم داد.

بچه‌ها ببینید، در صورتی که ضلع‌های چندضلعی‌های محیطی و محاطی زیاد شوند، واضح است که انطباق چندضلعی‌ها روی دایره بسیار نزدیک به واقعیت خواهد شد و چندضلعی‌ها در واقع نزدیک به دایره می‌شوند. همین موضوع باعث می‌شود که محیط دایره دقیق و دقیق‌تر محاسبه شود. جمشید کاشانی تعداد ضلع‌ها را عدد 3×2^{28} در نظر گرفت و توانست با همین روش محیط دایره را که بستگی به عدد π دارد با دقت کافی حساب کند. همان‌طور که اشاره کردیم، مقدار π را تا ۱۶ رقم اعشار محاسبه کرد و در واقع محیط دایره نزدیک به مقدار واقعی محاسبه شد.

دانش‌آموزان با زمزمه‌های بلند و هیجان کار کاشانی را تصدیق می‌کردند. زیرا دیدند که محاسبه یک شش ضلعی منتظم چقدر کار گرفت و تعداد ضلع‌ها، یک عدد غول‌پیکر بود (حدود عددی ۵ رقمی) که غیث‌الدین با محاسبه‌های دستی آن زمان و به کمک برخی از جدول‌ها موفق به این کار شد. در واقع با توجه به محدودیت‌های آن زمان، غیث‌الدین



۱۶

شماره ۱۳۳۳ | بهار ۱۴۰۴

نقصانی محاسبه می‌شود و اگر طول این مستطیل را محیط دایره بزرگ‌تر بگیریم، مساحت نوار با تقریب اضافی محاسبه می‌شود. پس مساحت کمربند (نوار) بین این دو مساحت است. مساحت مستطیل هم از طول $\times$ عرض به دست می‌آید. عرض مستطیل را هم h در نظر می‌گیریم. پس می‌توان نوشت:

$$h \times (\text{محیط دایره بزرگ}) \leq (2r+h)h\pi \leq h \times (\text{محیط دایره کوچک})$$

حال نابرابری بالا را بر h (عامل مشترک و مثبت) تقسیم می‌کنیم:

محیط دایره بزرگ $\leq (2r+h)\pi \leq$ محیط دایره کوچک

در اینجا اگر h را بی‌نهایت کوچک بگیریم، درواقع دایره کوچک و بزرگ بر هم منطبق می‌شوند. در صورتی که $h \approx 0$ اختیار شود، محیط دایره‌ای به شعاع r خواهیم داشت. در واقع اگر محیط دایره کوچک را به P نشان دهیم، با کوچک شدن h و به تقریب صفر شدن، طرف راست و چپ نابرابری و همین‌طور مقدار وسط به $2\pi r$ می‌رسند و می‌توان نوشت:

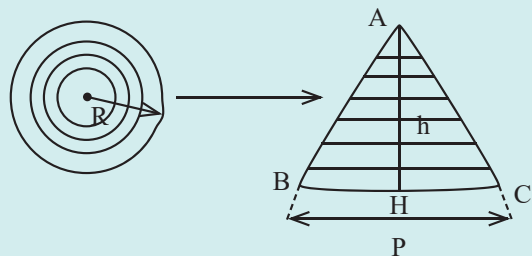
$$P \leq 2\pi r \leq P$$

پس $2\pi r$ بین دو عدد فشرده می‌شود: یکی محیط دایره کوچک و دیگری محیط دایره بزرگ و چون $2\pi r$ را بین این دو مقدار می‌فشاریم، از نابرابری‌ها به یک برابری خواهیم رسید:

$$P = 2\pi r$$

البته اگر فرض کنیم که مساحت دایره معلوم است از روش‌های قبل هم می‌توانیم به محیط دایره برسیم. حالا با فرض داشتن مساحت دایره $S = \pi R^2$ با دو روش دیگر می‌توان محیط دایره را حساب کرد:

یک دفعه دایره‌های تودرتو و برش‌ها را یادآوری می‌کنم. دیدیم دایره را به برش‌های دلخواه تبدیل کردیم و از برش‌ها یک برج مثلثی ساختیم (شکل ۵).



شکل ۵

مساحت مثلث در واقع همان مساحت برج مثلثی است. ارتفاع مثلث h برابر با شعاع دایره است: $h=R$ و قاعده مثلث BC همان محیط دایره است؛ یعنی $BC=P$. پس:

$$S_O = S_A = \pi R^2 = \frac{1}{2} BC \times AH = \frac{1}{2} (P)(h)$$

بنابراین:

$$\pi R^2 = \frac{1}{2} Ph = \frac{1}{2} PR;$$

$$\pi R^2 = \frac{1}{2} PR$$

دو طرف برابری بالا را بر R تقسیم می‌کنیم:

$$\pi R = \frac{1}{2} P$$

دو طرف برابری را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$P = 2\pi R$$

به نتیجه‌ای که می‌خواستیم، یعنی محیط دایره، رسیدیم. پس نتیجه گرفتیم که اگر محیط و یا مساحت دایره معلوم باشد، دیگری را به سادگی به دست خواهیم آورد. به همین ترتیب می‌توان با فرض داشتن مساحت دایره به محیط آن رسید. البته ما به‌طور مستقل هم به محیط دایره رسیدیم؛ به سبکی که کاشانی محیط دایره را محاسبه کرد. در واقع نسبت محیط دایره به قطر آن، همان عدد پی (π) بود که کاشانی با ۱۶ رقم اعشار و با چندضلعی‌های محاطی و محیطی به تعداد (3×2^8) ضلعی که بسیار عددی بزرگ است، آن را محاسبه کرد.

باز همه‌همه و زمزمه در کلاس بالا گرفت و دانش‌آموزان با رضایت و خشنودی که چهار روش محاسبه محیط دایره را درک کرده بودند، به تشویق آقای معلم پرداختند.

معلم در همین حین فعالیت زیر را روی تابلو نوشت و زنگ مدرسه به صدا درآمد. دانش‌آموزان آزادانه و با صدای بلند و شور و شوق راهی حیاط مدرسه شدند.

فعالیت

در روش کاشانی اگر فرض کنیم مساحت دایره $S = \pi R^2$ باشد، آنگاه محیط دایره را محاسبه کنید.

راهنمایی

جمع مساحت همه مثلث‌ها به مساحت دایره می‌رسد.



۱۷

شماره ۱۳۳ | بهار ۱۴۰۴

یافتن معیار و مساحت شکل هندسی هلال

علیرضاحقی آقکند

کارشناس مهندسی شیمی از دانشگاه قم

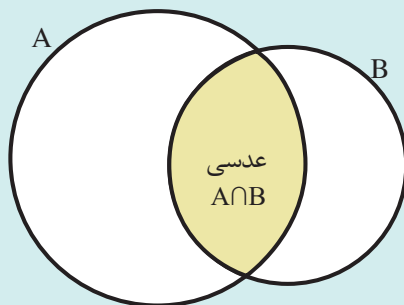
مقدمه

امروزه شکل «هلال»^۱ یکی از نمادهای اسلام به شمار می‌رود و در پرچم شمار زیادی از کشورهای اسلامی نظیر الجزایر، مالزی، پاکستان، تونس، ترکیه و حتی به نحوی ایران نقش بسته است. افزون بر این در علائم سازمان‌های بین‌المللی و ویژه مسلمانان، مانند هلال احمر، می‌توان آن را دید [۱]. شکل هلال تا پیش از اینکه به عنوان یک نماد اسلامی معرفی شود، در نگاره‌ها و پرچم‌های دولت‌های ترک مشاهده شده و احتمالاً برای مقابله با نماد صلیب در جنگ‌های صلیبی شکل گرفته است [۲]. در قرآن کریم نیز به شکل هلال اشاره شده است: «از تو درباره هلال ماه می‌پرسند. بگو که آن، برای بیان اوقات مردم و (تعیین وقت) حج است» (آیه ۱۸۹، سوره بقره) [۳]. شکل هلال با ماه مبارک رمضان نیز مرتبط است و احتمال دارد که عالمان مسلمان، نشان هلال را با تأکید روایات بر رؤیت هلال در آغاز و پایان روزه برگرفته باشند [۴].

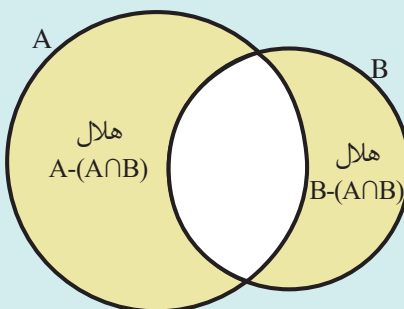
کلیدواژه‌ها: رسم هلال، عدسی، هلال بقراط، مساحت هلال، محیط هلال.

تعریف هندسی هلال

هلال عبارت است از سطح‌های محصور بین دو کمان از دو دایره متقاطع که بین دو دایره مشترک نباشد [۵]. به عبارت دیگر، از برخورد هر دو دایره دلخواه، یک سطح مشترک و دو سطح غیرمشترک به وجود می‌آید که سطح مشترک را «عدسی» و سطوح غیرمشترک را «هلال» می‌نامند. برای مثال، اگر دایره اول را با نماد A و دایره دوم را با نماد B نشان دهیم، هلال و عدسی را در شکل ۱ مشاهده خواهید کرد.



سطح مشترک بین دو دایره متقاطع را عدسی می‌نامند.



هر یک از سطوح غیرمشترک دو دایره متقاطع را هلال می‌نامند.

شکل ۱

نحوه رسم شکل هلال

برای رسم شکل هندسی هلال کافی است دو دایره رسم کنیم که یکدیگر را قطع کنند. اما روش دیگری هم برای رسم هلال با استفاده از دو نیم‌دایره وجود دارد که اصطلاحاً شکل



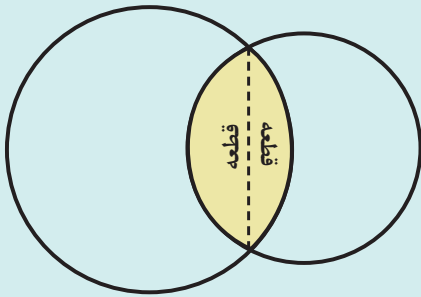
۱۸

شماره ۳۳ | بهار ۱۴۰۰

محاسبه مساحت هلال مستدیر

پیش از شروع یافتن مساحت هلال، مساحت عدسی را محاسبه می‌کنیم تا با کم کردن مساحت دایره‌ها از آن، به مساحت هلال دست یابیم.

مطابق شکل ۴، هر عدسی از دو قطعه دایره^۲ تشکیل شده است. قطعه دایره به بخشی از یک دایره می‌گویند که توسط یک وتر از آن جدا شده است. البته باید توجه داشت که رسم یک وتر از دایره، آن را به دو قسمت تقسیم می‌کند. قطعه دایره آن قسمتی است که شامل مرکز دایره نباشد (یعنی قسمت کوچک‌تر).



شکل ۴

اگر دو رأس قطعه دایره را به مرکز دایره وصل کنیم، قطاع^۳ به دست می‌آید. از هندسه^۴ مقدماتی می‌دانیم که مساحت قطاع دایره برابر است با:

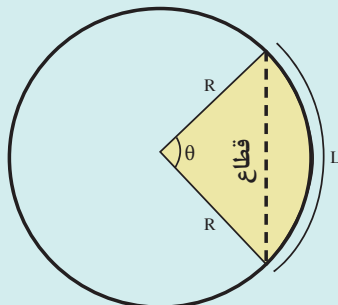
$$A_{\text{قطاع}} = \frac{RL}{2}$$

که در آن، R شعاع دایره و L طول کمان قطاع است. طول کمان قطاع نیز از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$L = R \times \theta$$

که θ زاویه قطاع بر حسب رادیان است. بنابراین مساحت قطاع بر حسب شعاع و زاویه قطاع برابر است با:

$$A_{\text{قطاع}} = \frac{R^2 \theta}{2}$$

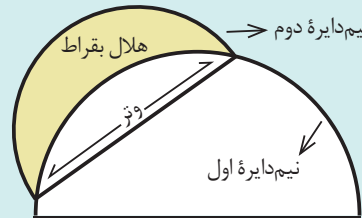


شکل ۵

حاصل را «هلال بقراط» می‌نامند [۶]. در شکل ۲ هر دو روش ترسیم هلال در کنار یکدیگر نشان داده شده‌اند.

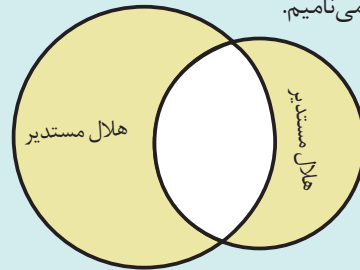
روش بقراط: رسم یک نیم دایره، رسم یکی از وترهای

آن نیم دایره و سپس رسم نیم دایره بعدی به نحوی که وتر نیم دایره قبلی، قطر نیم دایره جدید باشد.



روش کلی: رسم دو دایره به نحوی که یکدیگر را در دو

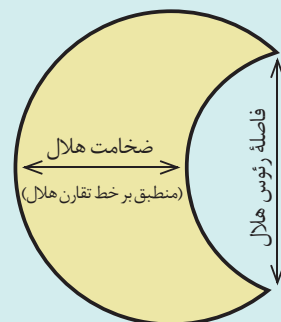
نقطه قطع کنند. در اینجا این نوع هلال را، هلال مستدیر (دایره‌ای) می‌نامیم.



شکل ۲

لازم به ذکر است که رسم هلال به روش کلی به دلایل زیر بر روش بقراط ارجحیت دارد (شکل ۳):

۱. ضخامت هلال (پاره خط منطبق بر خط تقارن هلال) هیچ‌گاه بیشتر از شعاع نیم دایره مولد خود نخواهد شد.
 ۲. فاصله دو انتها (رئوس) هلال، ثابت و برابر با قطر نیم دایره مولد خود خواهد بود.
- بنابراین، ترسیم هلال با استفاده از دو دایره کامل، حالت کلی تری است.



شکل ۳

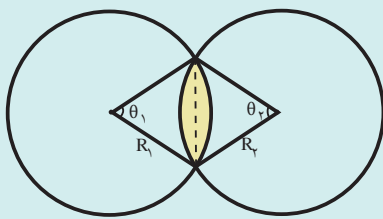


با دانستن مساحت قطعه می‌توانیم ابتدا مساحت عدسی و سپس مساحت هلال‌ها را محاسبه کنیم.

مساحت عدسی برابر است با مجموع مساحت دو قطعه:

$$A_{\text{عدسی}} = A_{\text{قطعه سمت چپ}} + A_{\text{قطعه سمت راست}}$$

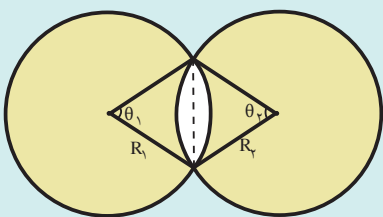
$$A_{\text{عدسی}} = \frac{R_1^2}{2}(\theta_1 - \sin \theta_1) + \frac{R_2^2}{2}(\theta_2 - \sin \theta_2)$$



شکل ۸

بنابراین مساحت هلال‌ها برابر است با:

$$\begin{cases} A_{\text{هلال سمت چپ}} = A_{\text{دایره سمت چپ}} - A_{\text{عدسی}} \\ A_{\text{هلال سمت راست}} = A_{\text{دایره سمت راست}} - A_{\text{عدسی}} \end{cases}$$



شکل ۹

$$\begin{cases} A_{\text{هلال سمت چپ}} = \pi R_1^2 - \frac{R_1^2}{2}(\theta_1 - \sin \theta_1) - \frac{R_2^2}{2}(\theta_2 - \sin \theta_2) \\ A_{\text{هلال سمت راست}} = \pi R_2^2 - \frac{R_1^2}{2}(\theta_1 - \sin \theta_1) - \frac{R_2^2}{2}(\theta_2 - \sin \theta_2) \end{cases}$$

مقدارهای R_1 و R_2 معلوم و قابل اندازه‌گیری هستند. برای یافتن مقدارهای θ_1 و θ_2 دو روش وجود دارد:

با کمی دقت در می‌یابیم که قطاع دایره از یک مثلث و یک قطعه تشکیل شده است. مساحت مثلث برابر است با:

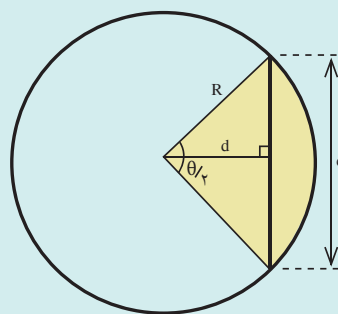
$$A_{\text{مثلث}} = \frac{1}{2}hc$$

از تعریف سینوس و کسینوس رابطه‌های زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{c}{2R} \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{d}{R} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 2R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ d = R \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{cases}$$

در نتیجه مساحت مثلث عبارت است از:

$$A_{\text{مثلث}} = \frac{R^2 \sin \theta}{2}$$



شکل ۶

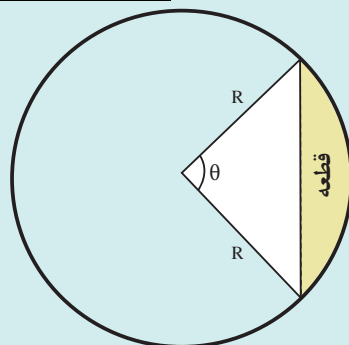
مساحت قطعه دایره از تفاضل مساحت قطاع و مساحت مثلث به‌دست می‌آید:

$$A_{\text{قطاع}} = A_{\text{مثلث}} + A_{\text{قطعه}}$$

$$\rightarrow A_{\text{قطعه}} = A_{\text{قطاع}} - A_{\text{مثلث}}$$

$$A_{\text{قطعه}} = \frac{R^2 \theta}{2} - \frac{R^2 \sin \theta}{2}$$

$$A_{\text{قطعه}} = \frac{R^2}{2}(\theta - \sin \theta)$$



شکل ۷



۲۵

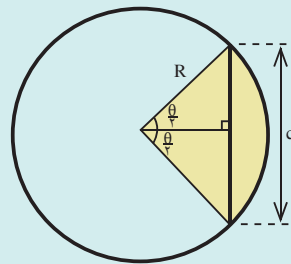
شماره ۱۳۳ | بهار ۱۴۰۴

روش اول) با محاسبه مقدار c (فاصله رأس‌های هلال‌ها):

در مبحث قطاع اشاره کردیم که طبق تعریف سینوس:

$$c = 2R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

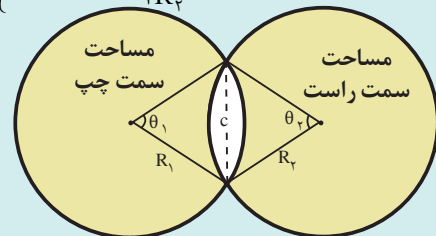
در نتیجه اندازه زاویه داخلی قطاع از این رابطه به دست می‌آید:

$$\theta = 2 \sin^{-1}\left(\frac{c}{2R}\right)$$


شکل ۱۱

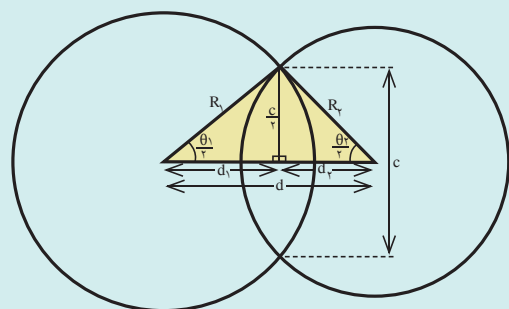
بنابراین می‌توانیم از رابطه‌های زیر مقدار زاویه‌ها را (بر حسب رادیان) محاسبه کنیم:

$$\begin{cases} \theta_1 = 2 \sin^{-1}\left(\frac{c}{2R_1}\right) \\ \theta_2 = 2 \sin^{-1}\left(\frac{c}{2R_2}\right) \end{cases}$$



برای محاسبه مقدار c مانند ادامه زیر عمل می‌کنیم:

شکل ۱۲



شکل ۱۳

از آنجا که مثلث‌های نشان داده شده قائم‌الزاویه هستند، می‌توان مقدار c را از قضیه فیثاغورس به دست آورد:

$$\begin{cases} R_1^2 = d_1^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 \\ R_2^2 = d_2^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 2\sqrt{R_1^2 - d_1^2} \\ c = 2\sqrt{R_2^2 - d_2^2} \end{cases}$$

مقادیر d_1 و d_2 را نیز می‌توان با نوشتن قانون کسینوس‌ها برای مثلث بزرگ به دست آورد:

$$\begin{cases} R_1^2 = R_2^2 + d^2 - 2R_2d \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \\ R_2^2 = R_1^2 + d^2 - 2R_1d \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} d_2 = R_2 \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) = \frac{R_2^2 + d^2 - R_1^2}{2d} \\ d_1 = R_1 \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) = \frac{R_1^2 + d^2 - R_2^2}{2d} \end{cases}$$

از تقسیم d_1 بر d_2 خواهیم داشت:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{R_1^2 + d^2 - R_2^2}{R_2^2 + d^2 - R_1^2} \quad (1)$$

d فاصله بین مرکزهای دایره‌ها و معیاری برای نشان دادن میزان فرورفتگی دو دایره در یکدیگر است. مقدار d به راحتی از فرمول فاصله دو نقطه ثابت در یک صفحه قابل محاسبه است. از طرف دیگر مطابق شکل ۱۳ داریم:

$$d = d_1 + d_2 \quad (2)$$

بنابراین از رابطه‌های (۱) و (۲) می‌توانیم مقادیر d_1 و d_2 را به دست آورد و سپس مقدار c را محاسبه کرد.

روش دوم) بدون محاسبه مقدار c :

در این روش می‌توانیم مقادیر θ_1 و θ_2 را مستقیماً از قانون کسینوس‌ها (که در روش اول بیان شد) به دست آوریم:

$$\begin{cases} R_1^2 = R_2^2 + d^2 - 2R_2d \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \\ R_2^2 = R_1^2 + d^2 - 2R_1d \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \theta_2 = \cos^{-1}\left(\frac{R_2^2 + d^2 - R_1^2}{2R_2d}\right) \\ \theta_1 = \cos^{-1}\left(\frac{R_1^2 + d^2 - R_2^2}{2R_1d}\right) \end{cases}$$

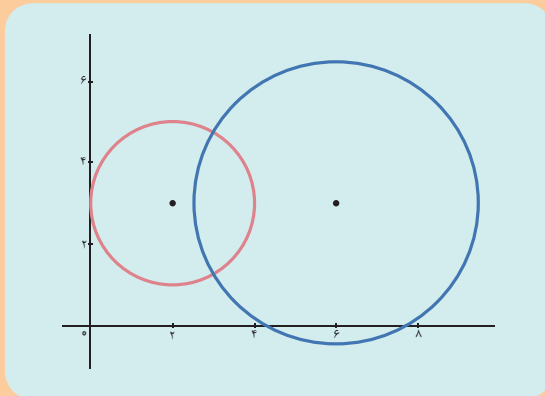
سپس با جای‌گذاری مقادیر این دو زاویه در فرمول صفحه بعد، می‌توانیم مساحت هلال‌ها را به دست آوریم.



حل یک مثال ساده

معادله دو دایره متقاطع در دستگاه مختصات دکارتی داده شده است. مساحت و محیط هلال‌ها را بیابید.

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4 & \text{دایره سمت چپ} \\ (x-6)^2 + (y-3)^2 = 12 & \text{دایره سمت راست} \end{cases}$$



شکل ۱۶

محاسبه مساحت

الف) روش اول: ابتدا با استفاده از معادلات داده شده، فاصله مرکزهای دو دایره (d) را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4 \\ (x-6)^2 + (y-3)^2 = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2, y_1 = 2, R_1 = \sqrt{4} = 2 \\ x_2 = 6, y_2 = 3, R_2 = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(6-2)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{17} = 4$$

سپس مقدارهای d_1 و d_2 را از رابطه‌های ذکر شده در بالا به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \frac{d_1}{d_2} &= \frac{R_1^2 + d^2 - R_2^2}{R_2^2 + d^2 - R_1^2} = \frac{4 + 17 - 12}{12 + 17 - 4} = \frac{1}{3} \rightarrow d_2 = 3d_1 \\ d &= d_1 + d_2 \rightarrow d_1 + d_2 = 4 \rightarrow d_1 + 3d_1 = 4d_1 = 4 \\ &\rightarrow \begin{cases} d_1 = 1 \\ d_2 = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

با داشتن مقدارهای d_1 و d_2 مقدار c به راحتی قابل محاسبه است:

$$\begin{cases} c = 2\sqrt{R_1^2 - d_1^2} = 2\sqrt{4-1} = 2\sqrt{3} \\ c = 2\sqrt{R_2^2 - d_2^2} = 2\sqrt{12-9} = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

با استفاده از مقدار c می‌توان اندازه زاویه‌ها را به دست آورد:

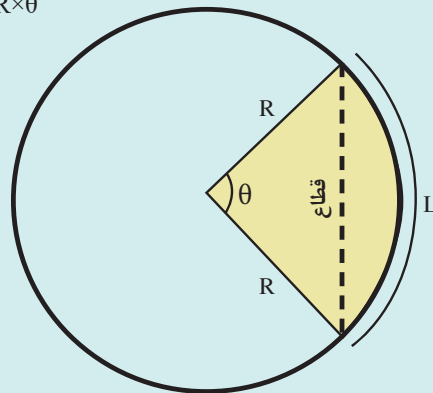
$$\begin{cases} A_{\text{هلال سمت چپ}} = \pi R_1^2 - \frac{R_1^2}{2}(\theta_1 - \sin \theta_1) - \frac{R_2^2}{2}(\theta_2 - \sin \theta_2) \\ A_{\text{هلال سمت راست}} = \pi R_2^2 - \frac{R_1^2}{2}(\theta_1 - \sin \theta_1) - \frac{R_2^2}{2}(\theta_2 - \sin \theta_2) \end{cases}$$

محاسبه محیط هلال مستدیر

برای به دست آوردن محیط هلال نیز ابتدا به دانستن محیط عدسی نیاز داریم. با کمی دقت در می‌یابیم که هر عدسی از برخورد دو کمان ساخته شده است. محیط یک عدسی برابر است با مجموع طول کمان‌های سازنده آن عدسی.

از هندسه مقدماتی به یاد داریم که طول یک کمان که توسط قطاعی به شعاع R و زاویه θ از دایره جدا شده است، از رابطه زیر به دست می‌آید:

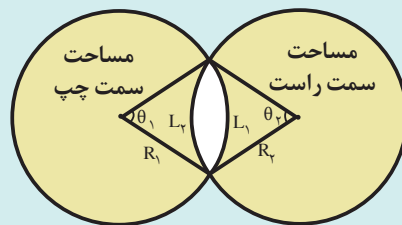
$$L = R \times \theta$$



شکل ۱۴

بنابراین طول کمان‌های سازنده عدسی بین دو هلال عبارت است از:

$$\begin{cases} L_1 = R_1 \theta_1 \\ L_2 = R_2 \theta_2 \end{cases}$$



شکل ۱۵

در نتیجه محیط هلال‌ها برابر است با:

$$\begin{cases} A_{\text{هلال سمت چپ}} = A_{\text{دایره سمت چپ}} - L_1 + L_2 = \pi R_1^2 - R_1 \theta_1 + R_2 \theta_2 \\ A_{\text{هلال سمت راست}} = A_{\text{دایره سمت راست}} - L_2 + L_1 = \pi R_2^2 - R_2 \theta_2 + R_1 \theta_1 \end{cases}$$



۲۲

شماره ۱۳۱ | بهار ۱۴۰۵

همان‌طور که ملاحظه شد روش دوم کوتاه‌تر است، اما مقادیرهای c_1 , d_1 و d_2 را به‌دست نمی‌دهد.

محاسبه محیط

پس از محاسبه مقادیرهای θ_1 و θ_2 به یکی از دو روش فوق، با استفاده از این رابطه‌ها محیط هلال‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} P_1 = 2\pi R_1 - R_1\theta_1 + R_2\theta_2 = 4\pi - \frac{4\pi}{3} + \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} \\ \quad = \frac{8+2\sqrt{3}}{3}\pi \approx 12 \\ P_2 = 2\pi R_2 - R_2\theta_2 + R_1\theta_1 = 4\sqrt{3}\pi - \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} \\ \quad = \frac{4+10\sqrt{3}}{3}\pi \approx 22/3 \end{cases}$$

نتیجه‌گیری

به‌کارگیری نمادهای ایرانی - اسلامی در معماری و هنر کشور عزیزمان، بناها و آثار هنری را زیباتر می‌کند. لازمه این مهم، تحقیق روی این نمادها و استخراج رابطه‌های ریاضی نهفته در آن‌هاست. امیدواریم که با نگارش چنین آثاری، شاهد گسترش استفاده از این نمادهای هنری باشیم.

پی‌نوشت‌ها

1. Lune
2. Circular Segment
3. Circular Sector

منابع

1. <https://www.porseman.com/article.18794/> ماه_هلال_ماه
2. [https://fa.wikipedia.org/wiki/هلال_\(نشانه\)](https://fa.wikipedia.org/wiki/هلال_(نشانه))
3. https://wiki.ahlolbait.com/آیه_189_سوره_بقره
4. <https://www.mehnews.com/news/3025599/> راز_نشان_هلال_در_کشورهای_اسلامی
5. [https://fa.wikipedia.org/wiki/هلال_\(ریاضیات\)](https://fa.wikipedia.org/wiki/هلال_(ریاضیات))
6. https://fa.wikipedia.org/wiki/هلال_بِقِراط
7. <https://www.desmos.com/calculator> (جهت رسم تصاویر)

$$\begin{cases} \theta_1 = 2 \sin^{-1} \left(\frac{c}{2R_1} \right) = 2 \sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad} = 120^\circ \\ \theta_2 = 2 \sin^{-1} \left(\frac{c}{2R_2} \right) = 2 \sin^{-1} \left(\frac{1}{2} \right) = 2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \text{ rad} = 60^\circ \end{cases}$$

اکنون می‌توانیم مساحت هلال‌ها را محاسبه کنیم:

$$\begin{cases} A_1 = \pi R_1^2 - \frac{R_1^2}{2} (\theta_1 - \sin \theta_1) - \frac{R_2^2}{2} (\theta_2 - \sin \theta_2) \\ \quad = 4\pi - 2 \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - 6 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ A_2 = \pi R_2^2 - \frac{R_2^2}{2} (\theta_1 - \sin \theta_1) - \frac{R_1^2}{2} (\theta_2 - \sin \theta_2) \\ \quad = 12\pi - 2 \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - 6 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} A_1 = \frac{2\pi}{3} + 4\sqrt{3} \approx 9 \\ A_2 = \frac{26\pi}{3} + 4\sqrt{3} \approx 34/2 \end{cases}$$

ب) روش دوم: ابتدا مثلث روش اول، فاصله مرکزهای دو دایره (d) را حساب می‌کنیم:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(6-2)^2} = 4$$

سپس مقادیرهای θ_1 و θ_2 را از قانون کسینوس‌ها به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \theta_2 = 2 \cos^{-1} \left(\frac{R_2^2 + d^2 - R_1^2}{2R_2 d} \right) = 2 \cos^{-1} \left(\frac{1}{2} \right) \\ \quad = 2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad} = 120^\circ \\ \theta_1 = 2 \cos^{-1} \left(\frac{R_1^2 + d^2 - R_2^2}{2R_1 d} \right) = 2 \cos^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ \quad = 2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \text{ rad} = 60^\circ \end{cases}$$

اکنون مساحت هلال‌ها قابل محاسبه است:

$$\begin{cases} A_1 = \pi R_1^2 - \frac{R_1^2}{2} (\theta_1 - \sin \theta_1) - \frac{R_2^2}{2} (\theta_2 - \sin \theta_2) \\ \quad = \frac{2\pi}{3} + 4\sqrt{3} \approx 9 \\ A_2 = \pi R_2^2 - \frac{R_2^2}{2} (\theta_1 - \sin \theta_1) - \frac{R_1^2}{2} (\theta_2 - \sin \theta_2) \\ \quad = \frac{26\pi}{3} + 4\sqrt{3} \approx 34/2 \end{cases}$$



۲۳

شماره ۳۳ | بهار ۱۴۰۱



ریاضی با جناب سعدی

مجید حکمت

«امید» که علاقه‌مند به ریاضیات است و از طرفی به ادبیات بی تفاوت است در حال مطالعه «منطق ریاضیات» بود؛ درباره تعریف «عملگر فصلی گزاره‌ها» این سؤال برایش مطرح شد که: «چرا درباره «یای منطقی»، اگر هر دو گزاره نیز درست باشند، باز هم آن ترکیب فصلی دارای ارزش درست است؟» به ناگاه جناب سعدی از کتاب ادبیات بیرون می‌آیند و با استفاده از ادبیات برایش موضوع را روشن می‌کنند. حالا ادامه این گفت‌وگورا می‌بینید...

و اما آنچه ابتدا در ذهن داشتی «یای غیرمشمول» است که به آن «یای مانع الجمع» و «یای انحصاری» هم می‌گویند و معمولاً وقتی به کار می‌رود که درستی هم‌زمان دو عبارت، غیرعقلانه یا غیرممکن باشد؛ مثل آنجا که گفتیم:

یا آن حکایت زیبا که
ضرب المثل شد!

یا چهره پویشان

یا بوزان

بر روی خواست، سندی!

یا مکن پاسبان دوستی

یا بیاکن خاژی در خور دلی

و برای اینکه حمل بر خودستایی نباشد،
بدان که جناب حافظ بزرگوار نیز می‌فرمایند:

دست از طلب ندارم تا کام من برآید

یا تن ریدر جانان (یا جان ز تن درآید

اکنون تو بگو فرزند!



مجموعه آموزش ریاضی به روش گفت و گو

قسمت سوم:

میانگین حسابی و هندسی ریشه های معادله درجه دوم

خسرو داودی
آرش رستگار

می کنیم. به علاوه rt هم باید مثبت باشد، و گرنه $\sqrt{rt}$ قابل تعریف نیست.

اما رابطه $S^2 \geq 4P$ همیشه برقرار است، زیرا $(r+t)^2 \geq 4rt$ معادل است با $(r-t)^2 \geq 0$ که نیازی به مثبت بودن r و t ندارد. از طرف دیگر، اگر معادله درجه دوم ما اصلاً ریشه نداشته باشد، $S = \frac{-b}{a}$ ، $P = \frac{c}{a}$ قابل تعریف هستند. اما رابطه $S^2 \geq 4P$ همیشه برقرار نیست، چون این رابطه معادل است با: $\left(\frac{-b}{a}\right)^2 \geq 4\frac{c}{a}$ و $b^2 - 4ac \geq 0$ همان شرط وجود ریشه هاست!

شما وظیفه دارید این محاسبه ها را برای یک معادله درجه سوم انجام دهید.

ماه دخت و هور دخت هر دو دانش آموزانی کل نگر و هر دو در محاسبه های جبری خوب هستند. اما **ماه دخت** کل مورد نظرش ریاضیاتی است که به نظرش به مسئله مربوط می رسد، اما **هور دخت** بسیار وسیع تر نگاه می کند و همه ریاضیاتی را که می داند سعی می کند با مسئله مربوط کند.

ماه دخت شروع به محاسبه کرد:

- اگر r و t ریشه های معادله درجه دوم باشند، داریم:
 $ax^2 + bx + c = a(x-r)(x-t)$ از همین جا هم می توان دید که مجموع ریشه ها برابر $\frac{-b}{a}$ و حاصل ضرب ریشه ها برابر $\frac{c}{a}$ است. چون در سمت راست معادله بالا ضریب x برابر $-a(r+t)$ و ضریب ثابت برابر art است، پس: $-a(r+t) = b$ و $art = c$

همین کار را می توان برای معادله درجه سوم کرد. اگر

خانم ریاضی یک معلم ریاضی بسیار جدی بود. با کسی شوخی نداشت و بسیار هم سخت گیر بود. وارد کلاس شد و روی تخته کلاس فرمول ریشه های معادله درجه دوم را نوشت: اگر $ax^2 + bx + c = 0$ ، آنگاه:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

گفت: از اینجا می توان دید، مجموع ریشه ها $S = \frac{-b}{a}$

و حاصل ضرب ریشه ها $P = \frac{c}{a}$ است. S حرف اول کلمه

sum به معنی مجموع و P حرف اول کلمه product به معنی حاصل ضرب است. حتی اگر معادله درجه دوم ما ریشه حقیقی نداشته باشد، S و P قابل تعریف هستند. از طرف دیگر، اگر ریشه ها را r و t بنامیم، میانگین حسابی ریشه ها برابر $\frac{S}{2}$ و میانگین هندسی ریشه ها برابر $\sqrt{P}$ خواهد بود. اما می دانیم میانگین حسابی و میانگین هندسی دو عدد در یک نامساوی صدق می کند:

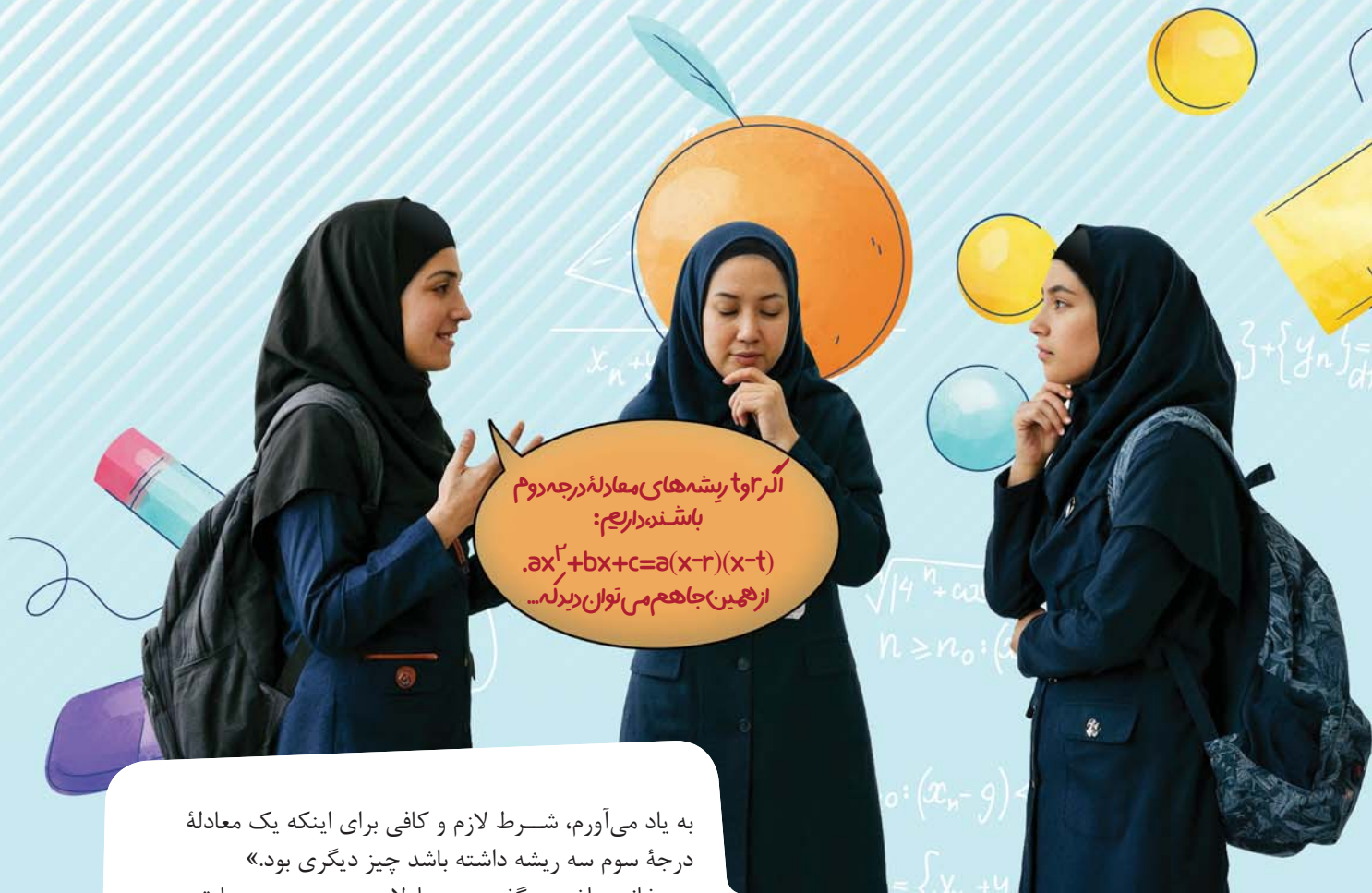
$$\frac{r+t}{2} \geq \sqrt{P} \quad \text{بنابراین: } S^2 \geq 4P$$

البته اینجا مشکلاتی داریم. مثلاً در نامساوی میانگین های حسابی - هندسی r و t باید عددهای مثبت باشند، چون برای اثبات آن از $(\sqrt{r} + \sqrt{t})^2 \geq 0$ استفاده



۲۶

شماره سوم | بهار ۱۴۰۵



الزوت ریشه‌های معادله درجه سوم
باشند داریم:
 $ax^3+bx+c=a(x-r)(x-t)$
از همین جا هم می‌توان دید...

به یاد می‌آورم، شرط لازم و کافی برای اینکه یک معادله درجه سوم سه ریشه داشته باشد چیز دیگری بود.
خانم ریاضی گفت: در معادلات درجه سوم عبارتی مانند b^2-4ac وجود دارد، که آن را مبین معادله درجه سوم می‌نامند.^۱

البته برای چندجمله‌ای از درجه دلخواه هم می‌توان مبین را تعریف کرد. اما برای معادلات درجه سوم فرمول ساده‌ای برای مبین برحسب ضرایب A, B, C, D وجود دارد.

$$D_{isc} = B^3C^2 - 4AC^3 - 4B^2D - 27A^2D^2 + 18ABCD$$

در حالت ساده‌تر که با یک تغییر متغیر خطی معادله چندجمله‌ای درجه سوم به شکل

$$x^3+px+q$$

درآمده باشد

$$D_{isc} = -4p^3 - 27q^2$$

می‌توان ثابت کرد که شرط لازم و کافی برای اینکه سه ریشه داشته باشیم مثبت بودن D_{isc} است. یعنی

$$D_{isc} > 0$$

خانم ریاضی ادامه داد: من هم رابطه‌ای بین $D > 0$ و $B^3 \leq 27A^2D$ نمی‌بینم. اما در حالت x^3+px+q داریم $B=0$ و معادله $B^3 \leq 27A^2D$ معادل می‌شود با $D \geq 0$ که در حالت x^3+px+q می‌شود $q \geq 0$. به نظر این ربطی به

u, v, w ریشه‌های معادله درجه سوم باشند که هر سه عددهایی حقیقی هستند، (به شرط وجود سه ریشه) داریم:
 $Ax^3+Bx^2+Cx+D=A(x-u)(x-v)(x-w)$
ضریب x^2 در سمت راست معادله برابر $-A(u+v+w)$ و ضریب ثابت برابر $-Auvw$ است. بنابراین از مقایسه دو طرف معادله داریم:

$$D = -Auvw \text{ و } B = -A(u+v+w)$$

اگر مجموع ریشه‌ها را دوباره S و حاصل ضرب ریشه‌ها را دوباره P بنامیم، خواهیم داشت:

$$S = \frac{-B}{A}, P = \frac{-D}{A}$$

هوردخت ادامه داد: «حالا من می‌توانم ارتباطات را ببینم. نامساوی میانگین حسابی هندسی برابر u, v, w مثبت از این قرار است:

$$\frac{u+v+w}{3} \geq \sqrt[3]{uvw}$$

پس خواهیم داشت: $\frac{S}{3} \geq \sqrt[3]{P}$ یا $S^3 \geq 27P$ و با استفاده از ضرایب معادله داریم: $\left(\frac{-B}{A}\right)^3 \geq 27\left(\frac{-D}{A}\right)$ که ساده می‌شوند به $B^3 \leq 27A^2D$ ، اما این نامساوی برای من آشنا نیست. آن‌طور که



۲۷

شماره ۱۳۳۱ | بهار ۱۴۰۴

ضریب Q^2 برابر S^2 - و ضریب Q برابر SP -
 ر ضریب ثابت $5P^2$ است.
 مایب معادله درجه سوم هرگز نمی تواند
 همیشه منفی باشد...



$$D_{isc} = -4p^2 - 27q^2 \geq 0 \quad \text{در حالت}$$

$$x^3 + px + q$$

مجموع ریشه‌ها به ضریب x^2 برمی‌گردد که صفر است و اصلاً نمی‌تواند این اتفاق بیفتد که هر سه ریشه مثبت باشد. چون مجموع سه ریشه مثبت نمی‌تواند صفر باشد. پس برگردیم به حالت

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

فرض کنید بدانیم $B^2 \leq 27A^2D$ و ببینیم در مورد D_{isc} چه می‌توانیم بگوییم.

$$D_{isc} = B^3C^2 - 4AC^3 - 4B^2D - 27A^2D^2 + 18ABCD$$

می‌دانیم که سه ریشه داریم پس $D_{isc} \geq 0$ یعنی

$$B^3C^2 + 18ABCD \geq 4AC^3 + 4B^2D + 27A^2D^2 \geq 4AC^3 + 135A^2D^2$$

نامساوی دوم از

$$B^3 \leq 27A^2D$$

به‌دست می‌آید. چون می‌دانیم در حالت سه ریشه

پیدا نمی‌کند.

ماه‌دخت گفت: من فکری به نظرم می‌رسد. اگر قرار دهیم:

$$x^3 + px + q = (x - u)(x - v)(x - w)$$

خواهیم داشت

$$p = ur + uw + vw$$

$$q = -uvw$$

رابطه $q \geq 0$ یعنی $-uvw \geq 0$ پس حداقل یکی از ریشه‌ها منفی خواهد بود. چون اگر $u, v, w > 0$ آنگاه $uvw > 0$ پس ما در شرایطی نخواهیم بود که از نامساوی میانگین حسابی - میانگین هندسی استفاده کنیم!

پس در حالت $x^3 + px + q$ برای اینکه سه ریشه هیچ‌کدام منفی نباشد حتماً باید $q < 0$ که البته این هم کافی نیست و تضمین نمی‌کند که سه ریشه مثبت هستند.

هوردخت جواب داد: ماه‌دخت جان اینکه روشن است.



۲۸

شماره ۱۳۳۱ | بهار ۱۴۰۰

$$S^2Q^2 + 18SQP \geq 4Q^2 + 135P^2$$

و عجب نامساوی‌ای پیدا کردم!

هوردخت گفت: چند نکته توجهم را جلب می‌کند. یکی اینکه همه جملات نامساوی برحسب ریشه‌ها از درجه سه است. دیگر اینکه من اینجا یک چندجمله‌ای درجه سه برحسب Q می‌بینم.

$$4Q^3 - S^2Q^2 - SPQ + 135P^2 \leq 0$$

ضریب Q^2 برابر S^2 - و ضریب Q برابر SP - و ضریب ثابت $135P^2$ است. اما یک معادله درجه سوم هرگز نمی‌تواند همیشه منفی باشد. این به ما می‌گوید اگر S و P داده شده باشند، Q هر عددی نمی‌تواند باشد و در یک نامساوی برحسب S و P صدق می‌کند.

که البته یک نامساوی هم در بالا پیدا کردید.



مثبت $P = \frac{-D}{A} > 0$ پس اگر از اول A را مثبت می‌گرفتیم داشتیم $D < 0$.

خلاصه اینکه در حالت سه ریشه مثبت داریم.

$$B^2C^2 + 18ADBC \geq 4AC^3 + 135A^2D^2$$

ماه‌دخت گفت: من می‌توانم این عبارت را ساده‌تر کنم. اگر $11A^2D^2$ به دوطرف اضافه کنیم. نامساوی بالا معادل خواهد شد با

$$(BC + 9AD)^2 \geq 4AC^3 + 216A^2D^2$$

با تقسیم دو طرف بر A^2D^2 خواهیم داشت.

$$\left(\frac{BC}{AD} + 9\right)^2 \geq \frac{4C^3}{AD^2} + 216$$

به جای B, C, D می‌گذارم.

$$B = -AS$$

$$C = AQ$$

$$D = -AP$$

که در آن $Q = uv + vw + uw$ خواهیم داشت.

$$\left(\frac{SQ}{P} + 9\right)^2 \geq \frac{4Q^3}{P^2} + 216$$

با ضرب کردن دو طرف در P^2 خواهیم داشت:

$$(SQ + 9P)^2 \geq 4Q^3 + 216P^2$$

پس از ساده کردن خواهیم داشت:

پی‌نوشت

۱. مبین یک چندجمله‌ای برحسب ریشه‌هاست. در واقع مبین کوچک‌ترین چندجمله‌ای دیگری است که صفر شدن آن معادل ریشه مکرر داشتن چندجمله‌ای اولیه است. یعنی اگر $P(x)$ یک چندجمله‌ای داده شده باشد، مبین $P(x)$ باید فقط و فقط وقتی صفر شود که $P(x)$ بر یک $(x-c)^2$ یا یک چندجمله‌ای درجه دوم به توان دو بخش پذیر باشد.

برای مثال، اگر $P(x)$ از درجه دوم باشد، مبین را می‌توان چنین محاسبه کرد. اگر $P(x) = ax^2 + bx + c = a(x-r)(x-s)$

آنگاه

$$Q(x) = (r-s)^2 = r^2 + s^2 - 2rs = (r+s)^2 - 4rs \\ = \left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 4\left(\frac{c}{a}\right)$$

می‌تواند نقش مبین را ایفا کند. اما برای سادگی مبین را در توان دوم a ضرب می‌کنیم.

$$a^2Q(x) = b^2 - 4ac$$

می‌بینیم که همان عبارت آشنا، یعنی $b^2 - 4ac$ ، به دست می‌آید. در حالت درجه سوم

$$P(x) = a(x-r)(x-s)(x-t)$$

مبین باید ضریبی از $Q(x) = (r-s)^2(s-t)^2(r-t)^2$ باشد.



۲۹

شماره ۳۳۳ | بهار ۱۴۰۴

حساب انگشتی

جعفرزیدی

کارشناس ارشد تاریخ علم و
دبیر ریاضی

مقدمه

هدف از بیان حساب انگشتی به سبک نگارشی که در این نوشتار آمده، آموزش سریع و قابل فهم این نوع حساب است. زیرا اکثر منابع مکتوب در این موضوع داستان‌وار و به اصطلاح روزنامه‌وار به موضوع پرداخته‌اند و در پایان خواننده توان استفاده از روش حساب انگشتی یا حساب عقود و انامل را به سختی ممکن است دریابد. لذا در اینجا با هدف آموزش عملی و خودآموزتر، از قالب شهود و ترتیب اعداد در آموزش استفاده شده است.

در ادامه موضوع حساب انگشتی در مجله برهان ریاضی شماره ۱۳۰ از قطب‌الدین لاهیجی، با توجه به علاقه‌مندی دانش‌آموزان به معرفی این نوع حساب، بر آن شدیم که قاعده حساب انگشتی را از کتاب حساب انگشتی ملامهدی نراقی به صورتی که دانش‌آموزان بتوانند درک بهتری از آن داشته باشند، بیاوریم تا خواننده در پایان این نوشتار به قاعده این حساب پی ببرد.

تاریخچه

آقارضی قزوینی عقیده دارد حساب انگشتی یا حساب عقود و انامل از قبطیان سرچشمه گرفته است. **شیخ آقابرگ تهرانی**، به استناد احادیث و روایات، بر این باور است که این حساب به زبان و قوم خاصی اختصاص نداشته است و همه آن را به کار می‌برده‌اند. اسناد تاریخی نیز این دیدگاه را تأیید می‌کنند. ایشان در کتاب «الذریعة إلی تصانیف الشیعة»، حساب انگشتی را شاخه‌ای از حساب جمل می‌داند که همان شمارش با حروف ایجاد است. در لغت‌نامه دهخدا گونه‌های متفاوتی برای حساب انگشتی روایت شده است. حساب انگشتی نزد اروپاییان عکس شیوه مرسوم در میان شرقیان بوده است. یعنی آن‌ها از دست راست برای صدگان و هزارگان استفاده می‌کردند و شرقی‌ها از دست چپ به این منظور کمک می‌گرفتند.

حساب انگشتی

نام انگشتان دست که در مقابل صورت قرار دارد؛ مانند قنوت در نماز.

۱. انگشت شصت یا ابهام
۲. انگشت اشاره یا سبابه یا مسبّحه یا شهادت
۳. انگشت میانی یا وسط یا میانه
۴. انگشت بنصر یا انگشتر یا حلقه
۵. انگشت خنصر یا انگشت کوچک یا کهین



۳۰

شماره ۱۳۳ | بهار ۱۴۰۴



به طور خلاصه در روش انگشتی شرح نمایش عددها به صورت زیر، می تواند راهنمای خوبی برای خوانندگان عزیز باشد:

- در این حساب، نمایش عددها توسط دست راست، عددهای یک تا ده و عددهای بیست، سی، چهل و... تا نود خواهد بود.
- عددهای صد، دویست، و... تا هزار و همچنین عددهای دوهزار، سه هزار، و... تا ده هزار، توسط دست چپ نمایش داده می شوند. در ادامه، حساب انگشتی عددهایی را آورده ایم که برای نمایش آن ها هم زمان از دو دست راست و چپ استفاده می شود. این عددها در جدول های قبل نیامده اند. (جدول های ۱ و ۲ را ببینید).

و البته عددهایی که بین یک تا ده هزار هستند و در جدول دست راست و یا دست چپ نیستند، به صورت ترکیبی از حرکات انگشتان دستان چپ و راست به طور هم زمان نمایش می شوند و قاعده ساده ای دارند. چند نمونه به صورت مثال در جدول ۳ آورده شده است.

منابع

۱. نراقی، ملامهدی. نسخه خطی کتابخانه مجلس. حساب انگشتی، عقود و انامل. شماره نسخه ۱۲۳۳.
۲. مجله بهارستان (۱۳۸۱). حساب انگشتی، عقود و انامل. به تصحیح علی اوجبی. مجلس شورای اسلامی.



شماره ۱۳۳۳ | بهار ۱۴۰۴

جدول ۱. در جدول زیر برای سهولت یادگیری حساب انگشتی در هر ستون حرکت یک یا چند انگشت دست راست را شرح داده‌ایم.

عدد	انگشت ابهام یا شصت از دست راست	انگشت سیابه یا اشاره از دست راست	انگشت وسط یا میانی از دست راست	انگشت بنصر یا انگشت از دست راست	انگشت خنصر یا کوچک از دست راست	توضیحات
یک					خم کردن	خوابانیدن انگشت کوچک
دو				خم کردن	خم کردن	هر دو انگشت با هم خم شوند
سه			خم کردن	خم کردن	خم کردن	در این خم کردن‌ها باید سرهای انگشتان را نزدیک به ته انگشتان قرار دهیم
چهار			خواباندن	خواباندن	بلند کردن	
پنج			خم کردن	بلند کردن	بلند کردن	
شش				خواباندن		
هفت					خواباندن	
هشت				خواباندن	خواباندن	
نه			خواباندن	خواباندن	خواباندن	
ده		گذاشتن سر ناخن انگشت سیابه به بند اول انگشت ابهام به طوری که سر ابهام بالاتر از حلقه دایره‌ای ایجاد شده باشد				
بیست	گذاشتن ناخن ابهام بر بند آخر یعنی بند تحتانی انگشت سیابه					
سی		گذاشتن سر انگشت سیابه است بر سر ناخن آن بر ناخن انگشت ابهام از طرفی که به جانب سیابه است			به نحوی که از وضع سیابه و ابهام هیئت قوس با وتر آن به هم رسد که قوس از سیابه بوده باشد و وتر از ابهام و جایز است که نحوی گذاشته شود که انگشت ابهام اندکی منحنی شود به نحوی که وتر حاصل نشود	
چهل	گذاشتن باطن سر انگشت ابهام یعنی باطن بند اول از آن است بر پشت بند تحتانی سیابه				به نحوی که مابین آن‌ها هیچ فاصله و فرجه نباشد	
پنجاه		بلند کردن سیابه با گذاشتن ابهام بر کف در محاذی (موازی) سیابه				
شصت	گرفتن ناخن ابهام است به باطن بند دوم سیابه				همچنان که متعارف است در انداختن سنگ‌ریزه از انگشتان	
هفتاد	بلند کردن ابهام است و گذاشتن باطن سر انگشت سیابه بر باطن سر آن یا بر باطن بند دوم آن				به نحوی که همه ناخن آن بر بالای آن واقع شود	
هشتاد	بلند کردن ابهام است و گذاشتن طرف سر انگشت سیابه بر مفصل اول یعنی مفصل بالا					
نود		گذاشتن سر ناخن سیابه بر مفصل بند دوم ابهام				



۳۲

شماره ۳۳ | بهار ۱۴۰۴

جدول ۲. در جدول زیر برای سهولت در یادگیری حساب انگشتی در هر ستون حرکت یک یا چند انگشت دست چپ را شرح داده‌ایم.

عدد	انگشت خنصر یا کوچک از دست چپ	انگشت بنصر یا انگشتر از دست چپ	انگشت وسط یا میانی از دست چپ	انگشت سیابه یا اشاره از دست چپ	انگشت ابهام یا شصت از دست چپ	توضیحات
صد				گذاشتن سر ناخن انگشت سیابه به بند اول انگشت ابهام به‌طوری که سر ابهام بالتر از حلقه دایره‌ای ایجاد شده باشد		
دویست					گذاشتن ناخن ابهام بر بند آخر یعنی بند تحتانی انگشت سیابه	
سیصد				گذاشتن سر انگشت سیابه است بر سر ناخن آن بر ناخن انگشت ابهام از طرفی که به جانب سیابه است		
چهارصد					گذاشتن باطن سر انگشت ابهام یعنی باطن بند اول از آن است بر پشت بند تحتانی سیابه	
پانصد				بلندکردن سیابه با گذاشتن ابهام بر کف در محاذی (موازی) سیابه		
ششصد					گرفتن ناخن ابهام است به باطن بند دوم سیابه	
هفتصد					بلندکردن ابهام است و گذاشتن باطن سر انگشت سیابه بر باطن سر آن یا بر باطن بند دوم آن	
هشتصد					بلند کردن ابهام است و گذاشتن طرف سر انگشت سیابه بر مفصل اول یعنی مفصل بالا وضع	
نهمصد	خم کردن			گذاشتن سر ناخن سیابه بر مفصل بند دوم ابهام		
هزار	خم کردن				خواباندن خنصر	
دوهزار	خم کردن	خم کردن				
سه‌هزار	بلندکردن	خم کردن	خم کردن			
چهارهزار	بلندکردن	خواباندن	خواباندن			
پنجهزار	بلندکردن	بلندکردن	خم کردن			
شش‌هزار		خواباندن				
هفت‌هزار	خواباندن					
هشت‌هزار	خواباندن	خواباندن				
نه‌هزار	خواباندن	خواباندن	خواباندن			
ده‌هزار				گذاشتن طرف سر انگشت ابهام بر طرف سیابه به‌نحوی که ناخن‌های آن‌ها موازی یکدیگر شوند		



۳۳

شماره ۳۳ | بهار ۱۴۰۴



جدول ۳. در جدول زیر برای سهولت در یادگیری حساب انگشتی در هر ستون حرکت یک یا چند انگشت دست راست یا دست چپ را شرح داده ایم

توضیحات	انگشت ابهام یا شصت از دست چپ	انگشت سیاه یا اشاره از دست چپ	انگشت وسط یا میانی از دست چپ	انگشت بنصر یا انگشت از دست چپ	انگشت خنصر یا کوچک از دست چپ	توضیحات	انگشت خنصر یا کوچک از دست راست	انگشت بنصر یا انگشت از دست راست	انگشت وسط یا میانی از دست راست	انگشت سیاه یا اشاره از دست راست	انگشت ابهام یا شصت از دست راست	عدد
		گذاشتن سر ناخن انگشت سیاه به بند اول انگشت ابهام به طوری که سر ابهام بالاتر از حلقه دایره ای ایجاد شده باشد				خواباندن خنصر	خم کردن			گذاشتن سر ناخن انگشت سیاه به بند اول انگشت ابهام به طوری که سر ابهام بالاتر از حلقه دایره ای ایجاد شده باشد		صدویک
		گذاشتن سر ناخن انگشت سیاه به بند اول انگشت ابهام به طوری که سر ابهام بالاتر از حلقه دایره ای ایجاد شده باشد				خواباندن خنصر	خم کردن			گذاشتن سر ناخن انگشت سیاه به بند اول انگشت ابهام به طوری که سر ابهام بالاتر از حلقه دایره ای ایجاد شده باشد		صدویازده
خواباندن انگشت کوچک		گذاشتن سر ناخن انگشت سیاه به بند اول انگشت ابهام به طوری که سر ابهام بالاتر از حلقه دایره ای ایجاد شده باشد			خم کردن		بلند کردن	بلند کردن	خم کردن	بلند کردن سیاه با گذاشتن ابهام بر کف در محاذی (موازی) سیاه		هزار و پنجاه و پنج
		گذاشتن سر ناخن سیاه بر مفصل بند دوم ابهام	خواباندن	خواباندن	خم کردن و خواباندن		خواباندن	خواباندن	خواباندن	گذاشتن سر ناخن سیاه بر مفصل بند دوم ابهام		نهمزار و نهمصد و نودونه
		گذاشتن طرف سر انگشت ابهام بر طرف سیاه به نحوی که ناخن های آن ها موازی یکدیگر شوند و با بلند کردن سیاه با گذاشتن ابهام بر کف در محاذی سیاه				به نحوی که همه ناخن آن بر بالای آن واقع شود	خواباندن			بلند کردن ابهام است و گذاشتن باطن سر انگشت سیاه بر باطن سر آن با بر باطن بند دوم آن		ده هزار و پانصد و هفتاد و هفت

کسر جادویی

نمایش اعشاری یک کسر و دنباله فیبوناتچی

محمدرضا اسفندیاری

دکترای ریاضی ناحیه ۱ کرمان

چکیده

در این نوشته به کسرهای جالبی می‌پردازیم که در نمایش اعشاری آن‌ها الگوی فیبوناتچی ظاهر می‌شود. نخست به دلیل ظاهر شدن این الگو می‌پردازیم و در ادامه چند سؤال درباره این کسرها مطرح می‌کنیم؛ از جمله دوره گردش این کسرها و اینکه دنباله فیبوناتچی تا کجا ادامه دارد.

نخست یادآوری می‌کنیم که نمایش اعشاری هر کسر تحویل‌ناپذیر $\left(\frac{a}{b}\right)$ به‌طوری که: $(a, b) = 1$ به‌صورت مختوم یا متناوب است که بستگی به تجزیه مخرج آن به عوامل اول دارد. در صورتی که در مخرج آن فقط عامل ۲ یا ۵ ظاهر شود، نمایش اعشاری آن به‌صورت مختوم است و در غیر این صورت به شکل متناوب است.

حال در اینجا کسر $\frac{1}{998999}$ را داریم و واضح است در مخرج آن عامل ۲ و ۵ وجود ندارد. بنابراین کسر مذکور متناوب از نوع ساده است. اما دوره گردش این کسر چند رقم دارد؟

برای خواننده علاقه‌مند بیان می‌کنیم که در نمایش اعشاری کسر $\frac{1}{p}$ که در آن p عددی اول است، دوره گردش حداکثر $p-1$ رقم است، و یا شمارنده‌ای از $p-1$ است که برای اثبات و دلیل آن ما به اطلاعاتی از نظریه اعداد و ریشه‌های اولیه نیاز داریم. برای اطلاعات بیشتر منبع شماره ۳ را ببینید.

دنباله فیبوناتچی

دنباله فیبوناتچی یکی از زیباترین و کاربردی‌ترین دنباله‌ها در ریاضیات است و ویژگی‌های جالب و شگفت‌انگیزی دارد. این دنباله نخستین‌بار در کتاب «لیبر آباکی» (کتاب محاسبه)، نوشته فیلیوس بوناتچی در سال ۱۲۰۲ میلادی از داستان خیالی زوج خرگوش‌های

مقدمه

در نمایش اعشاری کسر زیر به طرز شگفت‌انگیزی دنباله فیبوناتچی ظاهر شده است. ظاهر شدن این الگو در عین زیبایی و شگفتی، قابل تأمل است. چرا در نمایش اعشاری کسر زیر الگوی فیبوناتچی ظاهر شده است؟

$$\frac{1}{998999} = 1/001002003005008013021034055089144 \\ 23337761098859958818777596373970344 \\ 3146589736326062388450839290129 \times 10^{-6} \dots$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید در نمایش اعشاری کسر بالا، ۱۵ جمله الگوی فیبوناتچی ظاهر شده است. آیا این امر اتفاقی است یا دلیل و استدلال ریاضی دارد؟ شما چه فکر می‌کنید؟



۳۵

شماره ۳۳ | بهار ۱۴۰۴



$$F_0=1, F_1=1, F_n=F_{n-1}+F_{n-2}, n \geq 2$$

یعنی هر جمله دنباله (بعد از دومین جمله) برابر با مجموع دو جمله قبلی است. دنباله فیبوناتچی ویژگی‌های ریاضی بسیار جالبی دارد. هر دو جمله متوالی نسبت به هم اول هستند. همچنین نسبت هر دو جمله متوالی به سمت نسبت طلایی میل می‌کند. برای نمونه:

$$\frac{F_6}{F_5} = \frac{13}{8} = 1/625, \quad \frac{F_9}{F_8} = \frac{55}{34} = 1/617647,$$

$$\frac{F_{10}}{F_9} = \frac{89}{55} = 1/6181818$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، نسبت جمله‌های متوالی دنباله فیبوناتچی به نسبت طلایی میل می‌کند. نسبت طلایی که معمولاً با ϕ نمایش داده می‌شود، برابر است با:

$$\phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 1/618$$

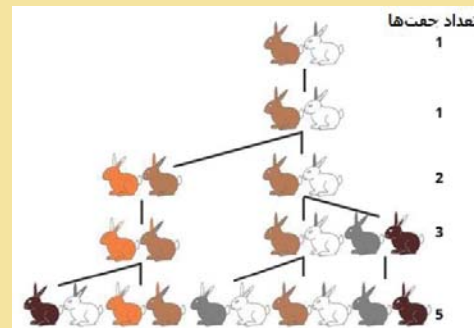
ظاهر شدن الگوی فیبوناتچی در نمایش اعشاری کسره‌های خاص

در ریاضیات هر دنباله مانند $\{a_n\}$ برای $n=0,1,2,\dots$ یک «تابع مولد»^۱ دارد که شناخت این تابع و بررسی خواص آن می‌تواند در شناسایی بهتر دنباله مؤثر باشد. تابع مولد دنباله $\{a_n\}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

نر و ماده نشئت گرفته است. شخصی یک زوج خرگوش (نر و ماده) را در محلی کاملاً محصور قرار می‌دهد. اگر طبیعت این خرگوش‌ها طوری باشد که هر زوج هر ماه یک زوج دیگر تولید کند و زوج تازه متولدشده هم از ماه دوم زاد و ولد کند، ظرف یک سال چند زوج خرگوش از قبل زوج اولیه داریم؟ (هیچ خرگوشی از بین نمی‌رود و همه خرگوش‌ها زوج نر و ماده به دنیا می‌آورند). با کمی محاسبه می‌توان نشان داد، در پایان ماه دوازدهم ۲۳۳ زوج خرگوش بالغ داریم. تعداد خرگوش‌ها برای پایان هر ماه به صورت الگوی زیر به دست می‌آیند:

۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ۲۱, ۳۴, ۵۵, ۸۹, ۱۴۴, ۲۳۳, ...



ادوارد لوکاس، متخصص نظریه اعداد در سده نوزدهم، نام این دنباله را فیبوناتچی گذاشت. اگر F_n جمله n ام دنباله فیبوناتچی باشد، داریم:



۳۶

شماره ۳۳۳ | بهار ۱۴۰۵

$$\frac{1}{1-x-x^2} = F_0 + F_1x + F_2x^2 + F_3x^3 + \dots \quad (1)$$

حال در رابطه (۱) قرار دهید $x=0/001$ داریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-0/001-(0/001)^2} &= \frac{1}{1-10^{-3}-10^{-6}} \\ &= \frac{10^6}{10^6-10^3-1} \\ &= \frac{1000000}{998999} \\ &= 1 + 1(0/001) + 2(0/000001) \\ &\quad + 3(0/00000001) + 5(0/0000000001) + \dots \end{aligned}$$

در واقع با کمی محاسبه می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{1000000}{998999} &= 1/001002003005008013021034055089144 \\ &\quad 23337761098859958818777596373970344 \\ &\quad 3146589736326062388450839290129000 \dots \end{aligned}$$

همان طور مشاهده می کنید با انتخاب $x=0/001$ ، با توجه به بسط تابع مولد، حتماً دنباله فیبوناتچی ظاهر می شود. شما می توانید $x=0/1$ یا $x=0/01$ را هم امتحان کنید.

با استفاده از یک نرم افزار ریاضی، نمایش اعشاری کسرهای $\frac{1}{89}$ و $\frac{1}{9899}$ را بنویسید. می توانید از نسخه برخط نرم افزار «متمتیکا» (<https://www.wolframalpha.com/>) استفاده کنید.

سؤال های زیر را برای خوانندگان علاقه مند مطرح می کنیم:

سؤال ۱: در کسرهای بالا، دنباله فیبوناتچی تا کجا ادامه دارد؟ آیا می توان تعداد جمله های آن را مشخص کرد؟
سؤال ۲: در کسرهای متناوب بالا، دوره گردش چند رقم دارد؟

پی نوشت

1. Generating Function

منابع

1. A. S. Posamentier, math wonders to inspire teachers and students, 2nd ed, Association for Supervision and Curriculum Development, 2003.
2. J. Smoak and T. J. Osler, A Magic Trick from Fibonacci, The College Mathematics Journal Vol. 34, No. 1 (Jan., 2003), pp. 58-60 (3pages).

۳. دیوید ام. برتن، نظریه مقدماتی اعداد، ترجمه محمدصادق منتخب، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۸۱.

۴. مجید میرزاوزیری، شمردنی ها را بشمار، انتشارات آهنگ قلم، سال ۱۳۸۹.

در واقع با توجه به ویژگی ها و تعریف دنباله، تابع مولد آن با کمی محاسبه به دست می آید. برای اطلاعات بیشتر درباره تابع مولد و همچنین اثباتی برای تابع مولد برخی دنباله های معروف، از جمله دنباله فیبوناتچی، می توانید منبع شماره ۴ را ببینید.

برای رسیدن به پاسخ مسئله و اینکه چرا در نمایش اعشاری کسر $\frac{1}{998999}$ دنباله فیبوناتچی ظاهر می شود، تابع مولد دنباله فیبوناتچی را بررسی می کنیم. در واقع تابع مولد دنباله فیبوناتچی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x-x^2} &= 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + \dots \\ \text{حال با استفاده از تقسیم چندجمله ای ها داریم:} \\ \frac{1}{1-x-x^2} &= 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + \dots \\ &\quad \frac{1-x-x^2}{1+x+2x^2+3x^3+5x^4+\dots} \\ &\quad \frac{1}{1-x-x^2} \\ &\quad \frac{x+x^2}{x-x^2-x^3} \\ &\quad \frac{2x^2+x^3}{2x^2+2x^3-2x^4} \\ &\quad \frac{3x^3+2x^4}{3x^3-3x^4-3x^5} \\ &\quad \frac{5x^4+3x^5}{5x^4+3x^5} \end{aligned}$$

اگر F_n جمله n ام دنباله فیبوناتچی باشد، داریم:
 $F_0=1, F_1=1, F_n=F_{n-1}+F_{n-2}, n \geq 2$

بنابراین تابع مولد فیبوناتچی را می توان به صورت رابطه (۱) نوشت:

تخمین زدن عدد پی

مترجم: ندا توانایی

دانشجوی دکترای آموزش ریاضی

در روشی که در ادامه شرح می‌دهیم، از مساحت چندضلعی‌های منتظم محاط‌شده در دایره‌ها برای تخمین مقدار عدد پی استفاده می‌شود و مشابه روشی است که ارشمیدس با استفاده از محیط چندضلعی‌ها به کار برد.

اشاره کرد که با نزدیک‌شدن محیط چندضلعی به محیط دایره، تعداد ضلع‌های چندضلعی افزایش می‌یابد. بیاپید روشی را در این بخش بررسی کنیم که با کار ارشمیدس و با تمرکز بر مساحت چندضلعی‌ها هماهنگ است. به‌طور خاص، اجازه دهید بحث خود را به چندضلعی‌های محاط‌شده در یک دایره محدود کنیم. بنابراین یک کران پایین برای عدد پی به ما می‌دهد. رویکردی مشابه را می‌توان با استفاده از چندضلعی‌های محدود‌شده در اطراف یک دایره، برای به‌دست‌آوردن یک کران بالا به کار برد. عدد پی به‌عنوان نسبت محیط دایره به قطر آن تعریف و غالباً به‌صورت تقریب $\frac{3}{14}$ نوشته می‌شود. با این حال، با توجه به فرمول مساحت دایره، می‌توان عدد پی را به‌عنوان نسبت مساحت دایره به مجذور طول شعاع آن تعریف کرد. به‌طور کلی، ما از این تعریف استفاده می‌کنیم.

توجه داشته باشید که برای چندضلعی‌های محاطی، با افزایش تعداد ضلع‌های چندضلعی، مساحت چندضلعی به دایره نزدیک می‌شود (شکل ۱ را ببینید). در اینجا از مفهوم اولیه حد استفاده شده است که تا قرن‌ها بعد با اختراع حساب

ارشمیدس سیراکوزی ریاضی‌دان، فیزیک‌دان، مهندس و منجمی یونانی بود که بین سال‌های ۲۱۲ تا ۲۸۷ قبل از میلاد می‌زیست. او را یکی از نابغه‌های عصر خود می‌دانند. دستگاه‌های متعددی از جمله یک دستگاه مکانیکی به نام پیچ ارشمیدسی اختراع کرد که برای خارج کردن آب از مخزن‌ها از آن استفاده می‌شود.

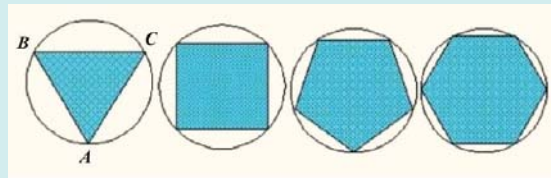
بنا به گفته‌ها، ارشمیدس در جریان حمله به شهری که در آن زندگی می‌کرد، به دست سربازی رومی کشته شد. ارشمیدس به سرباز گفت: «در حال حل مسئله‌ای هستم، تحقیق مرا مختل نکن!...» یا: «... دایره‌های مرا خراب نکن!» روشی برای تخمین زدن عدد پی که به‌عنوان «روش اشباع» یا «روش افنا» شناخته می‌شود، به ارشمیدس نسبت داده شده است (برتون، ۲۰۱۰). یعنی او عدد پی را با در نظر گرفتن چندضلعی‌های محاط‌شده در یک دایره بررسی و تخمین زد و برای عدد پی کران بالا و پایینی به دست آورد. او به‌طور ویژه، روی محیط چندضلعی تمرکز داشت و از آن به‌منظور به‌دست‌آوردن تقریبی برای عدد پی استفاده کرد. ارشمیدس



۳۸

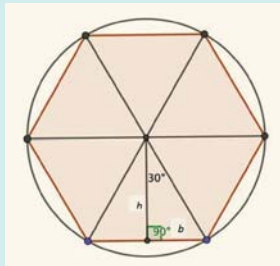
شماره ۳۳ | بهار ۱۴۰۵

دیفرانسیل و انتگرال نیز به طور کامل رشد و تحول نمی‌یابد.



شکل ۱. برای چندضلعی‌های محاطی، با افزایش تعداد ضلع‌های چندضلعی، مساحت چندضلعی به دایره نزدیک می‌شود

حالا از طول ضلع مربع برای تعیین مساحت مربع استفاده می‌کنیم که $2r^2$ است. اگر این عدد را با مساحت دایره که πr^2 است برابر بدانیم، تقریبی برای عدد پی به دست می‌آوریم؛ یعنی عدد پی تقریباً ۲ است. این تخمین خوبی نیست، اما می‌توانیم با انتخاب چندضلعی‌ای که دارای تعداد بیشتری ضلع است، تخمینمان را بهبود بخشیم. حال بیایید یک شش ضلعی را انتخاب کنیم (شکل ۳ را ببینید).



شکل ۳. تعیین مساحت هر مثلث بر حسب شعاع r با استفاده از این واقعیت که هریک از شش مثلث در شش ضلعی متساوی‌الاضلاع هستند

می‌توانیم از این واقعیت استفاده کنیم که هریک از شش مثلث در شش ضلعی، متساوی‌الاضلاع هستند تا مساحت هریک را بر حسب شعاع r تعیین کنیم. مثلثی را انتخاب و ارتفاعش را رسم می‌کنیم. یک مثلث $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ و تری برابر با r به دست می‌آید. قاعده b را در نظر می‌گیریم و به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned}\sin 30^\circ &= \frac{b}{r} \\ \frac{1}{2} &= \frac{b}{r} \\ b &= \frac{r}{2}\end{aligned}\quad (2)$$

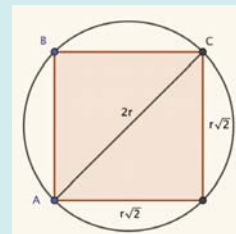
ارتفاع مثلث را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\begin{aligned}\cos 30^\circ &= \frac{h}{r} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} &= \frac{h}{r} \\ h &= \frac{r\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\quad (3)$$

مساحت هریک از شش مثلث (دوبرابر مثلث $30^\circ-60^\circ-90^\circ$) برابر است با:

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2}(r)\left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right) \\ A &= \frac{\sqrt{3}r^2}{4}\end{aligned}\quad (4)$$

با مساوی قرار دادن مساحت چندضلعی با مساحت دایره، می‌توانیم عدد پی را تخمین بزنیم. هرچه تعداد ضلع‌ها در چندضلعی‌ای که استفاده می‌کنیم بیشتر باشد، تخمین ما دقیق‌تر است. ما با در نظر گرفتن مربعی که در یک دایره محاط شده است شروع می‌کنیم (شکل ۲ را ببینید). r را شعاع دایره قرار می‌دهیم و باید به این موضوع توجه کنیم که قطر دایره دوبرابر شعاع است.



شکل ۲. تخمین زدن عدد پی با استفاده از مساوی قرار دادن مساحت چندضلعی با دایره

قضیهٔ **تالس** بیان می‌کند که اگر A ، B و C نقاط متمایز دایره‌ای باشند که قطر آن AC است، $\angle ABC$ یک زاویهٔ قائمه است. این موردی خاص از قضیهٔ زاویه محاطی است. عکس این گفته نیز صادق است. یعنی اگر $\angle ABC$ یک زاویهٔ قائمه باشد، AC قطر دایره است. به این ترتیب، قطر مربع، قطر دایره است.

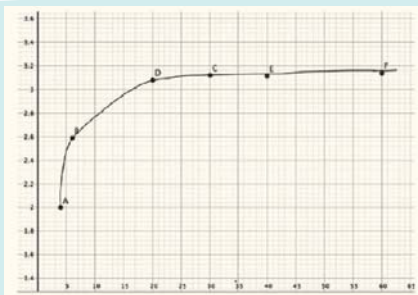
از قضیهٔ **فیثاغورس** برای یافتن طول ضلع مربع(ها) به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}s^2 + s^2 &= (2r)^2 \\ 2s^2 &= 4r^2 \\ s^2 &= 2r^2 \\ s &= r\sqrt{2}\end{aligned}\quad (1)$$



۳۹

شمارهٔ ۱۳۳۳ | بهار ۱۴۰۴



شکل ۴. استفاده از نمودار برای تقریب زدن عدد پی برای همه چندضلعی‌ها، از ۳ تا ۶۰ ضلع

برای به دست آوردن مساحت سی ضلعی منتظم، این عدد را در ۳۰ ضرب می‌کنیم و $3/12r^2$ به دست می‌آید. به این معنی که وقتی مساحت یک دایره را برابر با مساحت چندضلعی قرار می‌دهیم، عدد پی تقریباً $3/12$ است. این تقریب بسیار بهتر از مواردی است که قبلاً به دست آوردیم.

به روشی مشابه، عدد پی در بیست ضلعی منتظم تقریباً برابر $3/079$ است، عدد پی در چهل ضلعی منتظم تقریباً برابر است با عدد $3/114$ است، و در شصت ضلعی منتظم عدد پی تقریباً $3/137$ محاسبه می‌شود. ترسیم این مقادیر، نمودار شکل ۴ را پدید می‌آورد که با افزایش تعداد ضلع‌های چندضلعی، مقدار آن عددی ثابت می‌شود.

با نزدیک شدن تعداد ضلع‌های چندضلعی به بی‌نهایت، مساحت چندضلعی به دایره نزدیک می‌شود. این مورد به ایده حد مربوط می‌شود. می‌توانیم به این صورت تصور کنیم که با نزدیک شدن تعداد ضلع‌های چندضلعی به بی‌نهایت، تعداد مثلث‌ها نیز به بی‌نهایت نزدیک می‌شود و مثلث‌ها بسیار باریک می‌شوند؛ به طوری که ارتفاع آن‌ها به شعاع دایره، و مجموع قاعده‌های مثلث به محیط دایره، یعنی $2\pi r$ ، نزدیک می‌شود. بنابراین مساحت چندضلعی با حد، $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)(nb)(h) = \left(\frac{1}{2}\right)(2\pi r)(r) = \pi r^2$ به دست می‌آید که دقیقاً مساحت یک دایره است.

منبع

L. Gonzales, Approximating Pi, Mathematics Teacher: Learning and Teaching Pk-12, 2023, Volume 116, Issue 1, pages 98-51.



برای به دست آوردن مساحت شش ضلعی، عدد به دست آمده را در ۶ ضرب می‌کنیم و $\frac{3\sqrt{3}r^2}{2}$ را به دست می‌آوریم. به این معنی که وقتی با مساحت یک دایره مقایسه می‌کنیم، متوجه می‌شویم که عدد پی تقریباً $2/59 \approx \frac{3\sqrt{3}}{2}$ است. احتمالاً هنوز نامیدکننده است. در واقع برای به دست آوردن یک تخمین خوب، به یک چندضلعی با تعداد ضلع‌های قابل توجهی نیاز داریم. اما خبر خوب این است که با انجام این عمل با چندضلعی‌هایی که طول ضلع‌های بیشتری دارند، می‌توانیم تقریب‌های بهتر و بهتری برای عدد پی به دست آوریم. در واقع ارشمیدس برای تقریب خود از چندضلعی با ۹۶ ضلع استفاده کرد که تا سه رقم اعشار دقیق بود!

در مرحله بعد، از یک چندضلعی با ۳۰ ضلع استفاده می‌کنیم؛ یعنی $n=30$. در اینجا 30° مثلث داریم که از نظر درجه اندازه‌گیری زاویه‌ها، مثلث‌های $84-84-12$ خواهند بود. با ترسیم ارتفاع، دو مثلث قائم‌الزاویه با درجه‌های $90-84-6$ به دست می‌آیند. قاعده مثلث را می‌توانیم به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned}\sin 6 &= \frac{b}{r} \\ 0/105 &= \frac{b}{r} \\ b &= 0/105r\end{aligned}\quad (5)$$

ارتفاع مثلث را می‌توان به این صورت یافت:

$$\begin{aligned}\cos 6 &= \frac{h}{r} \\ 0/995 &= \frac{h}{r} \\ h &= 0/995r\end{aligned}\quad (6)$$

در نتیجه مساحت هر یک از 30° مثلث (دو برابر مثلث $90-84-6$) برابر است با:

$$A = \frac{1}{2}(0/105r)(2)(0/995r) \quad (7)$$



۴۰

شماره ۱۳۳ | بهار ۱۴۰۳

چگونه می‌توان یک خودرو را از درون یک برکهٔ ۴۴ عبور داد؟

زهرانظیفی

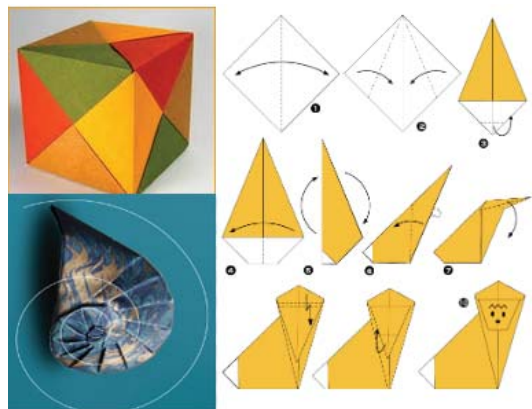
دکترای حسابداری، کارشناس آموزش
متوسطهٔ دوم نظری، دبیر ریاضی

هنر تا زدن کاغذ

کاغذتا (اریگامی) در کلاس درس برای تقویت هوش فضایی، تفکر منطقی و آموزش هندسه و ریاضی به کار می‌رود.

چرا کاغذتا

کاغذتا هنر باستانی بازی با کاغذ است که ریشهٔ آن به تمدن باستانی چین و ژاپن بازمی‌گردد، اما امروزه محبوبیت بین‌المللی یافته است. این هنر ظریف با وارد شدن به نظام آموزشی و مدرسه‌ها می‌تواند بر تقویت ادراک فضایی و تفکر منطقی و مرحله‌ای دانش‌آموزان مؤثر باشد.



هنری برای همه‌چیز

شاید باور نکنید، اما محققان بسیاری روی تأثیر و کاربرد هنر کاغذتا در موضوع‌ها و مبحث‌های گوناگون کار کرده‌اند و معتقدند از کاغذتا می‌توان تقریباً در هر موضوع درسی و برای تقویت مهارت‌های متفاوت استفاده کرد. در اینجا چند مورد

از فایده‌ها و کاربردهای هنر کاغذتا را برای استفاده در کلاس درس مطرح می‌کنیم:

هندسه

بر اساس آمار «مرکز ملی آموزش» در سال ۲۰۰۳، هندسه یکی از مواد درسی است که عموماً دانش‌آموزان در آن ضعف دارند. کاغذتا می‌تواند به عنوان یکی از راه‌های تقویت درک مفهوم‌های هندسی، فرمول‌ها و مباحث هندسه عمل کند. به عبارت دیگر کاغذتا می‌تواند به هندسه جان ببخشد و مفهوم‌ها و کاربردهای آن را به صورت عملی به دانش‌آموزان نشان دهد. با در نظر گرفتن طول، عرض و ارتفاع، و وارد کردن این اندازه‌ها به شکل‌های کاغذتا می‌توان به دانش‌آموزان به طور عملی و کاربردی کار با شکل‌ها و حجم‌های هندسی را آموخت. حتی از کاغذتا می‌توان برای پوشاندن سطح‌ها و اندازه‌گیری مساحت با استفاده از فرمول‌های هندسی نیز استفاده کرد.

مهارت تفکر

کاغذتا می‌تواند تمام مؤلفه‌های تفکر را در انسان بیدار کند و به کار گیرد. ثابت شده است که کاغذتا می‌تواند در تقویت مهارت‌های تجسم فضایی و هماهنگی دست و چشم برای یادگیری مؤثر باشد. چنین مهارت‌هایی می‌تواند به کودکان در درک مطلب، سازمان‌دهی، طبقه‌بندی و ساختن تجسم فضای جهان پیرامون آن‌ها کمک شایانی کنند. در کلاس درس می‌توان از کاغذتا یا شکل‌های هندسی برای توضیح مفهوم‌ها و اصطلاح‌های هندسی به خوبی استفاده کرد.

کسر

معمولاً مفهوم کسر برای بیشتر دانش آموزان ترسناک است. اما استفاده از تای کاغذی می تواند در آموزش مفهوم کسر به شیوه ای مفرح و هیجان انگیز مؤثر باشد. شما می توانید خود از کاغذ تا برای نشان دادن مفهوم یک دوم، یک سوم، و تا آخر به خوبی استفاده کنید. هر تای کاغذ می تواند به دانش آموزان در درک مفهوم کسر و تقسیم یک خانه به دو یا چند قسمت مساوی کمک کند. با استفاده از کاغذ تا دانش آموزان می توانند یک برگ کاغذ را به قسمت های کوچک تر تقسیم کنند و با باز کردن هر کدام از تاهای کاغذ، روند کسر را معکوس سازند. حتی در موارد پیشرفته تر امکان تا کردن کاغذ و تقسیم یک شکل به دو بخش و استمرار در تای کاغذ تا جای ممکن، می تواند به آموزش مفهوم حد و میل به بی نهایت نیز کمک کند.



حل مسئله

معمولاً مسئله هایی که دانش آموزان با آن ها در کلاس درس مواجه می شوند، یک راه حل و یک پاسخ مشخص دارند. اما کاغذ تا به آن ها کمک می کند تفکر جانبی و واگرا را در خود تقویت کنند. دانش آموزان می توانند از طریق انجام کاغذ تا، مثلاً برای بازسازی یک الگو یا شکل نهایی، انواع راه ها را بیازمایند و از طریق آزمون و خطا و کسب تجربه، راه های گوناگون حل مسئله را تمرین کنند.

علم آموزی از طریق تفریح

کاغذ تا روشی مفرح و شاد برای آموزش مفهوم های پایه و اصلی هندسه، ریاضی و حتی فیزیک و شیمی است. تا کردن کاغذی نازک به شکل های متفاوت می تواند پایه تفکر هندسی را به دانش آموزان بیاموزد. برای مثال تا کردن آکاردئونی کاغذ، می تواند طرح اولیه یک پل عظیم باشد. کاغذ تا حتی می تواند به آموزش طرح مولکول ها و ترکیبات شیمیایی ساده نیز کمک کند. بنابراین کاغذ تا می تواند بر حسب خلاقیت معلم و دانش آموزان در آموزش مباحث متفاوت علوم و لذت بخش کردن یادگیری و آموزش از راه سرگرمی و بازی، به کمک برنامه آموزشی مدرسه بیاید.

هنر برش کاغذ

یکی دیگر از شگفتی های ریاضی که سبب جذاب شدن کلاس می شود، بهره گیری از دانش توپولوژی است. یکی از

مفهوم های مهم و پایه ای در ریاضیات نوین، «توپولوژی» و «فضای توپولوژیک» است. توپولوژی شاخه ای از ریاضیات است که به مجموعه ها، نقطه ها و اعضای درون مجموعه می پردازد و رابطه های بین آن ها را مورد تحلیل قرار می دهد. به این ترتیب به کمک توپولوژی، مفهوم های دیگری مانند پیوستگی، هم گرایی و... تبیین خواهند شد.

توپولوژی مطالعه ریاضیات روی خصوصیات است که طی تغییر شکل ها، ضربه خوردن ها و کشیده شدن اشیاء به طور ثابت حفظ می شوند. یک دایره به لحاظ توپولوژیکی هم ارز با یک بیضی است که می تواند داخل آن با کشیده شدن تغییر شکل یابد و یک کره با یک سطح بیضی وار هم ارز است. یعنی یک منحنی بسته تک بعدی و بدون هیچ محل تقاطع که می تواند در فضای دوبعدی جای گیرد، مجموعه تمام وضعیت های ممکن برای عقربه های ساعت شمار و دقیقه شمار با هم، به لحاظ توپولوژیکی با چنبره هم ارز است. به عبارت دیگر، یک سطح دوبعدی که می تواند داخل فضای سه بعدی جای گیرد و مجموعه تمام وضعیت های ممکن برای عقربه های ساعت شمار، دقیقه شمار و ثانیه شمار با هم، به لحاظ توپولوژیکی با یک شیء سه بعدی هم ارز است.

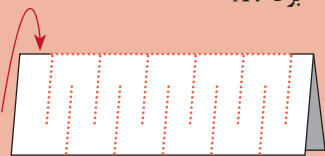
می توان با ایده گرفتن از این دانش، یادگیری ریاضی را شیرین و جذاب کرد و به صورت زنگ آزمایشگاه ریاضی از آن بهره گرفت؛ همچنین با طرح پرسش زیر می توان توجه مخاطب را جلب کرد و کلاسی متفاوت را تجربه کرد.

چگونه می توان خودرویی را از درون یک برگه A4 عبور داد؟

در تصویر نشان داده شده است که با برش کاغذ A4 از محل خط چین ها، می توان به پرسش پاسخ داد و هر چه فاصله این خط چین ها کمتر باشد، خروجی با دهانه بزرگ تر حاصل می شود که حتی خودرویی را می توان از آن عبور داد.



برگه A4



برگه A4 تا زده

پیشرو

مخونه سوال های امتحان کنهائی
بارویلرد مفهومی

➤
پاسخ
سوالات



نرگس نهپندانی، مریم محمد پور
دبیر ریاضی، مشهد مقدس

۵. اگر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \log_a^x - 1$ از نقطه $(9, 1)$ عبور کند.
الف) مقدار a را به دست آورید.
ب) نمودار تابع را رسم کنید.

ریاضی ۲، فصل ۵، توابع نمایی و لگاریتمی

۱. در تابع $f(x) = \begin{cases} -2x+5 & x < 0 \\ x^2-4 & 0 \leq x \leq 2 \\ 2x-1 & x > 2 \end{cases}$ مقادیر $f(-1), f(0), f(\sqrt{2})$ و $f(f(-2))$ را بیابید.

ریاضی ۱، فصل ۵، تابع چندضابطه‌ای

۶. پیوستگی تابع زیر را در نقطه $x = 2$ بررسی کنید
$$f(x) = \begin{cases} 2x-9 & x > 2 \\ -5 & x = 2 \\ -2x^2+3 & x < 2 \end{cases}$$

ریاضی ۲، فصل ۶، حد و پیوستگی

۲. اگر ۶ نامزد انتخابات شورای مدرسه که دو نفر از آن‌ها هم کلاسی هستند به تصادف در یک ردیف قرار بگیرند، چقدر احتمال دارد که این دو هم کلاسی کنار هم باشند؟

ریاضی ۱، فصل ۶ و ۷، شمارش و احتمال

۷. در تابع $f(x) = -6\cos(\frac{3\pi}{2} + x) - 1$ مقدار $f(\frac{11\pi}{6})$ را بیابید.

حسابان ۱، فصل ۵، حد و پیوستگی

۳. نشان دهید مثلثی که در آن میانه وارد بر یک ضلع، نصف آن ضلع باشد، قائم‌الزاویه است.

هندسه ۱، فصل ۳، مبحث چندضلعی‌ها

۸. مقدار a را طوری بیابید که تابع $g(x) = ([x] - a)[x]$ در نقطه $x = -2$ پیوسته باشد.

حسابان ۱، فصل ۵، حد و پیوستگی

۴. الف) رأس سهمی به معادله $y = 2(x-1)^2 - 3$ را مشخص کنید و به کمک آن نمودار سهمی را رسم کنید.
ب) تابع هزینه شرکتی $C(x) = 18x + 40$ و تابع درآمد آن $R(x) = \frac{-1}{2}x^2 + 30x$ است. بیشترین مقدار سود را بیابید.

ریاضی و آمار، فصل ۲، تابع درجه دوم

۹. در ظرف A، ۴ مهره آبی و ۴ مهره قرمز و در ظرف B، ۴ مهره سبز و ۵ مهره قرمز داریم. ۲ مهره از ظرف A و ۳ مهره



۱۴۳

شماره ۳۳۳ | بهار ۱۴۰۴

می دهیم. سپس یک مهره به تصادف انتخاب می کنیم. با چه احتمالی این مهره سبز است؟

ریاضی ۳، فصل ۷، احتمال

۱۵. تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله زیر با شرط های داده شده را بدست آورید.

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 20 \quad x_1 > 2, x_2 = 3, x_3 \geq 4$$

ریاضیات گسسته، فصل ۳، ترکیبات

۱۶. یک شعاع نورانی در امتداد خط $x = 4$ بر سهمی $x^2 = 8y$ می تابد. معادله بازتاب را بنویسید.

هندسه ۳، فصل ۲، سهمی

۱۷. مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} |x| & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$ را در نقطه $x = 0$ به کمک تعریف مشتق بررسی کنید.

حسابان ۲، فصل ۴، مشتق پذیری و پیوستگی

۱۸. مقادیر a ، b و c را در تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ طوری به دست آورید که در نقطه $(-1, 3)$ اکسترمم نسبی داشته باشد و $x = 1$ طول نقطه عطف آن باشد.

حسابان ۲، فصل ۵، نقطه عطف

۱۹. شخصی چهل میلیون تومان در یک شرکت تولیدی در راستای حمایت از تولید ملی سرمایه گذاری می کند. اگر در پایان هر سال، ۳۰ درصد سود علی الحساب به او پرداخت شود، پس از دو سال سرمایه او چقدر خواهد شد؟

ریاضی و آمار ۳، فصل ۳، توابع نمایی

۲۰. عبارت توان دار را به صورت رادیکالی و عبارت رادیکالی را به صورت توان دار بنویسید.

$$\frac{1}{4} = (0.35)^{1/4} \text{ (الف)}$$

$$= \sqrt[4]{4/2} \text{ (ب)}$$

$$= \sqrt[4]{\left(\frac{1}{6}\right)^3} \text{ (ج)}$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{4}{3}} \text{ (د)}$$

ریاضی و آمار ۳، فصل ۳، توان رسانی و ریشه گیری

از ظرف B انتخاب کرده و در ظرف C می ریزیم. ظرف C در ابتدا خالی بوده است. سپس از ظرف C مهره ای انتخاب می کنیم. احتمال اینکه این مهره قرمز باشد چقدر است؟

آمار و احتمال، فصل ۲، احتمال

۱۰. عکس نقیض گزاره شرطی «اگر n^2 عددی زوج باشد، آنگاه n عددی زوج است.» را بنویسید. ($n \in \mathbb{Z}$)

ریاضی و آمار، فصل ۲، استدلال ریاضی

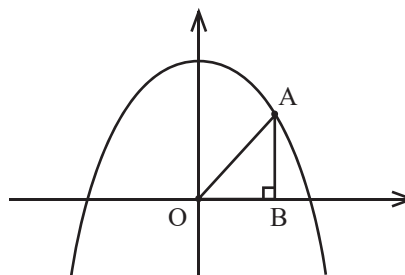
۱۱. اگر گزاره های درست و q گزاره های نادرست و r گزاره ای دلخواه باشد، ارزش گزاره زیر را مشخص کنید: $(q \wedge r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$

ریاضی و آمار ۲، فصل ۱، منطق ریاضی

۱۲. فرض کنید G محل برخورد میانه های مثلث $\triangle ABC$ است و $\triangle A'B'C'$ مجانس مثلث $\triangle ABC$ در تجانس به مرکز G و نسبت $k = -\frac{1}{2}$ باشد، شکل مسئله را رسم کنید و ثابت کنید: $S_{\triangle ABC} = 4S_{\triangle A'B'C'}$

هندسه ۲، فصل ۲، تبدیل تجانس

۱۳. مطابق شکل زیر، نقطه A در ناحیه اول مختصات روی منحنی $y = 12 - x^2$ قرار دارد. با استفاده از جدول تغییرات، مختصات نقطه A را چنان بیابید که مساحت مثلث قائم الزاویه $\triangle OAB$ بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.



ریاضی ۳، فصل ۵، کاربرد مشتق

۱۴. دو ظرف یکسان داریم، ظرف اول شامل ۵ مهره سبز و ۳ مهره آبی و ظرف دوم شامل ۴ مهره سبز و ۶ مهره آبی است. از ظرف اول یک مهره انتخاب کرده و در ظرف دوم قرار



۱۴۴

شماره ۱۳۳۱ | بهار ۱۴۰۵

چشم انداز

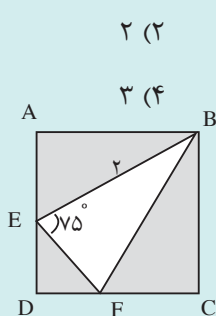
نمونه سؤال های آزمون سراسری بارویکرد مفهومی



نرگس نهبندانی، مریم محمدپور

دبیر ریاضی، مشهد مقدس

۳. چهارضلعی ABCD یک مربع است. اگر $AE = FC$ باشد، مساحت قسمت سایه خورده کدام است؟
($\angle BEF = 75^\circ$, $BE = 2$)



(۱) $\frac{3}{2}$
(۳) $\frac{5}{2}$

(۲) ۲

(۴) ۳

۱. در شکل مقابل خط d بر محور طول ها عمود است.

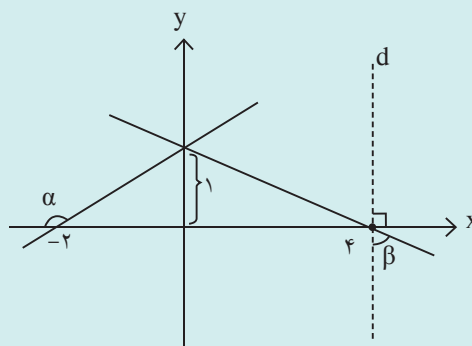
حاصل $\tan \alpha \cdot \tan \beta$ کدام است؟

(۲) -۲

(۱) ۲

(۴) -۸

(۳) ۸



هندسه ۱، فصل ۳، مساحت ها

۴. اگر ۲۵، ۱۷-۲a، ۱۶، ۴ به ترتیب مربع انحراف از میانگین داده های متمایز ۱۳، a، ۴، ۶ باشد، واریانس این داده ها کدام است؟

(۲) ۹/۵

(۱) ۹

(۴) ۱۱/۵

(۳) ۱۱

ریاضی و آمار ۱، فصل ۳، شاخص های آماری

۵. در یک دسته ۷ تایی از اعداد زوج متوالی (دسته اول)، انحراف معیار نصف میانگین است. هربار، کوچک ترین عدد دسته را حذف نموده و عدد زوج دیگر را اضافه می کنیم

ریاضی ۱، فصل ۲، مثلثات

۲. اگر تابع $f(x) = \begin{cases} ax + b + |x - 2| & x \geq 2 \\ -2x + c & x < 2 \end{cases}$ خطی

باشد و $f(1) = 0$ ، آنگاه حاصل $a\sqrt{c}\sqrt{b}$ کدام است؟

(۲) -۶

(۱) ۶

(۴) -۱۰

(۳) ۱۰

ریاضی ۱، فصل ۵، تابع



۴۵

شماره ۳۳۳ | بهار ۱۴۰۴

شود، نرخ بیکاری ۵ درصد کاهش می‌یابد. چند شغل دیگر

رایج شود تا نرخ بیکاری $\frac{2}{3}$ کاهش یابد؟

- (۱) ۵۰
(۲) ۱۲۵
(۳) ۱۷۵
(۴) ۲۵۰

ریاضی و آمار ۲، فصل ۳، تابع نمائی

۱۰. کدام گزاره، هم‌ارز منطقی گزاره زیر است؟

$$\sim [((q \vee r) \Rightarrow (q \wedge r)) \Rightarrow p]$$

$$p \wedge ((q \wedge r) \vee (\sim q \wedge \sim r)) \quad (۱)$$

$$\sim p \vee ((q \wedge r) \vee (\sim q \wedge \sim r)) \quad (۲)$$

$$(\sim p \wedge q \wedge r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r) \quad (۳)$$

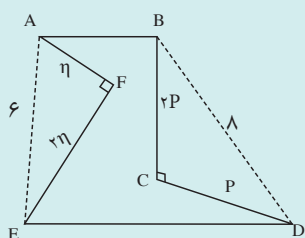
$$(p \wedge q \wedge r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r) \quad (۴)$$

ریاضی و آمار ۲، فصل ۱، منطق ریاضی

۱۱. در دو مثلث قائم‌الزاویه $\triangle AEF$ و $\triangle BCD$ از

شش‌ضلعی زیر، نسبت طول اضلاع قائمه $\frac{1}{2}$ است. اگر بدون تغییر محیط شش‌ضلعی، مساحت آن را تا حد امکان افزایش دهیم، مساحت آن ۳ برابر می‌شود. مساحت اولیه شش‌ضلعی چقدر است؟

- (۱) ۱۶
(۲) ۲۰
(۳) ۲۴
(۴) ۳۰



هندسه ۲، فصل ۲، کاربرد تبدیلات

۱۲. یک دستگاه طوری طراحی شده است که به تصادف یکی از دو حرف A و B را از ورودی می‌گیرد و پس از طی سه مرحله حرفی را در خروجی چاپ می‌کند. در هر مرحله حرف ورودی با احتمال $\frac{1}{4}$ بدون تغییر به مرحله بعد می‌رود یا به شکل حرف دیگری درآمده و به مرحله بعدی وارد می‌شود. اگر احتمال انتخاب حرف A، ۲ برابر حرف B باشد با کدام احتمال حرف A چاپ شده توسط دستگاه با حرف ورودی یکسان است؟

به طوری که اعداد دسته جدید نیز متوالی هستند. ساختن دسته‌های مختلف را تا جایی ادامه می‌دهیم که میانگین آن دسته (دسته آخر)، مجذور انحراف معیار باشد. اختلاف

بزرگ‌ترین عضو دسته اول و آخر، کدام است؟

- (۱) ۱۰
(۲) ۸
(۳) ۶
(۴) ۴

ریاضی ۲، فصل ۷، آمار و احتمال

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x^2 + (m-1)x + (m-4)}}{|x^2 + ((m-7)x + a)^2|} & x \neq a \\ \frac{2 \sin b}{3\sqrt{x+2}} & x = a \end{cases}$$

۶. اگر تابع

در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، مقدار b کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) $\frac{\pi}{3}$
(۲) $\frac{\pi}{6}$
(۳) $\frac{5\pi}{3}$
(۴) $\frac{5\pi}{6}$

ریاضی ۲، فصل ۶، حد و پیوستگی

۷. برای مقدار مشخص k، تابع زیر در $x = n$ و $x = -n$ پیوسته است. کدام مورد درخصوص n صحیح

است؟

$$f(x) = \begin{cases} [x] - [-x] & \text{زوج } [x] \\ x - [x] + k & \text{فرد } [x] \end{cases}$$

($k, n \in \mathbb{N}$)

(۱) n زوج

(۲) n فرد

(۳) برای جميع مقادیر n پیوسته است.

(۴) برای هیچ مقداری از n پیوسته نیست.

حسابان ۱، فصل ۵، حد و پیوستگی

۸. تابع زیر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است.

مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

$$f(x) = \begin{cases} (1-a)[x] + (3a^2-1)[x] & x \notin \mathbb{Z} \\ b \sin\left(\frac{\pi}{a}\right) & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) ۳

حسابان ۱، فصل ۵، حد و پیوستگی

۹. در یک منطقه ۱۵۰۰ نفر از افراد ۱۸ ساله به بالا هستند، اگر با ایجاد n شغل ۲۰ درصد از تعداد بیکارها کم



۴۶

شماره ۱۳۳ | بهار ۱۴۰۰

$$\begin{array}{ll} (1) \frac{14}{23} & (2) \frac{21}{23} \\ (3) \frac{9}{41} & (4) \frac{17}{41} \end{array}$$

آمار و احتمال، فصل ۲، احتمال

۱۳. اگر $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{a + 2[-x]}{1 - 2x} = -\infty$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} [\frac{x}{a} - x]$ کدام است؟

$$\begin{array}{ll} (1) \text{ صفر} & (2) -2 \\ (3) 2 & (4) -1 \end{array}$$

ریاضی ۳، فصل ۳، حد بینهایت و حد در بی نهایت

۱۴. معادله مثلثاتی $\sin 2x - 4 \sin^2 x \cos x = 0$ چند جواب در بازه $(-\pi, \pi)$ دارد؟

$$\begin{array}{ll} (1) 4 & (2) 5 \\ (3) 6 & (4) 7 \end{array}$$

ریاضی ۳، فصل ۲، مثلثات

۱۵. f تابع هموگرافیک، $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g^{-1}(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g^{-1}(x)}{g(x)}$ است. کدام عدد می تواند حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} f^{-1}(x)$ باشد؟

$$\begin{array}{ll} (1) \text{ صفر} & (2) \frac{1}{2} \\ (3) 1 & (4) 2 \end{array}$$

حسابان ۲، فصل ۳، حدهای نامتناهی و حد در بی نهایت

۱۶. کمترین فاصله نقاط واقع بر منحنی $y = \sqrt{x - [x^2]}$ از خط $2x - y = -2$ کدام است؟

$$\begin{array}{ll} (1) \frac{\sqrt{5}}{5} & (2) \frac{3\sqrt{5}}{8} \\ (3) \frac{\sqrt{5}}{8} & (4) \frac{3\sqrt{5}}{10} \end{array}$$

حسابان ۲، فصل ۵، کاربرد مشتق

۱۷. مقدار $a_7 = \frac{17}{12}$ از رابطه بازگشتی $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{a_1}{a_n})$ تقریبی از $\sqrt{k}$ است. اگر $k \in \mathbb{N}$ و $a_1 = k$ باشد. مقدار k کدام است؟

$$\begin{array}{ll} (1) 2 & (2) 3 \\ (3) 5 & (4) 7 \end{array}$$

ریاضی و آمار ۳، فصل ۲، الگوی خطی

۱۸. خانواده‌ای دارای ۵ فرزند شامل ۲ پسر و ۳ فرزند دختر است. قرار است ۵ نفر از اعضای خانواده با اتومبیل شخصی به مسافرت بروند. احتمال اینکه فقط والدین حق رانندگی داشته باشند و دو فرزند پسر با هم به مسافرت نروند، کدام است؟

$$\begin{array}{ll} (1) \frac{11}{21} & (2) \frac{10}{21} \\ (3) \frac{3}{7} & (4) \frac{1}{7} \end{array}$$

ریاضی و آمار ۳، فصل ۱، آمار و احتمال

۱۹. خط d به معادله $y - x = 0$ عمودمنصف خط‌المرکزین دو دایره است که شعاع یکی دو برابر دیگری است. اگر خط d بر دایره کوچک‌تر به معادله $x^2 + y^2 + 6x - 2y = r$ مماس باشد، حاصل ضرب طول نقاط برخورد دو دایره کدام است؟

$$\begin{array}{ll} (1) \frac{5}{2} & (2) \frac{5}{4} \\ (3) \frac{65}{32} & (4) \frac{65}{64} \end{array}$$

هندسه ۳، فصل ۲، مقاطع مخروطی

۲۰. حداقل چند عضو از مجموعه زیر انتخاب کنیم تا به‌طور قطع، لااقل سه عضو انتخاب شده، اعداد متوالی باشند؟

$$\begin{array}{ll} (1) 12 & (2) 11 \\ (3) 10 & (4) 9 \end{array}$$

ریاضیات گسسته، فصل ۳، ترکیبیات



۴۷

شماره ۱۳۳۱ | بهار ۱۴۰۴

لختی درخت

محمد تقی طاهری تنجانی



برای پاسخ سرگرمی
رمزبینه را پویش کنید.

چینش درخت‌ها

حرکت نباید مداد را از روی کاغذ برداشت یا آن را بر روی ضلع‌های مربع بزرگ یا روی هر یک از خط‌های نازک تشکیل‌دهنده اضلاع خانه‌ها عبور داد. مسیر حرکت تنها می‌تواند خط‌های نازک را قطع کند. در ضمن، مجاز نیستیم صفحه کاغذ را تا بزنیم یا آن را خم کنیم!

از کشاورزی خواسته شده است که ۱۰ اصله نهال را در ۵ ردیف ۴ تایی بکارد. (یعنی به هر درخت سه درخت دیگر را بتوان نظیر کرد که روی یک خط راست قرار گیرند!) حالا فرض کنید کشاورز ۹ اصله درخت را می‌خواهد در ردیف‌های سه‌تایی بکارد. حداکثر تعداد ردیف‌ها چقدر است؟

۱	۲	۳	۴
۵	۶	۷	۸
۹	۱۰	۱۱	۱۲
۱۳	۱۴	۱۵	۱۶

تعداد اعضای باشگاه

یک باشگاه ورزشی ۶ کارگروه دارد. هر عضو باشگاه در دو کارگروه آن عضویت دارد و هر دو کارگروه یک عضو مشترک دارد. این باشگاه ورزشی چند عضو دارد؟

حرکت هوشمندانه

در شکل مقابل جدولی شامل ۱۶ خانه شماره‌گذاری شده است. می‌خواهیم با کمک مداد یک مسیر ممتد را چنان رسم کنیم که از خانه شماره ۱ شروع شود و پس از فقط یک‌بار وارد شدن به هر یک از خانه‌ها، سرانجام به خانه ۱۶ برسیم. (رعایت ترتیب شماره خانه‌ها در مسیر حرکت ضرورت ندارد.) حرکت از یک خانه به خانه دیگر می‌تواند در جهت افقی یا عمودی صورت گیرد و در تمامی طول



۴۸

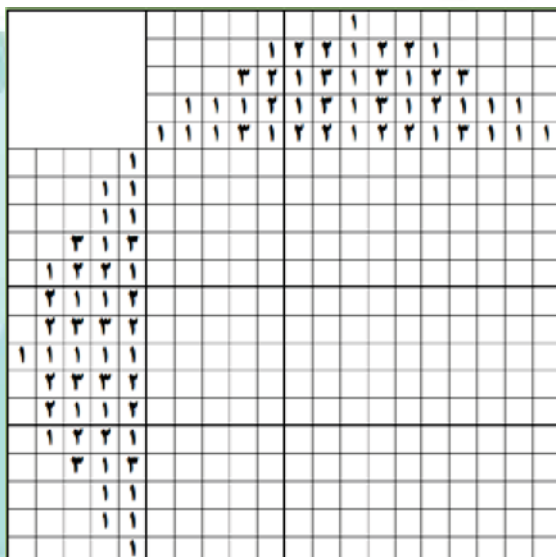
شماره سریال | بهار ۱۴۰۰

بازی عددی

محسن روایتی
دبیر ریاضی



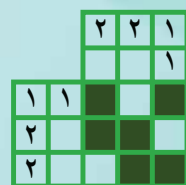
برای مشاهده
پاسخ رمزینه را
پویش کنید



نقاشی با عددها <<

روش بازی

عددهای بیرون هر سطر و ستون، تعداد ردیف‌های مربع سیاه را که در آن سطر یا ستون وجود دارند، نشان می‌دهند. برای مثال ۴، ۵، ۹ و ۲ نمایش ۴ ردیف مربع سیاه ۴، ۵، ۹ و ۲ تایی است. در واقع عددهای جدا نمایش دهنده حداقل یک فضای خالی بین آن‌ها هستند.

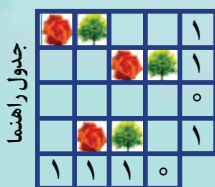


جدول راهنما

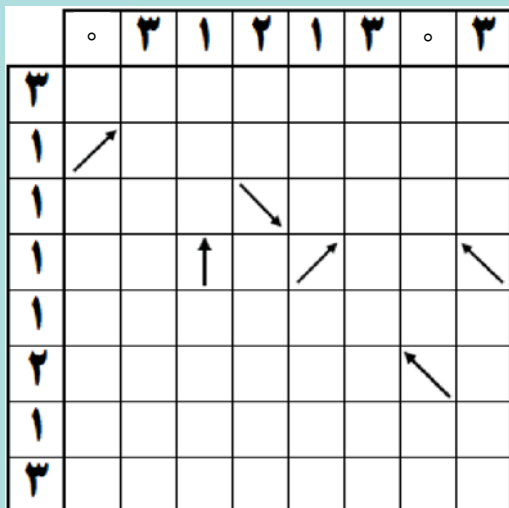
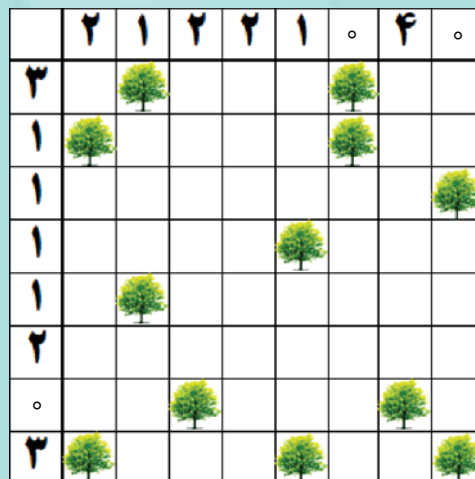
>> پارک

روش بازی

گل‌ها را در بالا، پایین یا طرفین درخت‌ها قرار دهید. گل‌ها نباید به صورت سطری، ستونی یا قطری کنار یکدیگر قرار گیرند. تعداد گل‌های هر سطر و ستون بیرون از جدول نشان داده شده است. هر درخت فقط به یک گل وصل می‌شود.



جدول راهنما

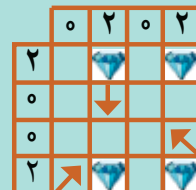


<< الماس

روش بازی

عددهای بیرون جدول تعداد الماس موجود در هر سطر و ستون را نشان می‌دهند. هر پیکانه

(فلش) نشان دهنده راستای قرارگیری یک یا چند الماس را نشان می‌دهد و داخل خانه پیکانه، الماسی وجود ندارد. ممکن است الماس بلافاصله بعد از پیکانه یا با فاصله از آن قرار گیرد و ممکن است برای تمامی الماس‌ها پیکانه وجود نداشته باشد. لذا ممکن است قبل از پیکانه هم الماس‌هایی موجود باشند.



جدول راهنما

و شاعر معاصر استاد **فاضل نظری** می فرمایند:

یا چشم پوش از من و از خویش برانم
یا تکب و آن خوش بگیرم که بگیرم!

ویک تک بیت زیبا که همیشه
پدر بزرگم بر زبان داشت:
یا سهرابی ز مودی یا حقیت مر دباش!

قسمت دوم داستان مصور
«ریاضی با جناب سعدی»
را در صفحه ۲۴ می توانید
ببینید.

«درود، درود، زنده باد»

بیا صفحه ۴۱
می خواهیم از داخل برگه
A4 عبور کنیم.

