



وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی



فصلنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

برای دانش آموزان دوره دوم متوسطه اهلیار دبیران ریاضی

شماره پیاپی ۱۲۲ / زمستان ۱۴۰۳ / دوره سی و چهارم / ۸ صفحه
www.roshdmag.ir

عدد اول هزار رقصی شلخت انگلیز!

من خواهم زنده بمانم

سه تاس عجیب

بررسی ویژگی‌های تابع $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$

ریاضی باجناب سعدی

برج مثلثی و مساحت دایره

V

امام آمد

برج آزادی
تلفیقی از
هندسه و فرهنگ
ایرانی - اسلامی
است.



- سنگین سردبیر / عدد اول هزار رقی شلغت انگیزا / ۲
- آموزش ریاضی به روش لغت وولو / مشتق فقط برای چندجمله ای ها (قسمت دوم) / ۱
- خسرو دودی، آرش رستگار / ۳
- سه تاس عجیب / معمود نصیری / ۶
- استدلال / پروانه میرزائی / ۹
- بررسی ویژگی های تابع $f(x) = x^x$ / معمود ناظم انوری / ۱۲
- می خواهیم زنده بمانم / معمدتی طاهری تنجانی / ۱۵
- سرزمین ستاره ها / غیاث الدین جعشید لاشانی (قسمت دوم) / احسان یار معمدی / ۱۷
- ریاضی با جنباب سعدی / معمد حلفت / ۲۴
- عدد طلایی / معمد کرمی زلویه / ۲۶
- شمارش در گراف ها / خسرو دودی، آرش رستگار / ۳۶
- پروژه های تحقیقاتی کوچک برای ریاضی دانان جوان / آنالوژی ها در نظریه حسابان (قسمت دوم) / ۳۳
- داستان های شیرین ریاضی / ابرج مثلث و مساحت دایره (قسمت ششم) / ۳۸
- سید معمد رضا هاشمی موسوی / ۳۸
- پیشرو / نمونه سؤال های امتحان تکالیف بارویلر در مفهومی / ۴۳
- جوادی شوهانی، علی یعقوبی / ۴۳
- چشم انرازا / نمونه سؤال های آزمون سراسری بارویلر در مفهومی / ۴۵
- جوادی شوهانی، علی یعقوبی / ۴۵
- چگونه برای الپید ریاضی آماده شویم؟ / ۴۸
- آرش رستگار، معمد حسین نادری / ۴۸



وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی

فصلنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
برای دانش آموزان دوره دوم متوسطه
همیار دبیران ریاضی
دوره ۳ / ۱۴۰۳ زمستان ۱۲
۴۸ صفحه
www.rosdmdag.ir

مدیر مسئول: سید سعید بدیعی
سردبیر: معمد حکمت
دستیار سردبیر: نرگس نهبدانی
مدیر هنری: کوروش پارسا نژاد
مدیر داخلی: الهام الیکایی
ویراستار ادبی: بهروز راستانی
طراح گرافیک: روح الله محمودیان

بهنام آیتی پور / محرم ایردموسی / ارجم خیر الله زاده
محمدرضا سید صالحی / معمد تقی طاهری تنجانی
حسین نامی ساعی / معمود نصیری
سید محمدرضا هاشمی موسوی / احسان یار معمدی

وبگاه
www.rosdmdag.ir
رایانامه
borhanmotevaseteh2@rosdmdag.ir
صفحه خرید مجلات
www.rosdmdag.ir/u/2sg

نشانی دفتر مجله
تهران، ایرانشهر شمالی، پلاک ۲۷۰
تلفن دفتر مجله
۰۲۱-۸۸۸۳۱۱۶۱-۹ (داخلی ۵۸۵)
نمابر مجله
۰۲۱-۸۸۴۹۰۳۱۶
صندوق پستی دفتر مجله
۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
صندوق پستی امور مشترکین
۱۵۸۷۵/۳۳۳۱
تلفن امور مشترکین
۰۲۱-۷۷۶۳۳۲۰۸

خانواده مجلات رشد همه
تلاش خود را کرده است
تا این مجله در دسترس عموم
دانش آموزان قرار گیرد و همه کودکان
و نوجوانان میهن عزیز اسلامی مان
امکان تهیه آن را داشته باشند.



کتابل رشد
متوسطه دوم
در شاد

سامانه
مجلات رشد

برگه اشتراک
مجلات رشد

مجله رشد برهان ریاضی متوسطه ۲، از همه دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در این زمینه ها دعوت به همکاری می کند: نگارش مقاله های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات) به همراه حل آن ها برای دانش آموزان / طرح مسائل کلمدی / مقاله های عمومی ریاضی / طرح معماهای ریاضی / نگارش با ترجمه علمی و اجتماعی ریاضی / فلسفه و تاریخ ریاضیات / زندگی نامه نکتته های تازه و لطیف ریاضیات / آموزش رایانه / اخبار ریاضی مربوط به شهر / یاد مرده شما... / مجله در اصلاح، حذف و افزودن به مقاله ها آزاد است.

■ مسئولیت هر مقاله با نویسنده آن است و مقالات ارسالی برگشت داده نمی شوند.
■ استفاده از مطالب مجله در کتاب ها یا مجله های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد.
■ مقالات خود را از طریق www.rosdmdag.ir/u/3ao ارسال کنید.
■ در انتهای مقاله های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و رایانامه (ایمیل) خود را حتما درج کنید و در ابتدای مقاله نام و نام خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمایید.

به مناسبت کشف عدد اول غول پیکر ۴۱ میلیون رقمی عدد اول هزار رقمی شکفت انگیز!

مجید حکمت

تا اینجا به زیبایی ذاتی که در ساختار و خاصیت‌های عددهای اول برای ریاضی‌دانان وجود دارد اشاره شد. ولی جالب است بدانید امنیت سایبری و الگوریتم‌های رمزنگاری مدرن، متکی به عددهای اول غول‌پیکر هستند. عددهای اول بزرگ در علوم رایانه و طراحی شبکه و در مهندسی مخابرات کاربرد دارند. همچنین پیشرفت‌ها و پیش‌بینی‌های هرچه دقیق‌تر در تحقیقات پزشکی و زیست‌شناسی، شامل تحلیل توالی‌های ژنتیکی و مدل‌سازی زیستی (بیولوژیکی) و طراحی دارو، مرهون عددهای اول غول‌پیکر است.

۳. زیباترین و سراسرترین عدد اول

حالا که از زیبایی ریاضی و عددهای اول صحبت شد، با یک شگفتانه آشنا شوید؛ یک عدد اول ۱۰۰۰ رقمی:

$10^{999} + 7$

کوچک‌ترین عدد ۱۰۰۰ رقمی که از ارقام یک، هفت و ۹۹۸ تا صفر تشکیل شده است!

برای بررسی آن با تلفن همراهتان می‌توانید نرم‌افزار پیشرفته اندروید WolframAlpha را از طریق رمزینۀ داده‌شده نصب کنید و یکی از دستورهای زیر را در آن بنویسید:

■ Is $10^{999} + 7$ a prime number?

■ prime closest to 10^{999}

دوستان عزیز! برای اطلاعات بیشتر، مطالعه مقاله «عددهای اول»، از جناب آقای دکتر سیدمحمد رضا هاشمی موسوی را در شماره ۱۲۴ برهان پیشنهاد می‌کنیم.^۳

پیروز و سربلند باشید.

پی‌نوشت‌ها

۱. عدد مرسن: عددی است که به صورت $2^n - 1$ قابلیت نوشتن دارد.
2. Great Internet Mersenne Prime Search

۳. همچنین از جناب آقای مهندس سیدمحمد رضا هاشمی موسوی به عنوان یکی از همراهان مجله سپاسگزاریم.



برای بارگیری (دانلود)
نرم‌افزار WolframAlpha
از بازار رمزینۀ روبه‌رو را پویش کنید.

سلام دوستان! به‌خوبی می‌دانید که اعداد اول عددهایی هستند که فقط بر خودشان و یک بخش‌پذیرند. عددهای اول بلوک‌های سازنده عددهای طبیعی هستند.

۱. کشف عدد اول غول پیکر ۴۱ میلیون رقمی

در خبرها داشتیم عددی اول دارای ۴۱ میلیون رقم کشف شده است. این عدد در حال حاضر به عنوان بزرگ‌ترین عدد اول شناخته می‌شود. رکورد قبلی به یک عدد اول ۲۴ میلیون رقمی تعلق داشت که حدود ۶ سال قبل کشف شده بود. انتظار نداشته باشید که این عدد ۴۱ میلیون رقمی را مرقوم کنیم، زیرا حداقل ۲۰ هزار صفحه مجله برای نوشتن آن لازم است!

البته جالب است بدانید که این عدد پنجاه و دومین عدد مرسن^۱ کشف‌شده نیز محسوب می‌شود و از این نظر نمایش $2^{4199376} - 1$ آن امکان‌پذیر است:

لوک دورانت ۳۶ ساله، برای پیدا کردن این عدد $2^{4199376} - 1$ رقمی از برنامه رایگانی به نام «جی‌آی‌ام‌پی‌اس»^۲ بهره برده است. برای اینکه به سختی کشف این عدد اول پی ببرید، خوب است بدانید که به‌دست آوردن آن با به کارگیری هزاران واحد پردازش گرافیکی در ۲۴ مرکز داده و در ۱۷ کشور دنیا انجام گرفته است! جایزه نقدی ۳۰۰۰ دلار پاداش کشف این عدد بوده است و کسانی که بتوانند اولین عدد اول صد میلیون رقمی و اولین عدد اول میلیارد رقمی را کشف کنند، به ترتیب ۱۵۰ هزار و ۲۵۰ هزار دلار دریافت خواهند کرد. امیدوارم آن شخص شما باشید؛ چون شما می‌توانید!

۲. کاربرد عددهای اول بزرگ

حالا حق دارید که این سؤال را بپرسید: «اهمیت و کاربرد اعداد اول بزرگ چیست؟» در پاسخ باید گفت: «عددهای اول بزرگ این امکان را می‌دهند که حدس‌ها و قضیه‌های نظریۀ اعداد آزمایش شوند. آن‌ها کمک می‌کنند که ریاضی‌دانان الگوهای جدیدی را کشف کنند و درک عمیق‌تری از توزیع و ویژگی‌های اعداد اول به دست آورند.»



۲

شماره ۱۳۴ | زمستان ۱۴۰۳

آموزش ریاضی به روش گفت و گو مشتق فقط برای چند جمله ای ها (قسمت دوم)

خسرو داودی
آرش رستگار

رامین و علی که در محاسبه قوی هستند، همیشه در کنار هم به مسئله های جبر فکر می کنند. هر دو با نمادها و عبارت های جبری راحت هستند، با ابزارهای موجود روان و ساده کار می کنند و آنچه را که می خواهند ثابت می کنند. همه دانش آموزان در سبک شناختی مناسب برای یاد گرفتن جبر قوی نیستند.

رامین: من اولین چیزی که باید ثابت کنم تا کارم راحت شود این است که: «مشتق مجموع دو چند جمله ای $p(x)$ و $q(x)$ برابر مجموع مشتق های آن هاست.»

به عبارت دیگر، مشتق به مجموع چند جمله ای ها احترام می گذارد. برای این کار اجازه می دهیم بعضی از ضریب های چند جمله ای، حتی ضریب پیش رو، صفر باشد تا بتوانم هر دو چند جمله ای را از یک درجه فرض کنم. فرض کنید:

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

$$q(x) = b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0$$

آنگاه:

$$p(x) + q(x) = (a_n + b_n)x^n + \dots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

دیگر بررسی اینک:

$$(p(x) + q(x))' = p'(x) + q'(x)$$

صادق و بسیار روشن است.

علی: با وجود چیزی که ثابت کردی، کافی است مشتق را برای یک تک جمله ای $a_n x^n$ تعریف کنیم؛

آقای پندآموز گفت: «اگر چه برای فهم مشتق تابع ها به مفهوم حد نیاز داریم و خط مماس و شیب آن اهمیت پیدا می کند، اما هر تابعی را می توان با یک چند جمله ای تقریب زد. به زبان دقیق تر، روی هر بازه متناهی بسته، هر تابع پیوسته ای که داشته باشیم، می توان یک چند جمله ای از درجه به اندازه کافی بزرگ پیدا کرد که نمودار چند جمله ای هر قدر که شما خواسته باشید، به نمودار تابع پیوسته نزدیک باشد. این است که برای مدل سازی تابع ها می توان از تابع های چند جمله ای استفاده کرد و این کار به طور تقریبی جواب می دهد. اما مشتق یک چند جمله ای را می توان به صورت نمادین تعریف کرد.

یعنی اگر $p(x)$ یک چند جمله ای درجه n باشد:

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

می توان مشتق را به صورت نمادین این طور تعریف کرد:

$$p'(x) = n a_n x^{n-1} + \dots + a_1$$

و دیگر به مفهوم حد و خط مماس و مانند آن اشاره نکرد. همه فرمول هایی را که درباره مشتق می دانید، می توانید خیلی ساده تر با همین فرمول بالا ثابت کنید. مثلاً در مورد مشتق مجموع و حاصل ضرب و حتی خارج قسمت چند جمله ای ها می توان همه قانون های مشتق را به سادگی اثبات کرد.

دست به کار شوید تا ببینیم چه کاری از دستتان ساخته است.»



یعنی:

$$(a_i x^i)' = i a_i x^{i-1}$$

صبر کن! وضع از این هم بهتر است. اگر یک چندجمله‌ای را در عدد c ضرب کنیم، فرمول زیر به راحتی از تعریف مشتق برای چندجمله‌ای‌ها ثابت می‌شود:

$$(cp(x))' = cp'(x)$$

بنابراین حتی ضریب a_i را هم لازم نیست در نظر بگیریم. کافی است بدانیم:

$$(x^i)' = i x^{i-1}$$

$$(p(x) + q(x))' = p'(x) + q'(x)$$

$$(cp(x))' = cp'(x)$$

رامین: در مورد ضرب چندجمله‌ای‌ها هم چون خاصیت توزیع پذیری داریم، کافی است ثابت کنیم:

$$(x^m \cdot x^n)' = (x^m)' \cdot x^n + x^m \cdot (x^n)'$$

آن وقت نشان داده‌ایم:

$$(p(x) \cdot q(x))' = p'(x) \cdot q(x) + p(x) \cdot q'(x)$$

این کار به کمی محاسبه نیاز دارد و باید جمله‌ها را مرتب

بنویسیم و مقایسه کنیم.

برای همین اول برای دو چندجمله‌ای خطی آن را محاسبه کنید. حالت چندجمله‌ای‌های درجه دلخواه هم شبیه همین است. **علی** گفت: زیر هر جمله مساوی آن را قرار می‌دهیم تا به این روش حکم را ثابت کنیم. کافی است پس از رسیدن به حکمی بدیهی در مسیر برگشت از معادلات پی‌درپی بالا برویم.

$$(x^m \cdot x^n)' = (x^m)' \cdot x^n + x^m \cdot (x^n)'$$

$$(x^{m+n})' = m x^{m-1} \cdot x^n + x^m \cdot n x^{n-1}$$

$$(m+n)x^{m+n-1} = m x^{m+n-1} + n x^{m+n-1}$$

عبارت آخر به روشنی صحیح است. پس تساوی اول هم ثابت شده است. چون درستی همه عبارت پی‌درپی معادلند. **رامین** ادامه داد: می‌توانستی هم، آن طور که معمول است از یک طرف شروع کنی و به طرف دیگر برسی. اما این کار نیاز به چرکنویس دارد و همیشه نمی‌توان آن را ذهنی انجام داد. آقای **پندآموز** گفت: حالا که به اینجا رسیدید یک سؤال سخت‌تر مطرح می‌کنم. هر تابعی را معمولاً می‌توان به شکل



ف

شماره ۱۳۴ | زمستان ۱۴۰۳

زیر بسط داد:

$$p(x) = p(\cdot) + \frac{1}{1!} p'(\cdot)x + \dots + \frac{1}{n!} p^{(n)}(\cdot)x^n + \dots \quad (*)$$

اما برای یک چندجمله‌ای درجه n می‌توان دم بسط بالا را قیچی کرد و نوشت:

$$p(x) = p(\cdot) + \frac{1}{1!} p'(\cdot)x + \dots + \frac{1}{n!} p^{(n)}(\cdot)x^n$$

بسط $(*)$ را بسط مک‌لورن می‌گویند. حالت کلی آن بسط حول عدد a است.

$$p(x) = p(a) + \frac{1}{1!} p'(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{n!} p^{(n)}(a)(x-a)^n + \dots \quad (**)$$

اگر به جای a قرار دهیم $a=0$ همان بسط مک‌لورن درست می‌شود. به بسط $(**)$ بسط **تیلور** گفته می‌شود. عبارت بسط تیلور هم برای چندجمله‌ای درجه n به شکل دم بریده درست است. اما شما سعی کنید همان بسط مک‌لورن را ثابت کنید. علی‌گفت: من با حالت کلی شروع می‌کنم و مشتق‌های پی‌درپی می‌گیرم.

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$p'(x) = n a_n x^{n-1} + \dots + 2 a_2 x + a_1$$

$$p^{(2)}(x) = n(n-1) a_n x^{n-2} + \dots + 2 a_2$$

$$p^{(3)}(x) = n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3} + \dots + 3! a_3$$

اگر همین‌طور ادامه دهیم ضریب جمله اول تبدیل می‌شود به $n! a_n$. یعنی

$$p^{(n)}(x) = n! a_n$$

که می‌شود یک چندجمله‌ای ثابت.

حال قرار می‌دهیم $x=0$:

$$p(\cdot) = a_0$$

$$p'(\cdot) = 1! a_1$$

$$p^{(2)}(\cdot) = 2! a_2$$

:

$$p^{(n)}(\cdot) = n! a_n$$

پس در حالت کلی $p^{(i)}(\cdot) = i! a_i$ و لذا $a_i = \frac{1}{i!} p^{(i)}(\cdot)$.

دیگر روشن است چرا بسط مک‌لورن درست است.

رامین پاسخ داد: «همین کار را می‌توانستی ساده‌تر به کمک استقرا ثابت کنی. یعنی بسط مک‌لورن را برای چندجمله‌ای‌های درجه n درست فرض کنی و بعد از روی آن برای چندجمله‌ای‌های درجه $n+1$ ثابت کنی. گمانم اثبات بسط تیلور هم توسط استقرا کار ساده‌تری باشد. اما برای من یک سؤال مطرح است: چرا به هر تابعی می‌توان توسط چندجمله‌ای‌ها به دلخواه نزدیک شد؟»

آقای پندآموز پاسخ داد: «اثباتش کمی پیچیده است. اما می‌توانم نکته ساده‌تری را به شما نشان دهم. اگر در n نقطه $x_1, \dots, x_n$ مقدار $p(x_i)$ داده شده باشد، مثلاً بدانیم $p(x_i) = y_i$ ، لاگرانژ روشی ارائه داده است که با محاسبه دستی یک چندجمله‌ای از کمترین درجه بسازیم که در این نقاط همان مقادیر را بگیرد. آیا شما می‌توانید بگویید چگونه؟»

احتمال شیرین

مسئله‌هایی در احتمال با پاسخ‌هایی دور از انتظار

سه تاس عجیب

محمود نصیری

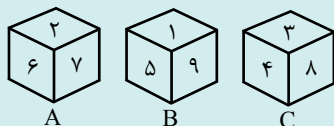
پژوهشگر ریاضی و مؤلف کتاب‌های درسی

اکنون بنا داریم مسائل جالبی از احتمال را مطرح کنیم که پاسخ آن‌ها با آنچه که شما از آن انتظار دارید، متفاوت است. اولین مسئله‌ای که قصد بررسی آن را داریم، به مسئله «تاس عجیب» معروف است.

تاس عجیب

این بازی شامل سه تاس و دو بازیکن است. تاس‌ها عادی نیستند، به این معنی که به صورت شکل‌های زیر شماره‌گذاری شده‌اند. سه وجه قابل دید آن‌ها، با عددهایی که روی هر کدام نوشته شده، شماره‌گذاری شده‌اند و سه وجه پنهان دیگر هر تاس، دقیقاً با همان سه عدد روی همان تاس چنان شماره‌گذاری شده‌اند که وجه‌های مقابل هم دارای عددهای یکسان هستند.

منظور از دو وجه مقابل، دو وجهی هستند که روی دو صفحه موازی قرار دارند.



بنابراین، روی هر کدام از تاس‌ها فقط سه عدد متمایز وجود دارد. مثلاً برای تاس A داریم: ۷، ۶، ۲. در نتیجه، آمدن هر عدد روی یک تاس دارای شانس $\frac{1}{3}$ است. برای شروع بازی، اولین بازیکن می‌تواند هر یک از سه تاس

بیشتر ما بر این باور هستیم که از احتمال درک شهودی داریم و می‌توانیم پاسخ برخی از مسئله‌های احتمال را که ظاهراً ساده به نظر می‌رسند، به طور شهودی پیدا کنیم. در حالی که این چنین ادعایی را درباره شاخه‌های دیگر ریاضیات نداریم. مثلاً افراد کمی وجود دارند که ادعا کنند برای محاسبه انتگرال یا تجزیه یک عدد بزرگ به حاصل ضرب عامل‌های اول توانایی شهودی دارند. اما خواهیم دید که این درک شهودی از احتمال و اینکه می‌توانیم به سادگی پاسخ را پیدا کنیم، در خیلی از موارد اشتباه است و معمولاً در بیش از نیمی از این مسئله‌ها، شهود آن‌ها را به بیراهه می‌برد و در نتیجه به جواب نادرست می‌رسند. بنابراین، برای اجتناب از خطا باید از استدلال‌های غیررسمی دوری کرد و به جای آن سعی کنیم با تکیه بر رویکردهای دقیق و استدلال‌های رسمی، بر اساس قوانین و اصول احتمال روش‌هایی برای حل ارائه دهیم.

به طور کلی مسئله‌های ترکیبیاتی که معمولاً زیربنای مسئله‌های احتمال هستند، با مسئله‌های شاخه‌های دیگر ریاضیات، دارای ماهیت متفاوت‌اند. کمتر این اتفاق رخ می‌دهد که شما یک مسئله حساب دیفرانسیل یا حسابان یا مسئله هندسه را حل کنید و اگر اشتباه حل شده باشد، متوجه آن نشوید. اما در یک مسئله ترکیبیاتی، برعکس آن، ممکن است به جوابی هم رسیده باشیم، اما اگر روش حل ما نادرست هم باشد، ممکن است که متوجه نادرست بودن آن نشویم.



۶

شماره ۱۳۴ | زمستان ۱۴۰۳

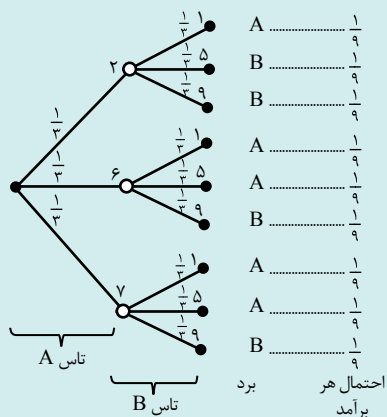


مرحله ۲. تعیین پیشامد مورد علاقه

فرض بر این است که تاس A عددی بزرگتر از تاس B بیاید. برآمدهای این پیشامد را با A نشان داده‌ایم.

مرحله ۳. محاسبه احتمال هر برآمد

برای پیدا کردن احتمال هر پیشامد ابتدا احتمال هر شاخه را مشخص و در هم ضرب می‌کنیم. بنابراین، احتمال متناظر هر برآمد برابر است با: $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$



را انتخاب کند. سپس بازیکن دوم یکی از دو تاس باقی‌مانده را می‌تواند انتخاب کند. هر دو بازیکن تاس‌های خود را می‌اندازند. بازیکنی که عدد بالای تاس آن بزرگتر باشد برنده است. فکر می‌کنید کدام یک از تاس‌ها اگر انتخاب شود، شانس برنده شدن بیشتر است؟

به عبارت دیگر کدام تاس بهتر است؟

برای مثال، تاس B ممکن است جذاب به نظر برسد، زیرا شامل عدد ۹ است که بزرگ‌ترین عدد یک رقمی است. اما از طرف دیگر شامل عدد ۱ نیز می‌شود که کوچک‌ترین عدد یک رقمی است.

به نظر می‌رسد به‌طور شهودی پاسخ روشن نیست! می‌توانیم مسئله را به روش استاندارد چهارمرحله‌ای حل کنیم.

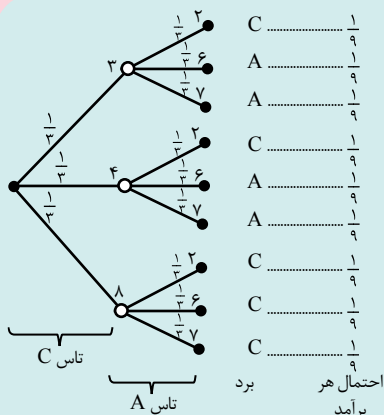
رقابت تاس A و تاس B

یعنی می‌خواهیم تعیین کنیم، وقتی تاس A در مقابل تاس B بازی می‌کند، چه اتفاقی رخ می‌دهد؟

مرحله ۱. تعیین فضای نمونه‌ای

فضای نمونه‌ای در نمودار درختی مقابل مشخص می‌شود.





بنابراین با احتمال $\frac{5}{9}$ ، تاس C تاس A را می‌زند.

این تعجب‌آور است! **تاس C بر تاس A برتری دارد.**

تاس A تاس B را می‌زند، تاس B تاس C را می‌زند و تاس C تاس A را می‌زند! یعنی تاس A نمی‌تواند تاس C را بزند. بنابراین قانون تعدی یا «تراگذاری» در اینجا برقرار نیست! به این معنی که مهم نیست اولین بازیکن کدام تاس را انتخاب کند. دومین بازیکن می‌تواند یک تاس را انتخاب کند که با احتمال $\frac{5}{9}$ آن را بزند. بنابراین بازیکنی که اولین تاس را انتخاب می‌کند، همیشه در وضعیت ضعف است.



منابع

۱. نصیری، محمود (۱۴۰۲). گشت‌وگذاری در ریاضیات گسسته (ج ۲). انتشارات مبتکران. تهران.

- David Morin, David (2016). Probability for the Enthusiastic Beginner. create space.
- M. Ross, Sheldon (2024). Introduction to Probability Models. ACA-DEMIC Press.
- Robert V. Hogg, Elliot A. Tanis; Dale L. Zimmerman (2015). Probability and Statistical Inference. Ninth Edition. Publisher Pearson.

مرحله ۴. محاسبه احتمال پیشامد

احتمال پیشامد مورد نظر برابر مجموع احتمال‌های برآمدهاست. بنابراین، احتمال آنکه عدد تاس A بزرگ‌تر از عدد تاس B باشد، برابر است با: $\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$

		پرتاب تاس B		
		۱	۵	۹
پرتاب تاس A	۲	A	B	B
	۶	A	A	B
	۷	A	A	B

مشاهده می‌کنیم که $\frac{5}{9} > \frac{1}{2}$ یعنی در بیشتر از نیمی از مواقع، **تاس A بر تاس B برتری دارد.**

رقابت تاس B و تاس C

می‌توانیم نمودار درختی، یا مانند حالت (۱) جدول مشابه رسم کنیم. در این صورت، احتمال آنکه عدد B بزرگ‌تر از عدد C باشد، برابر است با: $\frac{5}{9}$. یعنی **تاس B بر تاس C برتری دارد.**

		پرتاب تاس C		
		۳	۴	۸
پرتاب تاس B	۱	C	C	C
	۵	B	B	C
	۹	B	B	B

حالا ممکن است نتیجه بگیریم که A بهترین، B دوم و C بدترین تاس است. اما ادامه را ببینیم:

رقابت تاس C و تاس A

هم به کمک جدول و هم با نمودار درختی می‌توانیم آن را محاسبه کنیم.

		پرتاب تاس A		
		۱	۶	۷
پرتاب تاس C	۳	C	A	A
	۴	C	A	A
	۸	C	C	C



شماره ۳۳ | زمستان ۱۴۰۳

نمونه داستان آموزشی برای تدریس درس استدلال پایه یازدهم رشته های تجربی و انسانی

استدلال

پروانه میرزائی

دبیر ریاضی آبدانان استان ایلام

دیگر، به خصوص ادبیات، منطق و فلسفه، وجود دارند. در ریاضیات نیز به کمک نمادهای ریاضی و قواعد و قضایای منطقی به استدلال ریاضی می پردازیم که به شفاف تر شدن مسئله ها و حل آن ها کمک می کنند. مثلاً اگر کسی از من متنفر باشد، آنگاه پشت سر من حرف می زند. سارا از من متنفر است، حالا شما چه نتیجه ای می گیرید؟»

همه با خنده گفتند: «پس سارا پشت سر شما حرف می زند!» استاد گفت: «دقیقاً درست استدلال کردید! این نوع قیاس را قیاس استثنایی می گویند و در ریاضیات کاربرد فراوانی دارد.» **مهری** گفت: «خانم ممکن است نتیجه گیری نادرست باشد. از کجا مطمئن شویم استدلالمان درست بوده است؟» استاد گفت: «آفرین به نکته خوبی اشاره کردی. حالا توجه کنید به این مثال: اگر کسی قایقی را سوراخ کند، آنگاه قایق غرق می شود. حال اگر قایق غرق شده باشد، آیا می توان نتیجه گرفت که یک نفر قایق را سوراخ کرده است؟»

همه با تعجب گفتند: «نه، این استدلال نادرست است.» استاد ادامه داد: «این گونه استدلال ها را **مغالطه** می گویند. بنابراین برای تشخیص درستی استدلالمان از نمادهای ریاضی و قواعد منطقی استفاده می کنیم. البته قبل از نمادگذاری ابتدا به این شکل صورت بندی می کنیم:

حکم: اگر الف آنگاه ب
فرض: الف
نتیجه: . ب

حالا به این صورت نمادگذاری می کنیم:

در همه مدرسه های نوبت صبح، ساعت ۷:۳۰ کلاس ها شروع می شدند (فرض اول). مدرسه من نیز این هفته نوبت صبح بود (فرض دوم). بنابراین کلاس من هم ساعت ۷:۳۰ شروع می شد (نتیجه گیری). به سرعت آماده و سوار تاکسی شدم تا به موقع به کلاس برسم، اما از شدت سرما خیابان ها یخ زده بودند و راننده خیلی آهسته رانندگی می کرد. کسانی که برای رسیدن به مقصد عجله دارند مرتب به ساعت نگاه می کنند (فرض اول). من عجله داشتم (فرض دوم) و بنابراین مرتب به ساعت نگاه می کردم (نتیجه).

راننده از آینه متوجه عجله من شده بود؛ راننده گفت: «رانندگی در خیابان یخ زده خطرناک است» (فرض اول). من در ادامه صحبتش گفتم: «درست می فرمایید، امروز هم که خیابان ها یخ زده اند» (فرض دوم). پس کمی آرام تر شدم و چشم از ساعت برداشتم، چون متقاعد شدم که رانندگی خطرناک است (نتیجه گیری).

سرانجام با کمی تأخیر به کلاس رسیدم. دبیر ریاضی درس را شروع کرده بود. سلام کردم و اجازه ورود خواستم. خانم **ایلامی** با روی باز جواب سلامم را داد. با دست اشاره کرد که وارد کلاس شوم. رفتم و سر جایم نشستم. خانم ایلامی گفت: «مطلبی که گفته ام را دوباره تکرار می کنم تا فرزانه جان متوجه موضوع درس جدید بشود.» تخته کلاس را نگاه کردم. استاد همیشه موضوع درس و قسمت های مهم را روی تابلو می نوشت تا وقتی مطالعه می کنیم، روی آن قسمت ها، بیشتر توجه و تمرین داشته باشیم. روی تخته نوشته شده بود: «استدلال استقرایی و استدلال استنتاجی.» دبیر ادامه داد: «مطلبی که امروز برایتان بیان می کنم در برخی درس های





نظرسنجی کارکنان یک اداره تصمیم بگیریم، یا اگر چندین بار در شرایط متفاوت، تجربه و مشاهداتی داشته باشیم که آب در درجه خاصی از دما به جوش می‌آید و آن شرایط خاص ۱۰۰ درجه سانتی‌گراد باشد، و نتیجه بگیریم، آب همیشه در ۱۰۰ درجه سانتی‌گراد به نقطه جوش می‌رسد، آیا می‌توان

این شیوه را به عنوان نوعی استدلال پذیرفت؟»

خیلی از بچه‌ها گفتند: «مسلماً می‌تواند استدلالی منطقی باشد، چون ما در بیشتر موارد از این شیوه استدلال استفاده می‌کنیم؛ به خصوص در مورد مشاهداتی که در زندگی داریم.» در این لحظه **شیدا** گفت: «استاد، ما در تابستان گذشته به مسافرت رفته بودیم. در طول مسیر برای استراحت وارد یک روستا شدیم. از هر ۱۰ نفری که دیدیم، ۹ نفر چشمشان سبز بود. برای ما جالب بود و همه گفتیم: تمام افراد روستا رنگ چشمشان سبز است.»

بعد استاد گفت: «درست است. این نوع استدلال را که از مشاهدات و بررسی موضوع در چند حالت به یک نتیجه کلی می‌رسیم، **استدلال استقرایی** می‌گویند. حال توجه کنید: آیا نتیجه‌ای که ما از استدلال استقرایی می‌گیریم، همیشه درست است؟ مسلماً درست نیست.»

یک‌دفعه همه با حالت تعجب و اعتراض گفتند: «خانم ما که

$$\frac{p \rightarrow q}{p}$$

$$q \therefore$$

$$p \rightarrow q$$

$$\frac{q}{p} \therefore$$

و اگر به شکل

باشد، استدلال غلط و نتیجه‌گیری نادرست است.»

روشی خیلی ساده و قابل فهم بود و اغلب بچه‌ها با کنجکاوی مثال‌هایی را که به ذهنشان می‌آمد، در قالب نمادگذاری قرار می‌دادند. استاد گفت: «حکایت بقال و طوطی و روغن ریختن طوطی در دکان از دفتر اول مثنوی معنوی **مولانا** را حتماً خوانده‌اید...» و چند بیتی از آن را خواند:

از چه ای کل با کلان آمیختی تو مگر از شیشه روغن ریختی
از قیاسش خنده آمد خلق را کو چو خود پنداشت صاحب دلق را
استاد گفت: «در این شعر که نوعی استدلال تمثیلی در منطق است و همان استدلال قیاسی در ادبیات محسوب می‌شود، نتیجه‌گیری طوطی نادرست است.»

داشتم به ضرب‌المثل‌ها فکر می‌کردم که استاد دستی روی شانهم گذاشت و با لبخند گفت: «کجایی؟» گفتم: «داشتم به صحبت‌های شما فکر می‌کردم...» استاد ادامه داد: «به نظر شما اگر بخواهیم در مورد طرح‌های تشویقی بر اساس



۱۰

شماره ۳۴ | زمستان ۱۴۰۳

با چشم خودمان مشاهده و یا آزمایش کرده‌ایم، پس اشکال کار کجاست؟! چگونه ممکن است با چندین بار آزمایش اشتباه شده باشد؟! استاد لبخندی زد و گفت: «عجله نکنید برای رد درستی یک حکم کلی، کافی است یک مثال نقض بیاورید. یعنی با آوردن یک مثال، غلط بودن آن حکم را نشان می‌دهیم و این روش معمولاً برای رد استدلال استقرایی به کار می‌رود. مثلاً اگر حکمی کلی درباره تمام عددهای اول وجود داشته باشد، مثل اینکه: «تمام عددهای اول، فرد هستند»، حالا من عدد ۲ را که عددی اول است، در نظر می‌گیرم. آیا این عدد فرد است؟»، همه گفتند: «نه، زوج است.» استاد ادامه داد: «ارائه همین مثال که «مثال نقض» است، حکم کلی را رد می‌کند.» بعد یکی از بچه‌ها گفت: «چه خوب! پس همیشه و به راحتی با یک مثال می‌توانیم نادرستی حکم را ثابت کنیم.»

استاد خندید و گفت: «همیشه به این راحتی نیست؛ مثلاً در ریاضیات موضوعی داریم به نام «حدس گلدباخ» که می‌گوید: «هر عدد زوج بزرگتر از ۲ حاصل جمع دو عدد اول است.» که تاکنون درستی آن اثبات نشده است ولی هیچ مثال نقضی هم برای آن پیدا نشده است. بلکه به طور کلی یک مثال نقض برای نشان دادن نادرستی حکم کافی است. از طرفی باید توجه کرد که برای نشان دادن درستی یک حکم کلی، باید آن را اثبات کرد.

توجه کنید اگر نتوانیم برای نشان دادن نادرستی یک حکم مثال نقض ارائه دهیم، نمی‌توانیم به طور قاطع درستی حکم را نتیجه بگیریم.»

به هر حال با این گفت‌وگو انگار خیالمان راحت شد که بالاخره راه‌حلی وجود دارد برای آنکه از درستی یا نادرستی یک حکم مطمئن شویم. اما هنوز دقیقاً منظور استاد را متوجه نشده بودیم. بعد استاد گفت: «انگار خسته شدید. می‌خواهید ادامه درس را برای جلسه بعدی بگذاریم؟»

همه گفتند: «نه خانم، ما تازه متوجه قسمت‌های جالب ماجرا شده‌ایم. اجازه بدهید از موضوع نتیجه بگیریم.»

استاد ادامه داد: «وقتی می‌گوییم مطلبی را اثبات کنیم، یعنی اینکه بر اساس نتیجه‌گیری منطقی بر پایه واقعیت‌هایی که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم، استدلال کنیم. این نوع استدلال را «استدلال استنتاجی» می‌گوییم و قبلاً در ریاضیات خوانده‌اید و با مواردی از این نوع استدلال مواجه شده‌اید. قسمت جالب ماجرا این است: نتیجه‌ای را که با استدلال استقرایی به دست آورده‌ایم، را به عنوان نوعی «حدس» در نظر می‌گیریم و سعی می‌کنیم با این استدلال استنتاجی آن را ثابت کنیم. اگر دقت کرده باشید، اول درس را با مثال‌هایی از

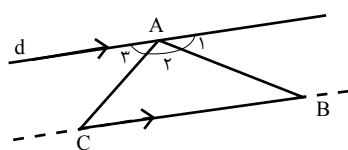
استدلال قیاسی شروع کردیم. در منطق به استدلال استقرایی، **استدلال جزء به کل** و به استدلال استنتاجی، **استدلال کل به جزء** می‌گویند. استدلال قیاسی از نوع کل به جزء است. حالا می‌خواهم دو مثال از روش اثبات با استفاده از استدلال استنتاجی برایتان توضیح بدهم؛ خوب توجه کنید. **جمع هر دو عدد زوج، عددی زوج است.**»

سپس استاد مکثی کرد و پرسید: «بچه‌ها عدد زوج را در ریاضی چگونه نشان می‌دهیم؟» همه گفتند: «به صورت $2k$ ».

و استاد ادامه داد: «حالا دو عدد داریم: اولی را $2k$ و دومی را $2k'$ فرض می‌کنیم. آنگاه مجموع آن‌ها می‌شود:

$2k + 2k' = 2(k + k')$
حالا $(k + k')$ هر عددی باشد، دو برابر آن قطعاً زوج خواهد بود. به همین راحتی درستی حکم را ثابت کردیم.

یا یک نمونه دیگر، **مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است.**



اثبات: خط d را موازی ضلع BC رسم می‌کنیم.

$$\begin{cases} (1) \quad A_1 = \hat{B} & \text{طبق قضیه خطوط موازی (مورب AB)} \\ (2) \quad \hat{A}_2 = \hat{C} & \text{طبق قضیه خطوط موازی (مورب AC)} \\ (3) \quad \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 180^\circ & \text{طبق نیم‌صفحه} \end{cases}$$

از رابطه‌های (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌گیریم که:
 $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$

خیلی مسئله‌های ریاضی و هندسی وجود دارند که با استفاده از استدلال استنتاجی حل می‌شوند. در حقیقت این شیوه اثبات، برهان مستقیم است. در مقابل نوعی از اثبات را داریم که برهان غیرمستقیم یا برهان خلف نام دارد. در برهان خلف به جای اینکه به طور مستقیم از فرض شروع کنیم و به درستی حکم برسیم، فرض می‌کنیم حکم درست نباشد (فرض خلف) و به یک تناقض یا به یک نتیجه غیرممکن می‌رسیم. به این ترتیب فرض خلف باطل و درستی حکم ثابت می‌شود. این موضوع درس جلسه بعدی است.»

با وجود خستگی، از اینکه به معلوماتم اضافه شده بود احساس رضایت می‌کردم. همگی از استاد تشکر کردیم و در ذهنمان به مثال‌های عددی حدس گلدباخ می‌اندیشیدیم.

بررسی ویژگی‌های تابع $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$

محمد کاظم انوری

دکترای ریاضی و دارندهٔ مدال المپیاد ریاضی دانشجویی

آنچه مرسوم است، توجه به ویژگی‌های عمومی تابع می‌تواند مفید و کارساز باشد. این ویژگی‌ها شامل نقاط بیشینه و کمینه (ماکسیمم و مینیمم)، نقاط عطف، نقاط برخورد با محورهای مختصات، مجانب‌های نمودار، نقاط گوشه‌ای (شکستگی و بازگشتی) و در حالت کلی نقاط بحرانی و موارد مهم دیگر است.

بخش بزرگی از تمام این اطلاعات با کمک مشتق‌های تابع (عموماً مشتق اول و مشتق دوم آن) به دست می‌آید و در کنار آن، بررسی حد تابع نقاط مختلف و حد آن در بی‌نهایت، مکمل کار است.

پیش از هر چیز، توجه می‌کنیم که برای سهولت در بررسی، دامنهٔ تابع $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ را اعداد حقیقی مثبت در نظر می‌گیریم^۱ (در حقیقت، دامنهٔ آن را محدود به این ناحیه می‌کنیم).

ابتدا، ادعا می‌کنیم که نمودار تابع به نقطهٔ مبدأ نزدیک می‌شود. به عبارت دیگر، حد آن در صفر برابر صفر است.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}} = 0$$

شاید بررسی این حد دشوار به نظر برسد، اما استفاده از دیدگاه دنباله‌ای برای آن مفید است. ساده‌ترین دنباله‌ای که به صفر میل می‌کند، دنبالهٔ $\{\frac{1}{n}\}$ است. قرار می‌دهیم:

$$a_n = f\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{n^n}$$

و روشن است که:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^n} = 0$$

پس با پذیرفتن وجود حد تابع f در نقطهٔ صفر^۲، فوراً نتیجه می‌گیریم که:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}} = 0$$

علاوه بر روش دنباله‌ای، با کمک خواص تابع لگاریتم هم می‌شد حد موردنظر را به‌دست آورد. البته با تغییر نقش

در این نوشتار، ابتدا ویژگی‌های یک تابع خاص بررسی و نمودار آن رسم می‌شود. سپس سؤال جالبی در زمینهٔ نظریهٔ اعداد که مشابه آن در مسابقه‌ها و المپیادهای ریاضی آمده است، بررسی و به کمک ابزارهای تجزیه و تحلیل (آنالیز) ریاضی، حل زیبایی برای آن پیشنهاد می‌شود.

مقدمه

دانش ریاضی، در کنار تمام سختی‌ها و پیچیدگی‌های خود، گاه شامل نکات و ارتباطات بسیار ظریف و زیبایی است که درک آن‌ها حتی برای افراد عادی هم لذت‌بخش است. شاید زیباترین جنبهٔ علم ریاضی، ارتباط بسیار ظریف و زیبایی است که میان بخش‌های متفاوت آن دیده می‌شود. گویی تمام این روابط زیبا از یک محل سرچشمه می‌گیرند. مفهوم تابع یکی از اساسی‌ترین مفاهیم در آنالیز ریاضی است. بسیاری از پدیده‌های طبیعی را با کمک این مفهوم توصیف می‌کنیم. انواع گوناگونی از تابع‌ها معرفی شده‌اند که هر کدام در حوزه‌های مختلف علوم و مهندسی کارایی دارند. با تابع‌های چندجمله‌ای، نمایی، مثلثاتی و... آشنا هستیم. در اینجا تابع خاصی را در نظر می‌گیریم که شاید در نگاه اول ترکیبی از دو نوع چندجمله‌ای و نمایی به نظر برسد:

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}}$$

اما پیچیدگی‌های آن بیشتر از تابع‌های مذکور است و نیاز به بررسی جداگانه‌ای دارد. در بخش‌های بعد، برخی از ویژگی‌های اساسی آن را بررسی می‌کنیم.

بخش اول. بررسی دامنهٔ تابع و رفتار آن نزدیک صفر

رسم نمودار تابع $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ خود به‌تنهایی می‌تواند برای هر شخص علاقه‌مند به حسابان و آنالیز تابعی جذاب و آموزنده باشد. هنگام رسم نمودار تابع‌های مختلف، مانند



۱۲

شماره ۳۳ | زمستان ۱۴۰۳

x به $\frac{1}{x}$ می‌توانیم این حد را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^x} = 0$$

بخش دوم. بررسی رفتار تابع در بی‌نهایت

اکنون، حد تابع را در بی‌نهایت بررسی می‌کنیم. برای این منظور، دوباره از دیدگاه دنباله‌ای کمک می‌گیریم. ادعا می‌کنیم که:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^n} = 0$$

این موضوع که حد دنباله $\{\frac{1}{n^n}\}$ در بی‌نهایت برابر یک می‌شود، موضوع آشنایی است. برای دیدن یک اثبات زیبا از آن، ابتدا قرار می‌دهیم:

$$\sqrt[n]{n} = 1 + a_n$$

روشن است که:

بنابراین a_n مقداری مثبت دارد. حال، از نامساوی معروف موسوم به نامساوی برنولی استفاده می‌کنیم. برای هر عدد طبیعی n و هر x مثبت داریم:

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

در نتیجه

$$\sqrt[n]{n} = (1+a_n)^n \geq 1+na_n$$

$$a_n \leq \frac{\sqrt[n]{n} - 1}{n}$$

و

که از آن نتیجه می‌شود:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

و در نتیجه آن داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1+a_n) = 1$$

البته اگر از بسط دو جمله‌ای استفاده کنیم (که البته اثبات آن دشوارتر از نامساوی برنولی است)، محاسبات اندکی ساده‌تر می‌شوند. می‌نویسیم:

$$\sqrt[n]{n} = 1 + a_n$$

در نتیجه:

$$n = (1+a_n)^n = 1 + na_n + \frac{n(n-1)}{2} a_n^2 + \dots \geq \frac{n(n-1)}{2} a_n^2$$

$$a_n^2 \leq \frac{2}{n-1}$$

بنابراین:

و یا:

$$a_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

و مجدداً از قضیه فشار (یا قضیه فشردگی) نتیجه می‌گیریم که:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

علاوه بر روش دنباله‌ای، با کمک قاعده هوییتال هم می‌شد حد موردنظر را به دست آورد.^۵ برای این منظور، قرار می‌دهیم:

$$g(x) = \ln f(x) = \ln x^{\frac{1}{x}} = \frac{\ln x}{x}$$

بنابراین در این حالت داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

و با توجه به پیوستگی تابع نمایی داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)} = e^0 = 1$$

تا اینجا دیدیم که حد تابع در بی‌نهایت برابر یک می‌شود.^۶ به اصطلاح خط افقی $y=1$ مجانب افقی تابع است.

بخش سوم. نمودار تابع و نقطه اکسترمم آن

اکنون نوبت به بررسی نقاط اکسترمم تابع می‌رسد. توجه می‌کنیم که مشتق تابع به این صورت درمی‌آید:

$$f'(x) = (x^x)' = (e^{\frac{\ln x}{x}})' = \frac{1-\ln x}{x^2} e^{\frac{\ln x}{x}} = \frac{1-\ln x}{x^2} x^{\frac{1}{x}} = \frac{1-\ln x}{x^2} f(x)$$

به صورت خلاصه داریم:

$$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} f(x)$$

البته می‌شد مشتق تابع را با گرفتن لگاریتم از دو طرف هم محاسبه کنیم. قرار می‌دهیم:

$$y = x^x$$

در این صورت داریم:

$$\ln y = \ln(x^x) = \frac{1}{x} \ln x = \frac{\ln x}{x}$$

در نتیجه با توجه به قاعده مشتق‌گیری از توابع مرکب می‌نویسیم:

$$\frac{y'}{y} = \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

و

$$\ln y = \ln(x^x) = \frac{1}{x} \ln x = \frac{\ln x}{x}$$

با توجه به ناصفر بودن $f(x)$ می‌بینیم که $f'(x)$ تنها برای $x=e$ برابر صفر می‌شود. علاوه بر این، به صورت مشابه، مشتق دوم آن به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$f''(x) = \frac{-3+2\ln x}{x^3} f(x) + \left(\frac{1-\ln x}{x^2} \right)^2 f(x)$$

$$f''(e) = \frac{-1}{e^3} f(e) < 0$$

و داریم:

پس نقطه $x=e$ نقطه بیشینه تابع است.

با توجه به مثبت بودن $f(x)$ ، درمی‌یابیم که برای $x \leq e$ صعودی و برای $x \geq e$ نزولی است که دوباره تأییدی بر این است که نقطه $x=e$ نقطه بیشینه تابع است. مقدار بیشینه مطلق تابع در این نقطه برابر است با:

$$f(e) = e^{\frac{1}{e}} \sim 1/44466786101$$

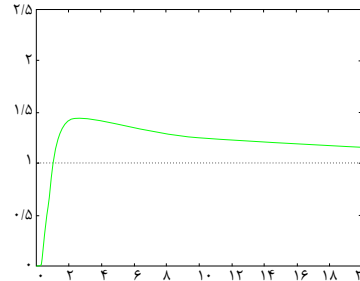
با توجه به اطلاعاتی که در مورد تابع به دست آوردیم، می‌توانیم دیدگاه خوبی از نمودار آن داشته باشیم.



۱۳

شماره ۳۳ | زمستان ۱۴۰۳

در اینجا به نمودار تابع f توجه می‌کنیم.



همان‌گونه که انتظار داریم اکسپوننسیال تابع در نقطه e ظاهر می‌شود. عدد e میان ۲ و ۴ قرار دارد.

بخش چهارم. بررسی یک مسئله جالب

سؤال: تمام جواب‌های معادله $a^b = b^a$ را در مجموعه اعداد طبیعی بیابید.

با اولین نگاه روشن است که اگر a و b با هم برابر باشند، رابطه مورد نظر صدق می‌کنند. از این نظر می‌شود گفت که این معادله بی‌نهایت جواب طبیعی بدیهی دارد. اما سؤال مهم این است که آیا جواب‌های متمایزی برای معادله هم وجود دارند؟ منظور از جواب‌های متمایز این است که a و b با هم برابر نباشند.

با بررسی بیشتر می‌بینیم که عددهای ۲ و ۴ هم در رابطه مورد نظر صدق می‌کنند. اما ظاهراً تلاش بیشتر برای یافتن جواب‌های دیگر ناکام می‌ماند. اکنون این حدس به ذهن می‌آید که معادله مزبور جواب دیگری ندارد.

می‌توانیم این معادله را با ابزارهای متداول در نظریه اعداد بررسی کنیم که شاید مهم‌ترین آن‌ها تجزیه به اعداد اول و بخش‌پذیری است.

اما در اینجا از یک دیدگاه بسیار جالب و منحصر به فرد در آنالیز تابعی سود می‌بریم و نشان می‌دهیم جواب غیربدیهی به جز ۲ و ۴ برای آن وجود ندارد.

ابتدا توجه می‌کنیم که می‌شود معادله را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$a^{\frac{1}{a}} = b^{\frac{1}{b}}$$

و یا:

$$\sqrt[a]{a} = \sqrt[b]{b}$$

اکنون تابع خاص روبه‌رو را در نظر می‌گیریم:

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}}$$

بنابراین می‌توانیم سؤال مورد نظر را به صورت زیر بیان کنیم:

عددهای طبیعی متمایزی مانند a و b را بیابید، به گونه‌ای که برای تابع f داشته باشیم:

$$f(a) = f(b)$$

به عبارت دیگر، باید عددی حقیقی مانند k بیابیم که خط $y=k$ نمودار تابع را دست‌کم در دو نقطه قطع کند و در ضمن طول آن نقاط اعدادی طبیعی باشند.

همان‌گونه که در نمودار تابع می‌بینیم، خط $y=1$ مجانب افقی تابع است و برای k های کمتر از یک، خط $y=k$ نمودار تابع را تنها در یک نقطه قطع می‌کند.

با توجه به نقطه اکسپوننسیال نمودار، لازم است که:

$$1 < k < e$$

از سوی دیگر، با توجه به اینکه طول نقطه اکسپوننسیال تابع برابر e است، اگر خطی افقی نمودار تابع را در دو نقطه قطع کند، الزاماً طول یکی از آن نقاط کمتر از e و طول دیگری باید بیشتر از e باشد. می‌دانیم که e عددی میان ۲ و ۳ است، پس اگر طول نقاط تقاطع اعداد طبیعی باشد، به ناچار یکی از آن‌ها باید برابر ۲ باشد. در نتیجه، یافتن جواب‌های طبیعی و متمایز معادله مزبور منجر به حل معادله زیر می‌شود:

که به سادگی ثابت می‌شود که تنها جواب‌های طبیعی آن برابر ۲ و ۴ هستند. در اینجا شایان گفتن است که روش‌های دیگری مبتنی بر ابزارهای موجود در نظریه اعداد برای بررسی این مسئله و مسائل مشابه آن پیشنهاد می‌شود. اما هدف اصلی ما در این نوشتار ایجاد پیوند مناسب میان بخش‌های مختلف ریاضی و ارائه یک دیدگاه زیبا در این زمینه بود. این ایده زیبا را می‌توانیم گسترش دهیم و از آن برای بررسی معادله‌های سیال متفاوت بهره ببریم.

پی‌نوشت‌ها

۱. غالباً به جای عبارت «ماکسیمم و مینییم» به اختصار از کلمه «اکسپوننسیال» استفاده می‌کنیم.
۲. در حقیقت، بررسی دامنه تابع‌هایی مانند $f(x) = (-1)^x$ محل بحث جدی است که خود نیازمند مطالعه جداگانه‌ای است و در اینجا به آن نمی‌پردازیم.
۳. لازم به توضیح است که هر تابع یک‌نوا در هر نقطه از یک بازه حد راست و چپ دارد. از آنجا که این تابع در بازه $(0, e)$ صعودی است پس حد راست آن در نقطه صفر وجود دارد.
۴. ضمن اثبات نامساوی برنولی (مثلاً با کمک استقرای ریاضی) در می‌یابیم که شرط مثبت بودن x ضروری نیست و می‌شود آن را با شرط ضعیف‌تر $x \geq -1$ عوض کرد.
۵. می‌دانیم که قاعده هویتنال هم برای حالت $\frac{0}{0}$ و هم برای حالت $\frac{\infty}{\infty}$ قابل استفاده است.
۶. مشابه توضیح قبل در مورد وجود حد تابع در نقطه صفر، از آنجا که این تابع در بازه (e, ∞) نزولی است پس حد آن در بی‌نهایت وجود دارد.
۷. برای مشتق‌گیری از تابع‌های نمایی، یک راه خوب این است که ابتدا از دو طرف لگاریتم بگیریم.



۱۴

شماره ۱۳۴ زمستان ۱۴۰۳

می خواهیم زنده بمانیم

محمد تقی طاهری تنجانی

پژوهشگر ریاضی و مؤلف کتاب‌های درسی

پدربزرگ نگاه معنی‌داری به استاد صالحی کرد و گفت: «حتماً قاعده‌ای دارد که از خودتان شروع کردید تا پسران جایزه را ببرند؟»

آقای صالحی گفت: «اینکه قاعده‌ای دارد حرف درستی است، ولی من فارغ از آن از خودم شروع کردم. به یاد داشته باشید اگر ۷ نفر باشیم، شماره ۶ برنده می‌شود. حالا اگر ۸ نفر بودیم چطور؟»

از مادربزرگ خواستم به جمع ما بپیوند. یک صندلی بین آقای صالحی و پدربزرگ برایش گذاشتم. حالا ۸ نفر شده بودیم. با شروع از آقای صالحی و همان روند یکی حذف یکی بماند، نفر هشتم یعنی پدر جایزه را برد!

آقای صالحی رو به ما بچه‌ها کرد و گفت: «حالا بروید و روی کاغذ برای عددهای متفاوت تمرین کنید. تا قاعده را بیابید و ما بزرگ‌ترها را به حال خودمان بگذارید.»

من، حامد و رامین به داخل پذیرایی رفتیم. گفتم: «برای اینکه زودتر به نتیجه برسیم، من عدد ۳۰، حامد ۳۲ و رامین ۳۵ را بررسی کنیم.»

برای ۳۰ عدد ۲۸ام، برای ۳۲ همان و برای ۳۵ عدد ۶ باقی ماند. حالت‌های دیگر را هم آزمایش کردیم. نتوانستیم ارتباطی بین عددها و جواب‌ها بیابیم. نزد آقای صالحی برگشتیم. اظهار عجز و ناتوانی کردیم و از آقای صالحی برای یافتن قاعده کمک خواستیم.

آقای صالحی گفت: «بنشینید تا هم تاریخچه مسئله را برایتان بگویم و تا با هم به قاعده کلی برسیم.

رومیان باستان برای تنبیه سربازانی که مرتکب خیانت یا گردنکشی می‌شدند روش‌های خاصی داشتند. یکی از این

عصر یک روز پاییزی بود. پدربزرگ استاد صالحی و خانواده‌اش را به باغ دعوت کرده بود. بوی آتش و دود و چای ذغالی و دم‌گرم استاد صالحی، دورهمی‌مان را دلچسب کرده بود. آقای صالحی از دوستان قدیمی پدربزرگ است و در دبیرستان شهرمان به ما ریاضی درس می‌دهد. آن قدر زیبا و دلچسب که خستگی کیلومترها راه را که از روستا به شهر می‌رویم، از یادمان می‌برد. از او خواستیم مثل همیشه ما را با مسئله‌ای چالشی درگیر کند.

استاد صالحی همان‌طور که چای را در نعلیکی می‌ریخت گفت: «باعث افتخار هست که شما را اینقدر مشتاق می‌بینم. برایتان یک مسئله طرح می‌کنم که خودم برای حلش وقت زیادی صرف کردم. برای آمادگی ورود به مسئله فرض کنید پدربزرگ بخواهد جایزه‌ای به یک نفر از ما بدهد و شرطش این باشد که از یک جا شروع کنیم و نفر اول حذف و نفر دوم بماند، نفر سوم حذف و همین‌طور یک‌درمیان مرتب یکی حذف و دیگری بماند تا فقط یک نفر بماند. چه کسی جایزه را می‌گیرد؟»

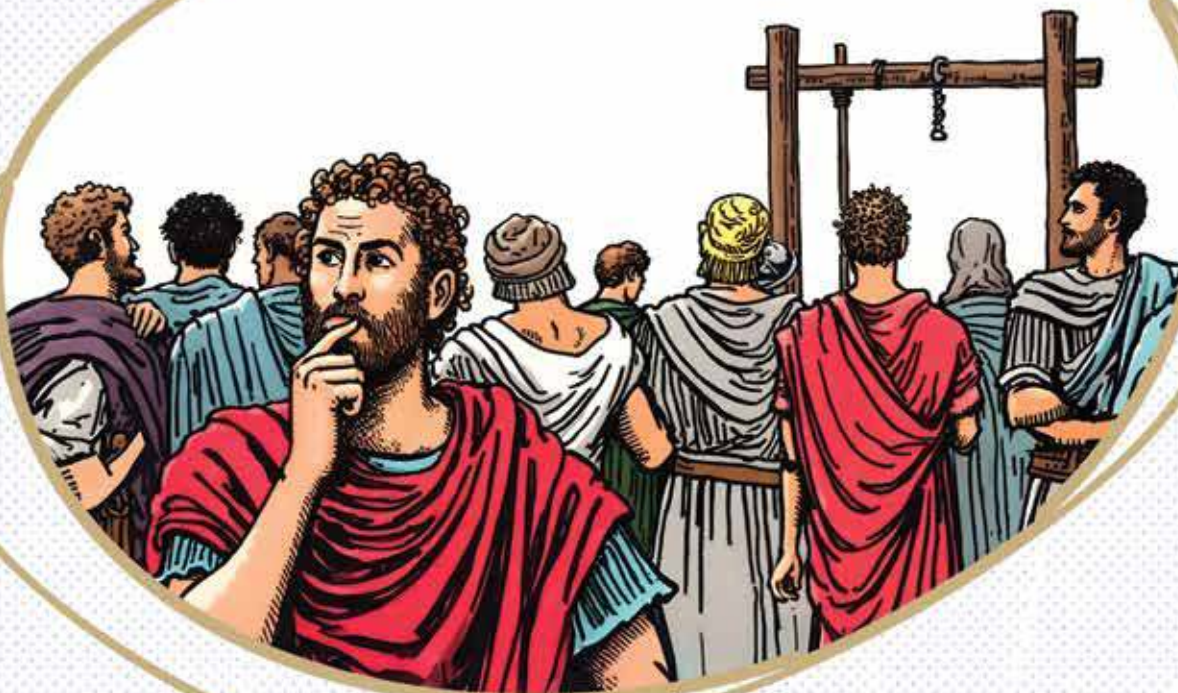
افراد دور میز را شمردم. با خودم ۷ نفر می‌شدیم: آقای صالحی، پدربزرگ، حامد، من، همسر آقای صالحی، پسرشان رامین و پدرم. خب از کی شروع کنیم؟

آقای صالحی گفت: «از من شروع می‌کنیم» و از روی صندلی بلند شد. در جهت حرکت عقربه‌های ساعت نفر بعدی پدربزرگ بود که می‌ماند. نفر بعدی **حامد** بود که حذف می‌شد و من که می‌ماندم. خانم صالحی هم حذف شد و **رامین** ماند و پدرم حذف شد. در دور بعدی پدربزرگ باقی ماند و من حذف شدم و در پایان رامین برنده این مسابقه شد.



۱۵

شماره ۱۳۴ | زمستان ۱۴۰۳



اگر سه نفر باشند، نفر اول اعدام، نفر دوم آزاد و نفر سوم اعدام می‌شود.

اگر چهار نفر باشند، نفر اول اعدام می‌شود و چهارمی باقی می‌ماند. بعد می‌ماند. سومی اعدام می‌شود و چهارمی باقی می‌ماند. بعد باید برگردیم به نفر دوم که آزاد بود. او اعدام و در آخر نفر چهارم آزاد می‌شود. سازمان‌دهی داده‌ها از طریق جدول به ما کمک می‌کند بتوانیم الگویی را از دل آن‌ها کشف کنیم و اطلاعات پنهان در داده‌ها را به دست آوریم. این کار یکی از روش‌های مؤثر برای دسته‌بندی و مرتب کردن مقدار زیادی داده و اطلاعات است و یکی از راهبردهای ساده ولی کارا برای حل مسئله‌هاست.

این اطلاعات را در جدولی خلاصه می‌کنیم و جدول را ادامه می‌دهیم تا به نکته‌های جالبی در مورد آن برسیم. با نگاه به جدول به روند شکل‌گیری عددها توجه می‌کنیم. در یک سری موارد شماره جایگاه رها شده از اعدام با تعداد محکومان برابر است، در حالتی که محکومان تعدادشان ۱، ۲، ۴، ۸، ۱۶، و... باشد، این عددها ویژگی خاصی دارند؟

روش‌ها چنین بود که هزار نظامی خیانتکار و سرکش را در حالی که به چوبه‌های دار شماره‌گذاری شده بود بسته شده بودند، بر محیط دایره‌ای به فاصله‌های مساوی از یکدیگر گرد می‌آوردند و اجرای حکم اعدام را از فرد بسته شده به تیر (۱) شروع می‌کردند و یک‌درمیان نوبت اعدام نفر بعدی می‌شد. این روند را آن‌قدر تکرار می‌کردند تا به یک نفر باقی‌مانده برسند. او را رها می‌کردند تا به دیگر سربازان بپیوندند و ماجرا را برای عبرت آن‌ان بازگوید. هریک از این سربازان می‌خواستند زنده بمانند و خیلی دوست داشتند قاعده‌ای را بدانند و شماره‌ای را انتخاب کنند تا زنده بمانند.» استاد صالحی همان‌طور که سینه‌اش را صاف می‌کرد گفت: «من با این مسئله که برخورد کردم، کوشیدم با مثال‌های عددی متفاوت آن را بررسی کنم. حالا چند برگه کاغذ بیاورید تا توضیحاتم را تکمیل کنم. برای حل مسئله ابتدا با حالت‌های خاص شروع می‌کنیم. فرض کنیم تعداد نفرات فقط یک نفر باشد. واضح است که این فرد باقی می‌ماند. اگر دو نفر باشند، نفر اول اعدام و نفر دوم آزاد می‌شود.



۱۶

شماره ۱۳۳ | زمستان ۱۴۰۳

شماره جایگاه رهاشدگان از مرگ	تعداد محکومان N
۱	$2^0=1$
۲	$2^1=2$
۲	۳
۴	$2^2=4$
۲	۵
۴	۶
۶	۷
۸	$2^3=8$
...	...
۱۲	۱۴
۱۴	۱۵
۱۶	$2^4=16$
...	...
۳۰	۳۱
۳۲	$2^5=32$

شماره جایگاه رهاشدگان از مرگ	تعداد محکومان N
۱	۱
۲	۲
۲	۳
۴	۴
۲	۵
۴	۶
۶	۷
۸	۸
...	...
۲	۱۴
۱۴	۱۵
۱۶	۱۶
...	...

حالا شما می‌توانید با عددهای دیگر آزمایش کنید! آقای صالحی به ساعتش نگاه کرد و گفت: «آه خیلی دیر شده، ما باید برویم. خیلی کار برای فردا دارم.»
درحالی‌که بلند می‌شد رو به ما کرد و گفت: «بچه‌ها شما می‌توانید با قاعده‌ای که برایتان مطرح کردم با دوستانتان مسابقه‌های زیادی برقرار کنید. حالا بگویید اگر تعداد ۱۵۰۰ نفر باشد، کدام فرد باقی می‌ماند.»

حامد گفت: «باید اولین توانی از ۲ را که از ۱۵۰۰ بیشتر است پیدا کنیم که می‌شود: $2^{11}=2048$ »

آقای صالحی گفت: «آفرین! مرحله بعد اختلاف 2048 با ۱۵۰۰ است که می‌شود ۵۴۸. پس شماره فردی که می‌ماند چه شماره‌ای است؟»

گفتم: «طبق قاعده‌ای که گفتید، ما باید از 10^{11} دو برابر ۵۴۸ را کم کنیم: $2 \times 548 - 2048$ که می‌شود: ۹۵۲.»

آقای صالحی درحالی‌که از ما دور می‌شد و با اشاره سر عدد مرا تأیید می‌کرد گفت: «اگر توانستید، قاعده‌ای را که من به دست آورده‌ام ثابت کنید. خودم هم برای اثبات آن فکری دارم. تا دیدار بعدی خداحفظ!»

بله خوب متوجه شدید! همگی توان‌های عدد دو هستند. حالا جدول را جور دیگری بازنویسی می‌کنیم. خب یک قاعده خوب به دست آوردیم. اگر تعداد به صورت توانی از دو باشد، آخرین فرد رها می‌شود. آیا می‌توانیم برای بقیه حالت‌ها هم از توان‌های دو کمک بگیریم؟ مثلاً وقتی: $N=3$ ، جواب ۲ است. یا وقتی $N=6$ جواب ۴ است. دست‌به‌کار می‌شویم: $3^2=9$ و $3=9-6$ و $7=2^3-1$ و $7=2^3-2$ و $14=2^4-2$.
به نظر می‌رسد بین توان عدد ۲ و مقداری که کم می‌شود و خود عدد N ارتباطی وجود دارد.

اگر تعداد محکومان به صورت 2^n نباشد، ولی بتوان آن را به صورت $2^n - a$ در نظر گرفت، شماره رهاشده از مرگ $2^n - 2a$ می‌شود. مثلاً اگر تعداد محکومان ۳۱ باشد، داریم: $31=2^5-1$. پس شماره محکومی که آزاد می‌شود: $3^0=2^5-2 \times 1=3$.

اگر تعداد محکومان ۱۰۰ باشد، داریم: $100=2^7-28$. پس شماره محکومی که آزاد می‌شود $2^7-2 \times 28$ یا شماره ۷۲ است. حال در مورد تعداد ۱۰۰۰ نفر داریم: $1000=2^{10}-24$. پس شماره محکوم آزادشده $2^{10}-2 \times 24$ و ۹۷۶ است!



۱۷

شماره ۱۳۳ | زمستان ۱۴۰۳



احسان یارمحمدی

پژوهشگر، دکترای مدیریت صنعتی - مالی

قصد داریم ریاضی‌آموزان و علاقه‌مندان به تاریخ ریاضی و دانش در ایران را با این شخصیت بی‌بدیل در عرصه دانش و فرهنگ ایران زمین آشنا سازیم. به همین دلیل نخست به ارائه سطرهایی از کتاب **از سمرقند به کاشان: نامه‌های غیاث‌الدین جمشید کاشانی به پدرش به قلم محمد باقری** که چاپ نخست آن در سال ۱۳۷۵ در انتشارات علمی و فرهنگی به زیور طبع آراسته شده است، می‌پردازیم و سپس مواردی از مستند مزبور را در پی خواهیم آورد.

غیاث‌الدین جمشیدبن مسعودبن محمود طبیب‌کاشانی ریاضی‌دان و اخترشناس نامی ایران در قرن نهم هجری است. در نوشته‌های عربی او را «الکاشی» خوانده‌اند و در نوشته‌های غربی بر همین اساس نام «الکاشی» به کار رفته است. کاشانی در حوالی سال ۷۹۰ هجری قمری به دنیا آمد. در سال ۸۲۴ از زادگاهش کاشان روانه سمرقند شد و در سال ۸۳۲ هجری درگذشت.

کاشان - شهر قالی و گل‌سرخ - در ۲۰۰ کیلومتری جنوب تهران، در حاشیه غربی دشت کویر و بر نیمه راه تهران - اصفهان قرار دارد. در پایان قرن هشتم هجری این شهر همچون دیگر شهرهای ایران تحت تسلط تیمور و سپس پسرش شاهرخ بود. در این دوران خاطره کشتارها، ویرانی‌ها و تیره‌روزی‌های عهد حمله مغول زنده شد و در

• کارگردان: حسن هدایت

• تهیه‌کننده: پیمان جعفری

• پژوهش و روایت: حسن هدایت

• تصویر: فرهاد صالحی

• تدوین: حسن هدایت و کیوان رضایی

• صدابردار: احمد رضا طائی

• گوینده متن: محمدحسین شمس

• سال تولید: ۱۳۹۱-۱۳۹۰

• تهیه‌شده در گروه علمی فرهنگی مرکز سیما فیلم

جمشیدبن مسعودبن محمود طبیب کاشانی

ریاضی‌دان و اخترشناس برجسته و صاحب‌سبک ایرانی که هم‌زمان با ریاضی‌دان و ستاره‌شناس نامدار دیگر ایرانی **الخَبیب** می‌زیست و به‌واسطه آشنایی و همکاری که بین او و **الخَبیب**، پادشاه دانش‌دوست و دانش‌پرور ایران‌زمین رخ داد، توانست با خلق آثاری چون **سَلَمُ السَّمَاء (نردبان آسمان)**، **مفتاح الحساب**، **رساله محیطیه**، **رساله وتر و جیب و زیج خاقانی فی تکمیل الزیج ایلخانی** خدمات ارزنده‌ای به ایرانیان و جهانیان عرضه دارد و باعث اعتلای نام ایران و ایرانی در سراسر عالم هستی شود. در این مقاله با معرفی قسمت دوم مستند **غیاث‌الدین جمشید کاشانی**



۱۸

شماره ۱۳۴ | زمستان ۱۴۰۳



دولت‌شاه سمرقندی در تذکرة الشعراء (تألیف

۸۹۲) آورده است: «... اما سلطان مغفور سعید الغیبیگ گورکان سقی‌الله برهانه پادشاه عالم و عادل و قاهر و صاحب همت بوده و در علم نجوم مرتبه عالی و در معنای موی می‌شکافت. درجه عالمان به عهد او به ذروهٔ اعلیٰ بوده و فضلا را به دور او مراتب عظمی، در علم هندسه دقیق‌نما و در مسائل هیئت مجسطی گشا بود و فضلا و حکما متفق‌اند که به روزگار اسلام، بلکه از عهد ذوالقرنین تا این دم، پادشاهی به حکمت و علم مثل میرزا الغیبیگ گورکان بر مستقر سلطنت قرار نیافته، در علوم ریاضی وقوف تمام داشت. چنان که رصد ستارگان بست به اتفاق حکمای عهد خود چون مفخرالحکما و العلما قاضی‌زادهٔ رومی و مولانا غیاث‌الدین جمشید و آن هر دو بزرگوار فاضل آن کار به اتمام نارسانیده وفات یافتند و سلطان همگی همت بر اتمام آن کار گماشته، باقی رصد را از میرزا به اتمام رسانید و زیج سلطانی اخراج نمود و خطبه به نام خود نوشت و الیوم نزد حکما آن زیج متداول و معتبر است و بعضی آن را بر زیج نصیری ایلخانی ترجیح می‌کنند و در خطهٔ سمرقند مدرسهٔ عالی بنا فرمود که در اقالیم به زینت و رتبت و قدر آن مدرسهٔ عالی نشان نمی‌دهند و الیوم در آن مدرسهٔ عالی زیاده از صد نفر طالب علم متوطن و موظف‌اند...».

چهار سال بعد، یعنی در سال ۸۲۴، الغیبیگ ساختمان رصدخانه‌ای را آغاز کرد تا در آن دنبالهٔ کار رصدخانهٔ مراغه گرفته شود. این رصدخانه نزدیک سمرقند و در سمت شمال‌شرقی آن، بر فراز تپه‌ای به نام «کوهک» که امروزه «چوپان‌آتا» خوانده می‌شود و رودخانهٔ «آب رحمت» از کنارش می‌گذرد، بنا شد. الغیبیگ برای طراحی و ساخت رصدخانه و بهره‌برداری از آن، گروهی از دانشمندان مشهور، از جمله جمشید کاشانی، قاضی‌زادهٔ رومی، علاءالدین قوشچی، معین‌الدین کاشی و دیگران را به سمرقند دعوت کرد.

پی آن جنبش‌های کوچک و بزرگ محلی همچون حروفیه و نقطویه پا گرفت. تیمور از یک سو شهرهای آبادی را که فتح می‌کرد ویران می‌ساخت و از سوی دیگر می‌کوشید تا شهرهای آسیای میانه یعنی مرکز قدرت خود را آباد کند. با این سیاست بسیاری از هنرمندان و دانشمندان بین‌النهرین، آسیای صغیر، سوریه، ایران و هند را اسیر کرد و به ماوراءالنهر برد. به‌خصوص عدهٔ زیادی از دانشمندان و صنعتگران را در پایتخت خود سمرقند گرد آورد. چنین بود که در دورهٔ او سمرقند رونق بسیار یافت.

پس از تیمور، پسرش شاهرخ ادارهٔ سمرقند و تمامی ماوراءالنهر را به پسر خود الغیبیگ (نوهٔ تیمور) سپرد و خود در هرات حکومت می‌کرد. الغیبیگ زیر نظر سارای خاتون، همسر تیمور، از تربیت خوبی برخوردار شد و ۴۰ سال بر سرزمینی وسیع فرمان راند. مادرش گوهرشاد به ایجاد بناهای باشکوه علاقه‌مند بود و به همراه شوهر خود شاهرخ در ترمیم خرابی‌های امیر تیمور کوشید و چندین مدرسه و مسجد از جمله مسجد گوهرشاد مشهد را ساخت.

برادر الغیبیگ، بایسنقر در کتاب‌دوستی و تشویق و حمایت اهل علم و هنر شهرتی فوق‌العاده یافت. در چنین محیط خانوادگی مساعدی، الغیبیگ نیز با شوق به آبادانی و ترویج علم و تحقیق پرورده شد. او همچون تیمور سیاست تقویت و تکامل سمرقند را، منتها با شیوه‌های مسالمت‌آمیزتر در پیش گرفت. الغیبیگ پشتیبان دانش و هنر بود و خود به فعالیت‌های نجومی می‌پرداخت. او در مقدمهٔ زیج خود اشاره می‌کند که «علوم حکمی به تغییر ملل و ادیان و اختلاف کلمهٔ زمان غبار تغییر و تبدیل به پیرامون آن نگردهد.» الغیبیگ مکتبی در نجوم بنیان گذاشت که به نام خود او خوانده می‌شود.

الغیبیگ در سال ۸۲۰ هجری مدرسهٔ باشکوهی در سمرقند ساخت که همچنان پابرجاست و بی‌گمان دادگری و علم‌پروری الغیبیگ در کنار مهارت فنی و هنری استادکاران ایران و نواحی دیگر، پشتوانهٔ ماندگاری این بنا در طول قرن‌هایی بوده که دست زمانه بسیار کاخ‌ها را به کوخ بدل کرده است. الغیبیگ پس از ساختن مدرسهٔ سمرقند یکی از دانشمندان برجسته به نام محمد خوافی را مدرس آن مدرسه کرد. این شخص ظاهری ژولیده و سخت‌فقرانه داشت، ولی وقتی الغیبیگ از او سؤالاتی کرد و به میزان دانش وی پی برد، او را به گرمابهٔ دربار فرستاد و جامه‌های فاخر پوشانید و در روز افتتاح مدرسه همراه نود تن از دانشمندان سمرقند بر سر درس او حاضر شد. الغیبیگ در بخارا و غجدوان نیز مدرسه ساخت.



۱۹

شماره ۱۹ | زمستان ۱۴۰۳

احتمالاً منشأ دعوت کاشانی به سمرقند این بوده که وی قبلاً زیجی را که در کاشان تدوین کرده بود به نام شاهرخ تیموری (پدر الغیبیگ) ملقب به خاقان که حاکم هرات بود زیج خاقانی خوانده و آن را به میرزا الغیبیگ امیر سمرقند تقدیم کرده بود. در این باره روایتی شفاهی نیز هست که مرحوم **محیط طباطبائی** آن را چنین نقل کرده است:

«قاضی زاده رومی که یکی از دانشمندان کشور روم (آسیای صغیر) بود و برای ملاقات میرزا الغیبیگ تیموری،

گفت: من این اسطرلاب را به کسی می‌فروشم که با آن بتواند جیب (سینوس) یک درجه را استخراج کند و به مشکلات من در فن هیئت و ریاضی پاسخ گوید. قاضی زاده از استخراج جیب و پاسخ پرسش‌های آن مرد عاجز آمد و خود از او سؤالاتی درباره مشکلات هیئت و نجوم کرد و جواب یکایک را صحیح و سریع شنید. از هوش تند و معلومات فراوان او حیران شده، نامش را پرسید و دانست غیاث‌الدین جمشید است. پیوند دوستی در میانه بسته شد و چون قاضی زاده به سمرقند رسید و دانست الغیبیگ در صدد ترتیب دادن و تدوین زیج تازه‌ای است، به او گفت: برای انجام این کار تنها کسی را که شایسته می‌دانم یک مرد پنج‌وجبی است که از زمین تا آسمان را واجب و جب خوب می‌داند. الغیبیگ چون از حال غیاث‌الدین آگاه شد، کس فرستاد و او را از کاشان به سمرقند خواست و کار رصد را به او واگذار کرد.»

کاشانی که «**بطلمیوس ثانی**» لقب گرفته پیش از رفتن به سمرقند آثاری در نجوم تألیف کرده و شخصاً به رصد می‌پرداخته در نسخه ناقصی از یک زیج خود که در کتابخانه آستان قدس رضوی موجود است و مرحوم طباطبائی آن را **زیج تسهيلات** دانسته و به گمان پروفیسور **کندی** قسمتی از زیج خاقانی اوست می‌گوید:

«سه خسوف رصد کردیم در بلده کاشان و اواسط قمر از آن استخراج کردیم... اما وسط خسوف سوم در شب هیجدهم شهریورماه قدیم سنه ست و سبعین و سبعمائه (۷۷۶) یزدجردی (= ۸۱۰-۸۰۹ هجری) بوده...»

کاشانی پس از رفتن به سمرقند در ایجاد رصدخانه و تدوین زیج نقش اساسی داشت، چنان که **عبدالعلی بیرجندی** در شرح زیج الغیبیگ آورده است: «اصل رصد سمرقند از آثار طبع لطیف اوست» و خود کاشانی در نامه‌ای که از سمرقند به پدرش نوشته، اشاره کرده است که: «بنای عمارت رصد به وجهی که این بنده شرح داده فرمودند.»

خواندمیر مورخ قرن نهم هجری هم در **حبیب‌السیر** درباره الغیبیگ می‌گوید: «... و در سنه ۸۲۴ آن خسرو بی‌مانند در وسط بلده فاخره سمرقند مدرسه رفیع و خانقاهی منیع بنا نموده و... همچنین فرمان داد استادکاران در آن بلده فردوس‌نشان رصدی بنیان نهادند و بطلمیوس ثانی مولانا غیاث‌الدین جمشید و جامع کمالات انسانی مولانا معین‌الدین کاشانی در ترتیب آن بنا سعی و اهتمام دادند.»

و در جای دیگر می‌گوید: «... در زمان دولتش جمعی کثیر از آن طایفه (علماء) در بلده سمرقند مجتمع گشته

فرمانروای ماوراءالنهر از راه عراق عازم سمرقند بود، ضمن مسافرت چون به شهر کاشان رسید، روزی برای یافتن هم‌زبانی ریاضی‌دان در کوی و برزن و بازار آن شهر می‌گشت. اتفاقاً بر حجره کوچکی گذشت که مردی کوتاه‌قامت آنجا نشسته بود و در کتابی نظر می‌کرد و در پیرامون خود مقداری کتاب و گره و اسطرلاب و ابزارهای دیگر نجومی گذاشته بود. قاضی زاده به قرینه دریافت که این مرد باید ریاضی‌دان و ستاره‌شناس باشد. به غایت خشنود گشت و برای کشف این معنی از در درآمد و بر او سلام کرد و پرسید: مولانا، این‌ها چیست؟ مرد کوتاه پاسخ داد: می‌خواهی چه کنی؟ قاضی زاده گفت: می‌خواهم بخرم. پرسید: چه می‌خواهی بخری؟ گفت: خریدار اسطرلاب هستم. دوباره پرسید: چگونه اسطرلابی به کار تو می‌آید؟ قاضی زاده یک قسم اسطرلاب را نام برد. مرد حجره‌نشین



۲۰

شماره ۱۳۴ زمستان ۱۴۰۳

بودند و... از آن جمله یکی مولانا غیاث‌الدین جمشید که در علم هیئت و ریاضی و فن نجوم عدیل و نظیر نداشت و در وقتی که میرزا الغ بیگ رصد می‌ساخت آن جناب به اتفاق مولانا معین‌الدین کاشی... به تمشیت آن مهم می‌پرداختند.»

معین‌الدین کاشی که در اینجا از او نام برده شده، به نوشتهٔ مرحوم **محیط طباطبائی**، خواهرزادهٔ جمشید کاشانی بوده که به همراه وی از کاشان به سمرقند رفته و در کار رصد مشارکت داشته و آثاری از کاشانی به خط زیبای او باقی مانده است.

بنای رصدخانهٔ سمرقند در سال ۸۲۵ (یا ۸۲۷) به پایان رسید. کاشانی ۵ تا ۷ سال پس از شروع کار رصد یعنی تا زمان مرگش در سال ۸۳۲، در آن شرکت داشت. زیج الغ بیگ ۹ سال پس از مرگ کاشانی در سال ۸۴۱ آماده شد. الغ بیگ در مقدمهٔ این زیج از همکاران و دستیاران خویش یاد کرده و با ستایش و احترام از کاشانی نام برده است.

مرحوم **آیدین صایبلی** در کتاب **رصدخانه در اسلام** می‌گوید: «رصدخانهٔ سمرقند در نخستین رصدخانه‌های اروپا تأثیر داشته است. از کارهای مهم کاشانی اختراع کسره‌های اعشاری است که سال‌ها بعد اروپاییان - ظاهراً مستقل از او - آن را اختراع کردند. وی دو قرن پیش از **کیپلر** در الحاق‌های اول و دوم **نزهة الحقائق** مدار ماه و عطارد را بیضی دانسته است. کاشانی مقدار π را با دقت کم‌نظیری حساب کرد و سینوس زاویهٔ یک درجه را با استفاده از روش تکراری جالبی برای حل معادلهٔ درجهٔ سوم با دقت چشمگیری تعیین کرد. وی همچنین دو ابزار نجومی به نام‌های **طبق‌المناطق** و **لوح اتصالات** ابداع کرد.»

در پیوست ترجمهٔ روسی مفتاح‌الحساب کاشانی نوشته شده است: «کاشانی بزرگ‌ترین ریاضی‌دان و اخترشناس سدهٔ پانزدهم میلادی بود و آفریده‌های او را در بعضی از زمینه‌ها باید نمونه‌ای از حد کمال دانش در سده‌های میانه دانست. روش‌های عالی که کاشانی در محاسبه‌های خود به کار می‌برد و فن استادانه‌ای که در برآوردها و ارزیابی‌های او دیده می‌شود، توجه خاص دانشمندان زمان ما را به خود جلب کرده است.»

پروفسور کِنْدی، تاریخ‌نگار برجستهٔ ریاضیات و نجوم نیز او را محاسبی زبردست می‌شمارد که در این فن مهارت خارق‌العاده داشت. هر جا که نام کاشانی به میان آید، از پشتیبان او الغ بیگ که امیری دادگر و دانش‌دوست و هنرپرور بود نیز به احترام یاد می‌شود. اما زمانه پاداش او را به نیکی نداد. **عبد‌اللطیف**،

پسر الغ بیگ، حکومت بلخ را که پدر به او داده بود، لایق شأن خود ندانست و بر او شورید و در سال ۸۵۳ بر او دست یافت و امر داد او را کشتند. پس از مرگ الغ بیگ رصدخانه هم از فعالیت افتاد و **علی قوشچی**، یگانه شاگرد و دستیار وی، سمرقند را ترک کرد و به سال ۸۷۹ در استانبول درگذشت.

یکی از تألیفات ارزشمند کاشانی در ریاضیات کتاب **مفتاح‌الحساب** است که مهم‌ترین کتاب ریاضیات عملی در دورهٔ اسلامی محسوب می‌شود. کاشانی این اثر را بین سال‌های ۸۲۴ تا ۸۳۰ قمری، طی شش سال تکمیل کرد. در کتاب **مفتاح‌الحساب** که به زبان‌های گوناگون ترجمه شده، مباحث مهمی در زمینهٔ عدد، حساب، هندسه و اعشار مطرح شده است. ابداع کسره‌های اعشاری و رواج آن، دسته‌بندی معادله‌های درجهٔ اول تا چهارم و حل عددی معادله‌های درجهٔ چهارم و بالاتر، تکمیل و تصحیح روش‌های قدیمی چهار عمل اصلی و اختراع جدیدی بر آن‌ها که تاکنون نیز مورد استفاده است، از دیگر مباحث کتاب‌اند.

کاشانی برای چهار عمل اصلی در حساب، یعنی موضوع ضرب، تقسیم، جمع و منها روش نوین و ساده‌ای ابداع کرد که با روش قبل از او را که به سیستم هندی شناخته می‌شد، تفاوت اساسی داشت. برای روشن شدن اهمیت ابداع کاشانی، روش او در یکی از اعمال اصلی، یعنی ضرب در مقایسه با روش هندسی بررسی می‌کنیم.

در روش هندی ضرب سادهٔ دو عدد دو رقمی در شش گام صورت می‌گرفت:

گام اول: دو عدد چنان زیر هم نوشته می‌شوند که رقم یکان یکی از آن‌ها در راستای رقم دهگان دیگری باشد.

$$\begin{array}{r} 57 \\ \times 32 \\ \hline \end{array}$$

گام دوم: رقم پنج در رقم سه ضرب و عدد به‌دست‌آمده در سمت چپ عدد اول درج می‌شود.

$$\begin{array}{r} 57 \\ \times 32 \\ \hline 114 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 57 \\ \times 32 \\ \hline 114 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1554 \\ \times 32 \\ \hline 114 \end{array}$$

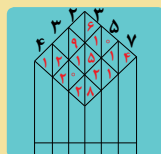
گام سوم: رقم پنج در رقم دو ضرب می‌شود که حاصل عدد ۱۰ است. رقم‌های صفر و یک در محل دو عدد دیگر جای می‌گیرد.



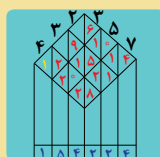
۲۱

شمارهٔ ۱۳۳ | زمستان ۱۴۰۳

را در مثلث سمت راست و دهگان حاصل ضرب را در مثلث سمت چپ می‌نوشت:



گام سوم: رقم‌هایی را که در ستون‌های عمودی زیر هم جای گرفته‌اند، با هم جمع می‌کرد و در پایین شبکه می‌نوشت. در این روش سادگی محاسبه و دقت کامل آن در مقایسه با روش هندی شگفت‌انگیز است. کاشانی روش ضرب بدون شبکه را نیز ابداع کرد:



$$422 \times 357 = 154224$$

گام اول: رقم یکان عدد اول را در تک‌تک رقم‌های عدد دوم ضرب می‌کرد. حاصل ضرب‌های به دست آمده را به این ترتیب می‌نوشت:

$$357 \times 422 =$$

۱۴	برای ۲
۲۱	برای ۳
۲۸	برای ۴

گام دوم: رقم دهگان عدد اول را در تک‌تک رقم‌های عدد دوم ضرب می‌کرد. نتیجه را بر حاصل ضرب‌های قبلی سوار می‌کرد.

$$357 \times 422 =$$

۱۰	
۱۵۱۴	
۲۰۲۱	برای ۴
۲۸	

گام سوم: رقم صدگان عدد اول را در تک‌تک رقم‌های عدد دوم ضرب و نتیجه را بر حاصل ضرب‌های قبل سوار می‌کرد. حاصل جمع رقم‌های چنین است:

$$6 \quad 357 \times 422 =$$

۹۱۰
۱۲۱۵۱۴
۲۰۲۱
۲۸
۱۵۴۲۲۴

$$357 \times 422 = 154224$$

شیوه شمردن از دوران ماقبل تاریخ، به دلیل نیاز به آن، بین انسان‌ها پدید آمد. شکل ساده شمارش به تدریج با وسیع‌تر شدن ارتباط انسان‌ها با هم و رواج مبادله کالا و حیوانات اهلی پیچیده‌تر شد. اقوام باستان برای نشان دادن هر عدد، یک علامت را انتخاب می‌کردند که این شیوه در شمارش رقم‌های بزرگ یا عمل ضرب و تقسیم یا

$$57 \times 32 =$$

۱۵۷
۳۲

$$57 \times 32 =$$

۱۵۷
۳۲

$$57 \times 32 =$$

۱۶۰۷
۳۲

گام چهارم: عدد ۳۲ به اندازه یک رقم به سمت راست جابه‌جا می‌شود.

$$57 \times 32 =$$

۱۶۰۷
۳۲

گام پنجم: رقم هفت در رقم سه ضرب می‌شود. رقم یک به جای صفر می‌نشیند و رقم دو به رقم شش افزوده می‌شود.

$$57 \times 32 =$$

۱۶۰۷
۳۲

$$57 \times 32 =$$

۱۸۱۷
۳۲

گام ششم: رقم هفت در رقم دو ضرب می‌شود. حاصل عدد ۱۴ است. رقم چهار به جای هفت نوشته می‌شود و رقم یک را به رقم بالای سه می‌افزاییم. نتیجه اینکه حاصل ضرب دو عدد فوق معادل ۱۸۲۴ می‌شود.

$$57 \times 32 =$$

۱۸۱۷
۳۲

$$57 \times 32 =$$

۱۸۲۴
۳۲

$$57 \times 32 =$$

۱۸۲۴
۳۲

در عددهای بزرگ‌تر این مرحله‌ها به چند برابر افزایش می‌یابند و احتمال خطا در آن بسیار زیاد است.

کاشانی برای سهولت عمل ضرب، نخست شبکه ضرب را ابداع کرد. برای نمونه، ضرب دو عدد سه‌رقمی در شبکه ضرب در مرحله‌های ساده‌تر صورت می‌گیرد:

گام اول: برای ضرب دو عدد سه‌رقمی 422×357 ، یک چهارضلعی با شبکه‌ای به تعداد رقم‌های دو عدد می‌کشید. سپس با خط‌های عمودی هر یک از مربع‌های کوچک را به دو مثلث تقسیم می‌کرد:

$$422 \times 357$$



گام دوم: رقم‌های دو عدد موردنظر را در کنار شبکه می‌نوشت. سپس هر کدام از رقم‌های عدد سمت راست را در رقم‌های سمت چپ ضرب می‌کرد. یکان حاصل ضرب



۲۲

شماره ۱۳۳ | زمستان ۱۴۰۳



جمع و منها سبب اشکال و دردسر می‌شد. نخستین بار ریاضی‌دانان هندی شمارش در مبنای دهگانی را با تعیین نه رقم ۱ تا ۹ و نیز افزودن واحد صفر به آن پدید آوردند. صفر در مراتب عددها، ارزشی نداشت و فقط کمک می‌کرد که جایگاه عددها در مرتبه‌های بالای یکان، مانند دهگان و صدگان و بالاتر، مشخص شوند.

عددهای هندسی به تدریج به سایر ملل نیز گسترش یافت. اما عددنویسی در دستگاه دهگانی فقط در عددهای صحیح انجام می‌شد و تا زمان جمشید کاشانی، کسرهای اعشاری شناخته‌شده نبودند. شیوه‌ای که هم عددهای صحیح و هم کسرهای آن را مورد استفاده قرار می‌داد، دستگاه عددنویسی شصتگانی بود. این شیوه پیچیده و دشوار بود و بیشتر توسط منجمان مورداستفاده قرار می‌گرفت. چون در نجوم سروکار ستاره‌شناسان با حجم و محیط کرات آسمانی و مدار گردش آن‌ها بوده است؛ بنابراین شکل دایره از اهمیت ویژه‌ای برخوردار بود و مسائل مربوط به آن مثل محیط، و قلمرو تقسیم‌بندی محیط دایره به اجزای کوچک، مثل درجه، مهم بوده است.

مهم‌ترین واحد تقسیم‌بندی در دایره را درجه می‌دانند که معادل $\frac{1}{360}$ محیط دایره است. **ابوریحان بیرونی**، دانشمند بزرگ ایرانی، دلیل این تقسیم‌بندی را توجه منجمان به تعداد روزهای سال می‌داند. او بیان می‌دارد که چون سال شمسی ۳۶۵ روز و سال قمری ۳۵۵ روز می‌باشد و میانگین آن‌ها عدد ۳۶۰ است، مبنای درجه تعیین شده است. درجه مبنای محاسباتی در دستگاه شمارش شصتگانی است. واحدهای کسری و کوچک آن شامل دقیقه، ثانیه و پایین‌تر است. با اینکه مسلمانان نخستین افرادی بودند که از عددها در روش دهگانی استفاده فراوان می‌کردند، ولی این دستگاه عددنویسی توسط کاشانی به صورت عملی و وسیع قابلیت استفاده و جایگزینی شیوه شمارش شصتگانی را پیدا کرد.

«رساله محیطیه» که پاره‌ای از ریاضی‌دان‌ها و مورخان غربی آن را شاهکار فن محاسبه نامیده‌اند، از مهم‌ترین تألیفات جمشید کاشانی است. او نگارش این رساله را در ماه شعبان ۸۲۷ قمری به پایان رساند. نسخه اصلی رساله محیطیه کاشانی مدت‌زمانی در اختیار **شیخ بهائی**، ریاضی‌دان، مهندس و فیلسوف بزرگ دوران صفوی بود و سپس در دوران حکومت **نادرشاه افشار** وقف کتابخانه آستان قدس رضوی شد. این نسخه منحصر به فرد که به خط کاشانی است، در بخش آثار خطی کتابخانه آستان قدس نگهداری می‌شود.

کاشانی در رساله محیطیه برای نخستین بار عدد پی (π) را تا هفده رقم محاسبه کرد و محاسبه او به مدت ۱۵۰

سال صحت و دقت خود را حفظ کرد. دیگر فصل‌های رساله درباره دایره و محاسبات محیط، قطر، وتر و مباحثی مانند آن است. کاشانی در مقدمه رساله خود می‌نویسد: «ستایش خداوندی را سزد که از نسبت قطر به محیط دایره آگاه است و اندازه هر مرکب بسیط را می‌شناسد و آفریننده زمین و آسمان‌هاست و قراردنده نور در تاریکی است.» او همچنین در این رساله پس از تعیین تقریبی مقدار عدد پی (π) تا هفده رقم می‌نویسد: «هیچ کس جز خداوند مقدار حقیقی آن را نمی‌داند.»

لوکی^۱ درباره کاشانی چنین گفته است: «پس از پژوهش درباره برخی آثار کاشانی، او را ریاضی‌دانی هوشمند، مخترع، نقاد و صاحب افکار عمیقی یافتیم. کاشانی از آثار ریاضی‌دان‌های قبل از خود آگاه و در فن محاسبه و به کار بستن روش‌های تقریبی بسیار چیره‌دست بوده است. اگر رساله محیطیه او به دست ریاضی‌دانان غربی می‌رسید، از آن پس مردم مغرب‌زمین از برخی منازعات و تألیفات متعدد درباره اندازه‌گیری محیط دایره یا محاسبه عدد پی (π) بی‌نیاز می‌شدند.»

لوکی همچنین در ترجمه خود از آثار کاشانی گفته است: «بر خلاف باور عموم که بر این تصورند که کسرهای اعشاری توسط **سیمون استیون**^۲ بلژیکی، **بورگی**^۴ سوئیسی و **فرانسوا ویت**^۵ فرانسوی اختراع شده است، حدود یک قرن و نیم قبل از آن‌ها توسط جمشید کاشانی ابداع و اختراع شده بود. ولی به دلیل ترجمه نشدن کتاب‌های کاشانی به زبان‌های اروپایی، دنیای غرب از دستاوردهای کاشانی در زمینه ریاضیات بی‌اطلاع بود.»

کاشانی در رساله وتر و جیب برای نخستین بار جیب یا سینوس زاویه یک‌درجه را از روی سینوس سه درجه با دقت هفده رقم اعشاری محاسبه می‌کند. روش محاسبه او را بدیع‌ترین و جالب‌ترین روش‌هایی دانسته‌اند که در تمام نوشته‌های ریاضی اسلامی وجود دارد. محاسبه سینوس یک درجه تاکنون اعتبار خود را در ریاضیات حفظ کرده است. در پایان از ارائه مطالب بیشتر درباره قسمت دوم مستند «غیاث‌الدین جمشید کاشانی» پرهیز می‌کنیم و شما ریاضی‌آموزان و علاقه‌مندان به تاریخ ریاضیات در ایران زمین را به تهیه و تماشای این مستند تشویق می‌کنیم.

پی‌نوشت‌ها

1. Edward Stewart Kennedy (1912-2009)

ادوارد استوارت کندی تاریخ‌نگار و پژوهشگر دانش که زمینه اصلی کار او درباره جدول‌ها و زیج‌های نجومی در سده‌های میانه اسلامی بود.

2. Paul Luckey (1884-1949)

3. Simon Stevin (1548-1620)

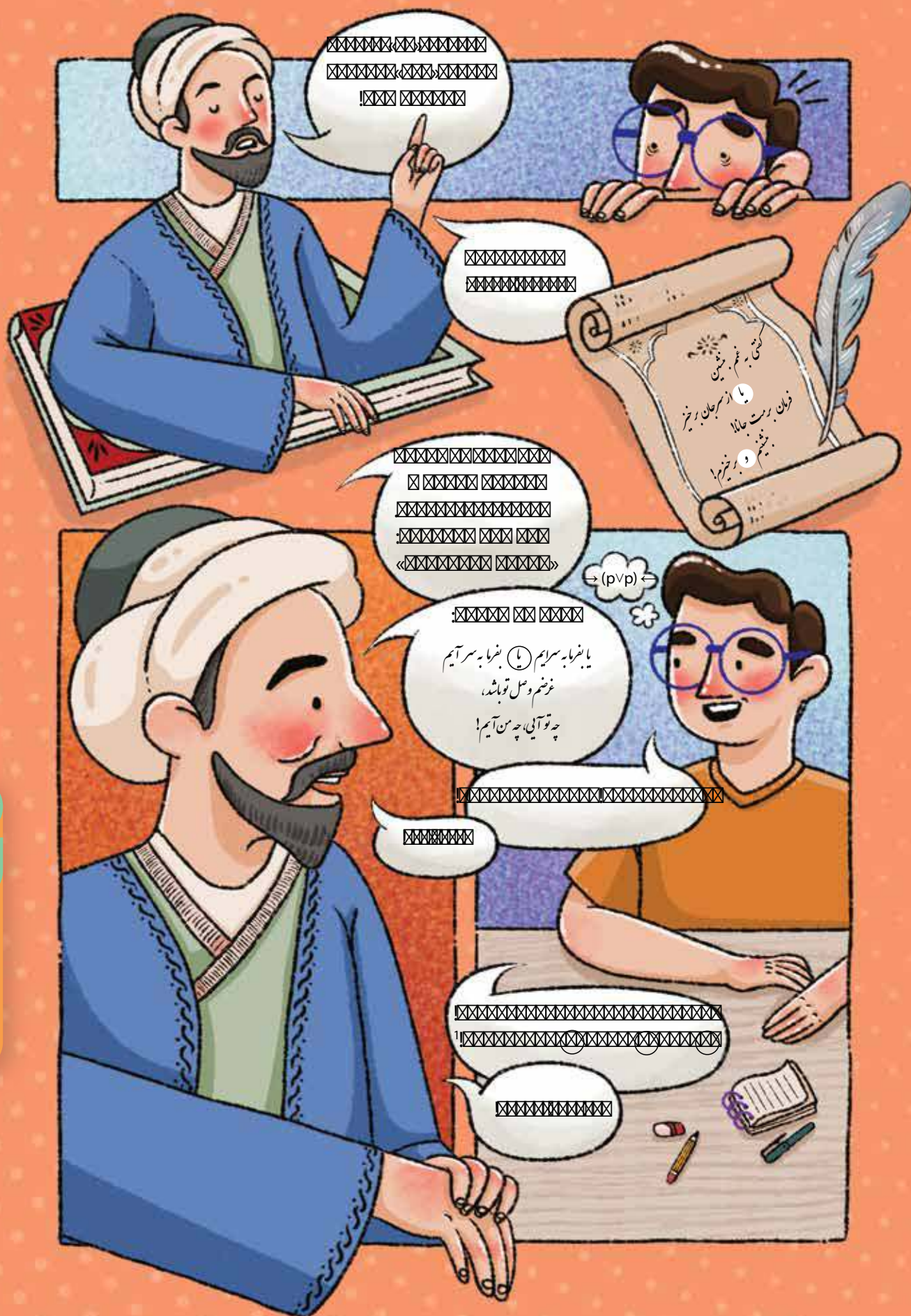
4. Jost Burgi (1552-1632)

5. Francois Viete (1540-1603)



مجید حکمت





۲۵

شماره ۱۳۳۲ | زمستان ۱۴۰۳

پی‌نوشت
۱. بیت شعر از محسن مرادی

عدد طلایی

مجید کریمی زاویه

محاسبه نسبت طلایی

برای محاسبه نسبت طلایی به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\varphi = \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} \Rightarrow \varphi = \frac{a+b}{a} = \frac{a}{a} + \frac{b}{a}$$

$$= 1 + \frac{b}{a} = 1 + \frac{1}{\frac{a}{b}} = 1 + \frac{1}{\varphi} \Rightarrow \varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

با ضرب طرفین معادله آخر در عدد مثبت φ (چون φ نسبتی بین دو عدد مثبت است) داریم:

$$\varphi^2 = \varphi + 1 \Rightarrow \varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

با حل معادله درجه دوم به دست آمده داریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-1) = 1 + 4 = 5$$

$$\varphi_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx \frac{1 + (2/236)}{2} = \frac{3/236}{2} = 1/618 \\ \varphi_2 &= \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx \frac{1 - (2/236)}{2} = \frac{-1/236}{2} = -0/618 \end{aligned} \right.$$

چون φ مثبت است در نتیجه مقدار قابل قبول برای آن برابر $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1/618$ است.

مقدار عددی $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1/618$ را نسبت طلایی (عدد طلایی) می‌گویند. عدد طلایی عددی گنگ است، زیرا بسط

تاریخچه

برای اولین بار، ریاضی‌دانان یونانی بودند که به علت نقش فراوان نسبت طلایی در هندسه، آن را مورد مطالعه قرار دادند. **هیپاسوس**، ریاضی‌دان قرن پنجم پیش از میلاد، کشف کرد که نسبت طلایی نه یک عدد صحیح و نه یک عدد گویاست. **کپلر**، دانشمند، ریاضی‌دان و ستاره‌شناس آلمانی که او را پدر علم ستاره‌شناسی نوین می‌دانند، در نامه‌ای به **مستلین**، ریاضی‌دان و ستاره‌شناس آلمانی، می‌نویسد:

«هندسه دو گنجینه بزرگ دارد: یکی قضیه فیثاغورس و دیگری **نسبت طلایی**. اولین گنج را به طلا و دومین گنج را به جواهر می‌توان تشبیه کرد.»

در ادامه این مقاله با نسبت طلایی که با حرف یونانی φ (فی) نشان داده می‌شود بیشتر آشنا می‌شویم.

نسبت طلایی

دو عدد حقیقی مثبت مانند a و b را به طوری که $a > b$ است، در نظر بگیرید. این دو عدد در صورتی دارای نسبت طلایی هستند که نسبت عدد بزرگ‌تر به عدد کوچک‌تر، برابر با نسبت مجموع آن دو عدد، به عدد بزرگ‌تر باشد. به زبان ریاضی، دو عدد a و b دارای نسبت طلایی هستند هرگاه:

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = \varphi \text{ و } a > b > 0$$



۲۶

شماره ۳۳ | زمستان ۱۴۰۳



اعشاری آن به صورت زیر است که یک عدد اعشاری بی پایان و غیرمتناوب (نامختوم و نامتناوب) است:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1/618033988749844820458683436563811...$$

مثال: اگر دو عدد ۲ و b به طوری که $b < 2$ دارای نسبت طلایی باشند، آنگاه مقدار b را به دست آورید.

حل: چون $b < 2$ ، با جای گذاری $a = 2$ در رابطه نسبت طلایی خواهیم داشت:

$$\frac{2}{b} = \frac{2+b}{2} \Rightarrow 4 = 2b + b^2 \Rightarrow b^2 + 2b - 4 = 0$$

با حل معادله درجه دوم به دست آمده داریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(1)(-4) = 4 + 16 = 20$$

$$b_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{2}$$

$$= \begin{cases} b_1 = \frac{-2 + 2\sqrt{5}}{2} = -1 + \sqrt{5} = -1 + (2/236) = 1/236 \\ b_2 = \frac{-2 - 2\sqrt{5}}{2} = -1 - \sqrt{5} = -1 - (2/236) = -3/236 \end{cases}$$

چون b عددی مثبت است، مقدار قابل قبول برای آن برابر $b = 1/236$ است. توجه شود که $a > b > 0$ و

$$\varphi = \frac{a}{b} = \frac{2}{1/236} = 1/618$$

مثال: اگر دو عدد a و ۳ داشته باشیم، به طوری که $a > 3$ و دو عدد دارای نسبت طلایی باشند، مقدار a را به دست آورید.

حل: چون $a > 3$ ، با جای گذاری $b = 3$ در رابطه نسبت طلایی خواهیم داشت:

$$\frac{a}{3} = \frac{a+3}{a} \Rightarrow a^2 = 3a + 9 \Rightarrow a^2 - 3a - 9 = 0$$

با حل معادله درجه دوم به دست آمده داریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(1)(-9) = 9 + 36 = 45$$

$$a_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{45}}{2}$$

$$= \begin{cases} a_1 = \frac{3 + 3\sqrt{5}}{2} = \frac{3 + 3(2/236)}{2} = \frac{3 + (6/708)}{2} = \frac{9/708}{2} = 4/854 \\ a_2 = \frac{3 - 3\sqrt{5}}{2} = \frac{3 - 3(2/236)}{2} = \frac{3 - (6/708)}{2} = \frac{-3/708}{2} = -1/854 \end{cases}$$

چون a عددی مثبت است، مقدار قابل قبول برای آن برابر $a = 4/854$ است. توجه شود که $a > b > 0$ و

$$\varphi = \frac{a}{b} = \frac{4/854}{3} = 1/618$$

مثال: اگر دو عدد x و ۴ دارای نسبت طلایی باشند،

مقدار x را به دست آورید.

حل: با توجه به اینکه رابطه بزرگ تری یا کوچک تری بین دو عدد x و ۴ مشخص نیست، باید دو حالت زیر را در نظر بگیریم:

حالت اول: اگر $x > 4$ باشد، آنگاه با در نظر گرفتن $a = 4$ و $b = x$ و جای گذاری در رابطه نسبت طلایی خواهیم داشت:

$$\frac{4}{x} = \frac{4+x}{4} \Rightarrow 16 = 4x + x^2 \Rightarrow x^2 + 4x - 16 = 0$$

با حل معادله درجه دوم به دست آمده داریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(1)(-16) = 16 + 64 = 80$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{80}}{2}$$

$$= \begin{cases} x_1 = \frac{-4 + 4\sqrt{5}}{2} = -2 + 2\sqrt{5} = -2 + 2(2/236) = -2 + 4/472 = 2/472 \\ x_2 = \frac{-4 - 4\sqrt{5}}{2} = -2 - 2\sqrt{5} = -2 - 2(2/236) = -2 - 4/472 = -6/472 \end{cases}$$

چون x عددی مثبت است، مقدار قابل قبول برای آن برابر $x = 2/472$ است. توجه شود که $4 > x > 0$ و

$$\varphi = \frac{a}{b} = \frac{4}{2/472} = 1/618$$

حالت دوم: اگر $x < 4$ باشد، با در نظر گرفتن $a = x$ و $b = 4$ و جای گذاری در رابطه نسبت طلایی خواهیم داشت:

$$\frac{x}{4} = \frac{x+4}{x} \Rightarrow x^2 = 4x + 16 \Rightarrow x^2 - 4x - 16 = 0$$

با حل معادله درجه دوم به دست آمده داریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(-16) = 16 + 64 = 80$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{80}}{2}$$



۲۷

شماره ۳۳ | زمستان ۱۴۰۳

است. از رابطه $\frac{AM}{BM} = \frac{AB}{AM}$ ، بنابر قاعده طرفین و سطین، نتیجه می‌شود: $AM^2 = BM \times AB$.

در نتیجه پاره‌خط بزرگ‌تر AM واسطه هندسی بین پاره‌خط کوچک‌تر BM و پاره‌خط AB است. همچنین اگر: $AM=a$ و $BM=b$ ، آنگاه: $AB = AM + BM = a + b$. در این صورت:

۱. چون: $AM > BM$ ، بنابراین $a > b$ است.

۲. چون: $\frac{AM}{BM} = \frac{AB}{AM}$ ، بنابراین: $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$.

در نتیجه پاره‌خط AB به دو پاره‌خط AM و BM با نسبت طلایی تقسیم شده است.

مثال: در مسئله تقسیم یک پاره‌خط به نسبت طلایی، اگر اندازه پاره‌خط بزرگ‌تر $AM=8$ باشد، آنگاه اندازه پاره‌خط کوچک‌تر BM و اندازه پاره‌خط AB را به دست آورید.

حل: اگر $AM=a$ و $BM=b$ باشد، با جای گذاری $a=AM=8$ در رابطه نسبت طلایی خواهیم داشت:

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} \Rightarrow 64 = 8b + b^2 \Rightarrow b^2 + 8b - 64 = 0.$$

با حل معادله درجه دوم به دست آمده داریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (8)^2 - 4(1)(-64) = 64 + 256 = 320.$$

$$b_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 \pm \sqrt{320}}{2}$$

$$= \begin{cases} b_1 = \frac{-8 + 8\sqrt{5}}{2} = -4 + 4\sqrt{5} = -4 + 4(2/236) = -4 + 8/944 = 4/944 \\ b_2 = \frac{-8 - 8\sqrt{5}}{2} = -4 - 4\sqrt{5} = -4 - 4(2/236) = -4 - 8/944 = -12/944 \end{cases}$$

چون b عددی مثبت است، مقدار قابل قبول برای آن برابر $b=4/944$ است. بنابراین:

$$BM = b = 4/944$$

$$AB = AM + BM = a + b = 8 + 4/944 = 12/944$$

توجه شود که $a > b > 0$ و $\varphi = \frac{a}{b} = \frac{8}{4/944} = 1/618$ برابر عدد طلایی است.

مثال: در مسئله تقسیم یک پاره‌خط به نسبت طلایی، اگر اندازه پاره‌خط کوچک‌تر $BM=5$ باشد، اندازه پاره‌خط بزرگ‌تر AM و اندازه پاره‌خط AB را به دست آورید.

حل: اگر $AM=a$ و $BM=b$ باشد، با جای گذاری $b=BM=5$ در رابطه نسبت طلایی خواهیم داشت:



$$= \begin{cases} x_1 = \frac{4+4\sqrt{5}}{2} = 2+2\sqrt{5} = 2+2(2/236) = 2+4/472 = 6/472 \\ x_2 = \frac{4-4\sqrt{5}}{2} = 2-2\sqrt{5} = 2-2(2/236) = 2-4/472 = -2/472 \end{cases}$$

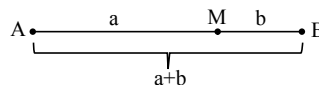
چون x عددی مثبت است، مقدار قابل قبول برای آن برابر $x=6/472$ است. توجه شود که $4 > x > 0$ و $\varphi = \frac{a}{b} = \frac{6/472}{4} = 1/618$ برابر عدد طلایی است.

تقسیم یک پاره‌خط به نسبت طلایی

در هندسه مسئله‌ای وجود دارد که به مسئله «تقسیم پاره‌خط راست به نسبت ذات وسط و طرفین» معروف شده است. این مسئله به شکل زیر است:

مسئله: یک پاره‌خط راست را به دو بخش چنان تقسیم کنید که نسبت طول پاره‌خط بزرگ‌تر به طول پاره‌خط کوچک‌تر، برابر با نسبت طول کل پاره‌خط به طول پاره‌خط بزرگ‌تر باشد.

در شکل زیر پاره‌خط AB را در نظر بگیرید.



می‌خواهیم نقطه M را روی پاره‌خط AB چنان انتخاب کنیم که AM پاره‌خط بزرگ‌تر و BM پاره‌خط کوچک‌تر باشد و به طوری که $\frac{AM}{BM} = \frac{AB}{AM}$ برقرار باشد. در این صورت نقطه M پاره‌خط AB را به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم کرده

$$\frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \times \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}$$

$$= \frac{2(1-\sqrt{5})}{1-5} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{-4} = \frac{1-\sqrt{5}}{-2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

بنابراین نسبت عرض به طول این مستطیل طلایی برابر $\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ است.

مثال: نسبت طول به عرض یک مستطیل برابر عدد طلایی است. اگر عرض مستطیل برابر $\sqrt{5}-1$ باشد، طول مستطیل را به دست آورید.

حل: چون مستطیل طلایی است، بنابر تعریف ۱ رابطه $\frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ برقرار است. با جای گذاری $y = \sqrt{5}-1$ در این رابطه خواهیم داشت:

$$\frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{5}-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{(\sqrt{5}-1)(1+\sqrt{5})}{2} = \frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}{2} = \frac{5-1}{2} = 2$$

توجه شود که $x > y > 0$ و

$$\varphi = \frac{x}{y} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2}{(2/236)-1} = \frac{2}{1/236} = 1/618$$

برابر عدد طلایی است.

$$\frac{a}{\delta} = \frac{a+\delta}{a} \Rightarrow a^2 = \delta a + 2\delta \Rightarrow a^2 - \delta a - 2\delta = 0$$

با حل معادله درجه دوم به دست آمده داریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-\delta)^2 - 4(1)(-2\delta) = \delta^2 + 8\delta = 12\delta$$

$$a_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\delta \pm \sqrt{12\delta}}{2}$$

$$\begin{cases} a_1 = \frac{\delta + \delta\sqrt{3}}{2} = \frac{\delta(1+\sqrt{3})}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} = \frac{16/18}{2} = 8/9 \\ a_2 = \frac{\delta - \delta\sqrt{3}}{2} = \frac{\delta(1-\sqrt{3})}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2} = \frac{-6/18}{2} = -3/9 \end{cases}$$

چون a عددی مثبت است، در نتیجه مقدار قابل قبول برای آن برابر $a = 8/9$ است. بنابراین:

$$AM = a = 8/9$$

$$AB = AM + BM = a + b = 8/9 + \delta = 13/9$$

توجه شود که $a > b > 0$ و $\frac{a}{b} = \frac{8/9}{\delta} = 1/618$ برابر عدد طلایی است.

مستطیل طلایی

برای مستطیل طلایی دو تعریف زیر ارائه شده است:

تعریف ۱: مستطیلی را که نسبت طول به عرض آن، برابر با نسبت طلایی باشد، مستطیل طلایی می گویند.

به زبان ریاضی، اگر طول مستطیل را x و عرض مستطیل را y در نظر بگیریم، آنگاه یک مستطیل طلایی است، هرگاه رابطه $\frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ برقرار باشد.

تعریف ۲: مستطیلی را که نسبت طول به عرض آن، برابر با نسبت مجموع طول و عرض، به طول آن باشد، مستطیل طلایی می گویند.

به زبان ریاضی، اگر طول مستطیل را x و عرض آن را y در نظر بگیریم، آنگاه یک مستطیل طلایی است هرگاه رابطه $\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x}$ برقرار باشد.

مثال: در مستطیل طلایی، نسبت عرض به طول آن را به دست آورید.

حل: چون مستطیل طلایی است، بنابر تعریف ۱ رابطه $\frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ برقرار است، در نتیجه با معکوس کردن کسر و سپس گویا کردن آن به کمک اتحاد مزدوج خواهیم داشت:



روش دوم: چون مستطیل طلایی است، بنابر تعریف

۲ رابطه $\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x}$ برقرار است، چون محیط مستطیل برابر ۲۰ است، خواهیم داشت:

$$P = 2(x+y) \Rightarrow 20 = 2(x+y) \\ \Rightarrow \boxed{x+y=10}^* \Rightarrow \boxed{y=10-x}^*$$

با جای گذاری * و *' در رابطه $\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x}$ خواهیم داشت:

$$\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x} \Rightarrow \frac{x}{10-x} = \frac{10}{x} \Rightarrow x^2 = 100 - 10x \\ \Rightarrow x^2 + 10x - 100 = 0$$

با حل معادله درجه دوم به دست آمده خواهیم داشت:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (10)^2 - 4(1)(-100) = 100 + 400 = 500$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10 \pm \sqrt{500}}{2}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-10 + 10\sqrt{5}}{2} = -5 + 5\sqrt{5} = -5 + 5(2/236) = -5 + (11/18) = 6/18 \\ x_2 = \frac{-10 - 10\sqrt{5}}{2} = -5 - 5\sqrt{5} = -5 - 5(2/236) = -5 - (11/18) = -16/18 \end{cases}$$

چون طول مستطیل عددی مثبت است، مقدار قابل قبول برای آن برابر $x = 6/18$ است. با جای گذاری $x = 6/18$ در رابطه *، مقدار y برابر است با:

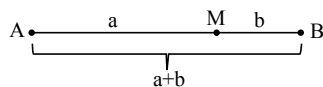
$$y = 10 - x = 10 - 6/18 = 3/82$$

توجه شود که $x > y > 0$ و $\frac{x}{y} = \frac{6/18}{3/82} = 1/618$ برابر عدد طلایی است.

روش رسم مستطیل طلایی

برای رسم مستطیل طلایی مرحله‌های زیر را به ترتیب انجام می‌دهیم:

مرحله ۱. پاره خط دلخواه AB را در نظر می‌گیریم. بنابر مسئله تقسیم پاره خط به نسبت طلایی، نقطه M را روی پاره خط AB چنان انتخاب می‌کنیم که پاره خط AB به دو پاره خط AM و BM با نسبت طلایی تقسیم شود. یعنی رابطه $\frac{AM}{BM} = \frac{AB}{AM}$ یا رابطه $AM^2 = BM \times AB$ برقرار باشد.



مرحله ۲. اگر $AM=a$ و $BM=b$ باشد، آنگاه عمودهای AD و ME را چنان رسم می‌کنیم که: $AD = BC = ME = a$.



مثال: اگر محیط یک مستطیل طلایی برابر ۲۰ باشد، طول و عرض مستطیل را به دست آورید.

حل:

روش اول: چون مستطیل طلایی است، بنابر تعریف

۲ رابطه $\frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ برقرار است. چون محیط مستطیل برابر

۲۰ است، خواهیم داشت:

$$P = 2(x+y) \Rightarrow 20 = 2(x+y) \Rightarrow x+y=10 \Rightarrow \boxed{y=10-x}^*$$

با جای گذاری * در رابطه $\frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ خواهیم داشت:

$$\frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{x}{10-x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = 16/18 - (1/618)x \\ \Rightarrow x + (1/618)x = 16/18 \Rightarrow (2/618)x = 16/18 \\ \Rightarrow x = \frac{16/18}{2/618} = 6/18$$

با جای گذاری $x = 6/18$ در رابطه * مقدار برابر است با:

$$y = 10 - x = 10 - 6/18 = 3/82$$

توجه شود که $x > y > 0$ و $\frac{x}{y} = \frac{6/18}{3/82} = 1/618$ برابر عدد طلایی است.

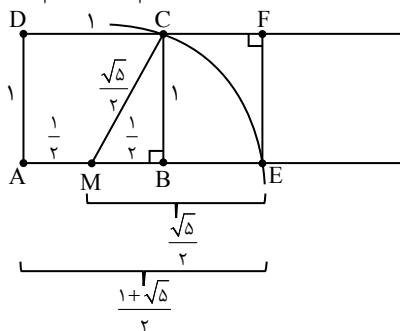


۳۰

شماره ۳۳ | زمستان ۱۴۰۳

در نهایت از نقطه E عمودی بر امتداد پاره خط DC رسم می‌کنیم تا آن را در نقطه F قطع کند. مستطیل AEFD مستطیل طلایی است، زیرا نسبت طول به عرض آن برابر است با:

$$\frac{AE}{AD} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$$



رابطه بین دنباله فیبوناتچی و نسبت طلایی

دنباله زیر به دنباله فیبوناتچی معروف است:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ...

این دنباله دارای ضابطه بازگشتی به صورت زیر است:

$$a_1 = a_2 = 1, \quad \forall n \geq 1: a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

به عبارت دیگر، دو جمله اول این دنباله برابر 1 و از جمله سوم به بعد، سایر جمله‌های دنباله به صورت مجموع دو جمله قبلی دنباله هستند.

اگر دنباله جدید b_n را دنباله نسبت هر دو جمله متوالی دنباله فیبوناتچی تعریف کنیم، آنگاه خواهیم داشت:

$$\forall n \geq 1: b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$b_1 = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{1} = 1, \quad b_2 = \frac{a_3}{a_2} = \frac{2}{1} = 2, \quad b_3 = \frac{a_4}{a_3} = \frac{3}{2} = 1/5$$

$$b_4 = \frac{a_5}{a_4} = \frac{5}{3} = 1/6667, \quad b_5 = \frac{a_6}{a_5} = \frac{8}{5} = 1/6$$

$$b_6 = \frac{a_7}{a_6} = \frac{13}{8} = 1/625, \quad b_7 = \frac{a_8}{a_7} = \frac{21}{13} = 1/61548$$

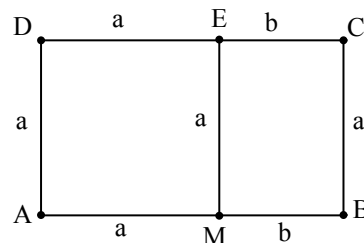
$$b_8 = \frac{a_9}{a_8} = \frac{34}{21} = 1/61905, \quad b_9 = \frac{a_{10}}{a_9} = \frac{55}{34} = 1/61768$$

$$b_{10} = \frac{a_{11}}{a_{10}} = \frac{89}{55} = 1/61818$$

در این صورت دنباله جدید b_n یک دنباله هم‌گرا به نسبت طلایی و عدد $\phi \approx 1/618$ است.

در نتیجه دنباله نسبت هر دو جمله متوالی دنباله فیبوناتچی یک دنباله هم‌گرا به نسبت طلایی است. به زبان ریاضی:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \phi \approx 1/618$$



مستطیل ABCD مستطیل طلایی مورد نظر با طول $a+b$ و عرض a است.

مثال: مربع ABCD به ضلع 1 واحد را رسم کنید. وسط ضلع AB را مشخص کنید و آن را نقطه M بنامید. پاره خط MC را رسم کنید. در مثل قائم‌الزاویه MBC بنا بر رابطه فیثاغورس خواهیم داشت:

$$MC^2 = MB^2 + BC^2 \Rightarrow MC^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (1)^2$$

$$= \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4} \Rightarrow MC = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

سپس به مرکز M و شعاع $MC = \frac{\sqrt{5}}{2}$ کمانی می‌زنیم تا امتداد پاره خط AB را در نقطه E قطع کند. در این صورت

$$ME = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ و}$$

$$AE = AM + ME = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$$



۳۱

شماره ۳۳ | زمستان ۱۴۰۳

کاربردهایی از نسبت طلایی

در پایان به چند مورد از کاربردهای نسبت طلایی در دنیای کنونی اشاره می‌کنیم:

۱. نسبت طلایی در مشهورترین سازه‌ها و برج‌های ساخته‌شده توسط بشر در جهان، مشاهده شده است. برای مثال، می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

الف) اهرام «جیزه»^۱ در مصر که قدمت آن‌ها به بیش از ۲۵۰۰ سال پیش از میلاد می‌رسد، یکی از سازه‌های ساخت بشر است که در آن از نسبت طلایی استفاده شده است.



ب) در ساخت معبد پارتنون در یونان که قدمت آن به بیش از ۴۴۷ سال پیش از میلاد می‌رسد، نسبت طلایی رعایت شده است.



ج) تاج‌محل در هند، از عجایب هفت‌گانه جهان، یکی دیگر از سازه‌های ساخت بشر است که در آن از نسبت طلایی استفاده شده است.



د) در ساخت کلیسای جامع لائون در فرانسه نیز نسبت طلایی در نظر گرفته شده است.



ه) در معماری ایرانی نیز از نسبت طلایی استفاده شده است. برای مثال می‌توان به برج و میدان آزادی در تهران، میدان نقش جهان و مسجد شیخ لطف‌الله در اصفهان، ارگ بم در کرمان، بیستون و قلعه دالاهو در کرمانشاه، پل ورسک در مازندران و مقبره ابن سینا در همدان اشاره کرد.

۲. **لئوناردو داوینچی**، دانشمند و مخترع ایتالیایی، اولین کسی بود که نسبت دقیق استخوان‌های انسان را اندازه‌گیری و ثابت کرد که این تناسبات، با ضریب عدد طلایی هستند. بنابراین نسبت طلایی در بدن انسان نیز قابل مشاهده است. برای مثال می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

الف) فاصله سر تا انگشتان پا (قد) و فاصله سر تا ناف دارای نسبت طلایی است.

ب) فاصله کتف تا نوک انگشتان دست و فاصله کتف تا آرنج دارای نسبت طلایی است.

ج) فاصله استخوان لگن تا پاشنه و فاصله استخوان لگن تا زانو دارای نسبت طلایی است.

در نتیجه از نسبت طلایی به‌صورت نامحدود در دنیای کنونی استفاده شده است.

پی‌نوشت

1. Giza

منابع

۱. رستمی، م. ه. ۱۳۷۴. دایرةالمعارف مسائل هندسه، جلد سوم. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، دفتر انتشارات کمک آموزشی، انتشارات مدرسه، ۳۷۶ ص.
2. Dunlap, R.A. 1997. The Golden Ratio and Fibonacci Numbers. Dalhousie University Canada, 162pp.

این جهان کهنه را برهان نو

شمارش در گراف‌ها

قسمت دوم

محرم ایرد موسی

عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی

* اگر قسمت اول این مقاله (شماره ۱۳۱) را نخوانده‌اید، توصیه می‌شود آن را قبل از خواندن قسمت دوم بخوانید.

آخر جلسه قبل، خانم مهریار معلم ریاضیات گسسته، مسئله زیر را مطرح کرد و حل آن را به‌عهده خودمان گذاشت:

مسئله: چند گراف (ساده) از مرتبه ۵ وجود دارد به‌طوری که درجه همه رأس‌های آن زوج باشد؟ فرض کنید:

$$V = \{v_1, \dots, v_5\}$$

مجموعه رأس‌های گراف است.

جلسه قبل این مسئله را در کلاس حل کردیم که «تعداد کل گراف‌های ساده از مرتبه n با مجموعه رأس‌های مشخص (مثلاً $V = \{v_1, \dots, v_n\}$) برابر است با: $N = 2^{\binom{n}{2}}$ ». در مسیر خانه مدام به این فکر می‌کردم که چطور این دو مسئله را به هم ربط بدهم. جلسه قبل یک مسئله راحت‌تر را هم حل کرده بودیم که در آن خواسته مسئله این بود که: درجه رأسی v_1 زوج است؟ حالا در این مسئله می‌خواستیم درجه همه رأس‌ها زوج باشد.

ایده‌ای که برای مسئله داشتم این بود که یک رأس را فدای رأس‌های دیگر بکنیم! وظیفه رأس فداشده این است که با استفاده از یال‌های مجاورش، کاری کند که درجه بقیه رأس‌ها نیز زوج باشد. چگونه؟

ابتدا رأس v_1 را در نظر نمی‌گیریم. با بقیه رأس‌ها که ۴ تا هستند $2^{\binom{4}{2}}$ یعنی ۶ گراف می‌توان ساخت. اگر درجه رأسی در هر یک از این ۶ گراف فرد بود، یال بین آن رأس و v_1 را اضافه می‌کنیم و در غیر این صورت یال بین آن رأس و v_1 را اضافه نمی‌کنیم تا درجه زوج بماند. با این شگرد درجه همه رأس‌ها به کمک رأس v_1 زوج خواهد شد. اما خود v_1 چی؟

چون مجموع درجه‌های هر گراف برابر است با دو برابر تعداد یال‌ها و زوج است، پس به ناچار، درجه v_1 نیز زوج خواهد بود. در نتیجه $2^6 = 64$ گراف از مرتبه ۵ وجود دارد که درجه همه رأس‌های آن‌ها زوج است.

راه‌حل را دوباره در ذهنم مرور کردم تا مطمئن شوم که درست است. به خانه که رسیدم برای آنکه راه‌حل را فراموش نکنم، آن را در دفتر ریاضی‌ام وارد کردم.

– آیا مسئله را می‌توانم به گرافی با n رأس تعمیم بدهم؟
من هر مسئله‌ای را که حل می‌کنم، آن را تمام شده تلقی نمی‌کنم و به حواشی و دنباله‌های آن هم فکر می‌کنم.
– آره. مثل اینکه راه‌حل برای هر گراف از مرتبه n هم کار می‌کند. یعنی تعداد گراف‌های مرتبه n (با مجموعه رأس‌های مشخص) با این ویژگی که درجه همه رأس‌ها زوج باشد برابر است با: $N = 2^{\binom{n-1}{2}}$.

اما حل این مسئله، مسئله‌های دیگری هم به دنبال داشت.
– اگر به جای زوج بودن درجه همه رأس‌ها، می‌خواستیم درجه همه رأس‌ها فرد باشد پاسخ مسئله چه بود؟
باز به یاد این قضیه درباره گراف‌ها افتادم که مجموع درجه‌های رأس‌های هر گراف برابر است با دو برابر تعداد یال‌های آن و بنابراین همیشه زوج است. با کنار هم گذاشتن این قضیه و سؤالی که به ذهنم خطور کرده بود، یک نتیجه‌گیری واضح بود:

– اگر مرتبه یک گراف فرد باشد، امکان ندارد درجه همه رأس‌ها فرد باشد؛ چون مجموع تعداد فردی عدد فرد، همیشه فرد است. پس ...

لازم بود که مسئله را برای گراف‌های با مرتبه زوج حل کنم. آیا می‌توانستم به همان روش مسئله قبل عمل کنم؟



۳۳

شماره ۱۳۴ | زمستان ۱۴۰۳



- خوب، یک رأس مانند v_1 را کنار می‌گذارم. با بقیه

رأس‌ها $N_1 = 2^{\binom{n-1}{2}}$ گراف می‌توانم بسازم. حالا v_1 را تنها به هر رأس که درجه‌اش زوج است وصل می‌کنم. این طوری درجه همه رأس‌ها فرد می‌شود. درجه خود v_1 زوج است یا فرد؟ چون $n-1$ رأس دیگر فرد هستند و $n-1$ نیز فرد است، پس درجه v_1 به اجبار باید فرد باشد تا مجموع درجه‌های گراف زوج شود.

به نظر می‌رسید این مسئله هم با همان روش قابل حل است.

تمرین ۱

فرض کنید $0 \leq k \leq n$ و k عددی زوج است. ثابت کنید تعداد گراف‌های مرتبه n با مجموعه رأس‌های $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ که در آن‌ها دقیقاً k رأس از درجه فرد

وجود دارد، برابر است با: $N = \binom{n}{k} 2^{\binom{n-1}{2}}$.

خانم مهریار معلم درس ریاضیات گسسته وارد کلاس شد و بعد از خوش‌وبش و احوال‌پرسی از بچه‌ها، پرسید: «بچه‌ها کسی تونست مسئله‌ای را که جلسه قبل دادم حل کند؟»

این جور وقت‌ها بچه‌ها در یک حرکت جمعی چشم می‌دوزند به هم کلاسی‌شان که در آن درس به اصطلاح، شاخ کلاس است. این بار هم سی جفت چشم چرخید سمت من. دستم را بردم بالا و با اجازه معلم، راه‌حل را روی تخته نوشتم. خانم مهریار با گفتن آفرین، مهر تأییدی روی راه‌حل من زد و در ادامه پرسید: «بچه‌ها این روش را یاد بگیرید چون ممکن است در جاهای دیگر به دردتان بخورد. حالا یک مسئله دیگر از موضوع شمارش می‌دهم که با این شیوه می‌توانید آن را حل کنید.»

مسئله‌ای که معلم مطرح کرد در واقع همان بود که من حالت کلی‌ترش را حل کرده بودم. خانم مهریار مسئله‌های زیر را روی تخته کلاس نوشت:

مسئله ۱. چند گراف مرتبه ۵ داریم که درجه همه رأس‌هایش فرد باشد؟

مسئله ۲. چند گراف مرتبه ۶ داریم که درجه همه رأس‌هایش فرد باشد؟

من مسئله را حل کرده بودم، اما سکوت کردم تا بچه‌ها فرصتی برای فکر کردن و پیدا کردن راه‌حل داشته باشند. **مهرشید** زودتر از همه دستش را بالا برد و گفت: «خانم جواب قسمت اول صفر است، چون امکان ندارد درجه هر ۵ رأس فرد باشد. همان‌طور که جلسه قبل گفتید مجموع درجه‌ها



۳۴

شماره ۳۴ | زمستان ۱۴۰۳

باید زوج باشد.»

خانم مهریار یک آفرین هم به مهشید گفت و ادامه داد:
«پس برویم سراغ قسمت دوم.»

سارا با کمی تردید و شک دستش را بالا برد و گفت: «خانم
مانند همان حالت همهٔ رأس‌ها زوج حل می‌شود. یعنی یک
رأس را کنار بگذاریم و...»

راه‌حل سارا درست بود و به جواب $2^{10} = 2^{(5)} = 2^{10}$ رسید. خانم
مهریار بعد از تأیید راه‌حل سارا گفت: «بچه‌ها این مسئله راه‌حل
دیگری هم دارد. آیا تعریف مکمل گراف یادتان هست؟»
فاطمه گفت: «بله خانم. مکمل گراف G که آن را با G^c
یا $\bar{G}$ نمایش می‌دهیم، گرافی است که رأس‌هایش همان
رأس‌های G است. اما در مکمل دو رأس x و y مجاورند اگر و
تنها اگر x و y در G مجاور نباشند.»

خانم مهریار گفت: «درست است. این را هم می‌دانید که
مجموع درجهٔ هر رأس در G و در $\bar{G}$ می‌شود $n-1$ اگر G از
مرتبهٔ n باشد. حالا فرض کنید G گرافی از مرتبهٔ زوج باشد
که درجهٔ همهٔ رأس‌هایش زوج هستند. حالا بگویید درجهٔ
رأس‌های $\bar{G}$ چگونه خواهند بود؟ زوج یا فرد؟»

مهسا گفت: «خانم n زوج هست، پس $n-1$ فرد است. حالا
اگر درجه رأس v در G زوج باشد، درجهٔ v در $\bar{G}$ می‌شود
 $d_G(v) - (n-1)$ و در نتیجه فرد است. پس درجهٔ همهٔ
رأس‌های $\bar{G}$ فرد است.»

خانم مهریار با سر تأیید کرد و گفت: «حالا راه‌حل دوم برای
تعداد گراف‌هایی که درجهٔ همهٔ رأس‌هایش فرد است نمایان
شد، درست است؟»

بچه‌ها هنوز راه‌حل موردنظر خانم مهریار را ملتفت نشده
بودند و به قول معروف یک هل دیگر لازم داشتند. خانم
مهریار برای اینکه مطلب را جا بیندازد گفت: «اجازه بدهید
یک مثال دیگر بزنم. فرض کنید هر کدام از شما سی‌ویک نفر
تنها یک برادر دارید و هیچ خواهری هم ندارید.»

قیافهٔ بچه‌ها توهم رفت! خانم مهریار ادامه داد: «گفتم فرض
کنید، چرا ناراحت شدید؟ فرض کردنش که خرجی ندارد.
حالا اگر از شما بپرسم همهٔ شما سی‌ویک نفر چند برادر روی
هم دارید، جواب چیست؟» بچه‌ها با هم گفتند: «سی‌ویک.»
خانم مهریار ادامه داد: «در واقع بین مجموعهٔ دانش‌آموزان
این کلاس و مجموعهٔ برادرهای شما یک تناظر یک‌به‌یک
وجود دارد و این تناظر نتیجه می‌دهد که دو مجموعه تعداد
اعضایشان برابر است.»

تازه داشتیم راه‌حل دوم را می‌فهمیدم. مکمل هر گراف با

درجه‌های زوج می‌شود گرافی با درجه‌های فرد و
این مکمل گرفتن یک تناظر بین این دو دسته گراف ایجاد
می‌کند. پس تعدادشان برابر است. راه‌حل جالبی بود. خانم
مهریار روی تخته یک گراف از مرتبهٔ ۶ کشید که درجهٔ همهٔ
رأس‌هایش زوج بود و از بچه‌ها خواست مکمل آن را رسم
کنند و همان‌طور که قبل‌تر بحث شده بود در مکمل گراف،
درجهٔ همهٔ رأس‌ها فرد بود.

خانم مهریار این را هم اضافه کرد که مکمل مکمل گراف G ،
مجدداً G خواهد بود و تناظر یک‌به‌یک بین دو مجموعهٔ A و
 B ، یعنی اینکه به هر عضو A ، دقیقاً یک عضو از B و به هر
عضو B ، دقیقاً یک عضو از A را نسبت بدهید.

تمرین ۲

بین مجموعهٔ عددهای طبیعی به شکل مربع کامل و
مجموعهٔ عددهای طبیعی به شکل مکعب کامل، یک
تناظر یک‌به‌یک پیدا کنید.

تمرین ۳

تابع f دامنه‌ای ۱۰ عضوی دارد و یک‌به‌یک است.
مجموعهٔ برد f چند عضوی است؟

وقت زیادی از ساعت کلاس نمانده بود. خانم مهریار مسئله
زیر را روی تخته نوشت و تأکید کرد که می‌توان با همان روش
عضو ایثارگر این مسئله را هم حل کرد:

تمرین ۴

الف) در چند زیرمجموعه از مجموعه عددهای طبیعی
یک رقمی، تعداد اعضا و همچنین مجموع اعضا هر دو
زوج هستند؟

ب) در چندتا از زیرمجموعه‌ها، تعداد اعضا و همچنین
مجموع اعضا هر دو فرد هستند؟

ج) در چندتا از زیرمجموعه‌ها، تعداد اعضا زوج، ولی
مجموع اعضا فرد است؟

د) در چندتا از زیرمجموعه‌ها، تعداد اعضا فرد، ولی
مجموع اعضا زوج است؟



۳۵

آنالوژی‌ها در نظریه حسابان

پروژه‌های تحقیقاتی کوچک برای ریاضیدانان جوان

قسمت دوم

خسرو داودی
آرش رستگار

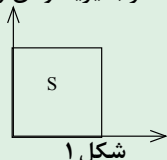
$$\begin{aligned} & f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x) \\ &= nx^{n+m-1} + mx^{n+m-1} \\ &= (n+m)x^{n+m-1} \end{aligned}$$

اگر برای دو تابع توانی دلخواه فرمول لایبنتز را بررسی کرده باشیم، به راحتی می‌توان آن را برای همه چندجمله‌ای‌های یک متغیره نتیجه گرفت. چون مشتق‌گیری به مجموع دو تابع و ضرب عدد در تابع احترام می‌گذارد؛ یعنی:

$$\begin{aligned} (f+g)'(x) &= f'(x) + g'(x) \\ (cf)'(x) &= cf'(x) \end{aligned}$$

اما حالا می‌خواهیم چیزی شبیه همین فرمول لایبنتز به شما معرفی کنیم. به جای یک تابع یک شیء هندسی را قرار می‌دهیم و به جای مشتق‌گیری از یک تابع، در نظر گرفتن مرز آن شکل را جایگزین می‌کنیم. به جای ضرب دو تابع، حاصل ضرب دکارتی دو شکل را می‌گذاریم و به جای جمع دو تابع اجتماع گرفتن را. بگذارید بیشتر توضیح بدهیم که حاصل ضرب دکارتی دو شکل چگونه تعریف می‌شود. شاید بهتر باشد با یک مثال شروع کنیم.

یک مربع واحد را در نظر بگیرید و آن را در کنج ناحیه اول نشانید (شکل ۱).



شکل ۱

می‌توان مربع را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نشان داد:

$$S = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

در اینجا اگر I را $[0, 1]$ بنامیم، می‌توانیم بنویسیم: $S = I \times I$ یعنی مجموعه زوج‌های مرتبی که درایه‌های اول و دوم آن از I انتخاب شده‌اند. اگر I و J دو بازه مختلف باشند، $I \times J$ می‌شود یک مستطیل (شکل ۲).

شاید آشنایی با حسابان اولین جایی باشد که دانش‌آموزان می‌فهمند «نظریه» و «نظریه‌پردازی» یعنی چه. چرا که دو فرمول‌بندی متفاوت از حسابان وجود دارد: یکی «فرمول‌بندی گسسته» که لایبنتز ارائه داده است و دیگری «فرمول‌بندی پیوسته» که نیوتن مطرح کرده است. بعد از مقایسه این دو فرمول‌بندی است که می‌توان دانش‌آموز را از طریق مقایسه اعداد، یعنی چیزهایی که از یک حیث مثل هم نیستند، با مفهوم نظریه آشنا کرد. زیرا بین نظریه حسابان لایبنتز و نظریه حسابان نیوتن یک «آنالوژی» وجود دارد که مفهوم‌ها و قضیه‌های دو طرف را در تناظر قرار می‌دهد.

اما برای آنکه با مفهوم آنالوژی آشنا شویم، یک پای خود را از نظریه حسابان بیرون می‌گذاریم. با فرمول مشتق حاصل ضرب تابع‌ها آشنا هستید که به آن فرمول لایبنتز هم گفته می‌شود: اگر f و g نیز تابع‌هایی مشتق‌پذیر روی $\mathbb{R}$ باشند، آنگاه مشتق تابع fg نیز وجود دارد و از فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$(fg)'(x) = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$$

بگذارید کمی محاسبه کنیم. فرض کنید:

$$f(x) = x^n$$

$$g(x) = x^m$$

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

$$g'(x) = mx^{m-1}$$

در این صورت:

$$(fg)(x) = x^{n+m}$$

$$(fg)'(x) = (n+m)x^{n+m-1}$$

بنابراین:

اما از طرف دیگر:

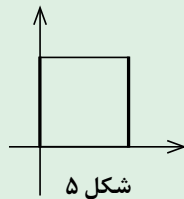
$$f'(x) \times g(x) = nx^{n-1} \times x^m$$

$$f(x) \times g'(x) = x^n \times mx^{m-1}$$



۳۶

شماره ۳۴ | زمستان ۱۴۰۳



شکل ۵

دومی همه زوج مرتبه‌هایی است مانند (x, y) که y صفر یا یک است، اما x در $[0, 1]$ تغییر می‌کند که می‌شود ضلع‌های افقی مربع. پس فرمول $\partial(I \times I) = \partial I \times I \cup I \times \partial I$ به ما می‌گوید که مرز مربع باید اجتماع لبه‌های عمودی با لبه‌های افقی باشد! این البته که درست است. صحت همین فرمول را برای استوانه توپر و مستطیل هم بررسی کنید. نه فقط یاد گرفتیم که در نظر گرفتن مرز شکل مشابه، در نظر گرفتن مشتق یک تابع است، بلکه دانستیم حاصل ضرب دکارتی شکل‌ها، مشابه ضرب تابع‌ها، و اجتماع شکل‌های مشابه جمع تابع‌هاست. خوب است دسته‌به‌کار شوید و ببینید آیا مشابه فرمول‌های شرکت‌پذیری و جابه‌جایی و توزیع‌پذیری اعمال حسابی جمع و ضرب برای شکل‌ها هم درست هستند یا خیر. با تناظری که بین مفهوم‌ها و فرمول‌های دو طرف برقرار کردیم، می‌گوییم بین نظریه مشتق تابع‌ها و نظریه مرزهای شکل‌ها نوعی آنالوژی برقرار است.

حال که مفهوم آنالوژی را یاد گرفتید به حسابان گسسته و حسابان پیوسته برمی‌گردیم. مشابه تابع پیوسته و مشتق‌پذیر $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابع گسسته $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. اگر خوب دقت کنید، درمی‌یابید که f همان دنباله‌ای از عددهای حقیقی است که اندیس‌های صفر و منفی هم دارد. عددهای صحیح $\mathbb{Z}$ قرار است مدلی گسسته برای عددهای حقیقی $\mathbb{R}$ باشند.

برای یک تابع گسسته f ، مشتق را با نماد Δf نمایش می‌دهیم و این‌طور تعریف می‌کنیم: $\Delta f(n) := f(n+1) - f(n)$. Δf را دنباله تفاضلی f می‌نامند.

$$(\Delta f \cdot g)(n) = f(n+1)g(n+1) - f(n)g(n)$$

$$f(n)\Delta g(n) = f(n)(g(n+1) - g(n))$$

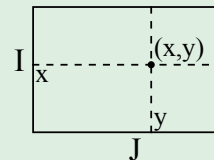
$$\Delta(f \cdot g)(n) = (f(n+1) - f(n))g(n)$$

به نظر می‌رسد فرمول لاگرانژ نباید برقرار باشد. آیا می‌توانید فرمول لاگرانژ را نجات دهید؟

سؤال پروژه آنالوژی

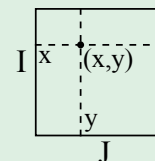
مشابهت‌هایی را که بین فرمول‌بندی گسسته و پیوسته حسابان وجود دارند، پیدا کنید. البته این کار به تحقیق و جست‌وجو نیاز دارد. کلمه کلیدی برای حسابان گسسته در جست‌وجوی اینترنتی «حساب تفاضل متناهی» است.

پروژه‌های اجراشده خود را در قالب «ورد» حروف‌نگاری کنید و برای ما بفرستید. بهترین پروژه‌ها در رزمینه چاپ خواهند شد.



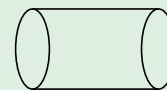
شکل ۲

هر نقطه درون مستطیل، با رسم خط‌های موازی با ضلع‌های آن می‌تواند مشخص کند که دایره اول و دومش کدام نقاط از I و J هستند. در مورد مربع هم همین‌طور است.



شکل ۳

بسیاری از شکل‌هایی که می‌شناسیم به شکل حاصل ضرب دکارتی قابل بیان هستند. برای مثال، استوانه توپر حاصل ضرب دکارتی دایره توپر در یک بازه است یا استوانه توخالی حاصل ضرب دکارتی دایره توخالی در یک بازه است (شکل ۴).



شکل ۴

منشور نیز به صورت حاصل ضرب دکارتی قابل نمایش است. حتی صفحه هم حاصل ضرب دکارتی $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ است که برای همین آن را با $\mathbb{R}^2$ نمایش می‌دهیم. مکعب به شکل $I \times I \times I$ یا I^3 است، همان‌طور که یک مربع به شکل I^2 است. هر مکعب مستطیل دلخواه هم به شکل $I \times J \times K$ است که در آن I, J, K بازه‌های دلخواه هستند. اگر L نماینده یک نیم‌خط بسته باشد، $L \times L$ می‌تواند نمایشی از ناحیه اول باشد. مثلاً ناحیه اول می‌شود: $\mathbb{R}^{\geq 0} \times \mathbb{R}^{\geq 0}$.

حال برگردیم به فرمول لایبنیتز. اگر مرز یک شکل S را با ∂S نمایش دهیم و بخوانیم مرز S و اگر مرز، مشابه مشتق رفتار کند، باید داشته باشیم:

$$\partial(S \times T) = \partial S \times T \cup S \times \partial T$$

بیایید صحت این فرمول را آزمایش کنیم. مثلاً مرز بازه واحد $I = [0, 1]$ می‌شود مجموعه دو نقطه‌ای $\{0, 1\}$.

$$\partial(I \times I) = \partial I \times I \cup I \times \partial I$$

$I \times I$ که مربع است. $\partial(I \times I)$ می‌شود مرز مربع که باید بشود اجتماع $\partial I \times I$ و $I \times \partial I$ ؛ یعنی بشود اجتماع $\{0, 1\} \times [0, 1]$ با $[0, 1] \times \{0, 1\}$.

اولی همه زوج مرتبه‌هایی است مانند $[x, y]$ که x صفر یا یک است، اما y در $[0, 1]$ تغییر می‌کند که می‌شود ضلع‌های عمودی مربع (شکل ۵).



۳۷

شماره ۳۳ | زمستان ۱۴۰۳

داستان‌های شیرین ریاضی

برج مثلثی و مساحت دایره

قسمت ششم

سید محمد رضا هاشمی موسوی
مدرس، مؤلف و محقق ریاضیات

بلافاصله پس از سلام و عرض احترام بچه‌ها، روی تخته کلاس نوشت، درس امروز:

روش‌های عملی برای حساب کردن مساحت دایره

بچه‌ها که عنوان درس را دیدند بسیار خوش حال شدند، چون که دیگر صحبت از دستور، قاعده، فرمول و رابطه‌های خشک و بی‌روح نبود و همان‌طور که از عنوان و ابزارهایی که آقای معلم در دست داشت، مشخص بود کار عملی و تجربی است و دیگر به حفظ کردن فرمول‌هایی جدید نیازی نیست.

معلم: بچه‌ها من در این کلاس می‌خواهم به صورت عملی و با کمک شما عزیزان مساحت دایره را حساب کنم و همان‌طور که می‌بینید، ابزار لازم برای این کار را هم آورده‌ام. از یکی از بچه‌ها می‌خواهم بیاید به من کمک کند تا کار را شروع کنیم.

دانش آموزان: آقا ما بیاییم؟

همه‌همه کلاس را گرفت و آقای معلم برای برقراری نظم کلاس سریع یکی را انتخاب کرد تا پای تخته بیاید.

معلم: بچه‌ها، جلسه قبل چیزهایی درباره محیط و مساحت دایره گفتیم و اشاره‌ای هم به قاعده‌های محاسبه آن‌ها کردم. در این جلسه می‌خواهم به‌طور ملموس مساحت دایره را به شما نشان دهم و فرمولی هم که نوشته بودم به صورت عملی ثابت کنیم.

دانش آموز: آقا مگر فرمولی که یسار دادید فرمول واقعی مساحت دایره نیست؟!

معلم: بله، آن فرمول مساحت دایره است، ولی باید آن را به طریقی مقدماتی ثابت کنیم. این کار را در همین جلسه انجام خواهیم داد.

معلم بلافاصله روش کار را توضیح داد و شروع کرد:

اشاره

در قسمت‌های قبل با ماجراهای حاکم بزرگ و پیشنهاد جایزه به مخترع شطرنج، حل مسئله ۵ کلاه و تعمیم آن به روش حسابی، فرمول‌های مقدماتی و همچنین روش ضرب ذهنی $m \times n$ ، کلاس درس هندسه و یافتن شگفت‌انگیز خطا در ترسیم شکل، پی بردن به تطبیق نداشتن اطلاعات مسئله با شکل، کشف بزرگ ارشمیدس و تشخیص تاج تقلبی پادشاه آشنا شدیم. در این داستان می‌خواهیم با چند روش مقدماتی به محاسبه مساحت دایره بپردازیم. البته محاسبه سطح دایره به روش ریاضیات پیشرفته نیز بسیار ساده است، ولی از این روش‌ها هیچ درک و فهمی از محاسبه برای محاسبه‌گر ایجاد نخواهد شد و مانند یک ماشین حساب مهندسی عمل می‌شود. فقط نتیجه نهایی محاسبه روی صفحه ظاهر خواهد شد. از طرف دیگر هم بچه‌ها فقط قاعده‌ها و فرمول‌های مربوطه را حفظ می‌کنند. به همین منظور، نیاز دیده شد که برخی از این دستورها و قاعده‌ها به صورت آزمایشگاهی و کارگاهی نیز ارائه شوند تا با الهام از این روش‌های آزمایشگاهی، راه را برای ایجاد ذهن خلاق و پویا هموار سازد.

محاسبه مساحت دایره با روش ساخت برج مثلثی

در کلاس درس هندسه (جلسه صبح)

معلم درس ریاضی همیشه وقتی درس هندسه داشتیم، یک سری ابزار هم با خودش به همراه می‌آورد و این بار هم قیچی، مقوا، متر، پرگار و ماژیک دستش بود که وارد کلاس شد.

ارتفاع $\times$ قاعده $\times \frac{1}{2} = S$ (مساحت مثلث)

در اینجا ذکر می‌کنم که هر قدر نوارها باریک‌تر باشند، جواب ما دقیق‌تر به دست می‌آید. ولی ما فرض می‌کنیم این نوارها به پهنای یک موی سر باشند. بچه‌ها شکل (۱) را به شکل (۲) تبدیل کردیم، درست است؟

دانش‌آموزان: بله آقا، درست است!

همه با شوق و ذوق بی‌وصف منتظر پایان کار بودند.

معلم: بچه‌ها برای محاسبه، مساحت شکل (۱) بهتر است یا معادل آن مساحت شکل (۲) برجی که ساختیم؟

دانش‌آموزان: آقا روشن است که شکل (۲)، چون آشناست و مساحتش را هم می‌دانیم.

معلم: بچه‌ها، پس خودتان جای‌گذاری کنید و مساحت شکل (۱) را به کمک شکل (۲) به دست آورید. حالا به من بلند بگویید که به جای قاعده چه چیزی باید بگذارم و به جای ارتفاع چه باید گذاشت.

دانش‌آموزان: آقا به جای قاعده باید محیط دایره $(2\pi R)$ و به جای ارتفاع باید شعاع دایره (R) را جایگزین کرد.

معلم: آفرین! و ما این کار را انجام می‌دهیم:

$$S = \frac{1}{2} \times (2\pi R) \times (R) = \pi R^2 \text{ (مساحت دایره)}$$

دانش‌آموزان همه چشم به تخته دوخته بودند که فرمول آشنای πR^2 را که قبلاً حفظ می‌کردند و ممکن بود فراموش هم کنند، خودشان از مساحت معادل آن (برج مثلثی ساخته‌شده) به دست آوردند و با زمزمه‌های پی‌درپی به رمز و راز معلم پی بردند و با هورا و شور و شوق وصف‌ناپذیر دست زدند و معلم خود را تشویق کردند (معلم در همین حین با متر و اندازه‌گیری نیز مقدار عددی مساحت را نشان داد).

معلم پس از چند لحظه برای ایجاد نظم، با اشاره به بچه‌ها سکوت را درخواست کرد و به جمع‌بندی و نتیجه‌گیری پرداخت. در همین حین بود که زنگ تفریح به صدا درآمد و معلم یادآوری کرد که روش دوم را در جلسهٔ کلاس بعداً ظاهر خواهد گفت و با قطع مطالب، همه را با نظم راهی حیاط مدرسه کرد.

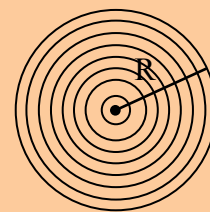
روش عملی دوم برای محاسبهٔ مساحت دایره (جلسهٔ بعدازظهر)

بعدازظهر همان روز، باز هم بچه‌ها درس ریاضی و بنا به گفتهٔ معلمشان درس هندسه داشتند. زنگ کلاس به صدا درآمد و بچه‌ها وارد کلاس شدند. برای اینکه زمان کم نیاید معلم هم به دنبال بچه‌ها وارد کلاس شد و پس از ادای احترام، همه نشستند و معلم بلافاصله درس را شروع کرد.

«بچه‌ها، ابتدا با پرگار دایره‌ای بزرگ روی مقوا

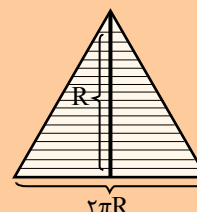
می‌کشیم. سپس با فاصله‌ای کمتر از ۱ سانت دوباره دایره‌ای داخل آن می‌کشیم و این کار را تا مرکز دایره ادامه می‌دهیم تا دایره‌های داخل دایرهٔ اولیه ایجاد شوند و در واقع نوارهایی دایره‌ای به ضخامت کمتر از ۱ سانت پدید آیند. حال نوارها را برش می‌زنیم و نوارهای باریک را با قیچی جدا می‌کنیم. حالا نوارها را روی هم قرار می‌دهیم. ببینید، قاعدهٔ این برج که می‌خواهیم بسازیم، در واقع همان محیط دایره $(2\pi R)$ است.» دانش‌آموز بین صحبت‌های آقای معلم در حال بریدن و جداکردن نوارها بود که کار برش خاتمه یافت و با آقای معلم شروع کردند به چسباندن نوارها روی هم تا برج ساخته شود. دانش‌آموزان همه در حال زمزمه بودند و مات و مبهوت به کار آقای معلم نگاه می‌کردند و هنوز هم نمی‌دانستند که چگونه می‌خواهد این فرمول که در آن عدد π و مجذور شعاع دایره نقش دارند ظاهر شود.

معلم: بچه‌ها، من و دوستان این برج را ساختیم:



شکل ۱

همان‌طور که می‌بینید، قاعدهٔ این مثلث (برج) همان محیط دایرهٔ اولیه است که به ترتیب نوارهای بعدی روی آن قرار گرفته‌اند. ارتفاع این برج روشن است که شعاع دایرهٔ اولیه است، چون پهنای نوارها تا مرکز دایره در مجموع برابر با R خواهند شد. بچه‌ها تا اینجا مشکلی نیست؟



شکل ۲

دانش‌آموزان: نه آقای معلم، تا اینجا همه چیز روشن است!

معلم: بچه‌ها، مساحت مثلث را که می‌دانید؟ درس جلسهٔ قبل ما بود. همه بگویید:



معلم: بچه‌ها، همان‌طور که در جلسهٔ صبح دیدیم، مساحت دایره را به روش «**ساختن برج مثلثی**» و تولید مثلثی **معادل** با دایرهٔ مورد نظر، حساب کردیم. در این جلسه می‌خواهیم به روشی دیگر به‌صورت عملی به مساحت دایره دست یابیم.

بچه‌ها، مانند روش قبل دایره را به نوارهایی باریک برش می‌دهیم، اما به‌جای اینکه با این روش‌ها برج مثلثی بسازیم و مساحت مثلث معادل را حساب کنیم، کافی است نوارها را به دنبال هم بچسبانیم تا یک مستطیل به عرض $\frac{R}{n}$ و طول مجموع محیط‌های دایره‌ها تشکیل شود. البته n تعداد تقسیم‌هایی است که ما در نظر گرفته‌ایم. هر قدر این تعداد بیشتر شود، مساحت ما به مساحت دایره نزدیک‌تر خواهد شد. در اینجا ما $n=10$ اختیار می‌کنیم و در این صورت شعاع دایره را به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم. در واقع ۱۰ نوار باید برش دهیم و به دنبال هم بچسبانیم.

دانش‌آموزی که صبح کمک آقای معلم آمده بود، شروع کرد به رسم دایره‌ها و ابتدا بزرگ‌ترین دایرهٔ ممکن را با پرگار رسم کرد. به همین ترتیب، ۱۰ دایرهٔ داخلی را رسم و شروع کرد به برش و جداسازی نوارها.

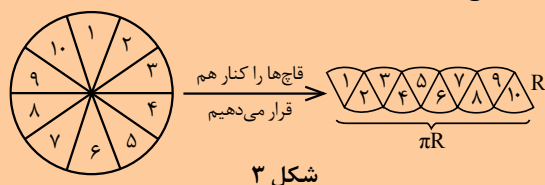
دانش‌آموزان با زمزمه‌های شورانگیز خود معلم و دانش‌آموز در حال کار را به ادامهٔ کار ترغیب می‌کردند و بی‌صبرانه منتظر نتیجه‌گیری بودند. در همین حین، یکی از دانش‌آموزان تیزهوش و شاگرد ممتاز پرسشی را مطرح ساخت:

دانش‌آموز ممتاز: آقای معلم اگر به‌جای تشکیل نوارها، دایره را به تعداد زیادی قاچ‌های مساوی دهیم و این‌ها را کنار هم بگذاریم و با کنار هم قراردادن این قاچ‌ها یک مستطیل تشکیل دهیم هم فکر می‌کنید که به مساحت دایره نزدیک باشد؟

معلم: می‌توانی بیایی پای تخته و ایدهٔ خودت را برای همه توضیح بدهی؟
دانش‌آموز ممتاز: بله.

معلم: این مازیک را بگیر و رسم شکل را پس از برش و کنار هم قراردادن قاچ‌های دایره به ما نشان بده.

دانش‌آموز: بله آقا، شکل ۳ تشکیل خواهد شد ($n=10$) (تعداد قاچ‌ها):



واضح است که به تقریب یک مستطیلی داریم به عرض شعاع دایره (R) و طول نصف محیط دایره. ۵ قاچ برابر با نصف دایره است که چون محیط دایره $2\pi R$ است، پس اگر محیط دایره را نصف کنیم، طول مستطیل حاصل می‌شود.

معلم: بسیار عالی! بچه‌ها می‌دانستید که این روش در کتاب درسی هست؟

دانش‌آموزان با زمزمه‌های بلند، بی‌اطلاعی خودشان را اعلام می‌کردند.

دانش‌آموز ممتاز: اجازه آقا، من هم هنوز مبحث جدید را نخوانده بودم و بی‌اطلاع بودم از این موضوع! و فقط از ایده‌های شما الهام گرفتم و فقط برش را تغییر دادم.

معلم: بچه‌ها دوستان را تشویق کنید. یادتان باشد که برای ایده‌ای که ارائه دادید و خوب اجرا کردید، ۲ نمره برای پایان نیمسال هم در نظر گرفته‌ام.

دانش‌آموزان با هیاهوی زیاد و شوق و ذوق به تشویق دوستان پرداختند. در همین حین دانش‌آموز ممتاز اجازه خواست و نشست و هنوز زمزمه‌ها دربارهٔ ایدهٔ دوستان طنین‌انداز بود که معلم بلافاصله برای به‌جا آمدن نظم کلاس، اشاره کرد و گفت فکر کنم که همهٔ نوارها چسبانده شده‌اند. بعد پای تخته رفت و با شکل هم کار عملی را نشان داد:

بچه‌ها، اگر n برابر با ۱۰ باشد $\frac{1}{n}$ به ۱ اضافه می‌شود و مساحت به همین میزان هم به تقریب کشیده می‌شود. اگر n را برابر با ۱۰۰ بگیریم چه اتفاقی می‌افتد؟ واضح است که $\frac{1}{n}$ به ۱ اضافه می‌شود؛ پس جدول ۱ را تشکیل می‌دهیم:

$$S \approx \pi R^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad (۱)$$

(با تقریب اضافی)

با توجه به جدول، می‌بینیم هر قدر تعداد برش‌ها زیادتر شود به عدد ۱ و مساحت حقیقی دایره نزدیک‌تر می‌شویم. حال اگر تعداد برش‌ها را بی‌نهایت زیاد در نظر بگیریم، واضح است که دیگر می‌توانیم از عدد $\frac{1}{n}$ صرف‌نظر کنیم.

پس تا اینجا مساحت دایره با تقریب اضافی $\frac{1}{n}$ به دست آمد. ما فرض می‌کنیم تعداد برش‌ها بی‌نهایت بزرگ باشد که دیگر $\frac{1}{n}$ در محاسبات بی‌اثر خواهد بود و می‌توان از آن صرف‌نظر کرد. پس مساحت دایره به حقیقت نتیجه می‌شود:

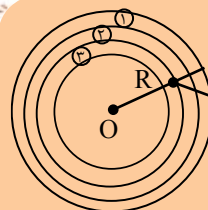
$$S = \pi R^2$$

دانش‌آموزان با شور و شوق خاصی معلم را تشویق کردند و در چهره‌هایشان یک رضایت و شادابی خاصی برای فهمیدن مطلب جدید به‌وجود آمده بود. در همین حین معلم با اشاره‌هایی تند درخواست سکوت کرد و با تشکر از شاگرد، درخواست کرد بنشینند.

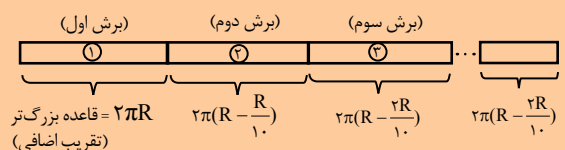
معلم: بچه‌ها، تا اینجا یک قسمت از کار پایان یافت و ما هم قبول کردیم که با تقریب اضافی مساحت کل نوارهای جداشده چنین است:

$$S = \pi R^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad (S = \text{مساحت دایره با تقریب اضافی})$$

حال می‌خواهیم مساحت دایره را با تقریب نقصانی حساب کنیم و روشن است که مساحت دایره بین این دو مقدار قرار دارد. البته ما به‌طور کامل به‌صورتی متقارن عمل می‌کنیم و برای این کار کافی است یک برش را از مساحت کسر کنیم. فرض می‌کنیم که این برش n ام باشد و آن را به این صورت وارد می‌کنیم:



$$\frac{R}{n} = \frac{R}{10}$$



شکل ۴

* **توجه:** نوارها در واقع ذوزنقه هستند که اگر قاعده بزرگ را طول مستطیل بگیریم S با تقریب اضافی حاصل می‌شود. **معلم:** بچه‌ها ببینید، با یک مستطیل با عرض $\frac{R}{n}$ و طول مجموع محیط‌های دایره‌های داخلی، برای به‌دست‌آوردن مساحت مستطیل مثل ایده دوستتان عمل می‌کنیم؛ یعنی طول را در عرض ضرب می‌کنیم (تعداد تقسیمات را n در نظر می‌گیریم):

$$\begin{aligned} S &\approx \frac{R}{n} \left(\frac{1}{2} \pi R + \frac{1}{2} \pi \left(R - \frac{R}{n}\right) + \frac{1}{2} \pi \left(R - \frac{2R}{n}\right) + \dots + \frac{1}{2} \pi \left(R - \frac{(n-1)R}{n}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \pi R \left(R + \left(R - \frac{R}{n}\right) + \left(R - \frac{2R}{n}\right) + \dots + \left(R - \frac{(n-1)R}{n}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \pi R \left(nR - \frac{(1+2+\dots+(n-1))R}{n} \right) \\ &= \frac{1}{2} \pi R^2 \left(n - \frac{n(n-1)}{n} \right) = \frac{1}{2} \pi R^2 \left(n - \frac{n-1}{1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \pi R^2 \left(\frac{n+1}{1} \right) = \pi R^2 \left(\frac{n+1}{2} \right) = \pi R^2 \left(1 + \frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

n	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	...	۱۰^9	...	۱۰^k
$1 + \frac{1}{n}$	۱/۱	۱/۰۱	۱/۰۰۱	۱/۰۰۰۱	...	۱/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱	...	$1 + \frac{1}{10^k}$

جدول ۱



۴۱

شماره ۳۳۳ | زمستان ۱۴۰۳



n	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	...	۱۰ ^۹	...	۱۰ ^k
$1 - \frac{1}{n}$	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	۰/۹۹۹۹	...	۰/۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹	...	$1 - \frac{1}{10^k}$

جدول ۲

با توجه به جدول ملاحظه می‌شود که هر قدر تعداد برش‌ها بیشتر شود به مقدار حقیقی مساحت دایره نزدیک‌تر خواهیم شد. در اینجا از (۱) و (۲)، می‌توان نوشت:

$$\pi R^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) < S < \pi R^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

بچه‌ها واضح است که معدل (میانگین) این دو مقدار S (اضافی و نقصانی) برابر با مساحت واقعی و حقیقی دایره است:

$$S = \frac{\pi R^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \pi R^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{2} = \frac{2\pi R^2}{2} = \pi R^2$$

دانش‌آموزان با شور و هیجان بی‌وصف معلم را تشویق کردند و در همین حین زنگ مدرسه به صدا در آمد و معلم فعالیت زیر را روی تخته نوشت تا بچه‌ها گروهی آن را انجام دهند:

فعالیت: با سه روشی که یاد گرفتید مساحت دایره‌ای به شعاع $R=1$ را حساب کنید (برش‌ها را دلخواه در نظر بگیرید). مقدار π را با تقریب ۰/۰۱ اضافی و نقصانی بیابید.

$$\begin{aligned} S &\approx \frac{R}{n} \left(2\pi R + 2\pi \left(R - \frac{R}{n}\right) + 2\pi \left(R - \frac{2R}{n}\right) + \dots + 2\pi \left(R - \frac{(n-1)R}{n}\right) \right) \\ &= \frac{2\pi R^2}{n} \left(n - \frac{(1+2+\dots+(n-1))}{n} \right) \\ &= \frac{2\pi R^2}{n} \left(n - \frac{n(n-1)}{2n} \right) = \frac{2\pi R^2}{n} \left(\frac{n+1}{2} \right) \\ &= \pi R^2 \left(\frac{n+1}{n} \right) \end{aligned}$$

پس مساحت دایره با تقریب نقصانی چنین است:

$$S \approx \pi R^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad (2)$$

حال اگر $n=1$ باشد، روشن است که ۰/۱ از ۱ کسر می‌شود و اگر $n = \frac{1}{10}$ به میزان ۰/۱ از ۱ کسر خواهد شد. واضح است که اگر تعداد برش‌ها عددی بی‌نهایت بزرگ شود، به میزان ناچیزی که در محاسبات اثری ندارد از ۱ کسر خواهد شد. برای این حالت هم جدول ۲ را تشکیل می‌دهیم.



۴۲

شماره ۳۳ | زمستان ۱۴۰۳

پیشرو

نمونه سوال های امتحان کتبی
بارویلد مفهوم

➤
پاسخ
سوالات



جوادشوهانی

دکترای ریاضی، دبیر ریاضی مدارس استعدادهای درخشان

علی یعقوبی

دبیر ریاضی مدارس استعدادهای درخشان

۴. نمودار تابع های $f(x)$ و $g(x)$ را رسم کنید.

$$f(x) = x^2 + 4x + 3$$

$$g(x) = -x^2 + 2x + 6$$

سپس نقطه های برخورد این دو تابع با یکدیگر را مشخص کنید. بررسی کنید آیا راهی وجود دارد که بدون رسم نمودار این تابع ها، نقطه های برخورد (تقاطع) این دو تابع را پیدا کنیم.

(ریاضی و آمار، فصل ۲)

۵. نمودار تابع $f(x) = [2 \cos x + 1]$ را رسم کنید [۰].
نماد جزء صحیح است.

(ریاضی ۲، فصل ۳ و ۴)

۶. به ازای چه مقدارهایی از a ، تابع $f(x) = \left(\frac{a^2 + 4a}{5}\right)^x$ (الف) یک تابع نمایی است؟
(ب) یک تابع نمایی نزولی است؟

(ریاضی ۲، فصل ۵)

۷. ضابطه تابع وارون تابع $f(x) = 2 \log_2(x+4) + 5$ را بنویسید. سپس دامنه و برد آن را مشخص کنید.

(حسابان ۱، فصل ۲ و ۳)

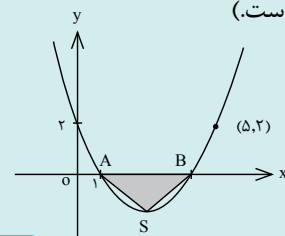
۱. مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

(ب) $\frac{5}{\sqrt[3]{4} - \sqrt{3}}$

(الف) $\frac{1}{\sqrt[3]{5} + \sqrt{2}}$

(ریاضی ۱، فصل ۳)

۲. مساحت مثلث ABS در شکل ۱ را محاسبه کنید.
(S رأس سهمی است.)

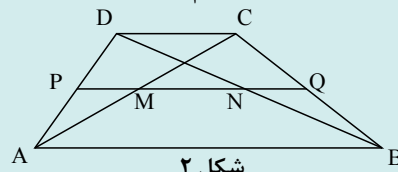


شکل ۱

(ریاضی ۱، فصل ۴)

۳. در دوزنقه شکل ۲ وسط ساق ها را به هم وصل می کنیم.
ثابت کنید:

$$\overline{MN} = \overline{PQ} - \overline{DC} = \frac{\overline{AB} - \overline{DC}}{2}$$



شکل ۲

(هندسه ۱، فصل ۲)

۱۴. نزدیک‌ترین نقطه روی نمودار تابع $y = x^2$ به نقطه $(3, 0)$ را مشخص کنید.

(ریاضی ۳، فصل ۵)

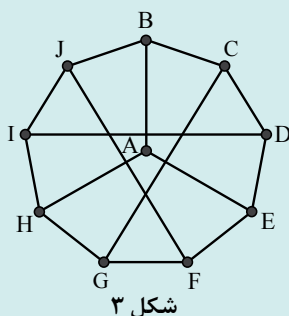
۱۵. اگر $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{[2x] - a}{x + 3} = +\infty$ باشد، حدود a را مشخص کنید.

(حسابان ۲، فصل ۳)

۱۶. اگر $f(x) = ax^4 - bx^2 + c$ باشد و داشته باشیم: $f'(-1) = 2$ ، $f'(2) = 44$ و $f(-2) = 5$ ، مقدار a و b و c را مشخص کنید.

(حسابان ۲، فصل ۴)

۱۷. گراف شکل ۳، چند مجموعهٔ احاطه‌گر ۳ عضوی دارد؟



شکل ۳

(ریاضیات گسسته، فصل ۲)

۱۸. نقطه‌های $A(2, 6)$ ، $B(6, 4)$ و $C(-1, -3)$ روی یک دایره قرار دارند. معادلهٔ این دایره را بنویسید و مرکز و شعاع آن را مشخص کنید.

(هندسه ۳، فصل ۲)

۱۹. جملهٔ دهم دنبالهٔ $t_n = 3^{n+1}$ از چند جملهٔ دنبالهٔ بازگشتی با فرمول $a_1 = 2$ ، $a_2 = 5$ و $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ بزرگ‌تر است؟

(ریاضی و آمار ۳، فصل ۲)

۲۰. در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع جمله‌های دوم و سوم برابر با ۱۲ و مجموع جمله‌های چهارم، پنجم و ششم برابر با ۳۳ است. مجموع ۱۰ جملهٔ اول این دنبالهٔ حسابی را مشخص کنید.

(ریاضی و آمار ۳، فصل ۳)

۸. حاصل عبارت زیر را محاسبه کنید.

$$A = \sin(1^\circ) \cdot \cos(1^\circ) + \sin(2^\circ) \cdot \cos(2^\circ) + \dots + \sin(180^\circ) \cdot \cos(180^\circ)$$

(حسابان ۱، فصل ۴)

۹. سه ظرف در اختیار داریم که در ظرف اول ۵ مهرهٔ آبی و ۸ مهرهٔ قرمز، در ظرف دوم ۶ مهرهٔ آبی و ۷ مهرهٔ قرمز، و در ظرف سوم ۳ مهرهٔ آبی و ۱۰ مهرهٔ قرمز وجود دارد. به تصادف یکی از ظرف‌ها را انتخاب می‌کنیم و دو مهره از آن بیرون می‌آوریم و مشاهده می‌کنیم که هر دو مهره آبی است. چقدر احتمال دارد که:

الف) مهرهٔ انتخابی از ظرف اول باشد؟

ب) مهرهٔ انتخابی از ظرف دوم نباشد؟

(آمار و احتمال، فصل ۲)

۱۰. یک مثلث با مساحت a سانتی‌متر مربع و محیط $a-6$ سانتی‌متر در اختیار داریم. در تجانس با نسبت تجانس $\frac{-1}{3}$ و مرکز تجانس O در خارج از مثلث، تصویر این مثلث دارای مساحت b سانتی‌متر مربع و محیط $b+4$ سانتی‌متر می‌شود. مقدار a و b را مشخص کنید.

(هندسه ۲، فصل ۲)

۱۱. نمودارهای تابع‌های زیر را رسم کنید. سپس مساحت ناحیهٔ محصور بین دو نمودار را مشخص سازید.

$$f(x) = |x + 2|$$

$$g(x) = -|x| + 6$$

(ریاضی و آمار ۲، فصل ۲)

۱۲. اگر $f(x) = \text{sign}(x)$ (تابع علامت) و $g(x) = [x] + 2$ باشد، آنگاه تابع‌های زیر را رسم کنید.

$$h(x) = (f + g)(x)$$

$$p(x) = (f \times g)(x)$$

$$q(x) = \left(\frac{g}{f}\right)(x)$$

(ریاضی و آمار ۲، فصل ۲)

۱۳. حاصل $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{10+x} - \sqrt{10-x} - 2}{x - 6}$ را در صورت وجود به دست آورید.

(ریاضی ۳، فصل ۳)

چشم انداز

نمونه سؤال های آزمون سراسری
بارویکرد مفهومی

جواد شوهانی

دکترای ریاضی، دبیر ریاضی مدارس استعداد های درخشان

علی یعقوبی

دبیر ریاضی مدارس استعداد های درخشان

پاسخ
سؤالات

۴. اگر برد تابع

$$f = \{(\omega, a^2+1), (2a-b, 3a+b), (-a, a^2-1), (\omega, 2a), (a+1, a-1)\}$$

تنها شامل دو عضو باشد، آنگاه حاصل ab کدام است؟

(الف) ۳-

(ب) ۱-

(ج) ۱

(د) چنین تابعی وجود ندارد.

(ریاضی و آمار ۱، فصل ۲)

۵. اگر

$$A = [\sin(0^\circ)] + [\sin(1^\circ)] + [\sin(2^\circ)] + \dots + [\sin(179^\circ)] + [\sin(180^\circ)]$$

$$B = [\log 1] + [\log 2] + [\log 3] + \dots + [\log 179] + [\log 180]$$

و باشند، آنگاه $A+B$ کدام است؟ $[.]$ علامت جزء صحیح است.

(الف) ۲۵۰

(ب) ۲۵۱

(ج) ۲۵۲

(د) ۲۵۳

(ریاضی ۲، فصل ۳، ۴، ۵)

۶. اگر $\cos \alpha + \sin \alpha = \frac{5}{4}$ باشد، آنگاه حاصل عبارت

$$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$$
 در کدام بازه قرار می گیرد؟

(الف) $(0, \frac{1}{3})$ (ب) $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ (ج) $(\frac{2}{3}, 1)$ (د) $(1, +\infty)$

(ریاضی ۲، فصل ۴)

۱. اگر داشته باشیم: $x^2+y^2=6$ و $x+y=2$ ، آنگاه x^6+y^6 کدام است؟

(الف) ۱۹۸

(ب) ۲۱۰

(ج) ۲۲۲

(د) ۲۳۴

(ریاضی ۱، فصل ۳)

۲. سهمی $y=x^2+ax+b$ از نقطه $A(-1, 3)$ می گذرد ودر نقطه ای به طول ۳ دارای کمترین مقدار است. حاصل ab

کدام است؟

(الف) ۲۴-

(ب) ۱۲-

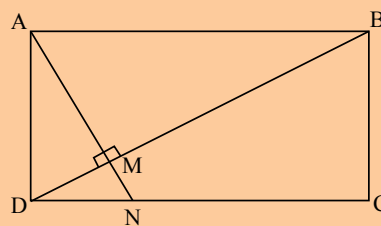
(ج) ۱۲

(د) ۲۴

(ریاضی ۱، فصل ۴)

۳. در مستطیل $ABCD$ داریم: $AB=2BC$ و $AM \perp BD$ (شکل ۱). حاصل $\frac{AD}{MN}$ کدام است؟(الف) $\sqrt{5}$ (ب) $2\sqrt{3}$ (ج) $2\sqrt{5}$

(د) ۴



شکل ۱

(هندسه ۱، فصل ۲)



۴۵

شماره ۱۳۳۳ | زمستان ۱۴۰۳

۷. در کدام یک از گزینه‌های زیر، نمودار تابع $(\frac{f}{g})(x)$ فقط یک نقطه در صفحه مختصات است؟ [.] علامت جزء صحیح است.

الف) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 1}$ و $g(x) = [x^2]$

ب) $f(x) = \log(-x^2 - 2x + 3)$ و $g(x) = \sqrt{x - 1}$

ج) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x}$ و $g(x) = \frac{[\frac{x}{2}]}{x^2 + 4x + 4}$

د) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4x - 5}}{x + 1}$ و $g(x) = \sqrt{-x - 1}$

(حسابان ۱، فصل ۲ و ۳)

۸. اگر $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\tan^4 \alpha + \cot^4 \alpha$ در کدام بازه زیر قرار دارد؟

الف) $[0, 20]$

ب) $[20, 40]$

ج) $[40, 60]$

د) $(60, +\infty)$

(حسابان ۱، فصل ۴)

۹. روی یک سکه عدد ۱ و پشت آن عدد ۲ نوشته شده است. این سکه را سه بار پرتاب می‌کنیم و یک تاس را هم پرتاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد مجموع عددهای ظاهر شده بیشتر از ۸ باشد؟

الف) $\frac{4}{12}$

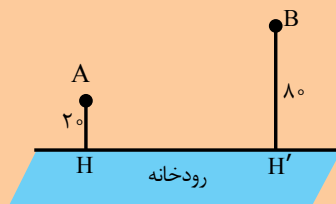
ب) $\frac{5}{12}$

ج) $\frac{6}{12}$

د) $\frac{7}{12}$

(آمار و احتمال، فصل ۲)

۱۰. مطابق شکل ۲ قرار است فردی از نقطه A به کنار رودخانه برود و سطل آبی را پر کند و به نقطه B بازگردد. فاصله A و B تا رودخانه (AH و BH') به ترتیب ۲۰ و ۸۰ متر و فاصله نقاط A و B از یکدیگر ۱۰۰ متر است. طول کوتاه‌ترین مسیر حدوداً چند متر است؟



شکل ۲

الف) ۱۲۵

ب) ۱۲۸

ج) ۱۳۲

د) ۱۱۶/۸

(هندسه ۲، فصل ۲)

۱۱. اگر $f(x) = (ax + 4)(bx - 1) - 4x^2$ تابعی ثابت باشد، حاصل $|b^2 - a|$ کدام است؟

الف) ۱

ب) ۳

ج) ۵

د) دو جواب متفاوت می‌تواند داشته باشد.

(ریاضی و آمار ۲، فصل ۲)

۱۲. f و g تابع‌های خطی و $(f+g)(x) = 5x + 1$ و $f(x) = ax + 2$ و $(f.g)(x) = 6x^2 + x - 2$. اگر نقطه (m, n) نقطه برخورد تابع‌های f و g با یکدیگر باشد، حاصل m-n کدام است؟

الف) -۴

ب) -۵

ج) ۵

د) ۴

(ریاضی و آمار ۲، فصل ۲)

۱۳. از نقطه $A(0, -5)$ دو مماس بر نمودار تابع $f(x) = x^2 - 1$ رسم می‌کنیم. این دو خط در نقاط (a, b) و (c, d) بر نمودار تابع f مماس هستند. حاصل $a + b + c + d$ کدام است؟

الف) ۰

ب) ۲

ج) ۴

د) ۶

(ریاضی ۳، فصل ۴)

۱۴. تابع $f(x) = [\cos x]$ در بازه $[0, 2\pi]$ در a نقطه و تابع $g(x) = [x^2]$ در بازه $(-\infty, 2)$ در b نقطه مشتق‌پذیر نیستند. مقدار $a + b$ کدام است؟

الف) ۵

ب) ۶

ج) ۷

د) ۸

(ریاضی ۳، فصل ۴)

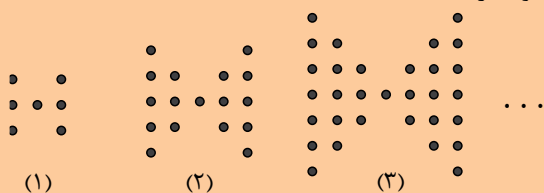


۴۶

شماره ۳۳۳ | زمستان ۱۴۰۳

۱۹. در شکل دوازدهم از الگوی شکل ۳، چند نقطه

وجود دارد؟



شکل ۳

(الف) ۲۸۷

(ب) ۳۰۵

(ج) ۳۲۵

(د) ۳۳۷

(ریاضی و آمار ۳، فصل ۲)

۲۰. می‌خواهیم ۳۵۰ سیب را بین ۵ نفر طوری تقسیم کنیم که تعداد سیب‌های دریافت‌شده توسط این ۵ نفر یک دنباله حسابی تشکیل دهند و مجموع سه سهم بزرگ‌تر شش برابر مجموع دو سهم کوچک‌تر باشد. در این صورت، کسی که کمترین سهم را گرفته، چند سیب دریافت کرده است؟

(الف) ۱۰

(ب) ۲۰

(ج) ۳۰

(د) چنین تقسیمی امکان‌پذیر نیست.

(ریاضی و آمار ۳، فصل ۲)

$$15. \text{ اگر تابع } f(x) = \begin{cases} bx - 5 & x \geq 4 \\ \frac{x^2 + ax + 4}{x - 4} & x < 4 \end{cases} \text{ در نقطه } x=4$$

پیوسته باشد. حاصل ab کدام است؟

(الف) ۱۰-

(ب) ۶-

(ج) ۶

(د) ۱۰

(حسابان ۲، فصل ۳)

۱۶. کدام یک از تابع‌های زیر، نقاط مشتق‌ناپذیری بیشتری در بازه $[0, 2\pi]$ دارند؟

(الف) $f(x) = [\sin 2x]$

(ب) $g(x) = [2 \sin x]$

(ج) $h(x) = [2^{\frac{x}{2}}]$

(د) موارد «الف» و «ب»

(حسابان ۲، فصل ۴)

۱۷. در چند گراف ساده با مجموعه رأس‌های $V = \{a, b, c, d, e\}$ هیچ یک از رأس‌های c و e تنها نیستند؟

(الف) ۱۰۱۶

(ب) ۸۸۸

(ج) ۸۹۶

(د) ۹۰۴

(گسسته، فصل ۲)

۱۸. نقطه‌های $F(-۵, -۶)$ و $F'(۲, ۳)$ کانون‌های یک بیضی هستند و $P(-۱, ۷)$ نقطه‌ای روی این بیضی است. اختلاف طول قطر بزرگ و قطر کوچک این بیضی کدام است؟

(الف) ۱

(ب) ۲

(ج) ۴

(د) ۸

(هندسه ۳، فصل ۲)

چگونه برای المپیاد ریاضی آماده شویم؟

آرش رستگار

عضو هیئت علمی دانشگاه صنعتی شریف

محمدحسین نادری

دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه صنعتی شریف

کران بالا و پایینی بیابید که احراز شوند. یعنی نتوان این کران‌ها را بهتر کرد.



برای مشاهده پاسخ نمونه
سؤال جبر المپیاد، رمزینه
را پویش کنید.

پرسش ترکیبیات

چندین عدد طبیعی در یک ردیف قرار گرفته‌اند. دو عدد کنار هم را انتخاب می‌کنید، مانند x و y که در آن $x > y$ و x چسبیده و سمت چپ y قرار گرفته است. او زوج (x, y) را با زوج $(y+1, x)$ یا $(x-1, x)$ جایگزین می‌کند. آیا ممکن است بتواند این روند را بی‌نهایت بار ادامه دهد؟



برای مشاهده پاسخ نمونه
سؤال ترکیبیات المپیاد،
رمزینه را پویش کنید.

پرسش نظریه اعداد

اگر n عددی طبیعی باشد و $a_1, \dots, a_k$ عددهای طبیعی متمایز در $\{1, \dots, n\}$ باشند که $k \geq 2$ و عبارت $n | a_i(a_{i+1}-1)$ برای $i=1, \dots, k-1$ صادق باشد. در مورد $a_k(a_1-1)$ چه می‌توان گفت؟ آیا $n | a_k(a_1-1)$ ؟ آیا ممکن است $n | a_k(a_1-1)$ ؟
ببینید چه حکمی می‌توانید ثابت کنید.



برای مشاهده پاسخ نمونه
سؤال نظریه اعداد المپیاد،
رمزینه را پویش کنید.

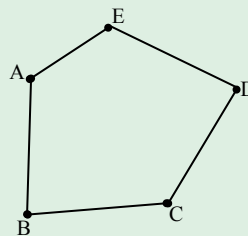
سبک آموزشی ما با سبک رایج تفاوت‌هایی دارد. بار اصلی یادگیری پس از حل مسئله با مقایسه راه‌حل‌های متفاوت صورت می‌پذیرد. در این نگاه، هر مسئله یک زمین بازی ریاضی به ما می‌دهد که باید زمین آن مسئله را آن قدر شخم بزنیم که هر چه بتوان برای آن ثابت کرد را بیرون بکشیم. بنابراین با به‌دست آوردن خواسته مسئله، عقب نمی‌نشینیم.

پرسش هندسه

فرض کنید $ABCDE$ یک پنج‌ضلعی محدب باشد که در آن داریم: $AB=BC=CD$ و $\angle EAB = \angle BCD$ و $\angle EDC = \angle CBA$ (به‌طور خلاصه: $\hat{A} = \hat{C}$ و $\hat{D} = \hat{B}$). در چنین شکلی به دنبال خط‌های هم‌رس بگردید.



برای مشاهده پاسخ نمونه
سؤال هندسه المپیاد،
رمزینه را پویش کنید.



پرسش جبر

اگر a و b و c و d اعدادی حقیقی باشند که

$$a+b+c+d=6$$
و

$$a^2+b^2+c^2+d^2=12$$
برای عبارت

$$4(a^3+b^3+c^3+d^3)-(a^4+b^4+c^4+d^4)$$



۴۸

شماره ۱۳۳ | زمستان ۱۴۰۳

بازی عددی

محسن روایتی

مدیر خانه ریاضیات استاد فروزانفر



برای مشاهده پاسخ رمزینه را پویش کنید

۲	۸	۲	۴	۲	۲	۴	۲	۸	۲
۲			۴	۴	۲	۲	۴	۴	۲
			۲				۲		
۲	۲								
۸									
۲	۴	۲							
۴	۴								
۲	۲								
۲	۲								
۴	۴								
۲	۴	۲							
۸									
۲	۲								

نقاشی با عددی

روش بازی

عددهای بیرون هر سطر و ستون، تعداد ردیف‌های مربع سیاه را که در آن سطر یا ستون وجود دارند، نشان می‌دهند. برای مثال ۴، ۵، ۹ و ۲ نمایش ۴ ردیف مربع سیاه ۴، ۵، ۹ و ۲ تایی است. در واقع عددهای جدا نمایش‌دهنده حداقل یک فضای خالی بین آن‌ها هستند.

جدول راهنما

	۲	۲	۱
			۱
۱	۱		
۲			
۲			

پارک

روش بازی

گل‌ها را در بالا، پایین یا طرفین درخت‌ها قرار دهید. گل‌ها نباید به صورت سطری، ستونی یا قطری کنار یکدیگر قرار گیرند. تعداد گل‌های هر سطر و ستون بیرون از جدول نشان داده شده است. هر درخت فقط به یک گل وصل می‌شود.

جدول راهنما

۱	۱	۱	۱	۱
۱	۱	۱	۱	۱
۱	۱	۱	۱	۱
۱	۱	۱	۱	۱
۱	۱	۱	۱	۱

										۳
										۱
										۲
										۲
										۲
										۲
										۲
										۲
										۲
										۲
۲	۳	۱	۱	۳	۰	۵	۰	۴	۱	

										۳
										۱
										۲
										۲
										۲
										۲
										۲
										۲
										۲
										۲
۲	۳	۱	۱	۳	۰	۵	۰	۴	۱	

الماس

روش بازی

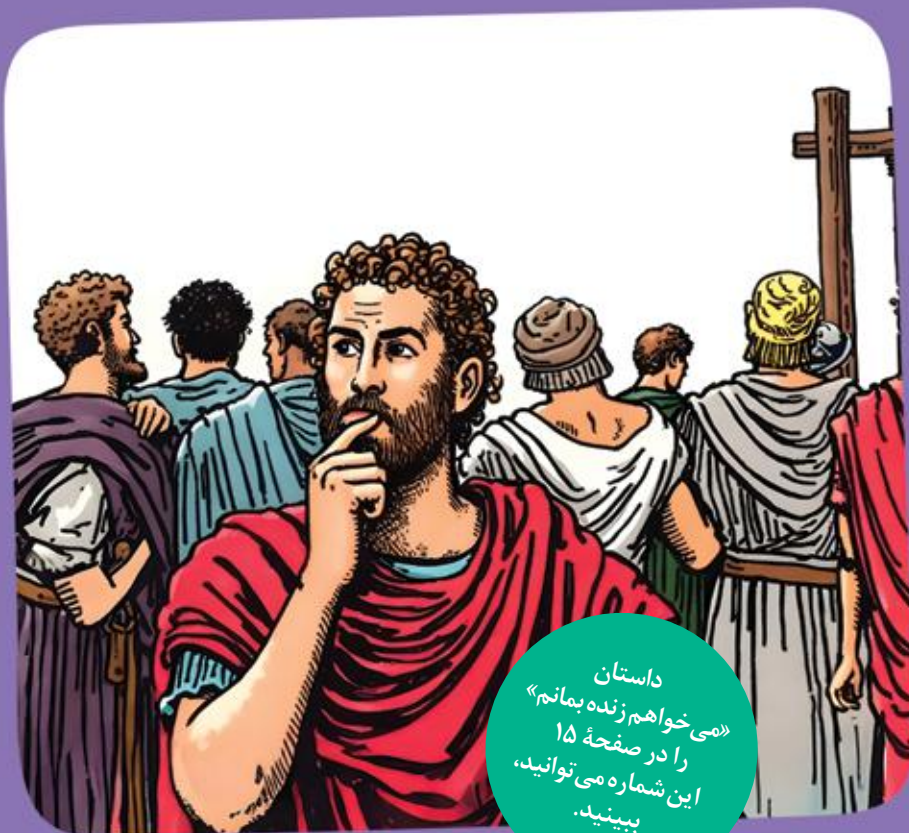
عددهای بیرون جدول تعداد الماس موجود در هر سطر و ستون را نشان می‌دهند. هر پیکانه (فلش) نشان‌دهنده راستای قرارگیری یک یا چند الماس را نشان می‌دهد و داخل خانه پیکانه، الماسی وجود ندارد. ممکن است الماس بلافاصله بعد از پیکانه یا با فاصله از آن قرار گیرد و ممکن است برای تمامی الماس‌ها پیکانه وجود نداشته باشد. لذا ممکن است قبل از پیکانه هم الماس‌هایی موجود باشند.

جدول راهنما

	۰	۲	۰	۲
۲				
۰				
۰				
۲				



داستان مصور
این شماره تحت عنوان
«ریاضی با جناب سعدی»
را در صفحه ۲۴
می توانید ببینید.



داستان
«می خواهیم زنده بمانیم»
را در صفحه ۱۵
این شماره می توانید
ببینید.