

متوسطه ۲
ریاضی

۱۳۱

رشد



وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی



فصلنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

برای دانش آموزان دوره دوم متوسطه اهلایر دبیران ریاضی

شماره پی در پی ۱۳۱ پاییز ۱۴۰۳ | دوره سی و چهارم | ۴۸ صفحه
www.roshdmag.ir



ستارگان پارسی

دو عدد بحث برانگیز: ...۹۹۹۹۹۹/۰ و ۰/۵۵۵۵۵۵۵۵

شش هزاره هندسه در یک قاب

یک شکل هندسی غیرمنتظره، مثلث رولو

چشم انداز و پیشرو

نمونه سؤالات امتحان نهایی و آزمون سراسری بارونگر (مفهوم)

عَلَيْهِ السَّلَامُ

زینب کبری

حضرت زینب کبری (س)، برکت زندگی ما است

او که صبرش به بلا، درس پایداری ما است.



وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی

فصلنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
برای دانش آموزان دوره دوم متوسطه
همیار دبیران ریاضی
شماره ۱ پاییز ۱۴۰۳ | دوره سی و چهارم | ۴۸ صفحه
www.rosdmdag.ir

مدیر مسئول: محمد صالح مذنبی
سر دبیر: مجید حکمت
مدیر هنری: کوروش یارسانژاد

مدیر داخلی: الهام الیکایی
ویراستار ادبی: بهروز راستانی
طراح گرافیک: روح الله محمودیان
عکس روی جلد: اعظم لاریجانی

پنهان آینه پور | محرم ایردموسی | رحیم خیرالله زاده
آرش رستگار | محمد هاشم رستمی
محمد رضا سید صالحی | محمد تقی طاهری تنجانی
حسین نامی ساعی | محمود نصیری
سید محمد رضا هاشمی موسوی | احسان یار محمدی

وبگاه
www.rosdmdag.ir
رایانامه
borhanmotevaseteh2@rosdmdag.ir
صفحه خرید مجلات
www.rosdmdag.ir/u/2sg

نشانی دفتر مجله
تهران، ابرانشهر شمالی، پلاک ۳۷۰
تلفن دفتر مجله
۰۲۱-۸۸۲۱۱۶۱-۹
نمایر مجله
۰۲۱-۸۸۴۹۰۳۱۶
صندوق پستی دفتر مجله
۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
صندوق پستی امور مشترکین
۱۵۸۷۵/۳۳۳۱
تلفن امور مشترکین
۰۲۱-۷۷۶۳۳۲۰۸

خواننده مجلات رشد همه
تلاش خود را کرده است تا
این مجله در دسترس عموم
دانش آموزان قرار گیرد و همه کودکان
و نوجوانان میهن عزیز اسلامی مان
امکان تهیه آن را داشته باشند.



برنامه شاد



وب نوشت
نظر سنجی
مجلات رشد



برگه اشتراک
مجلات رشد
قیمت: ۱۸۰۰۰۰/۱۸۰۰۰۰ ریال

مجله رشد برهان ریاضی متوسطه ۲، از همه دبیران ریاضی و
دانش آموزان عزیز، در این زمینه ها دعوت به همکاری می کند:
• نگارش مقاله های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات
میاجت کتب های ریاضی دوره متوسطه ۲) طرح مسائل کلیدی
به همراه حل آن ها برای دانش آموزان. طرح مسائل مسبقاتی به همراه
مقاله های عمومی مربوط به مسائل ریاضی. نگارش یادداشت
علمی و اجتماعی ریاضی. داستان ها و تاریخ ریاضیات. زندگی نامه
نکته های تازه و لطیف ریاضیات. آموزش رایانه اخبار ریاضی.
شهر یاد مرده شما و...
• مجله در اصلاح، حذف و افزودن به مقاله ها آزاد است.

• مسئولیت هر مقاله با نویسنده آن است و مقالات ارسالی
برگشت داده نمی شوند.
• استفاده از مطالب مجله در کتابها یا مجله های دیگر، با
ذکر دقیق مأخذ مانی ندارد.
• مقالات خود را از طریق www.rosdmdag.ir/urao
در انتهای مقاله های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و
رایانامه (ایمیل) خود را احتما درج کنید و در
ابتدای مقاله نام و نام خانوادگی و نام شهرستان
و سمت خود را قید فرمایید.

ستارگان پارسى



اگر دانش به ستاره ثريا بسته باشد
و در آسمان ها آرام گيرد، مردمانى از
سرزمين ايران بدان دست مى يابند.

پيامبر اعظم (ص)

است. وي رصدخانه‌اي در مراغه تأسیس کرد که به يکي از مراکز اصلي نجوم در آن زمان تبديل شد. همچنين کتاب «زيچ ايلخاني» را تدوين کرد که مجموعه جداول نجومى بود و قرن ها در جهان اسلام از آن استفاده مى شد.

● **غياث الدين جمشيد کاشاني** (قرن هشتم) رياضى دان و اخترشناس برجسته ايراني است. او «زيچ خاقاني» را تدوين کرد که دقيق ترين زيچ (تقويم ستارگان) در زمان خود بوده است.

● **و اما امروز فرزندان ابوريحان**، خواجه نصيرالدين و... در سايه سار جمهورى اسلامى ايران بر بام نجوم جهان ايستادند و در راه رسيدن به موفقيت، الگوي دانش آموزان ايراني شدند. افتخار آفريني دانش آموزان نخبه ايراني، **حنانه خرم دشتي، آروين رسول زاده، محمد مهدي کشاورزي، آريا فاتح کرداري و علي نادري لردجاني (با کسب پنج مدال طلا)**، در هفدهمين المپياد جهاني نجوم و اختر فيزيک را به مدال آوران، ملت شريف ايران و به ويژه خدمت خانواده و دبيرانشان تبريک عرض مى کنيم.

پيروز و سربلند باد ايران

● دوستان عزيز، تصوير مجموعه ستاره هاى واقع در بالاي عنوان مقاله، همان خوشه پروين يا ستاره ثريا است که در حديث پيامبر عزيزمان به آن اشاره شده است.

از ديرباز انسان ها براى درک حرکت ستارگان و سيارات به رياضيات نياز داشتند. تمدن هاى گوناگون با استفاده از اصول رياضى، به محاسبه موقعيت ستارگان و پيش بينى حرکات آن ها پرداخته اند. با پيشرفت علم نجوم، نياز به ابزارهاى رياضى پيچيده تر احساس شد. معادلات ديفرانسيل به عنوان يکي از ابزارهاى کليدى در نجوم مدرن، براى مدل سازى حرکت اجرام آسمانى و تحليل پويائى (ديناميک) سامانه هاى فضايى مورد استفاده قرار مى گيرند. اين معادلات به اخترشناسان کمک مى کنند رفتار اجرام آسمانى را در شرايط متفاوت پيش بينى کنند.

در طول تاريخ، رياضى دانان و اخترشناسان سرشناس ايراني از پيشتازان علم نجوم بوده اند:

● **ابوريحان بيروني** (قرن چهارم هجرى) يکي از بزرگ ترين دانشمندان و اخترشناسان تاريخ است. او در زمينه رياضيات، نجوم، فيزيک و علوم طبيعى پيشرفت هاى زيادى داشت. بيروني کتاب مهمى به نام «التفهيم لاوائل صناعة التنجيم» نوشت که يک دايره المعارف جامع از دانش نجومى محسوب مى شود.

● **خيام نيشابوري** (قرن پنجم) شاعر و رياضى دان بزرگ ايراني، علاوه بر شعر و ادبيات، در علم نجوم نيز فعاليت هاى قابل توجهى داشت. او با استفاده از محاسبات نجومى، «تقويم جلالى» را تدوين کرد که دقت بالايى داشت و تا امروز مورد استفاده قرار مى گيرد.

● **خواجه نصيرالدين طوسي** (قرن هفتم) فيلسوف، دانشمند و رياضى دان ايراني، يکي ديگر از چهره هاى مهم در نجوم اسلامى



۲

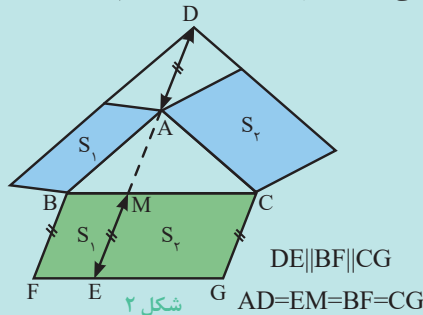
شماره ۱۳۱ آبان ۱۴۰۱

آموزش ریاضی به روش گفت و گو فیثاغورس در سه بُعد

(قسمت اول)

خسرو داودی
آرش رستگار

تعمیمی از قضیه فیثاغورس هست به نام قضیه آپولونیوس که می گوید: «اگر روی ضلع های مجاور یک مثلث دلخواه دو متوازی الاضلاع بنا کنیم، می شود روی ضلع سوم متوازی الاضلاعی بنا کرد که مساحت آن مجموع مساحت های دو متوازی الاضلاع اولیه باشد.» شکل ۲ به شما می گوید که چطور این کار را انجام دهید:

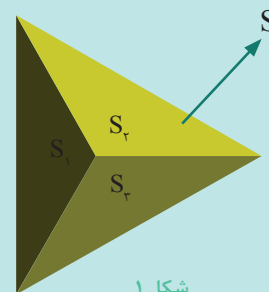


اثبات را به عهده شما می گذارم. همچنین توضیح دهید چرا قضیه آپولونیوس قضیه فیثاغورس را نتیجه می دهد. اما فکری که به سر من زده، این است که به نظرم باید بتوان مشابه آپولونیوس را برای یک چهاروجهی دلخواه هم ثابت کرد و در این صورت اثباتی هندسی از قضیه فیثاغورس سه بعدی در اختیار خواهیم داشت. این کار را به شما سه نفر می سپرم. روی آن کمی فکر کنید و بعد نتیجه آن را به من هم بگویید. بچه ها همان روز در حیاط مدرسه دور هم جمع شدند تا کمی درباره مسئله صحبت کنند. رضا گفت (نگاه دقیق): «من اول کنجکاو بودم بدانم که چطور آپولونیوس می تواند فیثاغورس را نتیجه بدهد. بگذارید یک شکل بکشم.

آقای فرزانه سه دانش آموز برجسته داشت: جعفر، خسرو و رضا که به آن ها پروژه های تحقیقاتی کوچک می داد. این سه نفر جمع خوبی را تشکیل می دادند. جعفر تفکری واگرا داشت و همه چیز را به همه چیز ربط می داد. خسرو ذهنی بسیار فلسفی و رضا ذهنی بسیار دقیق داشت که مو لای درزش نمی رفت. همیشه در مرحله آخر، اثبات ها را رضا بررسی می کرد.

آقای فرزانه این دانش آموزان برجسته اش را دور هم جمع کرد و گفت: «من یک پروژه تحقیقی کوچک برای شما دارم. قضیه فیثاغورس یک صورت سه بعدی دارد که در آن یک چهاروجهی با کنج سه قائمه را در نظر می گیرد. اگر S_1 ، S_2 و S_3 مساحت های وجه های همسایه کنج قائمه باشند و S مساحت وجه روبه رو به آن ها باشد، تعمیم فیثاغورس می گوید:

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = S^2$$



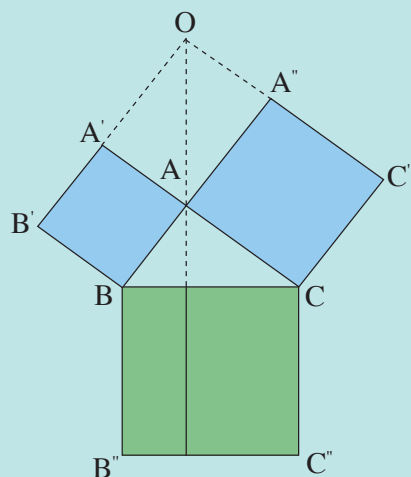
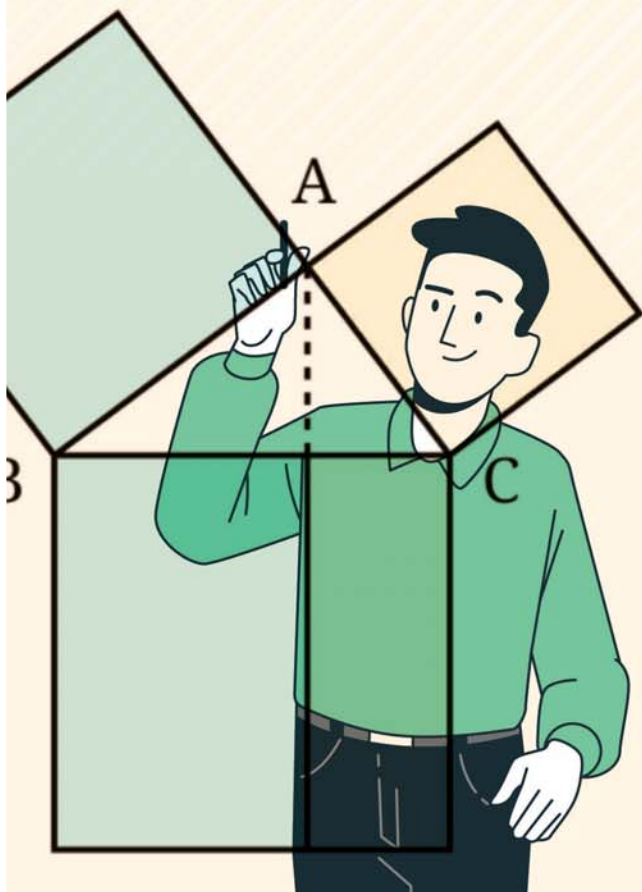
شکل ۱

همیشه دوست داشتم این حکم را هم مانند اثبات های فیثاغورس در دو بعد با برش و چسباندن شکل ها به روشی هندسی ثابت کنم، اما هرگز موفق نشدم. اما چند روز است فکری به نظرم رسیده و می خواهم از شما کمک بگیرم.



۳

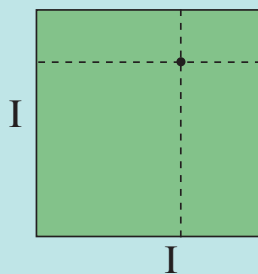
شماره ۱۳۱ | پاییز ۱۴۰۴



شکل ۳

روی سه ضلع مثلث قائم‌الزاویه ABC سه مربع بنا کردم و به نظر همه چیز روشن است. جز اینکه علاوه بر آپولونیوس باید ثابت کنیم امتداد OA بر BC عمود است تا مطمئن شویم متوازی‌الاضلاع ساخته شده مربع است. همچنین باید توجه کرد که $OA=BC$ و گرنه متوازی‌الاضلاع ممکن است مستطیل بشود.»

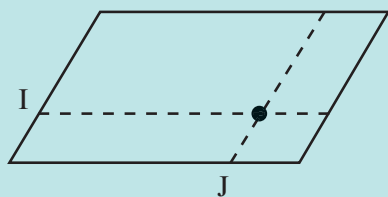
جعفر گفت (نگاه واگرا): «خوب من سعی می‌کنم همین کار را برای چهاروجهی با کنج سه قائمه انجام دهم. اما آن سه تا وجهی که با کنج قائمه همسایه هستند مثلث‌اند. چطور روی آن‌ها مربع یا مکعب یا چیزی که منتظم است بنا کنم؟» خسرو گفت (نگاه فلسفی): «خب باید توجه کنید مربعی که روی پاره خط I بنا می‌شود در واقع حاصل ضرب I در I است.



شکل ۴

یعنی مجموعه زوج مرتب‌هایی که هر درایه آن نقطه‌ای از I است. بنابراین به جای یک وجه مثلثی Δ باید $\Delta \times \Delta$ را در نظر گرفت که می‌شود یک شکل چهاربعدی و نمی‌توان آن را تصور کرد. شاید برای همین بوده که کسی تا به حال نتوانسته است برای فیثاغورس سه‌بعدی اثباتی هندسی ارائه کند. پیشنهاد من این است که به عقب برگردیم. آقای فرزانه

پیشنهاد کردند که اول سعی کنیم آپولونیوس را تعمیم دهیم به چهاروجهی‌های دلخواه. توجه کنید که هر متوازی‌الاضلاع به نوعی حاصل ضرب دو بازه I و J است.»



شکل ۵

جعفر گفت (نگاه واگرا): «پیشنهاد من این است که روی مثلث Δ یک منشور بنا کنیم که البته لزوماً قائم نیست و آن را به شکل $\Delta \times I$ نشان دهیم. این همان کارکرد متوازی‌الاضلاع را دارد. دو متوازی‌الاضلاع هم‌ارتفاع و هم‌قاعده مساحتی برابر دارند. در مورد دو منشور هم چنین است. پس احتمالاً اثبات آپولونیوس اینجا هم کار می‌کند. بیا بید اول سعی کنیم آپولونیوس را برای منشورهای روی وجه‌های یک چهاروجهی ثابت کنیم.»

زنگ تفریح تمام شد و بچه‌ها متفرق شدند و هر یک در



$$\{x_n\} + \{y_n\} \stackrel{\text{def}}{=} \{x_n + y_n\}; \quad \{x_n\} \subset \mathbb{R} \quad \downarrow n \rightarrow \infty$$

$$\downarrow n \rightarrow \infty; \quad y_n \quad 13 = 9; \quad x: p \quad n\sqrt{4}; \quad n\sqrt{13}n;$$

مشخص می‌کند منشور بالای سر وجه از ΔBCD در چه جهتی باید باشد و چقدر از ΔBCD فاصله داشته باشد. گمانم مرحله‌های اثبات آپولونیوس هم همه کار کنند. حالا نوبت این است که به کنج قائمه فکر کنیم.»

رضا گفت (نگاه دقیق): «من اثبات را با دقت در منزل بررسی خواهم کرد. اما اگر بخواهیم فیثاغورس را ثابت کنیم باید منشورهایی را در نظر بگیریم که قائم باشند و ارتفاع آن‌ها چنان باشد که حجم منشور مربع مساحت قائمه آن بشود. این کار ممکن است. فقط می‌ماند یک چیز را ثابت کنیم؛ اینکه امتداد $\bar{AA}$ بر وجه ΔBCD عمود است و طول آن هم برابر مساحت ΔBCD است.»

جعفر (نگاه واگرا): «اگر دقت کنید می‌بینید که قطر $\bar{AA}$ یک مکعب مستطیل خواهد بود که اضلاع آن به طول‌های برابر مساحت‌های S_1, S_2, S_3 و S_4 هستند.

برای عمود بودن $\bar{AA}$ بر ΔBCD هم کافی است نشان دهیم چهاروجهی قائمه‌ای که در کنج مکعب مستطیلی به قطر $\bar{AA}$ است، با چهاروجهی $ABCD$ متشابه است.»

روز بعد رضا اثبات را کامل و همه را دقیق روی کاغذ پیاده کرده بود. شما هم همین کار را انجام دهید.

رضا گفت (نگاه دقیق): «من نشان دادم که طول $\bar{AA}$ برابر $\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2}$ است و لذا منشور بالای ΔBCD حجمی برابر $S_4 \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2}$ خواهد داشت. و البته ثابت کردم این منشور قائم هم هست. همان تشابه چهار وجهی‌ها که جعفر حدس زد درست باشد، کار کرد. قضیه آپولونیوس در سه بعد می‌گوید:

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = \text{حجم منشور چهارم}$$

اما حجم منشور ساخته شده از این قرار است:

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = S_4 (\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2})$$

اما ما می‌خواستیم ثابت کنیم: $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = S_4^2$ نه اینکه: $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = S_4 (\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2})$ پس حکم هنوز ثابت نشده است.

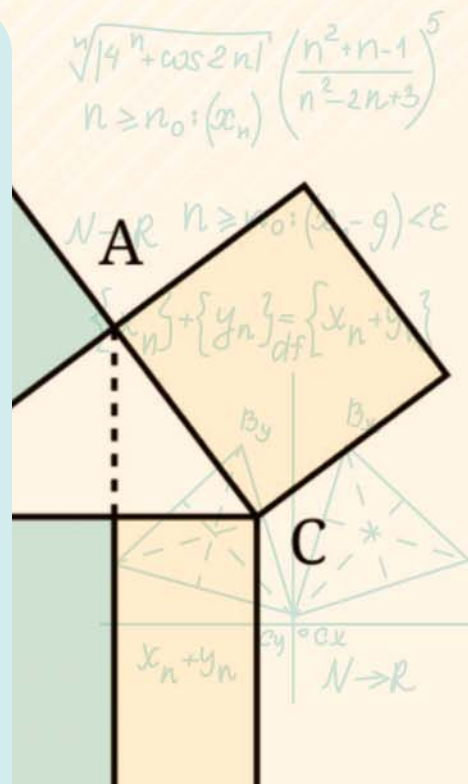
خسرو گفت (نگاه فلسفی):

«چشم خود بستم که دیگر چشم مستش ننگرم

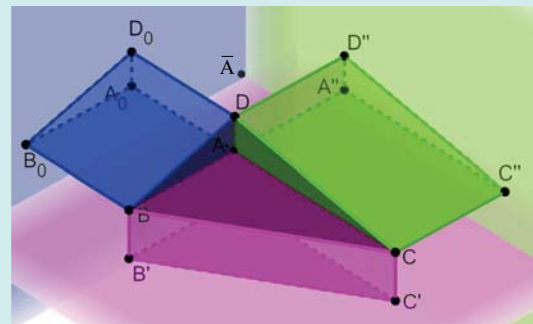
ناگهان دل داد زد: دیوانه من می‌بینمش!

چرا ثابت شده! خوب هم ثابت شده! کافی است دو طرف را بر $\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2}$ تقسیم کنیم.»

آقای فرزانه که اثبات را دید از خوش حالی اشکش درآمد و بچه‌ها را آفرین گفت.



خانه فکر کردن به پروژه را ادامه دادند. فردای آن روز جعفر با دست پر آمد.



شکل ۶

جعفر گفت (نگاه واگرا): «روی هر وجه که همسایه کنج A در چهاروجهی $ABCD$ است، یک منشور کاشتم. همه چیز مانند آپولونیوس دوبعدی است. صفحه‌های مثلث‌های $\Delta A_0 B_0 D_0$ و $\Delta A'' B'' C''$ ، $\Delta A'' C'' D''$ مثلث‌های ΔABC ، ΔACD و ΔABD قرار دارند، یکدیگر را در یک نقطه مشترک قطع می‌کنند؛ درست مانند آپولونیوس دوبعدی. آن نقطه را $\bar{A}$ می‌نامیم.

حال $\bar{AA}$ را ادامه می‌دهیم تا به وجه ΔBCD برسد و بعد که رسید به اندازه خود $\bar{AA}$ ادامه می‌دهیم. این امتداد



۵

شماره ۱۳۱ | پاییز ۱۴۰۴

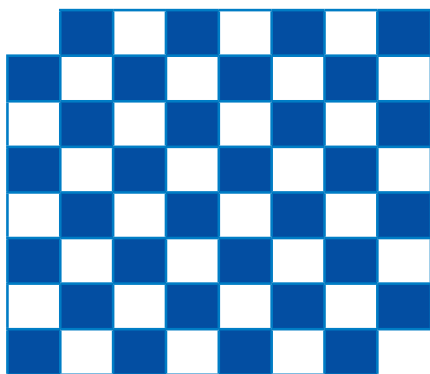
یک ایده خلاقانه اثبات به روش رنگ آمیزی

محمد تقی طاهری تنجانی

پژوهشگر ریاضی، مؤلف کتاب درسی

حالا شما می‌توانید فرم‌های دیگر را امتحان کنید. در هر سری دو خانه که مجاور هم نیستند، خالی می‌مانند. چطور می‌شود این مسئله را ثابت کرد؟

برای اثبات مسئله از رنگ آمیزی استفاده می‌کنیم. هر دومینو به صورت  در نظر گرفته می‌شود. نیمی آبی و نیمی سفید (یک خانه سفید و یک خانه آبی) حال صفحه شطرنج مسئله را در نظر بگیرید (شکل ۲).



شکل ۲

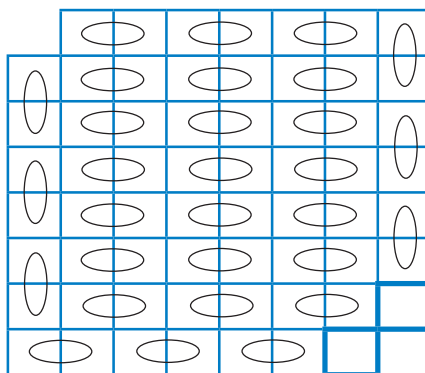
وقتی یک دومینو را روی سطح صفحه مورد نظر قرار می‌دهیم، دو مربع مجاور را می‌پوشانیم: یکی از مربع‌ها آبی و دیگری سفید است. به‌طور کلی، اگر K دومینو را روی سطح مورد نظر قرار دهیم K مربع آبی و K مربع سفید را می‌پوشاند، اما سطح مورد نظر 32 مربع آبی و 30 مربع سفید دارد و چون تعداد مربع‌های آبی که با دومینوها پوشانده می‌شوند، همیشه برابر تعداد مربع‌های سفیدی است که با دومینوها پوشانده می‌شوند، این کار نشدنی است!

به چند مثال دیگر از کاربرد رنگ آمیزی می‌پردازیم.

در سال ۱۹۶۱ فیزیک‌دانی اهل انگلیس به نام ام. ای. فیشر^۱ مسئله‌ای معروف را حل کرد که صورت آن چنین بود: «به چند طریق می‌توان یک صفحه شطرنج 8×8 را به وسیله دومینوها (قطعات مستطیل 2×1) پوشاند. او نشان داد این کار به $12 \times 90 \times 2^4$ و یا 12988816 راه متفاوت انجام‌پذیر است. حال فرض کنیم دو خانه گوشه‌ای و مقابل (قطری) صفحه شطرنج را حذف کرده‌ایم. به نظر شما صفحه باقی‌مانده را که از 62 مربع واحد تشکیل شده است، به چند طریق می‌توان توسط 31 دومینو پوشاند؟ پوشاندن به معنی آن است که هیچ خانه‌ای خالی نباشد و در ضمن هیچ دومینویی روی هم نیفتاده باشد.

به نظر می‌رسد که این مسئله از مسئله‌ای که فیشر حل کرده است، سخت‌تر باشد. اما این‌طور نیست. جواب مسئله عدد صفر است. به بیان دیگر پوشاندن صفحه مذکور به وسیله 31 دومینو غیرممکن است.

ایده حل مسئله رنگ آمیزی کردن است. یک چنینش از دومینوها را می‌توان در شکل ۱ مشاهده کرد (البته دو خانه و نه مجاور هم خالی می‌ماند!).

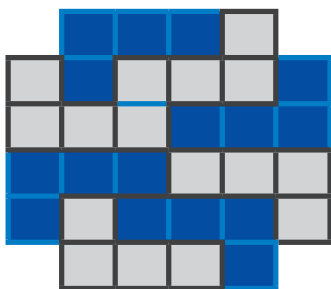


شکل ۱



۶

شماره ۱۳۱ پاییز ۱۴۰۱

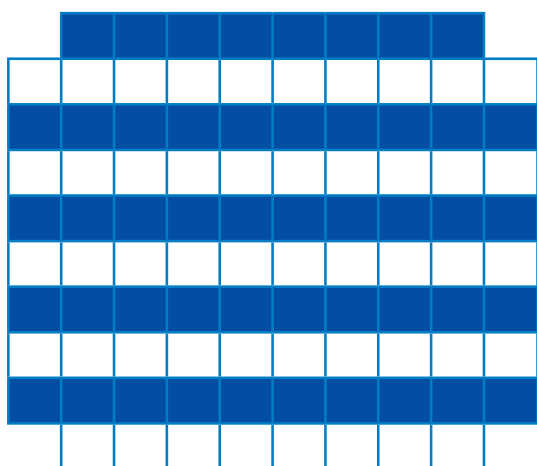


شکل ۴

حل: تعداد خانه‌های صفحه مذکور $n^2 - 4$ است. یک شرط لازم برای پوشانیدن این صفحه به وسیله چهارمربعی‌های L مانند، این است که $n^2 - 4$ بر ۴ بخش پذیر باشد. یعنی n باید زوج باشد. پس اگر n فرد باشد، صفحه مذکور را نمی‌توان به وسیله چهارمربعی‌های L مانند پوشاند. اما زوج بودن n کافی نیست. صفحه را مانند شکل ۵ رنگ می‌کنیم.

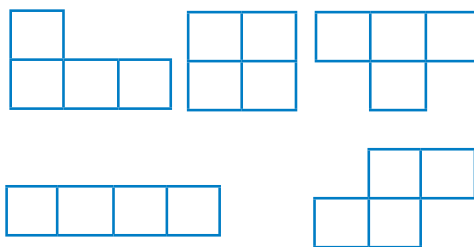
یک چهارمربعی L مانند که در این صفحه قرار داده شود، سه خانه سفید و یک خانه آبی، و یا سه خانه آبی و یک خانه سفید را می‌پوشاند. حال چون تعداد خانه‌های آبی و سفید صفحه برابر است، پس چهارمربعی‌های L مانند که به دو شکل افقی یا عمودی قرار می‌گیرند نیز باید تعدادشان

برابر باشد. این بدان معناست که تعداد چهارمربعی‌ها، یعنی $\frac{n^2 - 4}{4}$ ، باید زوج باشد و این یعنی $n^2 - 4$ بر ۸ بخش پذیر است. بنابراین n باید به صورت $4k + 2$ باشد و این شرط آخر کافی است.



شکل ۵

مثال ۱. آیا به وسیله ۵ قطعه چهارمربعی مطابق شکل ۳ می‌توان یک مستطیل ساخت؟



شکل ۳

حل: فرض کنیم با استفاده از این پنج قطعه یک مستطیل ۲۰ خانه‌ای ساخته‌ایم که مانند صفحه شطرنج باشد (۱۰ خانه آبی و ۱۰ خانه سفید). ۴ تا از چهارمربعی‌ها دو خانه آبی و دو خانه سفید را می‌پوشانند و چهارمربعی شکل T، سه خانه آبی و یک خانه سفید و یا سه خانه سفید و یک خانه آبی را می‌پوشاند.

یعنی در هر حالت تعداد خانه‌های آبی و سفید مستطیل برابر نمی‌شود. پس چنین چیزی امکان ندارد.

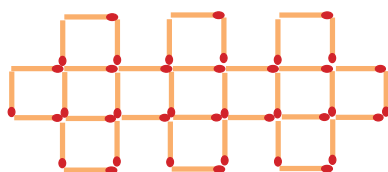
مثال ۲. فرض کنید یک صفحه شطرنج $n \times n$ داریم، به طوری که چهار گوشه آن حذف شده‌اند. به ازای چه مقادیری از n می‌توان صفحه را به وسیله قطعه‌های مربعی L مانند

پوشاند؟ در شکل ۴ این امکان برای $n=6$ نشان داده شده است.



۷

شماره ۱۳۱ | پاییز ۱۴۰۱



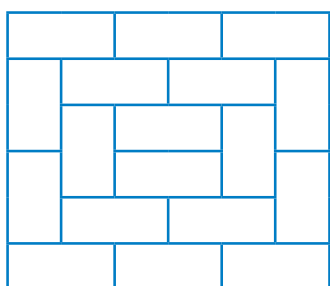
شکل ۸

حل: مربع‌ها را با دو رنگ آبی و سفید (مطابق شکل ۹) رنگ‌آمیزی می‌کنیم. همان‌طور که مشاهده می‌شود، ۱۰ مربع آبی در شکل وجود دارد. با برداشتن هر چوب کبریت حداکثر یکی از این مربع‌های آبی از بین می‌روند. بنابراین با برداشتن کمتر از ۱۰ چوب کبریت نمی‌توان تمام مربع‌ها را از بین برد!



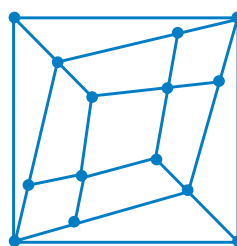
شکل ۹

مثال ۵. می‌خواهیم K عدد کاشی 1×2 را روی کف یک اتاق 6×6 بگذاریم و از یک دانش‌آموز بخواهیم بقیه کف اتاق را با کاشی‌های 1×2 کاملاً پر کند. برای اینکه دانش‌آموز راهی جز چیدن کاشی‌ها به صورت شکل ۱۰ نداشته باشد، حداقل k چقدر باید باشد؟



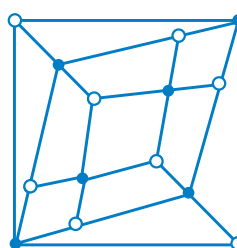
شکل ۱۰

مثال ۳. شکل ۶ نقشه راه‌های ارتباطی میان ۱۴ شهر را نشان می‌دهد. آیا مسیر حرکتی وجود دارد که از هر شهر دقیقاً یک بار بگذرد؟



شکل ۶

حل: مطابق شکل ۷، شهرها را با دو رنگ سیاه و سفید رنگ می‌کنیم؛ طوری که شهرهای همسایه رنگ یکسان نداشته باشند. هر مسیری که از ۱۴ شهر عبور کند و از هر شهر بیش از یک بار عبور نکند، از لحاظ الگویی به شکل $wbwbwbwbwbwbwbwb$ یا $wbwbwbwbwbwbwbwb$ است (w متناظر شهر سیاه و b متناظر شهر سفید).



شکل ۷

بنابراین این مسیر از ۷ شهر سفید و ۷ شهر سیاه عبور می‌کند. اما این نقشه ۶ شهر سیاه و ۸ شهر سفید دارد و در نتیجه چنین مسیری در مسئله اصولاً وجود ندارد!

مثال ۴. در شکل ۸ که با ۴۰ عدد چوب کبریت ساخته شده است، ۱۳ مربع 1×1 دیده می‌شود. آیا می‌توان با برداشتن ۹ چوب کبریت شکلی ایجاد کرد که در آن هیچ مربعی دیده نشود؟



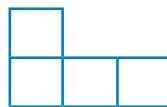
شماره ۱۳۱ | پاییز ۱۴۰۱

با حل آن‌ها با فن (تکنیک) رنگ‌آمیزی و کاربردهای آن در حل مسئله‌ها بیشتر آشنا شوید.

تمرین

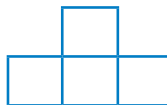
۱. موزاییک‌هایی از نوع زیر وجود دارند. آیا با این نوع موزاییک‌ها می‌توان صفحه شطرنجی 6×6 را فرش کرد؟ در صورتی که:

الف) فقط از نوع ۱ استفاده شود.



(نوع ۱)

ب) فقط از نوع ۲ استفاده شود.



(نوع ۲)

۲. نشان دهید ۶ مهره را می‌توان در خانه‌های یک صفحه شطرنجی 3×3 قرار داد که هیچ سه گلوله‌ای در یک راستای افقی، عمودی یا قطری نباشند.

۳. آیا می‌توان ۲۵۰ قطعه چوبی $1 \times 1 \times 4$ را در یک فضای $10 \times 10 \times 10$ قرار داد؟

۴. نشان دهید در شکل ۱۳ هیچ منحنی (خمی) نمی‌توان رسم کرد، به طوری که هر پاره‌خط را دقیقاً یک بار قطع کند.



شکل ۱۳

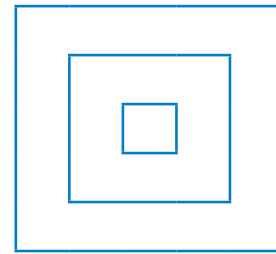
I. M. E. Fisher

پی‌نوشت

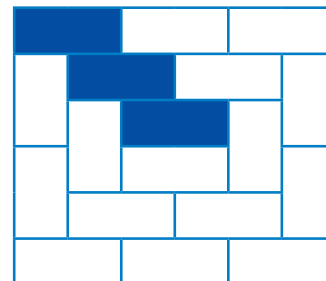
منابع

۱. انگل، آرتور (۱۳۸۲). استراتژی‌های حل مسئله. ترجمه آرش امینی، مصطفی هاشمی، محسن جمالی و بهمن اصلاح‌پذیر. انتشارات مبتکران. تهران.
۲. کرانتس، استیون. ج. (۱۳۸۴). فنون مسئله حل کردن. ترجمه مه‌رمان اخباریفر. انتشارات فاطمی. تهران.
۳. ثروتی، عباس (۱۳۸۷). مسائل المپیادهای کامپیوتر در ایران. انتشارات نخبگان. تهران.

حل: شکل را به صورت شکل ۱۱ به سه ناحیه تقسیم می‌کنیم. دانش‌آموز هر ناحیه را می‌تواند به دو طریق با کاشی‌ها پر کند. بنابراین در هر ناحیه باید حداقل یک کاشی قرار دهیم. از سوی دیگر با قرار دادن سه کاشی به صورت شکل ۱۲، دانش‌آموز راهی جز چیدن کاشی‌ها به صورت مورد نظر نخواهد داشت.



شکل ۱۱



شکل ۱۲

همان‌طور که مشاهده شد مسائل زیادی در ترکیبیات هستند که روی صفحه شطرنج و یا فضاهایی مشابه آن مطرح می‌شوند. یک ایده اساسی و خلاقانه مهم در حل این نوع مسائل رنگ‌آمیزی خانه‌های صفحه شطرنج با چند رنگ و با ترتیبی خاص است.

ساده‌ترین این رنگ‌آمیزی‌ها، رنگ‌آمیزی خانه‌های صفحه با دو رنگ سیاه و سفید به صورت یک‌درمیان (همانند صفحه شطرنج) است. یا در بعضی مسائل ممکن است خانه‌های صفحه را به صورت یک سطر (ستون) در میان، دو سطر (ستون) در میان، و یا روش‌های دیگر با دو رنگ، رنگ‌آمیزی کرد و به حکم مورد نظر رسید. البته رنگ‌آمیزی محدود به دو رنگ نیست و با توجه به شرایط مسئله می‌توان از هر تعداد رنگ و یا هر ترتیبی بهره برد. معمولاً در این نوع مسائل تعداد خانه‌های هر رنگ را بررسی می‌کنیم تا به حکم مورد نظر نزدیک شویم. در این مقاله با برخی از جوانب این ایده آشنا شدیم. در پایان چند مسئله به‌عنوان تمرین آورده می‌شوند تا



۹

شماره ۱۳۱ پاییز ۱۴۰۴

تابع پله‌مانی و همزاد آن

جزء صحیح و جزء اعشاری

محرم ایردموسی

عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی

مقدمه

تابع جزء صحیح و تابع همزادش، تابع جزء اعشاری، دو تابع با خواص جالب هستند. در این مقاله به معرفی این دو تابع و خواص آن‌ها می‌پردازیم و چند مسئله پیرامون آن‌ها بیان و حل می‌کنیم. مسائلی را هم به‌عنوان تمرین در اختیار شما قرار می‌دهیم.

۱. **تعریف:** جزء صحیح x که آن را با نماد $[x]$ نمایش می‌دهیم، برابر با بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی x تعریف می‌شود.

۲. **مثال:** عدد $x = 2/25$ را در نظر بگیرید. مجموعه عددهای صحیح کوچک‌تر یا مساوی $2/25$ برابر است با $\{2, 1, 0, -1, -2, \dots\}$. بزرگ‌ترین عضو این مجموعه عدد ۲ است. پس: $[2/25] = 2$.

۳. **تمرین:** مقادیر $[3]$ ، $[\sqrt{2}]$ ، $[-1/5]$ ، $[-1/3]$ و $[-4]$ را به‌دست آورید.

۴. **جزء صحیح** هر عدد حقیقی تنها یک مقدار صحیح است. بنابراین جزء صحیح خود یک تابع است $(f(x) = [x])$. دامنه این تابع $\mathbb{R}$ و برد آن $\mathbb{Z}$ است.

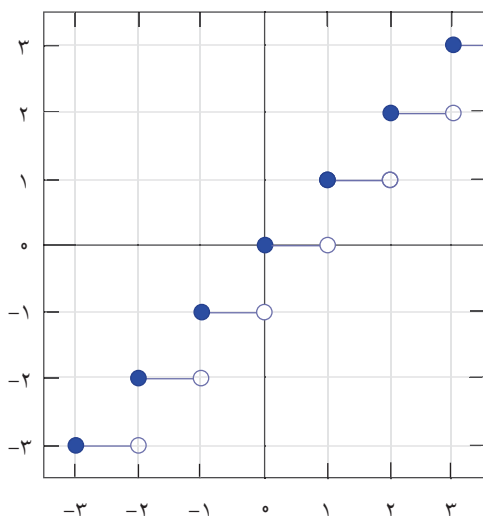
۵. **خاصیت اول:** $[x] = n$ اگر و تنها اگر $n \in \mathbb{Z}$ و $n \leq x < n+1$.

اثبات: با توجه به تعریف $[x]$ داریم: $n \leq x$. برای اثبات $x < n+1$ به روش برهان خلف عمل می‌کنیم. اگر $x \geq n+1$ کوچک‌تر نباشد، آنگاه: $n+1 \leq x$ و در نتیجه بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی x برابر $n+1$ خواهد شد که با

فرض $[x] = n$ تناقض دارد. پس: $x < n+1$.

۶. **خاصیت اول** (بیان دیگر): می‌توان خاصیت اول را به‌صورت $[x] + 1 < x \leq [x] + 1$ نیز بیان کرد، با ذکر این نکته که جزء صحیح هر عدد همیشه عددی صحیح است.

۷. **نمودار:** با توجه به ضابطه، دامنه، برد و خاصیت اول تابع، نمودار تابع به‌صورت زیر است. با توجه به نمودار، تابع جزء صحیح را تابع پله‌ای هم می‌نامند (نمودار ۱).



نمودار ۱

۸. **مثال:** معادله $9 = [x]^2 + 1$ را حل کنید.



۱۰

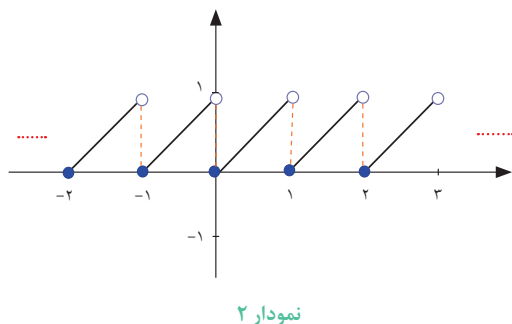
شماره ۱۳۱ | پاییز ۱۴۰۱

۱۳. مثال: برد تابع $f(x) = x - [x]$ را به دست آورید.
راه حل: با توجه به خاصیت اول تابع جزء صحیح داریم:
 $0 \leq x - [x] < 1$

از طرف دیگر برای هر عدد a از بازه $[0, 1)$ داریم:
 $f(a) = a - [a] = a - 0 = a$
 در نتیجه همه عددهای این بازه در برد تابع هستند و:
 $R_f = [0, 1)$

۱۴. تعریف (براساس منبع ۱): تابع $f(x) = x - [x]$ که در مثال فوق برد آن را تعیین کردیم، به تابع جزء اعشاری معروف است و با نماد $\{x\}$ نمایش داده می شود. دقت کنید که دامنه این تابع مجموعه عددهای حقیقی است و: $0 \leq \{x\} < 1$.
تذکر: در طول این مقاله نماد $\{x\}$ تنها برای جزء اعشاری x استفاده می شود و معنای دیگری ندارد، به عبارتی دیگر $\{x\}$ به معنای مجموعه دارای عضو x نمی باشد.

۱۵. تمرین: برد تابع های زیر را تعیین کنید:
 (۱) $f(x) = \{2x\}$
 (۲) $g(x) = x^2 - 2x[x] + [x]^2$
 (۳) $h(x) = 2\{x\}$
۱۶. نمودار: نمودار تابع جزء اعشاری به صورت زیر است. همان طور که از نمودار مشخص است، این تابع تابعی متناوب با دوره تناوب $T = 1$ است (نمودار ۲).



۱۷. مثال: دامنه و برد تابع f با ضابطه $f(x) = [x] + [-x]$ را مشخص و نمودار آن را رسم کنید.
راه حل: بدیهی است که: $D_f = \mathbb{R}$. چون جزء صحیح همیشه عددی صحیح است، پس حاصل تابع همیشه عددی صحیح است. اگر x صحیح باشد، آنگاه $-x$ هم صحیح است و در نتیجه:
 $[x] + [-x] = x + (-x) = 0$

راه حل:

$$2[x]^2 + 1 = 9 \Leftrightarrow 2[x]^2 = 9 - 1 = 8$$

$$\Leftrightarrow [x]^2 = \frac{8}{2} = 4 \Leftrightarrow [x] = \pm 2$$

$$\begin{cases} [x] = 2 \Leftrightarrow 2 \leq x < 3 \\ [x] = -2 \Leftrightarrow -2 \leq x < -1 \end{cases}$$

$$A = [2, 3) \cup [-2, -1)$$

در نتیجه مجموعه جواب معادله برابر $A = [2, 3) \cup [-2, -1)$ خواهد بود.

۹. تمرین: معادله های زیر را حل کنید:

(۱) $2[2x] + 3 = 2[x]$

(۲) $[x^2] = 0$

۱۰. مثال: دامنه تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{1}{[x] - x}$ را تعیین کنید.

راه حل: باید: $[x] - x \neq 0$. پس لازم است به دنبال جواب معادله $[x] = x$ باشیم. از این تساوی نتیجه می شود: $x \in \mathbb{Z}$. از طرف دیگر، اگر x صحیح باشد، آنگاه جزء صحیح x خودش خواهد شد؛ یعنی: $[x] = x$ اگر و تنها اگر: $x \in \mathbb{Z}$. با حذف عددهای صحیح از $\mathbb{R}$ ، دامنه تابع f برابر است با:
 $D_f = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$

۱۱. خاصیت دوم: اگر $[x] = x$ ، آنگاه: $x \in \mathbb{Z}$ و برعکس.

۱۲. تمرین: دامنه تابع های زیر را به دست آورید:

(۱) $g(x) = \sqrt{4 - [x]}$

(۲) $f(x) = \frac{1}{2[x] + 1}$

(۳) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - [x^2]}}$



۱۱

شماره ۱۳۱ پاییز ۱۴۰۴



۲۰. تمرین (خاصیت چهارم): برای هر عدد حقیقی x و هر عدد صحیح k ثابت کنید:

$$[x+k] = [x] + k$$

به اصطلاح می‌توان عدد صحیح را از جزء صحیح بیرون آورد.
۲۱. تمرین: برای هر عدد حقیقی x ثابت کنید:

$$[x] + [x + \frac{1}{2}] = [2x]$$

۲۲. تابع جزء صحیح یک‌به‌یک نیست. (چرا؟) اما می‌توان توابعی برحسب جزء صحیح نوشت که یک‌به‌یک و وارون‌پذیر باشند. برای مثال، تابع f با ضابطه $f(x) = x + [x]$ را در نظر بگیرید. ابتدا ثابت می‌کنیم این تابع یک‌به‌یک است.

۲۳. یادآوری: تابع f را یک‌به‌یک می‌نامیم هرگاه از $f(x_1) = f(x_2)$ نتیجه بگیریم: $x_1 = x_2$ ، به عبارت دیگر، مقدار تابع در هیچ دو نقطه‌ای از دامنه برابر نباشد.

۲۴. اثبات یک‌به‌یک بودن تابع $y = x + [x]$.

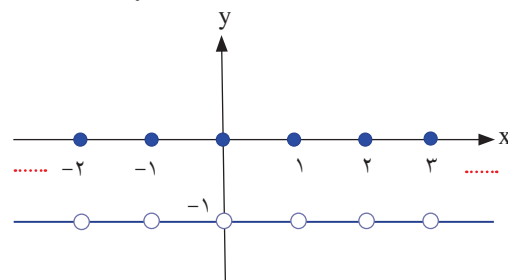
$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow x_1 + [x_1] = x_2 + [x_2] \quad (*) \\ &\Rightarrow [x_1 + [x_1]] = [x_2 + [x_2]] \Rightarrow [x_1] + [x_1] = [x_2] + [x_2] \\ &\Rightarrow 2[x_1] = 2[x_2] \Rightarrow [x_1] = [x_2] \quad (**) \end{aligned}$$

از دو تساوی $*$ و $**$ نتیجه می‌شود: $x_1 = x_2$. پس f یک‌به‌یک است.

۲۵. مثال: معکوس یا وارون تابع $f(x) = x + [x]$ را به دست آورید.

اگر x صحیح نباشد و: $[x] = n$ ، آنگاه: $n < x < n+1$. در نتیجه: $-n-1 < -x < -n-1$ که نتیجه می‌دهد: $[-x] = -n-1$. بنابراین: $f(x) = [x] + [-x] = n + (-n-1) = -1$. پس: $R_f = \{0, -1\}$ در واقع ثابت کردیم:

$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$



نمودار ۳

۱۸. خاصیت سوم: برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $[x] + [y] \leq [x+y]$.

برهان: فرض کنید: $[x] = k$ و $[y] = l$. در نتیجه: $k \leq x < k+1$ و $l \leq y < l+1$. با جمع نابرابری‌ها داریم: $k+l \leq x+y < k+l+2$. در نتیجه: $k+l \leq x+y < k+l+2$. در هر صورت: $[x+y] = k+l$.
۱۹. تمرین: با چه شرطی روی x و y داریم: $[x+y] = [x] + [y]$ ؟



۱۲

شماره ۱۳۱ | پاییز ۱۴۰۱

x ، بی‌نهایت مقدار برای y وجود دارد، در نتیجه تساوی (۱) بیان‌کننده یک تابع نیست.

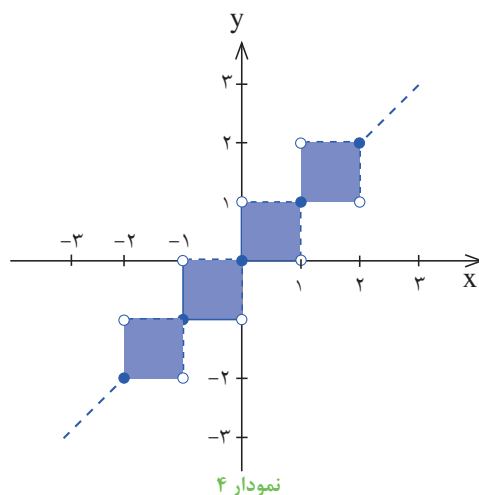
تساوی (۲) یک تابع است. با توجه به اثبات یک‌به‌یک بودن مثال قسمت (۲۲) داریم:

$$x + [x] = y + [y] \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

یعنی تساوی (۲) به تساوی $x = y$ منجر می‌شود که می‌دانیم یک تابع (خطی) است.

مثال ۲۹: نمودار تساوی $[x] = [y]$ را رسم کنید. به عبارت دیگر نقاط (x, y) از صفحه را مشخص کنید که در تساوی فوق صدق کنند.

راه‌حل: با فرض $[x] = [y] = n$ خواهیم داشت: $n \leq x, y < n+1$ در نتیجه نمودار ضابطه $[x] = [y]$ به صورت زیر است (نمودار ۴):



۳۰. تمرین: بررسی کنید که برابری‌های زیر یک تابع را مشخص می‌کنند یا نه. نمودار نقاطی از صفحه را مشخص کنید که در هر یک از آن‌ها صدق کنند:

$$(۱) (-1)^{[x]} = (-1)^{[y]}$$

$$(۲) [x] + [y] = ۲$$

$$(۳) [y - x] = ۰$$

در قسمت دوم این مقاله که در شماره بعد ارائه می‌شود، به خواص دیگر و مسائل دیگری دربارهٔ تابع جزء صحیح اشاره خواهیم کرد.

منبع

Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, Oren Patashnik, (1994), Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science, 2nd Edition, Addison-Wesley Professional.

راه‌حل: برای پیدا کردن ضابطه وارون تابع f ، باید x را بر حسب $f(x)$ یا y به دست آوریم:

$$\begin{aligned} y &= x + [x] \Rightarrow [y] = [x + [x]] \Rightarrow [y] = ۲[x] \\ \Rightarrow [x] &= \frac{[y]}{۲} \end{aligned}$$

با جای گذاری $[x]$ بر حسب y در رابطه اول داریم: $y = x + \frac{[y]}{۲}$. در نتیجه $x = y - \frac{[y]}{۲}$. بنابراین ضابطه تابع f^{-1} به صورت $f^{-1}(x) = x - \frac{[x]}{۲}$ خواهد بود.

۲۶. تمرین: نمودار تابع $f(x) = x + [x]$ را رسم کنید. آیا برد تابع f با $\mathbb{R}$ برابر است؟ اگر چنین نیست، برد تابع f را تعیین کنید.

راهنمایی: $f(x) = x + [x] = ۲[x] + \{x\}$.

۲۷. تمرین: یک‌به‌یک بودن تابع‌های زیر را بررسی کنید و در صورت یک‌به‌یک بودن، ضابطهٔ تابع وارون آن‌ها را به دست آورید:

$$(۱) f(x) = x + ۱۰۰[x]$$

$$(۲) g(x) = [x] + ۲\{x\}$$

۲۸. مثال: کدام یک از تساوی‌های زیر نمایش‌دهندهٔ تابع هستند؟

$$(۱) [x] = [y]$$

$$(۲) [x] + x = [y] + y$$

راه‌حل: یادآوری می‌کنیم که در تابع به ازای هر ورودی x ، حداکثر ۱ خروجی (y) باید داشته باشیم. تساوی (۱) نشان‌دهندهٔ یک تابع نیست. برای مثال، اگر $x = ۰$ ، آنگاه y هر عددی از بازه $[۰, ۱)$ می‌تواند باشد. پس به ازای یک مقدار



۱۳

شماره ۱۳۱ پاییز ۱۴۰۴

نکته ناب شش لزاری هندسه در یک قاب

مجید حکمت

گزاره ۶

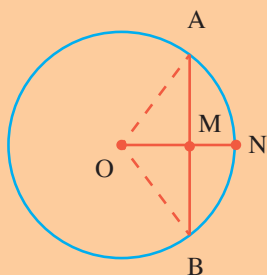
عمود بر وتر و نصف کننده کمان متناظر، (شامل) شعاع دایره است و وتر را نصف می کند.

از اثبات موارد ۱ تا ۳ که با سهولت بیشتری صورت می گیرد، می گذریم و به اثبات ۴ تا ۶ - که اثبات متفاوتی دارند - می پردازیم:

از خواننده علاقه مند درخواست می شود ابتدا خودش راهی برای اثبات بیابد، سپس ادامه این مقاله را مطالعه کنید.

اثبات گزاره ۴:

از مرکز دایره به A و B و M (نقطه وسط AB) وصل می کنیم و محل برخورد OM با دایره را N می نامیم (شکل ۱).



شکل ۱

بنا به گزاره ۲، شعاع ON بر وتر AB عمود است و کمان AB را نصف می کند. یعنی N وسط کمان AB است. به عبارت دیگر شعاع ON از وسط وتر AB و وسط کمان AB

خلاصه و جمع بندی مفهوم های درسی به فهم بهتر و به خاطر سپاری آسان کمک شایانی می کند. گاهی یک مطلب پر شاخ و برگ را می توان در یک قاب جمع و جور کرد. به شش گزاره زیر برای دایره توجه کنید (لازم به ذکر است که موارد ۱ تا ۴ به عنوان فعالیت در کتاب درسی هندسه ۲ آمده است):

گزاره ۱

شعاع (قطر) عمود بر وتر، آن وتر و کمان متناظر را نصف می کند.

گزاره ۲

شعاع نصف کننده (منصف) وتر، بر آن وتر عمود است و کمان متناظر را نصف می کند.

گزاره ۳

شعاع نصف کننده کمان، عمود منصف وتر متناظر است.

گزاره ۴

نصف کننده هم زمان وتر و کمان دایره، (شامل) شعاع دایره است و بر وتر عمود است.

گزاره ۵

عمود منصف وتر دایره، (شامل) شعاع دایره است و کمان متناظر را نصف می کند.



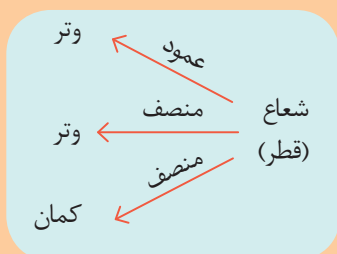
۱۴

شماره ۱۳۱ | پاییز ۱۴۰۱

$$AN=BN$$

پس دو مثلث $\triangle AHN$ و $\triangle BHN$ بنا به حالت «وتر و یک ضلع» هم‌نهشت هستند. بنابراین: $AH=BH$. یعنی نیم‌خط شامل HN ، هم‌زمان عمودمنصف وتر AB و نصف‌کننده کمان $\widehat{AB}$ است. لذا بنا به گزاره ۴ یا ۵، عمود بر وتر و نصف‌کننده کمان، شامل شعاع دایره است و وتر را نیز نصف می‌کند.

وقتی با دانش‌آموزان طی حل مسئله‌ها صحبت می‌کنیم، متوجه نوعی سردرگمی ناشی از بدآموزی و بدفهمی در استفاده از این شش گزاره می‌شویم. امیدوار هستیم که ادامه بحث به رفع این مشکل کمک کند: به نمودار درختی زیر توجه کنید:



این نمودار شامل هفت عنصر است: شعاع (قطر)، عمود، منصف، منصف، وتر، وتر و کمان. همچنین دارای سه شاخه است:

شعاع ← وتر شعاع ← منصف شعاع ← کمان

عنصر شعاع (قطر) را به عنوان «ریشه نمودار» در نظر بگیرید:

روش استفاده از نمودار

با در نظر گرفتن هر شاخه از این نمودار به عنوان «فرض گزاره»، چهار عنصر باقی‌مانده به عنوان «حکم گزاره» در اختیار شما خواهد بود و بدین ترتیب گزاره‌های ۱ تا ۳ در کنترل شما قرار خواهد گرفت. از طرف دیگر، با در نظر گرفتن هر چهار عنصر دلخواه از این نمودار - به جز شعاع که ریشه نمودار محسوب می‌شود - به عنوان «فرض گزاره»، شاخه باقی‌مانده به عنوان «حکم گزاره» در اختیار شما خواهد بود و بدین ترتیب گزاره‌های ۴ تا ۶ به دست خواهند آمد!

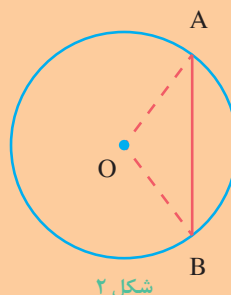
کمی با این نمودار کار کنید تا متوجه نکته مورد نظر بشوید. امیدواریم این قسمت از نکته ناب هم مفید واقع شده باشد.

می‌گذرد. از آنجا که از هر دو نقطه دلخواه فقط یک خط عبور می‌کند، پس نصف‌کننده وتر و کمان AB شامل شعاع دایره می‌شود و بر وتر AB نیز عمود است.

اثبات گزاره ۵:

از مرکز دایره O به دو سر وتر AB وصل می‌کنیم. (شکل ۲) از آنجا که:

$$OA=OB=R$$

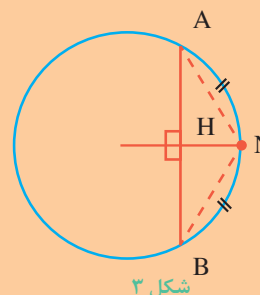


لذا مرکز دایره از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله قرار دارد. بنابراین طبق تعریف مکان هندسی عمودمنصف، O روی عمودمنصف AB واقع است. پس عمودمنصف وتر AB از مرکز دایره می‌گذرد و لذا شامل شعاع دایره است. بنا بر گزاره ۱ یا ۲، این عمودمنصف کمان نظیر را نیز نصف می‌کند.

تذکر: دوباره درخواست می‌گردد پیش از مطالعه اثبات گزاره ۶ ابتدا خودتان راهی برای اثبات بیابید.

اثبات گزاره ۶:

عمود بر AB و نصف‌کننده کمان $\widehat{AB}$ را که شامل HN است، رسم می‌کنیم. (شکل ۳)



می‌دانیم کمان‌های برابر، وترهای برابر دارند. پس اگر از N به A و B وصل کنیم، داریم:



۱۵

شماره ۱۳۱ | پاییز ۱۴۰۴

کلید آزمون بخش پذیری بر ۷

عدد ۵۴۶۳۳۱

عباس قلعه پور اقدم

پژوهشگر، کارشناس ارشد ریاضی



هم بر ۲ و هم بر ۳ بخش پذیر است.	۶
عدد حاصل از سه رقم سمت راست (رقم های یکان، دهگان و صدگان) بر ۸ بخش پذیر است.	۸
مجموع رقم ها بر ۹ بخش پذیر است.	۹
رقم یکان صفر است.	۱۰
هم بر ۳ و هم بر ۴ بخش پذیر است.	۱۲
هم بر ۳ و هم بر ۵ بخش پذیر است.	۱۵

همان طور که می بینید، در جدول فوق در میان عددهای یک رقمی، به قاعده بخش پذیری بر ۷ اشاره نشده است (البته به بخش پذیری بر یک هم اشاره نشده است که به وضوح هر عددی بر ۱ بخش پذیر است) و این همان چیزی است که در این مقاله با سه روش قصد پرداختن به آن را داریم.

روش اول

رقم یکان عدد مورد نظر را حذف می کنیم. سپس دو برابر رقم یکان را از عدد حاصل از بقیه رقم ها کم می کنیم. اگر حاصل برابر صفر شد یا بر ۷ بخش پذیر باشد، عدد اصلی نیز بر ۷ بخش پذیر است. اگر هم عدد حاصل عددی با تعداد رقم های بالا بود، آزمون را دوباره اجرا می کنیم.

مثال ۱. آیا عدد $x_1 = 4736$ بر ۷ بخش پذیر است؟
حل: رقم یکان 4736 را حذف می کنیم و 473 می ماند. دوباره رقم یکان یعنی ۱۲ را از 473 کم می کنیم: $473 - 12 = 461$.
خُب! حالا مسئله ما آزمون بخش پذیری 461 بر ۷ است. قاعده

عدد صحیح a بر عدد صحیح $b \neq 0$ بخش پذیر است، اگر باقی مانده تقسیم a بر b برابر صفر باشد. بنابراین راه آزمون اینکه عدد مفروض a بر عدد مفروض b بخش پذیر است یا نه، انجام عمل تقسیم و به دست آوردن باقی مانده است. ولی برای عددهای بزرگ، یا بهتر است بگوییم عددهایی با تعداد ارقام بالا، به جای عمل تقسیم که کاری وقت گیر خواهد بود، باید به دنبال راه های میان بر باشیم. برای مثال، فرض کنید بخواهیم بخش پذیری عدد سی و هفت رقمی

$$x = 6986648088495576619729344372307579911$$

را بر ۷ بیازماییم. خُب! معلوم است که تقسیم x بر ۷ کاری خسته کننده خواهد بود. این عدد یادتان باشد، چون در ادامه با قاعده ای که مطرح خواهیم کرد، بخش پذیر بودن آن را بر ۷ به راحتی نشان خواهیم داد.

شما حتماً از دوره ابتدایی و دوره متوسطه اول، قواعد بخش پذیری بر عددهایی مانند ۲، ۳، ۵، ۶، ۹، ۱۰، ۱۲ یا ۱۵ را به خاطر می آورید. اگر برخی از آن ها را فراموش کرده اید، جدول زیر به شما کمک خواهد کرد. در این جدول، قاعده بخش پذیری بر ۴ و ۸ را نیز گنجانده ایم؛ با این احتمال که شاید در کتاب های درسی تان آن ها را نخوانده باشید.

بخش پذیر بر:	عدد	ویژگی عدد
۲	رقم یکان زوج (۰ یا ۲ یا ۴ یا ۶ یا ۸) است.	
۳	مجموع ارقام بر ۳ بخش پذیر است.	
۴	عدد حاصل از دو رقم یکان و دهگان بر ۴ بخش پذیر است.	
۵	رقم یکان ۰ یا ۵ است.	



۱۶

شماره ۱۳۱ پاییز ۱۴۰۱



مثال ۵. آیا عدد 11182757896517 بر x_5 بخش پذیر است؟

بخش پذیر است؟

11182757896517	$1118275789651-14=111827578949$
1118275789637	$111827578963-14=111827578949$
111827578947	$11182757894-18=11182757876$
11182757877	$1118275787-12=1118275775$
1118275777	$111827577-10=111827567$
111827567	$11182756-14=11182742$
11182747	$1118274-4=1118270$
111827	$111827-0=111827$
11182	$11182-14=11168$
1116	$1116-16=1100$
110	$110-0=110$
11	$11-0=11$

چون ۱۱ بر ۷ بخش پذیر نیست، پس x_5 نیز بر ۷ بخش پذیر نیست.

همان طور که می بینید، هر قدر تعداد رقم های عدد مورد نظر بیشتر باشد، آزمون بخش پذیری آن عدد بر ۷ با استفاده از روشی که مطرح شد، مستلزم تکرار بیشتر مرحله های یاد شده است. مثلاً برای یک عدد ۳۰ رقمی، ۲۷ یا ۲۸ بار مجبور به تکرار قاعده هستیم. بنابراین بهتر است که به دنبال راه میان بر راحت تری باشیم. اینجا است که عدد ۵۴۶۲۳۱ به عنوان کلید آزمون بخش پذیری بر ۷ خودنمایی می کند. عدد ۵۴۶۲۳۱ چه ربطی به این موضوع دارد؟ این موضوعی است که پس از اثبات درستی روش اول به آن خواهیم پرداخت.

عدد $n+1$ رقمی x را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$x = a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0$$

a رقم یکان است، a_1 رقم دهگان، a_2 رقم صدگان و ... بسط

عدد x در مبنای ۱۰ به این صورت است:

$$x = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + 10^{n-2} a_{n-2} + \dots + 10^3 a_3 + 10^2 a_2 + 10^1 a_1 + 10^0 a_0$$

طبق قاعده روش اول، رقم یکان x یعنی a_0 را حذف می کنیم، آنچه از x می ماند را با x' نشان می دهیم:

$$x' = a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1$$

بسط x' در مبنای ۱۰ به صورت زیر است:

$$x' = 10^{n-1} a_n + 10^{n-2} a_{n-1} + 10^{n-3} a_{n-2} + \dots + 10^2 a_2 + 10^1 a_1 + 10^0 a_0$$

حال دو برابر رقم یکان یعنی $2a_0$ را از x' کم می کنیم و

را تکرار می کنیم. رقم یکان ۴۶۱ را حذف می کنیم و می ماند ۴۶. دو برابر رقم یکان یعنی ۲ را از ۴۶ کم می کنیم: $46 - 2 = 44$. آیا ۴۴ بر ۷ بخش پذیر است؟ معلوم است که نه، پس ۴۶۱ هم بر ۷ بخش پذیر نیست و در نتیجه ۴۷۳۶ نیز بر ۷ بخش پذیر نیست.

مثال ۲. آیا عدد 10213 بر ۷ بخش پذیر است؟

$$10213 - 1021 - 6 = 1015$$

$$1015 - 101 - 10 = 91$$

چون $91 = 13 \times 7$ ، پس ۹۱ و در نتیجه ۱۰۱۵ و لذا ۱۰۲۱۳ بر ۷ بخش پذیر است. البته برای ۹۱ نیز می توانستیم قاعده را به کار ببریم.

$$91 - 2 = 89$$

مثال ۳. آزمون بخش پذیری عدد 39178097 x_3

$$39178097 - 3917809 - 14 = 3917795$$

$$3917795 - 391779 - 10 = 391769$$

$$391769 - 39176 - 18 = 39158$$

$$39158 - 3915 - 16 = 3899$$

$$3899 - 389 - 18 = 371$$

$$371 - 37 - 2 = 35$$

چون ۳۵ بر ۷ بخش پذیر است، پس اگر مرحله به مرحله به عقب برگردیم، بخش پذیری x_3 بر ۷ نتیجه می شود.

مثال ۴. آزمون بخش پذیری عدد 179152033606 x_4

بر ۷:

$$179152033606 - 17915203360 - 12 = 17915203348$$

$$17915203348 - 1791520334 - 16 = 1791520318$$

$$1791520318 - 179152031 - 16 = 179152015$$

$$179152015 - 17915201 - 10 = 17915194$$

$$17915194 - 1791519 - 2 = 1791517$$

$$1791517 - 179151 - 14 = 179137$$

$$179137 - 17913 - 14 = 17894$$

$$17894 - 1789 - 18 = 1771$$

$$1771 - 177 - 2 = 175$$

$$175 - 17 - 10 = 7$$

پس x_4 بر ۷ بخش پذیر است.



۱۸

شماره ۱۳۱ پاییز ۱۴۰۱

حاصل را x'' می‌نامیم:

$$x'' = a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_7 a_6 a_5 - 2a_0$$

باید ثابت کنیم: اگر x'' بر ۷ بخش‌پذیر باشد، آنگاه x بر ۷ بخش‌پذیر است.

برهان: فرض کنیم x'' بر ۷ بخش‌پذیر است، پس عدد صحیحی چون m وجود دارد به‌طوری که: $x'' = 7m$. یعنی:

$$a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_7 a_6 a_5 - 2a_0 = 7m$$

اگر بسط x' را جایگزین کنیم، خواهیم داشت:

$$10^{n-1} a_n + 10^{n-2} a_{n-1} + 10^{n-3} a_{n-2} + \dots$$

$$+ 10^2 a_7 + 10^1 a_6 + 10^0 a_5 - 2a_0 = 7m$$

سمت چپ تساوی را در 10^0 ضرب و بر 10^0 تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + 10^{n-2} a_{n-2} + \dots + 10^2 a_7 + 10^1 a_6 + 10^0 a_5 - 2a_0}{10^0} = 7m$$

با جای‌گذاری $a_0 - 21a_0 + a_0$ به جای $-2a_0$ ، خواهیم داشت:

$$(10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + 10^{n-2} a_{n-2} + \dots$$

$$+ 10^3 a_7 + 10^2 a_6 + 10^1 a_5 + a_0) - 21a_0 = 7 \circ m$$

$$\Rightarrow x - 21a_0 = 7 \circ m$$

$$\Rightarrow x = 7 \circ m + 21a_0 = 7(1 \circ m + 3a_0)$$

و این یعنی x بر ۷ بخش‌پذیر است.

روش دوم

استفاده از عدد ۵۴۶۲۳۱ برای آزمون بخش‌پذیری بر ۷

عدد $n+1$ رقمی x را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم و بسط آن را در مبنای 10^0 می‌نویسیم:

$$x = a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_7 a_6 a_5 a_0$$

$$x = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + 10^{n-2} a_{n-2} + \dots$$

$$+ 10^3 a_7 + 10^2 a_6 + 10^1 a_5 + 10^0 a_0$$

حال به پرسش و پاسخ‌های زیر توجه کنید:

باقی‌مانده تقسیم 10^0 بر ۷ چه عددی است؟ معلوم است که باقی‌مانده تقسیم ۱ بر ۷ می‌شود ۱.

باقی‌مانده تقسیم 10^1 بر ۷ چه عددی است؟ به‌وضوح برابر ۳ است.

باقی‌مانده تقسیم 10^2 بر ۷ چند است؟ بله! باقی‌مانده تقسیم 10^0 بر ۷ برابر ۲ است.

باقی‌مانده تقسیم 10^3 بر ۷ چطور؟ برابر ۶ است.

باقی‌مانده تقسیم 10^4 بر ۷ چقدر می‌شود؟ حساب کنید.

حتماً به عدد ۴ خواهید رسید.

باقی‌مانده تقسیم 10^5 بر ۷ چند می‌شود؟ ۵ می‌شود.

با توجه به اینکه نماد همنهشتی $a \equiv r$ نشانگر این است که باقی‌مانده تقسیم a بر b برابر r می‌شود لذا باقی‌مانده‌های تقسیم‌های توان‌های بعدی 10^6 بر ۷ را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم:

$$10^6 \equiv 1, 10^7 \equiv 3, 10^8 \equiv 2$$

$$10^9 \equiv 6, 10^{10} \equiv 4, 10^{11} \equiv 5$$

$$10^{12} \equiv 1, 10^{13} \equiv 3, 10^{14} \equiv 2$$

و... همان‌طور که متوجه شدید، باقی‌مانده‌های ۱، ۳، ۲، ۴ و ۵، به تناوب و به ترتیب تکرار می‌شوند. اگر این باقی‌مانده‌ها را به ترتیب پشت‌سر هم بنویسیم، عدد ۵۴۶۲۳۱ ظاهر می‌شود. حال می‌خواهیم با استفاده از این عدد، آزمون بخش‌پذیری بر ۷ را که از قرار زیر است، ارائه کنیم:

رقم‌های عدد مورد آزمون را از سمت راست، شش‌رقم شش‌رقم جدا می‌کنیم (برای عددهای کمتر از ۶ رقم این کار لازم نیست). حال رقم‌های ۱، ۳، ۲، ۴ و ۵ را از سمت راست زیر رقم‌های عدد مورد نظر می‌نویسیم و سپس رقم‌های زیر هم را در هم ضرب می‌کنیم و حاصل ضرب‌ها را جمع می‌بندیم. اگر حاصل جمع بر ۷ بخش‌پذیر بود، عدد مورد آزمون نیز چنین خواهد بود. به مثال‌های زیر توجه کنید:

مثال ۶. آزمون بخش‌پذیری عدد 9785436207491 بر ۷:

$$\begin{array}{r} 9785436207491 \\ \times 1546231546231 \\ \hline 9+35+32+30+8+9+6+10+0+42+8+27+1=217 \end{array}$$

چون ۲۱۷ بر ۷ بخش‌پذیر است، پس عدد سیزده‌رقمی x_6 نیز چنین است.

مثال ۷. آزمون بخش‌پذیری عدد 245679104325679 بر ۷:

$$\begin{array}{r} 245679104325679 \\ \times 231546231546231 \\ \hline 4+12+5+30+28+54+2+0+4+15+8+30+12+21+9=234 \end{array}$$

چون ۲۳۴ بر ۷ بخش‌پذیر نیست، پس عدد پانزده‌رقمی x_7 نیز بر ۷ بخش‌پذیر نیست.



مثال ۸. عدد x را که در آغاز مقاله به آن اشاره کردیم، به یاد دارید. می‌خواهیم بخش‌پذیری این عدد سی‌وهفت‌رقمی را بر ۷ بیازماییم.

$$\begin{array}{r} 6'986648'088495'576619'729344'37230'7579911 \\ \times 1546231546231546231546231546231546231 \\ \hline 6+45+32+36+12+12+8+0+32+48+8+27+5+25 \\ +28+36+12+3+9+35+8+54+6+12+4+15+28+ \\ 12+6+0+7+25+28+54+18+3+1=700 \end{array}$$

چون ۷۰۰ بر ۷ بخش‌پذیر است، پس x بر ۷ بخش‌پذیر است.

یادداشت: چرایی کارکرد روش اول را برایتان شرح دادیم، ولی به دلیل محدودیت حجم مقاله حاضر و نیز مفصل بودن برهان روش دوم، علاقه‌مندان را به منابع مقاله که در آن‌ها به تفصیل به این موضوع پرداخته شده است، ارجاع می‌دهیم.

روش سوم

این روش در واقع نتیجه‌ای از روش دوم است. در این روش به جای برخی از رقم‌های عدد ۵۴۶۲۳۱، از عددهای زیر استفاده می‌کنیم. سایر مرحله‌ها دقیقاً همانند روش دوم است. تغییرات از قرار زیرند:

۱، ۳ و ۲ تغییر نمی‌کنند. به جای ۶، عدد ۱- قرار می‌گیرد. به جای ۴، عدد ۳- می‌نشیند و عدد ۲- جای ۵ را می‌گیرد.

یادداشت: با این تغییرات محاسبه‌ها ساده‌تر و عدد نهایی کوچک‌تر خواهد بود. مثال ۸ را که در آن عدد سی‌وهفت‌رقمی x را آزمودیم، با روش سوم دوباره آزمایش می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} 6'986648'088495'576619'729344'37230'7579911 \\ \times 1-2-3-1231-2-3-1231-2-3-1231-2-3-1231-2-3-1231 \\ \hline 6-18-24-6+12+12+8+0-24-8+8+27+5-10-21-6+12+3+9-14-6-9+6+12+4 \\ -6-21-2+6+0+7-10-21-9+18+3+1=-56 \end{array}$$

چون ۵۶- بر ۷ بخش‌پذیر است، پس x نیز چنین است.

یادداشت: ارتباط بین رقم‌های ۵۴۶۲۳۱ و رقم‌های جای‌گذاری‌شده به مفهوم هم‌نهشتی مربوط است که در مقاله یاد شده در یادداشت قبلی به طور مفصل شرح داده شده است. امیدواریم با مطالعه مقاله حاضر و مقاله ارجاع داده شده، اطلاعات خوبی در خصوص بخش‌پذیری به دست آورید و با آزمودن عددهای به اصطلاح بزرگ، هر سه روش مطرح شده در این مقاله را به خوبی فرا بگیرید.

منابع

۱. قلعه‌پور اقدم، عباس (۱۴۰۲). «بخش‌پذیری بر عددهای اول». فصلنامه علمی-پژوهشی همگام با ریاضی. شماره ۷. آذر.
۲. وبگاه فصلنامه همگام با ریاضی:

www.hamgambariazi.ir



۱۹

شماره ۱۳۱ پاییز ۱۴۰۱

پروژه‌های تحقیقاتی کوچک
برای ریاضی دانان جوان

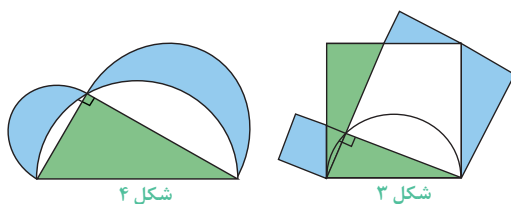
قسمت اول

تساوی مجموع مساحت‌ها در شکل‌های هندسی

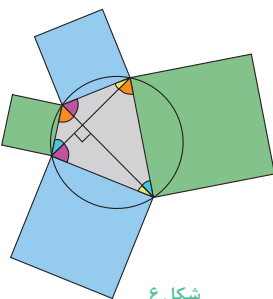
خسرو داودی
آرش رستگار



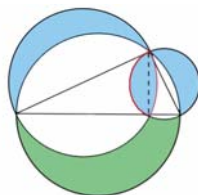
خطی که متوازی الاضلاع سبز را به دو قسمت کرده است، دو ناحیه به دست می‌دهد که هر یک مساحتی برابر یکی از متوازی الاضلاع‌های آبی دارند (شکل ۲). در حالت خاص که با یک مثلث قائم‌الزاویه شروع کنیم و روی هر ضلع مربع بکاریم، قضیه فیثاغورس به دست خواهد آمد. در هر یک از شکل‌های ۳ تا ۸ حکم مربوط به تساوی مجموع‌ها را حدس بزنید و بعد بکوشید آن را ثابت کنید. مجموع شکل‌های زیر به نوعی با قضیه فیثاغورس یا تعمیم‌های آن ارتباط پیدا می‌کنند.



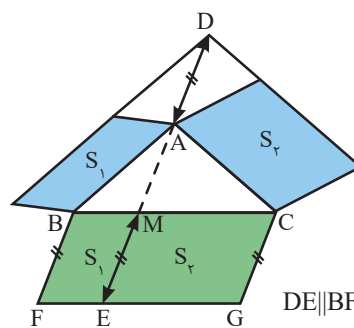
شکل ۳



شکل ۴



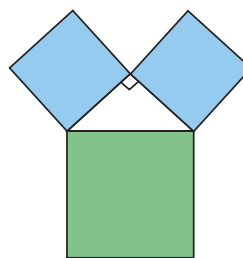
شکل ۵



شکل ۶

$DE \parallel BF \parallel CG$
 $AD = EM = BF = CG$

قضیه مشهور فیثاغورس را می‌توان به زبان برابری مساحت‌ها دید.



شکل ۷

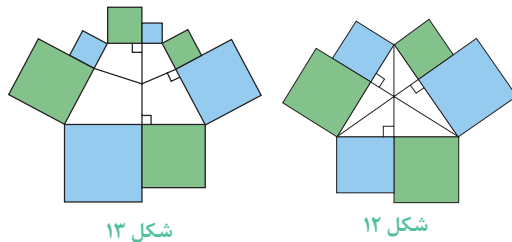
بنابر قضیه فیثاغورس، مجموع مساحت دو ناحیه آبی دارای مساحتی برابر ناحیه سبز است. تمام شکل‌های این مقاله چنان رنگ‌آمیزی شده‌اند که ناحیه آبی و ناحیه سبز مساحت‌های برابری داشته باشند. یکی از تعمیم‌های مهم قضیه فیثاغورس به قضیه آپولونیوس معروف است. آپولونیوس به ما می‌گوید اگر روی دو ضلع یک مثلث دلخواه متوازی الاضلاع‌هایی بنا شده باشند، چطور می‌توان روی ضلع سوم متوازی الاضلاعی بنا کرد که مساحت آن مجموع مساحت‌های متوازی الاضلاع‌های اولیه باشد. (شکل ۲)



۲۰

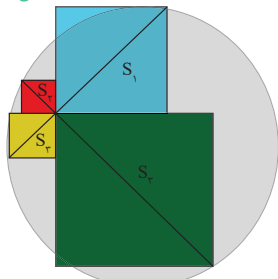
شماره ۱۳۱ | پاییز ۱۴۰۱

توجه: شکل‌های ۱۲ و ۱۳ چندضلعی‌های محاطی دایره هستند لذا عمود منصف‌های آن‌ها هم رأس هستند؛ شکل ۱۴ دربارهٔ مربع‌های ایجاد شده بر روی اجزای دو وتر متقاطع دایره می‌باشد.



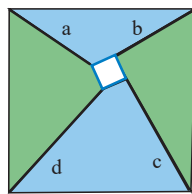
شکل ۱۳

شکل ۱۲

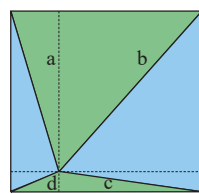


شکل ۱۴

در شکل‌های ۱۵ و ۱۶ تساوی $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ برقرار است. حکم‌های مربوط به تساوی مجموع‌های مساحت‌ها را بیان و اثبات کنید (در شکل ۱۶ چهارضلعی میانی، مربع است):



شکل ۱۶



شکل ۱۵

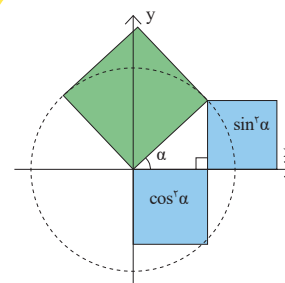
مسئلهٔ پروژه

روی ضلع‌های یک مثلث قائم‌الزاویه شکل‌های متشابه دیگری (غیر از سه مربع) بنا کنید و بعد بکشید به روش‌های هندسی ثابت کنید مجموع مساحت‌های بنا شده روی ضلع‌های زاویه قائمه برابر مساحت بنا شده بر وتر است. ■

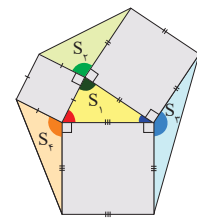
پروژه‌های انجام‌شدهٔ خود را در قالب ورد تایپ کنید و برای ما بفرستید. شکل‌ها را با نرم‌افزار جئوجبرا رسم کنید. بهترین پروژه‌ها در رمزینه چاپ خواهند شد.

پی‌نوشت

۱. مرکز ثقل در مثلث محل برخورد میانه‌ها، در مربع محل برخورد قطرهای و در دوزنقه محل برخورد قطرهای با پاره‌خطی است که وسط دو ساق را به هم وصل می‌کند.

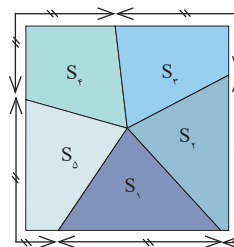


شکل ۸

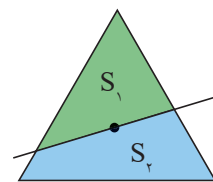


شکل ۷

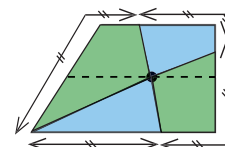
در هر یک از شکل ۹، ۱۰ و ۱۱، خط‌هایی از مرکز ثقل^۱ خارج و مساحت‌هایی تشکیل می‌شوند. در هر شکل حکم مربوط به تساوی مساحت‌ها را حدس بزنید و سعی کنید آن را ثابت کنید.



شکل ۱۰



شکل ۹



شکل ۱۱

تساوی‌های جبری در شکل‌های هندسی که در آن‌ها مربع طول‌ها ظاهر می‌شوند، معمولاً به روش هندسی قابل اثبات هستند. حکم‌های مربوط به تساوی مجموع‌های مساحت‌ها را حدس بزنید و ثابت کنید. (شکل‌های ۱۲ تا ۱۴)



۳۱

شمارهٔ ۱۳۱۳ پاییز سال ۱۴۰۱



برای مشاهدهٔ پروژه‌های دریافتی ریاضی‌دانان جوان، رمزینه را پویش کنید.

میانگین‌های جذاب

اثبات هندسی رابطه بین میانگین‌های حسابی، هندسی، توافقی و مربعی

نگرش نه‌بندانی

دبیر و کارشناس ارشد ریاضی، مشهد مقدس

۳. میانگین توافقی^۳ (همساز یا هارمونیک)

از این عدد زمانی استفاده می‌شود که داده‌ها از نوع نرخ یا نسبت و مثلاً از نوع سرعت (تغییر مکان در زمان) باشند.

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \quad (x_i \text{ ها داده‌ها و } n \text{ تعداد کل داده‌ها})$$

مثال ۳. میانگین توافقی دو عدد $a = 4$ و $b = 3$ برابر است با:

$$H = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2}{\frac{1}{4} + \frac{1}{3}} = \frac{2a \cdot b}{a + b} = \frac{2(3 \times 4)}{4 + 3} = 3 / 43$$

۴. میانگین مربعی^۴ (جذر میانگین مربعات)

عددی است برای محاسبه مقدار مؤثر داده‌هایی که به صورت تصادفی یا دوره‌ای تغییر می‌کنند و مقدار متوسط آن‌ها صفر است.

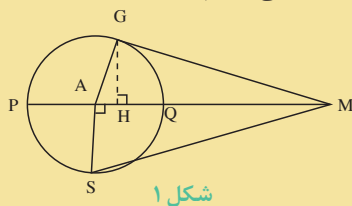
$$RMS = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} \quad (x_i \text{ ها داده‌ها و } n \text{ تعداد کل داده‌ها})$$

مثال ۴. میانگین مربعی دو عدد $a = 4$ و $b = 3$ برابر است با:

$$RMS = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = \sqrt{\frac{4^2 + 3^2}{2}} = \sqrt{\frac{25}{2}} = \sqrt{12.5} \approx 3.54$$

اکنون با بررسی یک مثال جالب هندسی، به مقایسه این چهار نوع میانگین می‌پردازیم.

مثال ۵. با در نظر گرفتن دو عدد حقیقی مثبت a و b ($a > b$)، شکل ۱ را در نظر می‌گیریم.



با توجه به اینکه در شکل ۱ داریم: A مرکز دایره، $PM = a$ و $QM = b$ ، پس:

$$AG = AS = \frac{a-b}{2} \quad (*)$$

از طرف دیگر، چون از نقطه M پاره خط GM بر دایره مماس شده است و همواره شعاع یک دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است، پس مثلث AGM قائم‌الزاویه است و همچنین AS شعاعی از دایره است که در مرکز دایره (A)

در این مطلب به «میانگین» که یکی از پرکاربردترین شاخص‌های مرکزی در علم آمار است و مقایسه انواع میانگین‌ها با بررسی چند مثال و همچنین اثبات این مقایسه با علم جذاب هندسه در قالب یک مثال جالب پرداخته‌ایم. در کل این مطلب، برای فهم ساده موضوع، تمامی مثال‌ها بر اساس دو عدد حقیقی مثبت a و b ($a > b$) مطرح و بررسی خواهند شد.

تعریف میانگین: عددی که معرف و نماینده مجموعه‌ای از چند داده است.

انواع میانگین

۱. میانگین حسابی^۱ (میانگین ساده)

نماینده‌ای از مجموعه داده‌هاست که اگر آن را به جای تک‌تک داده‌ها قرار دهیم، در مجموع کل داده‌ها تغییری ایجاد نمی‌شود.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad (x_i \text{ ها داده‌ها و } n \text{ تعداد کل داده‌ها})$$

مثال ۱. میانگین حسابی دو عدد و برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{a+b}{2} = \frac{4+3}{2} = 3.5$$

۲. میانگین هندسی^۲

این عدد برای محاسبه متوسط نرخ رشد (رشد جمعیت یا درصد سود) یا برای مقدارهایی که با رتبه‌های متفاوت درجه‌بندی شده‌اند، استفاده می‌شود.

$$G = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n} \quad (x_i \text{ ها داده‌ها و } n \text{ تعداد کل داده‌ها})$$

مثال ۲. میانگین هندسی دو عدد $a = 4$ و $b = 3$ برابر است با:

$$G = \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \approx 3.46$$



۲۲

شماره ۱۳۱ | پاییز ۱۴۰۱

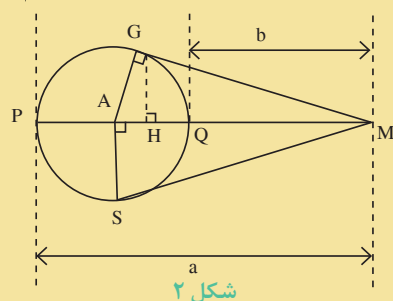
حال با استفاده از شکل ۲ به بررسی و مقایسه این چهار رابطه می‌پردازیم که در حقیقت چهار نوع میانگین برای دو عدد a و b هستند:

$$AM = \frac{a+b}{2}$$

$$GM = \sqrt{a \cdot b}$$

$$HM = \frac{2ab}{a+b}$$

$$SM = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$



* طبق شکل $b < HM \Rightarrow b < \frac{2ab}{a+b}$

در مثلث قائم‌الزاویه $\triangle MGH$ ، چون GM وتر است، پس بزرگ‌ترین ضلع مثلث است: $HM < GM \Rightarrow \frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab}$

* در مثلث قائم‌الزاویه $\triangle AGM$ ، چون AM وتر است پس بزرگ‌ترین ضلع مثلث است: $GM < AM \Rightarrow \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$

* در مثلث قائم‌الزاویه $\triangle MAS$ ، چون SM وتر است پس بزرگ‌ترین ضلع مثلث است: $AM < SM \Rightarrow \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$

* طبق شکل: $SM < PM \Rightarrow \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} < a$

در نتیجه برای هر دو عدد حقیقی مثبت a و b ($a > b$) همواره داریم:

$$b < \frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} < a$$

پی‌نوشت‌ها

1. Arithmetic Mean
2. Geometric Mean
3. Harmonic Mean
4. Root Mean Square

بر پاره خط PM عمود است. در نتیجه مثلث $\triangle MAS$ قائم‌الزاویه است. طبق اطلاعات مسئله و با توجه به شکل داریم:

$$AM = AQ + QM = \frac{a-b}{2} + b = \frac{a+b}{2} \quad (1)$$

میانگین حسابی دو عدد a و b

اکنون با استفاده از روابط طولی که در مثلث قائم‌الزاویه همواره برقرار است، اندازه پاره‌خط‌های GM ، MS ، HM را به‌دست می‌آوریم. در مثلث قائم‌الزاویه $\triangle AGM$ داریم:

$$\begin{aligned} GM^2 &= AM^2 - AG^2 \xrightarrow{\text{با استفاده از (1) و (*)}} \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \\ &\Rightarrow \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} - \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4} = \frac{4ab}{4} = ab \\ &\Rightarrow GM^2 = ab \Rightarrow GM = \sqrt{ab} \end{aligned} \quad (2)$$

میانگین هندسی دو عدد a و b

در مثلث قائم‌الزاویه $\triangle MAS$ داریم:

$$\begin{aligned} MS^2 &= AS^2 + AM^2 \xrightarrow{\text{با استفاده از (1) و (*)}} \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &\Rightarrow \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4} + \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = \frac{2a^2 + 2b^2}{4} = \frac{a^2 + b^2}{2} \\ &\Rightarrow MS^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} \Rightarrow MS = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \end{aligned} \quad (3)$$

میانگین مربعی دو عدد a و b

از آنجاکه در مثلث قائم‌الزاویه $\triangle AGM$ ، ارتفاع GH وارد بر وتر است، دو مثلث قائم‌الزاویه $\triangle AGM$ و $\triangle GHM$ با توجه به برابری زاویه‌های $\begin{cases} \hat{H} = \hat{G} = 90^\circ \\ \hat{M} = \hat{M} \end{cases}$ با هم متشابه‌اند. پس طبق نسبت تشابه این دو مثلث داریم:

$$\frac{AG}{GH} = \frac{AM}{GM} = \frac{GM}{HM} \Rightarrow GM^2 = HM \times AM$$

$$\xrightarrow{\text{با استفاده از (1) و (2)}} (\sqrt{ab})^2 = HM \times \left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\Rightarrow ab = HM \times \frac{a+b}{2} \Rightarrow HM = \frac{2ab}{a+b} \quad (4)$$

میانگین توافقی دو عدد a و b

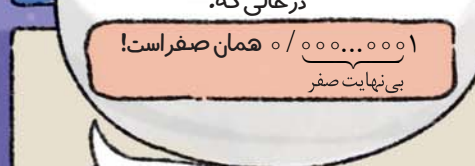
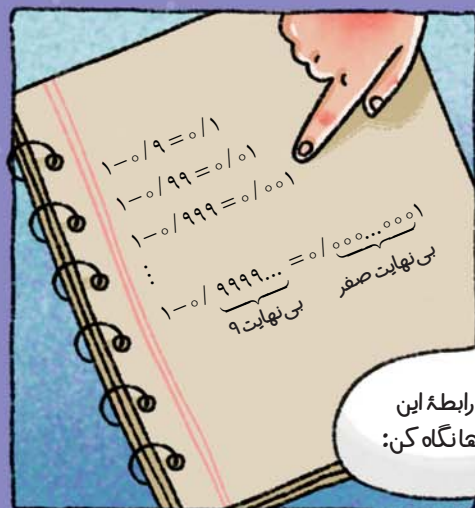


۳۳

شماره ۱۳۱ | پاییز ۱۴۰۱

دو عدد بحث برانگیز

$0/99999\dots$ و $0/000\dots0001$



$$a_n = 10^{-n}, a_1 = 0/1, a_2 = 0/01, \\ a_3 = 0/001, \dots, a_n = 0/\underbrace{000\dots000}_n \text{ تا صفر}$$

حد این دنباله وقتی n به بی نهایت میل می‌کنه، صفر می‌شه. پس:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 10^{-n} = 0$$

به عبارت دیگه:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 0/\underbrace{000\dots000}_n = 0$$

تا صفر n

پس حاصل عدد نامنفی $0/000\dots0001$ قطعاً برابر صفر می‌شه. بی نهایت صفر

بر اساس پژوهشی از غلامرضا صادقی (کارشناس ارشد ریاضی، بیجا)
تصویرگر: زهرا اطمینانی



۲۴

شماره ۱۳۱ | پاییز ۱۴۰۱

روش ۱

$$0.\overline{1} = 0.1111... = \frac{1}{9} \xrightarrow{\text{دو طرف ضربدر ۹}} 0.\overline{9} = \frac{9}{9} = 1$$

خواهش می‌کنم، حالا می‌دونی برای اثبات:
 $0.\overline{9} = 1$ روش‌های دیگه‌ای هم وجود داره؟

چه روش‌هایی؟
 بگو ببینم.

روش ۲

$$0.\overline{3} = 0.333... = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{دو طرف ضربدر ۳}} 0.\overline{9} = \frac{3}{3} = 1$$

روش ۳

$$0.\overline{9} = 0.333... + 0.666... = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

روش ۴

$$\begin{aligned} x &= 0.\overline{9} \\ 10x &= 9.\overline{9} \\ 10x - x &= 9 \Rightarrow 9x = 9 \Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

روش ۵

$$\begin{aligned} 0.\overline{9} &= 0.9 + 0.09 + 0.009 + \dots \\ \text{مجموع جمله‌های دنباله هندسی با قدرنسبت ۱/۱۰} \\ S_n &= \frac{0.9}{1 - 0.1} = \frac{0.9}{0.9} = 1 \end{aligned}$$

می‌دانیم اگر میانگین دو عدد برابر با یکی از آن‌ها باشد،
 آنگاه آن دو عدد با هم برابرند:

$$\begin{aligned} \frac{1 + 0.\overline{9}}{2} &= \frac{1 + 0.\overline{9}}{2} = 0.\overline{9} \\ \Rightarrow 0.\overline{9} &= 1 \end{aligned}$$

روش ۶



۲۵

شماره ۱۳۱ | پاییز ۱۴۰۲

ریاضیات در سینما غبارش الدین جمشیر لاشانی

قسمت اول

احسان یار محمدی

پژوهشگر و دبیر ریاضی، دکترای مدیریت صنعتی - مالی



- کارگردان: حسن هدایت
- تهیه کننده: پیمان جعفری
- پژوهش و روایت: حسن هدایت
- تصویر: فرهاد صالحی
- تدوین: حسن هدایت و کیوان رضایی
- صدا بردار: احمد رضا طائی
- گوینده متن: محمد حسین شمس
- سال تولید: ۱۳۹۱-۱۳۹۰
- تهیه شده در گروه علمی فرهنگی مرکز
سیمافیلم



۲۶

شماره ۱۳۱ | پاییز ۱۴۰۱

جمشید بن مسعود بن محمود طیب کاشانی

ریاضی‌دان و اخترشناس برجسته و صاحب سبک ایرانی، هم‌زمان با ریاضی‌دان و ستاره‌شناس نامدار دیگر ایرانی، **الغ بیگ** می‌زیست و به واسطهٔ آشنایی و همکاری که بین او و **الغ بیگ**، پادشاه دانش‌دوست و دانش‌پرور ایران زمین رخ داد، توانست با خلق آثاری چون **سَلَمُ السَّماء (نردبان آسمان)**، **مفتاح الحساب**، **رسالة محیطیه**، **رسالة وتر و جیب**، و **زیج خاقانی فی تکمیل الزیج ایلخانی**، خدمات ارزنده‌ای را به ایرانیان و جهانیان عرضه دارد و باعث اعتلای نام ایران و ایرانی در سراسر عالم هستی شود.

در این مقاله با معرفی قسمت نخست مستند غیاث‌الدین جمشید کاشانی قصد داریم ریاضی‌آموزان و علاقه‌مندان به تاریخ ریاضی و دانش در ایران را با این شخصیت بی‌بدیل در عرصهٔ دانش و فرهنگ ایران زمین آشنا سازیم. به این منظور نخست سطرهایی را از کتاب «نگاهی به تاریخ ریاضیات در ایران» به قلم زنده‌یاد **پرویز شهریاری (۱۳۹۱-۱۳۰۵)** ارائه می‌کنیم که چاپ نخست آن در سال ۱۳۸۵ در انتشارات علمی و فرهنگی به زیور طبع آراسته شده است، و سپس مواردی از مستند مزبور را در پی خواهیم آورد.

در سدهٔ هشتم هجری، کشورهای غرب آسیا و شمال آفریقا، از جمله ایران، با هجوم **تیمور** ویران شدند. ولی در آغاز سدهٔ نهم هجری، **الغ بیگ**، نوّهٔ تیمور، مرکز علمی تازه‌ای در سمرقند به‌وجود آورد و تا اندازه‌ای دانشمندان و به‌ویژه ریاضی‌دانان را تحت حمایت خود گرفت. در سمرقند که مرکز حکمرانی **الغ بیگ** بود، بزرگ‌ترین رصدخانهٔ غرب آسیا زیر نظر دانشمند و ریاضی‌دان ایرانی، جمشید کاشانی اداره می‌شد.

جمشید کاشانی در کاشان به دنیا آمد و در سال ۸۲۳ هجری قمری/۱۴۳۶ م. در سمرقند درگذشت. کاشانی پیش از ورود به سمرقند، زیج خاقانی را براساس، زیج ایلخانی **نصیر طوسی** تنظیم کرد (به زبان فارسی). کاشانی همراه با تنظیم جدول‌های مثلثاتی، رسالهٔ دربارهٔ وتر و سینوس را نوشت. رسالهٔ دربارهٔ دایره (رسالهٔ محیطیه) به‌طور مستقیم به مسئله‌های اخترشناسی مربوط است. کاشانی در سمرقند، فرهنگ ریاضی خود را به نام **رازگشایی حساب (مفتاح الحساب)** نوشت و در تنظیم زیج جدید گورکانی که در نتیجهٔ مشاهده در رصدخانهٔ سمرقند به‌دست آمده بود، شرکت داشت. او دارای یک رشته رساله‌های اختصاصی مربوط به اخترشناسی و ابزارهای مربوط به آن است. **مفتاح الحساب** کاشانی دارای پنج بخش است. بخش اول دربارهٔ حساب عددهای درست بحث می‌کند. مضمون این بخش به رسالهٔ حساب طوسی شبیه است؛ در ضمن شامل جذر

گرفتن از عددهای درست نیز می‌شود. برخلاف **نَسَوی** و طوسی که عمل‌ها را روی تخته و شن انجام می‌دادند، کاشانی عمل‌ها را روی کاغذ انجام می‌داد.

بخش دوم به حساب کسرها مربوط می‌شود. در این بخش، کاشانی کسره‌های ده‌دهی را با جدا کردن بخش درست عدد از بخش کسری آن، برای نخستین بار در تاریخ ریاضیات وارد حساب کرد و ویژگی آن‌ها را، شبیه کسره‌های شصت‌گانی، که اخترشناسان با پیروی از بابلی‌ها، با واحدهای دقیقه، ثانیه، ثلثه، رابعه و غیره به کار می‌بردند، معین کرد. کسره‌های ده‌دهی، برای دقیق‌تر کردن جذر عددها هم به کار می‌رود.

بخش سوم به محاسبه‌های اخترشناسان، یعنی به عمل‌های حساب دربارهٔ عددهای درست و کسری در دستگاه شصت‌گانی اختصاص دارد.

در بخش چهارم اندازه‌گیری شکل‌های روی صفحه (چندضلعی‌ها، دایره و بخش‌های آن) و شکل‌های فضایی (منشور، استوانه، هرم، مخروط، کره، چندوجهی‌های منتظم و برخی چندوجهی‌های نیمه‌منتظم) بررسی شده است. کاشانی برای بررسی مثلث‌ها، از مثلثات و جدول‌های مثلثاتی، که از زیج خاقانی طوسی برداشته، استفاده کرده است. او در بررسی جسم‌های کروی از مقدار تقریبی عدد «پی» بهره گرفته و آن را این مقدار محاسبه کرده است:

$$3^{\circ}, 8', 29'', 44''' = 3/141593$$

سپس دربارهٔ حجم جسم‌ها از روی وزن آن‌ها صحبت کرده که به تنظیم جدول مخصوصی از جسم‌های جامد و مایع منجر شده است. به‌ویژه، روش اندازه‌گیری طاق‌ها و گنبد‌ها را که به‌طور گسترده در معماری خاورزمین به کار می‌رود، بررسی کرده است.

بخش پنجم به جبر اختصاص دارد. کاشانی نتیجه‌هایی را که پیش از او دربارهٔ حل معادله‌های درجهٔ سوم به‌دست آمده بود، تنظیم کرده و راه‌حل هندسی آن‌ها را به‌دست داده است. همچنین از رساله‌ای صحبت کرده که در آن، معادلهٔ درجهٔ چهارم مطرح شده، ولی این رساله به ما نرسیده است. کاشانی سپس حل معادله‌های خطی را مطرح کرده و چند قاعده برای مجموع جمله‌های رشته‌های عددی و نیز، قاعده‌هایی برای نسبت‌ها، چه دربارهٔ عددها و چه دربارهٔ کمیت‌های پیوسته، به‌دست داده است. در پایان کتاب تعداد زیادی مسئله آمده است.

رسالهٔ دربارهٔ دایره (رسالهٔ المحيطیه) کاشانی به محاسبهٔ نسبت طول محیط دایره به قطر آن، با حداکثر دقت لازم مربوط



۲۷

شماره ۱۳۱ | پاییز ۱۴۰۴



کاشانی این معادله درجه سوم را از راه جبری حل کرده و اگرچه جواب تقریبی را به دست داده است، ولی می توان با ادامه راه حل وی، آن را با هر دقت و با هر تقریبی (تا هر چند رقم ده دهی) محاسبه کرد. در ضمن، می دانیم هر معادله درجه سوم کامل به صورت:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

را می توان با انتخاب مجهول $x = y - \frac{b}{3a}$ به معادله درجه سوم ناقص تبدیل کرد؛ به گونه ای که شامل y نباشد:

$$Ay^3 + By + C = 0$$

بنابراین جمشید کاشانی در واقع توانسته است، معادله درجه سوم را برای نخستین بار با روش جبری حل کند. رابطه ای که برای حل معادله درجه سوم به نام **کاردان** معروف است (و به ظاهر متعلق به **تار تاگلیا**، همشهری کاردان است)، تنها این مزیت را دارد که نشان می دهد ریشه های معادله درجه سوم را می توان با رادیکال ها بیان کرد. ولی برای حل عملی معادله درجه سوم، رابطه کاردان به محاسبه عددهای مختلط منجر می شود و برای پیدا کردن ریشه ها، راهی عملی نیست. راه حل جمشید کاشانی راه حلی عملی است که در تاریخ ریاضی فراموش شده است.

محاسبه سینوس یک درجه به روش کاشانی

کاشانی برای محاسبه سینوس یک درجه، اول وتر کمان دو درجه را به دست آورد. سپس این وتر را نصف کرد تا $\sin 1^\circ$ به دست آید. در رساله کاشانی و همچنین شرح هایی که بر آن نوشته شده اند، عددها در دستگاه شصت گانی آمده اند. برای نمونه، وقتی از $\sin 3^\circ$ صحبت کرده، آن را این طور نشان داده است:

$$\sin 3^\circ = 3; 8, 24, 33, 59, 34, 28, 14, 50$$

در ضمن، $\sin 3^\circ$ را به یاری $\sin 18^\circ$ و $\sin 15^\circ$ به دست می آوردند و رابطه ها را با به حساب آوردن شعاع دایره (که کاشانی آن را ۶۰ می گرفت) محاسبه می کردند. برای نمونه، با استناد به حکم شانزدهم از کتاب **اصول اقلیدس** به این نتیجه می رسیدند که:

$$R \sin \alpha \cos \beta \pm R \sin \beta \cos \alpha = R \sin(\alpha \pm \beta)$$

که منظور از R ، شعاع دایره است.

کاشانی در کتاب مفتاح الحساب از رساله وتر و سینوس به عنوان یکی از کتاب هایی که نوشته نام برده، ولی این اثر پیدا نشده است. قاضی زاده رومی که همکار او در ساختن رصدخانه سمرقند بود، **بیر جندی** (ملا عبدالعلی؛ درگذشت در سال ۹۳۴ هجری قمری)، ریاضی دان ایرانی و میرم چلبی، ریاضی دان

می شود. او محیط دایره را میانگین حسابی بین محیط چندضلعی های منتظم محاطی و محیط چندضلعی های منتظم محیطی با 3×2^n ضلع در نظر گرفته است. در ضمن گفته است که n را باید چنان گرفت که اگر شعاع دایره برابر فاصله زمین تا ستاره های ثابت باشد (که به حساب کاشانی 6000000 برابر شعاع کره زمین است)، اختلاف بین محیط چندضلعی های درونی و بیرونی، از قطر یک موی اسب کمتر باشد. کاشانی برای این منظور، n را برابر ۲۸ گرفته است؛ یعنی:

$$3 \times 2^n = 3 \times 2^{28} = 805306368$$

کاشانی این میانگین حسابی را، با دقت بی اندازه ای حساب کرده است که اگر شعاع دایره را برابر واحد بگیریم، نسبت طول محیط دایره به قطر آن برابر خواهد شد با:

$$\pi = 3^\circ, 8', 29'', 440 \text{ } 472553735 = 3 / 141592653589793238$$

از ۱۷ رقمی که کاشانی برای عدد پی پیدا کرده است، تنها رقم آخر آن درست نیست.

رساله وتر و سینوس به ما نرسیده است، ولی مهم ترین بخش های آن در رساله سینوس یک درجه **قاضی زاده رومی**، همکار دانشمند کاشانی، در سمرقند حفظ شده است. رساله های کاشانی و قاضی زاده به محاسبه سینوس یک درجه از روی مقدار سینوس سه درجه اختصاص دارند. **میرم چلبی** هم، این رساله کاشانی را حفظ کرده و سینوس یک درجه را به یاری سینوس ۳ درجه به دست آورده است. اگر در نظر بگیریم: $\sin 1^\circ = x$ و $\sin 3^\circ = a$ ، را می توان از این معادله به دست آورد:

$$3x - 4x^3 = a$$

کاشانی این معادله را با ظرافت بی اندازه ای حل کرده و این نتیجه را به دست آورده است:

$$\sin 1^\circ = 0 / 17452464378257$$



۲۸

شماره ۱۳۱ پاییز ۱۴۰۱

و اخترشناس و نوه قاضی زاده رومی (درگذشت در ۱۵۲۵ میلادی)، نسبت این کتاب را به کاشانی تأیید کرده و آن را توضیح داده و با تفسیر کرده‌اند. در اینجا، کوتاه شده‌ای از راه حل کاشانی برای معادله درجه سوم را به قلم میرم چلبی آورده‌ایم. در این راه حل با نمادها و نشانه‌های امروزی سروکار داریم:

$$3x - 4x^2 = a$$

اگر $4x^2 - 3x$ را به طرف دوم ببریم و دو طرف را بر ۳ تقسیم کنیم، به دست می‌آید:

$$x = \frac{\frac{a}{4} + x^2}{3}$$

اگر عدد $\frac{a}{4}$ را برابر q و ۳ را برابر p بگیریم، به این معادله می‌رسیم:

$$x = \frac{q + x^2}{p} \quad (۱)$$

اگر داشته باشیم: $x = a + b + c + \dots$ (کاشانی $a, b, c, \dots$ را مقادارهای پشت سرهم رقم‌های شصت گانی گرفته است؛ ولی می‌توان آن‌ها را رقم دهدهی هم در نظر گرفت. تنها ممکن است هر بار دو رقم از رقم‌های دهدهی به دست آید).

$\sin 1^\circ = x$ مقدار کوچکی است. اگر در رابطه بالا، از مقدار خیلی کوچک‌تر x^2 صرف نظر کنیم، نخستین رقم، یعنی a به دست می‌آید:

$$x_1 = a \approx \frac{q}{p}$$

این مقدار را به جای x در رابطه (۱) قرار می‌دهیم و $x_2 = b$ را پیدا می‌کنیم:

$$x_2 = b = \frac{q - ap + a^2}{p}$$

به همین ترتیب مقدار c را می‌یابیم (این c در دستگاه به مبنای ده، ممکن است دو رقمی باشد):

$$x_3 = c = \frac{(q - ap - a^2) - bp + [(a + b)^2 - a^2]}{p}$$

رقم‌های بعدی هم به همین ترتیب پیدا می‌شوند. اگر مقدارهای تقریبی پشت سرهم را $a, a+b, a+b+c, \dots$ و غیره بگیریم، در صورتی که:

$$x_1 = a$$

$$x_2 = \frac{q + a^2}{p} = \frac{q + x_1^2}{p}$$

$$x_3 = \frac{q + (a + b)^2}{p} = \frac{q + x_2^2}{p}$$

.....

$$x_n = \frac{q + x_{n-1}^2}{p}$$

رشته‌ای همگرا باشد، یعنی داشته باشیم:

$$\frac{3x^2}{p} < r_n < 1$$

$a + b + c + \dots$ مرتبه‌های پشت سرهم $\sin 1^\circ$ را خواهند داد،

و در اینجا این شرط برقرار است.

هرمان هانکل^۲، ریاضی‌دان آلمانی (۱۸۳۹-۱۸۷۳م)، درباره این روش کاشانی می‌نویسد: «این روش عالی حل معادله‌های عددی، از لحاظ زیبایی و ظرافت با همه روش‌های محاسبه تقریبی که بعد از فرانسوا ویت^۴ (۱۵۴۰-۱۶۰۳م)، ریاضی‌دان و قانون‌شناس فرانسوی، در غرب پیدا شد، برابری می‌کند.»

به‌ویژه در این تردیدی نیست که این روش خیلی راحت‌تر از روش به اصطلاح هورنر^۵ است که کاشانی، به احتمال زیاد، از آن هم آگاه بوده است. همان‌طور که «ویکه»^۶ به درستی تأکید می‌کند، در اینجا با یک معادله کلی برای پیدا کردن یک سوم زاویه سروکار داریم، اگرچه میرم چلبی در مسئله خود، کمان AB را برابر ۲ درجه و α را برابر یک درجه می‌گیرد.

پیشرفت و توسعه شگفت‌انگیز در کشورهای اسلامی از قرن دوم هجری آغاز گردید و در اواخر قرن پنجم به اوج کمال رسید. در طی این مدت آثاری بدیع در رشته‌های مختلف دانش به وجود آمد. ولی از اوایل قرن ششم با همان سرعت حیرت‌آوری که رو به ترقی رفته بود، راه انحطاط پیش گرفت و در مدت سه قرن سیر نزولی پیدا کرد و عاقبت در قرن نهم هجری تقریباً از حرکت باز ایستاد.

از آن پس اگرچه بحث درباره افکار گذشتگان و شرح و حاشیه‌نویسی بر آثار آن‌ها ادامه داشت و گهگاهی دانشمندان و محققانی در رشته‌های گوناگون علوم اسلامی پیدا می‌شدند، ولی روح علمی رفته‌رفته در کشورهای اسلامی به انحطاط گرایید و آن نیروی خلاق که در قرون گذشته موجب پیدایش آن همه شاهکار علمی شده بود، از میان رفت. ریاضیات و نجوم نیز از این قاعده مستثنا نبود.

اما در اوایل قرن نهم ظهور غیاث‌الدین جمشید کاشانی موجب جهش شگفت‌آور این دو رشته علمی شد و آثاری که پدید آورد، از ممتازترین تألیفات دوره اسلامی هستند؛ آثاری که هنوز از ارزش علمی آن‌ها چندان کاسته نشده است. قواعد ریاضی او امروزه نیز در زندگی عادی ما حضور دارد.

تقریباً تمام مطالبی که از زندگی جمشید کاشانی در دست است، از بررسی آثار علمی ارزنده او و نیز دو نامه مفصل است که خطاب به پدر خود و مردم کاشان نوشته و از سمرقند ارسال کرده است.



۲۹

شماره ۱۳۱ | پاییز ۱۴۰۴



دوران کودکی و جوانی کاشانی هم‌زمان با اوج یورش‌های وحشیانه سپاه تیمور گورکانی به ایران بود. در این شرایط دشوار نیز، کاشانی هرگز از آموختن علوم غافل نشد. پدر جمشید، **مسعود کاشانی** نام داشت و به حرفه طبابت مشغول بود، ولی از علوم دیگر نیز بهره داشت. مسعود علاوه بر طبابت عمومی مردم کاشان، پزشک مورد اعتماد حاکم این شهر نیز محسوب می‌شد. منصب مسعود طبیب باعث شد که جمشید به کتابخانه حکومتی نیز دسترسی داشته باشد. ذهن کنجکاو و تشویق پدر و کتابخانه بزرگ حکومتی مجموعاً باعث شدند که او خیلی زودتر از هم‌سالانش در علوم ریاضی و نجوم پیشرفت کند.

کاشانی از همان اوایل تحصیل به توصیه پدر تمرکز را در وهله نخست بر ریاضیات و سپس ستاره‌شناسی گذاشت و از پراکنده‌خوانی پرهیز می‌کرد. این رویه در دورانی که معمولاً علما در رشته‌های گوناگون علمی و فرهنگی زورآزمایی می‌کردند، باعث شد کاشانی در ریاضیات و نجوم پیشرفت فراوان کند و از سرآمدان علمای عصر خود شود. تشویق پدر کاشانی در علم‌آموزی او و محیط مناسب و بی‌دغدغه خانوادگی کمک شایانی به پیشرفت جمشید کاشانی کرد. احساس قدرشناسی جمشید در این زمینه تا سال‌ها بعد که از سمرقند با پدرش مکاتبه می‌کرد، در نامه‌هایش دیده می‌شود.

دو نامه معروف غیث‌الدین کاشانی به پدرش از مهم‌ترین و دل‌انگیزترین اسناد تاریخ علم در زبان فارسی است. در این نامه‌ها محیط علمی سمرقند در زمان فرمانروایی آغ‌بیگ به نحو بی‌همتایی توصیف شده است و خواننده با نوع مسائل ریاضی و نجومی که در آن محیط بین دانشمندان مطرح بود، آشنا می‌شود.

الگوی اصلی جمشید کاشانی در زندگی که در موارد متعدد مانع از بی‌راهه رفتن او می‌شد، خواجه نصیر طوسی بود. خواجه نصیر که در عصری نه‌چندان دور و در زمان هلاکوخان مغول می‌زیست، هم مرد دین بود و هم مرد علم و دستی نیز در سیاست داشت.

از دیگر خصوصیات جمشید کاشانی این بود که به عملکرد علمی گذشتگان با نگاهی نقادانه برخورد می‌کرد و می‌کوشید عیب‌ها و نقص‌های آنان را کشف و برطرف سازد و همچنین راه‌های نویی در علوم ابداع کند. این روحیه باعث شد که در ریاضیات و نجوم به اکتشافات و ابداعات برجسته‌ای نائل شود که تا قرن‌ها بعد معضلات متعددی را مرتفع ساختند.

او در رمضان سال ۸۰۹ قمری در کاشان **رساله کمالیه** را در موضوع ابعاد و اجرام کرات آسمانی نوشت. سپس در مسافرت

به سمرقند تحریر جدیدی از این رساله فراهم آورد و این‌بار نام رساله را به «سَلَمُ السَّمَاء» یا «نردبان آسمان» تغییر داد. جمشید کاشانی در زمان تألیف نسخه اولیه این رساله ۱۹ ساله بود و رساله را دو سال پس از مرگ تیمور و فروکش کردن فتنه او تألیف کرد. او همواره درباره همه‌چیز سؤال می‌کرد و هراسی از مخالفت و اتهام دیگران نداشت.

رساله سَلَمُ السَّمَاء یا نردبان آسمان در زمینه استخراج ابعاد سیاره‌ها، و قطر و اندازه جرم آن‌هاست. این رساله هفت مقاله و یک خاتمه دارد. مقاله‌ها درباره مساحت و اندازه قطر زمین، ماه، خورشید و دیگر سیارات و ستارگان است. بخش خاتمه نیز به جدول‌های محاسبه اختصاص دارد. این جدول‌ها مشتمل بر مساحت و ابعاد زمین، ماه، زهره، خورشید، مریخ، مشتری، زحل و ابعاد ثوابت و قطرهای سیارات و جرم آن‌هاست.

چهار سال پس از تألیف نردبان آسمان در سال ۸۱۳ قمری، جمشید کاشانی رساله مختصری در علم هیئت و به زبان فارسی تألیف کرد و آن را «لُبَّاب اسکندری» نام نهاد. این رساله به درخواست **میرزا اسکندر بهادر خان**، حاکم بلاد فارس و اصفهان، و برادرزاده شاه‌رخ میرزای تیموری به رشته تحریر درآمده است.

جمشید کاشانی در کنار تألیفات علمی به امر ساخت ابزار نجومی نیز می‌پرداخت و در این زمینه ابداعات گوناگونی صورت داده است. نخستین وسایلی که او ساخت، چند نوع اسطرلاب بود که از نمونه‌های رایج و قدیمی آن الگوبرداری کرده بود. اسطرلاب مهم‌ترین ابزار دست ستاره‌شناسان عهد قدیم بود که طی قرن‌ها به تدریج تکامل یافته و با کمک آن مشکلات متعددی در علم نجوم حل و فصل می‌شد.

پس از تألیف رساله نردبان آسمان، جمشید کاشانی در سال ۸۱۵ قمری کتابی مهم در علم نجوم و ستاره‌شناسی تألیف کرد و نام آن را «زیج خاقانی» نهاد. هدف از نگارش این زیج تصحیح اشتباهاتی بود که در کتاب زیج ایلخانی تألیف خواجه نصیر طوسی رخ داده بود. او در مقدمه کتاب خود، باوجود انتقاد از مطالب زیج خاقانی، از مؤلف آن خواجه نصیر با تجلیل و احترام یاد می‌کند.

در دوران قدیم که ستاره‌شناسی و طالع‌بینی دوشادوش هم توسعه می‌یافتند، رصدخانه‌ها و کتاب‌های زیج برای هر دو قابل استفاده بودند. اغلب سلطان‌ها و مردم عادی به طالع‌بینی که بر اساس حرکت ستارگان و تأثیر آن بر زندگی و سرنوشت انسان‌ها صورت می‌گرفت، اعتقاد و علاقه داشتند. گاه نیز ستاره‌شناسان برای پیشبرد امور علمی به امر طالع‌بینی نیز می‌پرداختند تا پول و اعتبار کافی از صاحبان قدرت برای امور

علمی ستاره‌شناسی به‌دست آورند. هرچند که گاه دانشمندان بزرگی مانند ابوریحان بیرونی نیز تأثیر ستارگان را در تقدیر انسان‌ها نکوهش می‌کردند و آن را خلاف عقل و شریعت می‌دانستند. از زیچ برای استخراج تقویم روزهای سال، محاسبه کسوف و خسوف و دیگر مسایل مربوط به ستارگان و کرات آسمانی استفاده می‌شد. نخستین زیچ مهم در ایران در دوران ساسانیان نگاشته شد. در هشت قرن اول اسلام نیز متجاوز از صد زیچ تألیف شده است.

در سال ۸۱۸ قمری کاشانی رساله «نزهة الحدایق» را نگاشت و شرح دستگاهی به نام **طبق المناطق** را که برای استفاده در نجوم و رصد ستارگان اختراع کرده بود، شرح داد. با این دستگاه می‌توان محل ماه، خورشید و پنج ستاره شناخته شده تا آن زمان و نیز فاصله هر یک از آن‌ها تا زمین و پاره‌ای موارد دیگر را به‌دست آورد.

گفته می‌شود که در همان سال‌ها **موسی پاشا ابن محمد**، معروف به قاضی‌زاده رومی، منجم و ریاضی‌دان ترک که به دربار آل‌عبید در سمرقند می‌رفت، در مسیر به شهر کاشان وارد می‌شود، با غیاث‌الدین جمشید ملاقات می‌کند و با او آشنا می‌گردد. تعریف قاضی‌زاده از دانش کاشانی، آل‌عبید را با وسعت علمی دانش کاشانی آشنا می‌سازد. اطلاع او از فعالیت‌های کاشانی در اصفهان و دربار میرزا اسکندر که پسرعموی آل‌عبید محسوب می‌شد، نیز موجب جلب توجه آل‌عبید به غیاث‌الدین جمشید می‌شود. ولی تا چند سال بعد دعوتی از سوی آل‌عبید صورت نگرفت و این امر از سلطان فرهنگ‌دوست و دانشمندی چون آل‌عبید عجیب بود.

در سال ۸۲۴ هجری قمری، چون آل‌عبید پس از ساخت مدرسه معروف خود در سمرقند، قصد احداث رصدخانه‌ای بزرگ و مجهز را داشت، بهترین شخص برای سرپرستی فنی احداث رصدخانه و مدیریت آن را غیاث‌الدین جمشید کاشانی تشخیص داد و او را به سمرقند دعوت کرد. سمرقند در آن زمان بزرگ‌ترین و زیباترین شهر کشور پهناور ایران بود و از تمام بلاد و شهرها هنرمندان و معماران و علمای رشته‌های گوناگون در آن جمع شده بودند.

در بهار ۸۲۴ قمری نمایندگانی از سوی آل‌عبید به کاشان وارد شدند تا غیاث‌الدین جمشید را به سمرقند ببرند. با دعوت از سوی آل‌عبید، کاشانی که سال‌ها به دنبال این فرصت بود که با حمایت آل‌عبید با خیال آسوده به تحقیقات علمی خود بپردازد، از این امر استقبال کرد و پس از فراهم آوردن اسباب سفر و وداع با پدر، به اتفاق همسر و فرزندش و نیز یک منجم ورزیده دیگر به نام **معین‌الدین کاشانی** راهی سمرقند شد. در محل

حکمرانی نیز آل‌عبید به پیشواز او آمد. نقشه احداث رصدخانه را جمشید کاشانی در بدو ورود به سمرقند طراحی کرد و از اواخر سال ۸۲۴ قمری عملیات احداث آن آغاز شد. این رصدخانه که در نوع خود بی‌نظیر بود، با علاقه و کمک‌های سخاوتمندانه آل‌عبید که خود یک ریاضی‌دان بود و به ستاره‌شناسی علاقه وافر داشت، به پایان رسید. عملیات ساختمان‌سازی رصدخانه با توجه به حساسیت و دقت نظر غیاث‌الدین کاشانی چند سالی طول کشید. دقت و سخت‌گیری کاشانی و معماران بنای رصدخانه به‌طور مشخص و عمده به دلیل نصب درست و دقیق وسیله رصدی، **ثلث فخری** بود که بیش از ۴۰ متر طول داشت.

در پایان از ارائه مطالب بیشتر درباره قسمت نخست مستند «غیاث‌الدین جمشید کاشانی» می‌پرهیزیم و شمار ریاضی‌آموزان و علاقه‌مندان به تاریخ ریاضیات در ایران زمین را به تهیه و تماشای این مستند تشویق می‌کنیم.

پی‌نوشت‌ها

1. Cardano
2. Tartaglia
3. Hermann Hankel
4. Francois Viete
5. Horner
6. Woepcke



۱۴

شماره ۱۳۱ | پاییز ۱۴۰۴

موازنه معادله‌های شیمیایی با استفاده از جبر خطی

حسین زارع

دانش آموخته دکترای ریاضی کاربردی
دانشگاه تربیت مدرس



مقدمه

لینوس کارل پولینگ (۱۹۹۴-۱۹۰۱)، شیمی‌دان پرآوازه آمریکایی و برنده دو جایزه نوبل، یکی در شیمی و دیگری در صلح، بر این باور بود که: «هر جنبه از دنیای امروز، حتی روابط بین‌المللی، تحت تأثیر شیمی است.» چنانچه این گفته را بپذیریم، از آنجا که شیمی یا فیزیک یا حتی زیست‌شناسی خود وام‌دار ریاضیات هستند، باید اقرار کنیم که هر جنبه از دنیای امروز، حتی روابط بین‌المللی، تحت تأثیر ریاضیات است! مگر می‌توان نظم حاکم بر پدیده‌ها را بدون دانستن ریاضیات کشف کرد؟ مگر می‌توان بدون دانستن ریاضیات، مسائل دنیای واقعی را مدل‌سازی کرد و پرده از حقیقت نهفته درون آن‌ها برداشت؟ مگر می‌توان بدون دانش ریاضی، در علوم دیگر و صنعت نوآوری داشت؟

ریاضیات زبان طبیعت است و به قول **گالیله**، خداوند جهان را به زبان ریاضیات آفریده است. شاید بهتر است دانش‌آموزان عزیز از آن‌هایی که مراتبی را در علوم یا مهندسی طی کرده‌اند یا دستاوردی در صنعت داشته‌اند تحقیق و از نقش پررنگ ریاضیات در کارهای علمی‌شان سؤال کنند. آخر ما هر قدر هم بگوییم، دانش‌آموزی پیدا می‌شود که بگوید این ریاضیات کجای زندگی به درد ما می‌خورد؟! البته ما این پرسش‌ها را به حساب کنجکاوی یا ناکافی بودن اطلاعات آن‌ها می‌گذاریم و به آن‌ها چنین پاسخ می‌دهیم: «صبور باشید. بعدها که ریاضیات را در سطح بالاتری مطالعه کردید، متوجه می‌شوید که ریاضیات آشکار و نهان در همه‌جای زندگی ما حضور چشمگیر دارد. شما اکنون فقط مقدمات این علم زیبا را می‌آموزید، زیرا

گسترده‌گی آن و کمبود زمان اجازه نمی‌دهد با همه ابعاد آن آشنا شوید». ولی باز هم با همین اطلاعات کم موجود در کتاب‌های ریاضی درسی، می‌توانیم کمی از شهد شیرین ریاضی را به آن‌ها بچشانیم. برای مثال، دانش‌آموزان عزیز ما در درس شیمی با موازنه معادلات شیمیایی سروکار دارند و می‌دانند که موازنه، گام اول در حل یک مسئله «استوکیومتری» است. موازنه کردن یک معادله شیمیایی از نگاه یک ریاضی‌خوانده، چیزی نیست جز حل یک دستگاه معادله خطی که کوچک‌ترین جواب‌های طبیعی آن مد نظر هستند. شاید این نکته‌ای به ظاهر ساده باشد، اما همین که به ریاضیات حاکم بر چنین مسئله‌هایی اشاره شود، دانش‌آموز ارتباط خوبی بین دانسته‌های ریاضی خود و کاربرد آن‌ها برقرار خواهد کرد.



۳۳

شماره ۱۳۱ | پاییز ۱۴۰۱



چون بعد از موازنه تعداد اتم‌های دو طرف معادله با هم برابر می‌شوند، پس باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} a = 2c \\ 2b = 2d \\ b = 3c \end{cases}$$

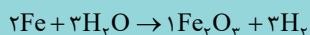
سه معادله داریم و چهار مجهول و می‌دانیم که این دستگاه دارای جواب است، زیرا این واکنش در هر صورت اتفاق می‌افتد! پس در انتخاب مقدار یکی از مجهول‌ها آزادی عمل داریم. ما کوچک‌ترین جواب‌های طبیعی این دستگاه را می‌خواهیم، بنابراین به مجهولی که بیشترین ضریب را دارد مقدار یک می‌دهیم. مجهول c دارای بزرگ‌ترین ضریب است، پس قرار می‌دهیم: و سایر مجهول‌ها به ترتیب زیر محاسبه می‌شوند:

$$a = 2c \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

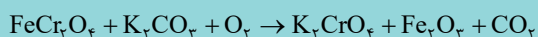
$$b = 3c \Rightarrow \boxed{b = 3}$$

$$2b = 2d \Rightarrow b = d \Rightarrow \boxed{d = 3}$$

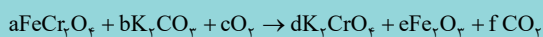
بنابراین معادله موازنه‌شده به صورت زیر است:



ممکن است در گام نخست موازنه یک معادله شیمیایی برخی از ضریب‌ها به شکل کسر باشند. این موضوع چندان مهم نیست، زیرا پس از محاسبه ضریب‌ها، به سادگی با ضرب طرفین معادله در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج کسرها، ضریب‌های معادله به عددهای طبیعی تبدیل می‌شوند. شاید موازنه معادله شیمیایی واکنش تولید پتاسیم کرومات، (K_2CrO_4) مثال خوبی برای درک این موضوع باشد. این معادله شیمیایی به صورت زیر بیان می‌شود:



مانند قبل، ابتدا به هر یک از مواد واکنش‌دهنده و فراورده ضریبی اختصاص می‌دهیم:

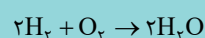


سپس تعداد اتم‌های مشابه در دو طرف معادله را می‌شماریم:

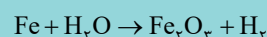
نام اتم	تعداد در سمت چپ	تعداد در سمت راست
Fe	a	2e
Cr	2a	d
O	4a + 3b + 2c	4d + 3e + 2f
K	2b	2d
C	b	f

معادله شیمیایی و موازنه

در آغاز بحث ابتدا باید تعریفی از معادله شیمیایی و موازنه داشته باشیم. یک معادله شیمیایی عبارت است از نمایش خلاصه‌شده یک واکنش شیمیایی که در یک سمت آن یک مجموعه مواد به عنوان واکنش‌دهنده و در سمت دیگر، مواد حاصل از واکنش که آن‌ها را «فراورده‌های شیمیایی» می‌نامیم، حضور دارند. منظور از موازنه یک معادله شیمیایی عبارت است از برابر کردن تعداد اتم‌های موجود در عناصر واکنش‌دهنده و فراورده در یک معادله شیمیایی. برای مثال، معادله شیمیایی تشکیل آب را در نظر بگیرید:



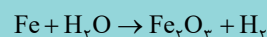
در اینجا ۴ اتم هیدروژن با ۲ اتم اکسیژن واکنش می‌دهند تا ۲ مولکول آب به دست آید. می‌گوییم این معادله موازنه شده است؛ زیرا به سادگی دیده می‌شود که تعداد اتم‌های هیدروژن و اکسیژن در دو طرف معادله برابرند. از طرف دیگر، اگر معادله اکسیدشدن آهن به این صورت بیان شود:



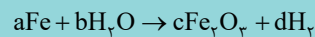
موازنه‌شده نیست، زیرا برای مثال در سمت چپ معادله تنها یک اتم اکسیژن حضور دارد، در حالی که تعداد اتم‌های اکسیژن در سمت راست معادله سه تا است. در ادامه، می‌خواهیم روشی اصولی بر پایه دانش ریاضی برای موازنه یاد بگیریم.

موازنه کردن به روش جبری

بار دیگر معادله موازنه‌نشده اکسیدشدن آهن را در نظر بگیرید:



می‌خواهیم این معادله را به روش جبری موازنه کنیم. بدین‌منظور، ابتدا به هر یک از مواد واکنش‌دهنده و فراورده ضریبی اختصاص می‌دهیم. ما به ترتیب ضریب‌های a ، b ، c و d را برای موادی که در دو طرف معادله حضور دارند، در نظر می‌گیریم:



هدف به دست آوردن ضریب‌های a ، b ، c و d است به طوری که تعداد اتم‌های موجود در مواد واکنش‌دهنده با تعداد اتم‌های موجود در فراورده‌ها یکسان باشد. پس اجازه دهید که تعداد اتم‌های مشابه را در دو طرف معادله بشماریم:

نام اتم	تعداد در سمت چپ	تعداد در سمت راست
Fe	a	2c
H	2b	2d
O	b	3c



۳۳

شماره ۱۳۱ پاییز ۱۴۰۳

چون بعد از موازنه تعداد اتم‌های دو طرف معادله با هم برابر می‌شوند، پس باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} a = 2e \\ 2a = d \\ 4a + 3b + 2c = 4d + 3e + 2f \\ 2b = 2d \\ b = f \end{cases}$$

واکنش رخ می‌دهد و بنابراین دستگاه دارای جواب است. چون پنج معادله داریم و شش مجهول، پس در انتخاب مقدار یکی از مجهول‌ها آزادی عمل داریم. ما در پی یافتن کوچک‌ترین جواب‌های طبیعی هستیم؛ بنابراین این بار هم به امید آنکه در نخستین تلاش، به جواب‌های طبیعی برسیم به مجهولی که دارای بزرگ‌ترین ضریب است مقدار یک می‌دهیم. مجهول‌های a و d هر دو ضریب چهار دارند. می‌توانیم یکی را به دلخواه انتخاب کنیم و مقدارش را برابر با یک در نظر بگیریم. ولی با اندکی دقت می‌بینیم در معادله دوم که فقط a و d حضور دارند، ضریب a بزرگ‌تر است. پس بهتر است قرار دهیم $a = 1$.

بدین ترتیب سایر مجهول‌ها به قرار زیر تعیین می‌شوند:

$$a = 2e \Rightarrow 1 = 2e \Rightarrow \boxed{e = \frac{1}{2}}$$

$$2a = d \Rightarrow \boxed{d = 2}$$

$$2b = 2d \Rightarrow b = d \Rightarrow \boxed{b = 2}$$

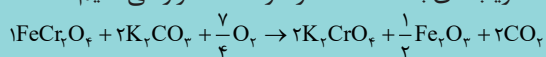
$$b = f \Rightarrow \boxed{f = 2}$$

$$4a + 3b + 2c = 4d + 3e + 2f$$

$$\Rightarrow 4 + 6 + 2c = 8 + \frac{3}{2} + 4$$

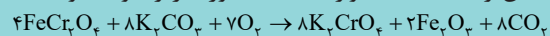
$$\Rightarrow 2c = \frac{7}{2} \Rightarrow \boxed{c = \frac{7}{4}}$$

ضریب‌های به‌دست آمده را در معادله قرار می‌دهیم:



همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، برخی از ضریب‌ها به شکل کسر هستند. چون ضریب‌های معادله باید عددهای

طبیعی باشند، پس همه آن‌ها را در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌ها که برابر با ۴ است ضرب می‌کنیم. بدین ترتیب، معادله موازنه شده به صورت زیر خواهد بود:



موازنه بار الکتریکی

برخی از واکنش‌های شیمیایی با انتقال الکترون از ماده‌ای به ماده دیگر همراه هستند. به چنین واکنش‌هایی، واکنش‌های اکسایش - کاهش می‌گویند. در موازنه معادله شیمیایی این گونه واکنش‌ها، باید علاوه بر اینکه تعداد اتم‌ها در دو طرف معادله موازنه باشند، مجموع بارهای الکتریکی مثبت و منفی در دو طرف معادله نیز موازنه باشند. روش موازنه این معادله‌ها تفاوت خاصی با آنچه پیش‌تر گفته شد ندارد، جز آنکه یک

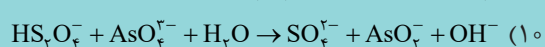
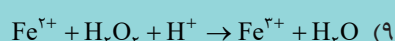
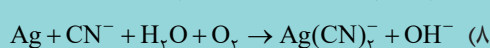
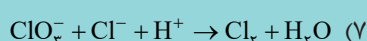
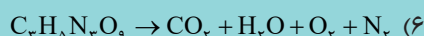
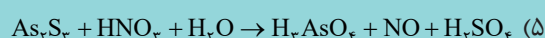
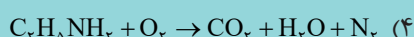
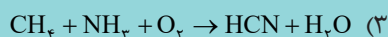


۳۴

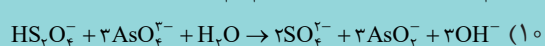
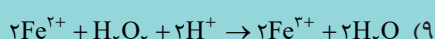
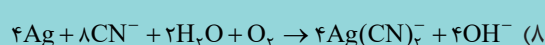
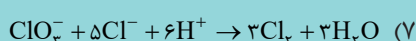
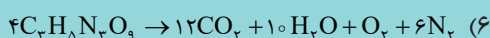
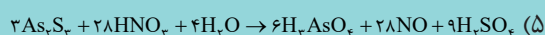
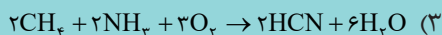
شماره ۱۳۱ | پاییز ۱۴۰۱

مسائلی برای تمرین بیشتر

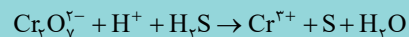
معادله‌های شیمیایی زیر را موازنه کنید:



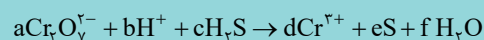
پاسخ‌ها



معادله نیز به منظور موازنه بارهای الکتریکی به دستگاه معادله‌های خطی اضافه می‌شود. برای مثال، معادله شیمیایی زیر را در نظر بگیرید:



ابتدا برای هر یک از مواد واکنش دهنده و فراورده ضریبی انتخاب می‌کنیم:



سپس تعداد اتم‌های مشابه در دو طرف معادله را می‌شماریم:

نام اتم	تعداد در سمت چپ	تعداد در سمت راست
Cr	2a	d
O	7a	f
H	b + 2c	2f
S	c	e

چون بعد از موازنه تعداد اتم‌های دو طرف معادله با هم برابر می‌شوند، پس باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} 2a = d \\ 7a = f \\ b + 2c = 2f \\ c = e \end{cases}$$

علاوه بر این، مجموع بارهای الکتریکی دو طرف معادله نیز باید با هم برابر باشند؛ یعنی باید داشته باشیم:

$$a(-2) + b(+1) = d(+3) \Rightarrow -2a + b = 3d$$

می‌دانیم که این واکنش رخ می‌دهد و بنابراین دستگاه دارای جواب است. چون در پی یافتن کوچک‌ترین جواب‌های طبیعی هستیم، به مجهولی که دارای بزرگ‌ترین ضریب است مقدار یک می‌دهیم. پس قرار می‌دهیم $a = 1$. بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$2a = d \Rightarrow \boxed{d = 2}$$

$$7a = f \Rightarrow \boxed{f = 7}$$

$$-2a + b = 3d \Rightarrow -2 + b = 6 \Rightarrow \boxed{b = 8}$$

$$b + 2c = 2f \Rightarrow 8 + 2c = 14 \Rightarrow 2c = 6 \Rightarrow \boxed{c = 3}$$

$$c = e \Rightarrow \boxed{e = 3}$$

بنابراین معادله موازنه شده به صورت زیر خواهد بود:



منابع

۱. خلخالی، مرتضی؛ ارشدی، نعمت‌الله؛ عابدینی، منصور؛ سیدی اصفهانی، علی (۱۳۹۳). شیمی ۱. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
۲. اونان، مایکل (۱۳۶۳). جبر خطی. ترجمه علی‌اکبر محمدی حسن‌آبادی. مرکز نشر دانشگاهی. تهران.

داستان‌های شیرین ریاضی (قسمت پنجم) کشف بزرگ ارشمیدس و تشخیص تاج تقلبی هیرو

سید محمد رضا هاشمی موسوی
مدرس، مولف و محقق ریاضیات



اشاره

در داستان‌های قبل با قصه‌های حاکم بزرگ و هدیه حاکم به مخترع شطرنج، حل مسئله مشهور پنج کلاه با ریاضیات مقدماتی و پایه و تعمیم آن با یک فرمول ساده مقدماتی، ضرب ذهنی - سریع 2×2 ، 3×3 ، 2×3 ، 4×4 ، ... و $m \times n$ کلاس درس هندسه و حل چهار مسئله و یافتن شگفت‌انگیز خطا در شکل هندسی رسم‌شده، و تطبیق نداشتن اطلاعات مسئله با شکل، آشنا شدید. و اینک به داستان شیرین ریاضی دیگری در زمینه کشف

بزرگ «ارشمیدس» در خزینه و حل مسئله بغرنج «هیرو» (یا هرون و یا هایزن) و تشخیص تاج تقلبی وی می‌پردازیم که توسط فیلسوف، ریاضی‌دان، فیزیک‌دان، مهندس، مخترع و منجم یونان باستان (از اهالی جزیره ساموس در دریای مدیترانه) و خلاق و دانشمند بزرگ عصر خود، ارشمیدس انجام پذیرفت.

لازم به ذکر است که پدر ارشمیدس هم ریاضی‌دان و منجم مشهور زمان خود بود.



۳۶

شماره ۱۳۱ پاییز ۱۴۰۱



زندگی‌نامه

ارشمیدس دانشمند و ریاضی‌دان یونانی در سال ۲۷۸ پیش از میلاد در شهر «سیراکوز» یونان چشم به جهان گشود و در جوانی برای آموختن دانش به «اسکندریه» رفت. بیش‌ترین دوران زندگی‌اش را در زادگاهش گذراند

و با فرمانروای این شهر دوستی نزدیک داشت. زندگی ارشمیدس در آرامش کامل می‌گذشت. زمانی که رومیان در سال ۲۱۲ پیش از میلاد شهر سیراکوز را به تصرف خود درآوردند، سردار رومی **مارسلوس** اعلام کرد که هیچ‌یک از سپاهیان‌ش حق اذیت و آزار، توهین، و

ضرب و جرح این دانشمند و متفکر مشهور و بزرگ را ندارند. از ابداعات این دانشمند بزرگ می‌توان به تعیین عدد پی ($\frac{22}{7}$)، ساخت قرقره ارشمیدس، کشف قانون چگالی مایعات، برابری معروف حجم‌های متوالی ($3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$) و چند مورد دیگر اشاره کرد.

ارشمیدس و تاج تقلبی هیرو

چنین گفته‌اند که هیرو دوم (پادشاه وقت)، به ماهرترین زرگر دوران خود دستور داده بود تاجی از **زرناب** برایش بسازد. هیرو طلای ناب به زرگر داد و

او را از اینکه با طلا، نقره بیامیزد برحذر داشت. زرگر تاج را ساخت و نزد پادشاه آورد. هیرو به کار زرگر ظنین شد و برای حصول اطمینان از کار زرگر، از ارشمیدس خواست تا در این‌باره تحقیق کند.

در مقام مقایسه، برخی او را **اینشتین** زمان خود می‌دانستند، در حالی که بهتر است اینشتین را ارشمیدس زمان خود بدانیم. در سده سوم پیش از میلاد، شیمی



۳۷

شماره ۱۳۱ پاییز ۱۴۰۴



نتیجه

تحلیلی به اندازه ریاضیات پیشرفته نبود و ارشمیدس قبلاً برای محاسبه حجم جامدهایی که شکل هندسی منظم مثل کره یا استوانه داشتند، دستورهای ریاضی ابداع کرده بود. او می‌دانست که اگر بتواند حجم تاج هیرو را تعیین کند، خواهد فهمید که آیا تاج از طلای ناب و خالص درست شده است یا از مخلوطی از طلا با فلزات دیگر.

ارشمیدس لحظه‌ای از تفکر و اندیشه باز نایستاد؛ ولی حیران و سرگشته راه به جایی نمی‌برد. از قضا روزی در خزینه (حمام) متوجه شد، هنگامی که دست و پای خود را در تشت پر از آبی قرار می‌دهد، مقداری از آب تشت بیرون می‌ریزد، ناگهان گویی سروشی از غیب به مخیله‌اش راه یافت، بارقه‌ای از امید در کالبدش جان گرفت و به او الهام شد: «هرگاه جسمی در ظرف آبی فرو رود، مقداری از آب ظرف که هم حجم آن جسم است، جابه‌جا می‌شود (اگر ظرف آب پر باشد به میزان حجم جسم آب به بیرون ظرف سرازیر می‌شود)».

آنگاه با خود زمزمه کرد: «اگر تاج از طلای ناب و خالص ساخته شده باشد، باید به اندازه حجم آبی که جابه‌جا می‌کند، طلای خالص داشته باشد.»

بنابراین، با مقایسه وزن تاج با وزن طلای خالص هم حجم آن، می‌توان تحقیق کرد که تاج از طلای خالص ساخته شده است یا اینکه در ساختن آن نقره و یا دیگر فلزات هم به کار رفته است. ارشمیدس که از این کشف و شهود سر از پا نمی‌شناخت، از خزینه به خیابان دوید و فریاد زد: «اورکا! اورکا!» (یافتم! یافتم!).

به هر حال خود را به دربار پادشاه هیرو رساند و به مدد محاسبه‌های دقیق به تقلب زرگر پی برد.

نقد

اگرچه به نظر می‌رسد این داستان همچون بسیاری از کشفیات علمی (مثل داستان نیوتون) دچار غلو و انحراف شده باشد، ولی شهرت عالمگیر دارد و تقریباً در میان تمام ملل جهان به زبان‌های محلی خودشان نسل به نسل این داستان نقل می‌شود و اثر خودش را به آیندگان انتقال می‌دهد. این داستان که مانند یک افسانه است، بدون هیچ برتری نسبت به داستان‌های واقعی و مستند دیگر، عالمگیر شده است. البته روایت دیگری که به نظر از وجهات بیشتری برخوردار است، مربوط می‌شود به فرمان ساخت کشتی غول‌پیکری به نام «سیراکوسیا» از سوی پادشاه هیرو که به کشف قانون شناوری یا همان «اصل ارشمیدس» منجر شد.

سرگذشتی نافرجام

داستان مرگ این اندیشمند افسانه‌ای نیز معروف و مشهور است. رومیان شهر سیراکوز (زادگاه ارشمیدس) را محاصره کرده بودند، ولی در سال ۲۱۲ ق.م. به نحو غافلگیرکننده‌ای به شهر وارد شدند. سیراکوزیان که ناگهان سربازان رومی را برابر خود دیدند، با شتاب به هرسو گریختند. ولی ارشمیدس که بر زمین شکل‌های هندسی کشیده بود، در حل مسئله‌ای غرق در تفکر بود و از آنچه پیرامونش می‌گذشت، خبر نداشت. ناگهان سایه سربازی روی شکل‌ها افتاد. سرباز به او دستور داد که همراهش برود. ارشمیدس که هنوز به شکل‌ها خیره شده بود و سرش هم بالا نیامده بود، با خونسردی جواب داد: «کمی خود را جابه‌جا کن تا شکل‌ها را ببینم. مسئله را که حل کردم، خود خواهم آمد.» سرباز از این رفتار ارشمیدس چنان به

او در آزمایش خود تشخیص داد که تاج پادشاهی میزان بیشتری آب را نسبت به شمش طلای هم‌وزنش پس می‌راند (جابه‌جا می‌کند)، ولی این میزان آب کمتر از میزان آبی است که شمش نقره هم‌وزن آن را جابه‌جا می‌کند. به این ترتیب در این داستان ارشمیدس ثابت کرد: «تاج پادشاهی از طلای ناب و خالص ساخته نشده، بلکه زرگر (جواهرساز) آن را از مخلوطی از طلا و نقره ساخته است. و این‌گونه ارشمیدس یکی از چشمگیرترین رازهای طبیعت را کشف کرد؛ یعنی اینکه می‌توان حجم اجسام دارای شکل نامنظم را به کمک مقدار مایعی که جابه‌جا می‌کنند، اندازه‌گیری کرد.»

ارشمیدس رفتارهای خاصی هم داشت. او اثبات‌های خود را کامل ارائه نمی‌داد و در واقع به دست انداختن ریاضی‌دانان دیگر علاقه داشت. داستان‌های بسیاری هست که ارشمیدس پاسخ صحیح مسئله را به ریاضی‌دانان می‌داد و منتظر بود تا روش حل را خودشان کشف کنند.

نکته

ارشمیدس با اینکه به چنین تحقیقاتی که جنبه عملی و تجربی داشت، ارجی نمی‌نهاد و بیشتر به کارهای نظری، هندسی و محاسبه‌ای می‌پرداخت و شهرت وی هم از همین کارها نشئت گرفته است، ولی اختراعات او همگی شگفت‌انگیز و از هوش و خلاقیت خارق‌العاده‌ای برخوردارند. همین هوش و ذکاوت وی از بسیاری از مسائل بغرنج و حل‌نشده آن زمان (عصر خود) به‌سادگی پرده برمی‌داشت و موجب شگفتی دانشمندان دوران خود می‌شد.

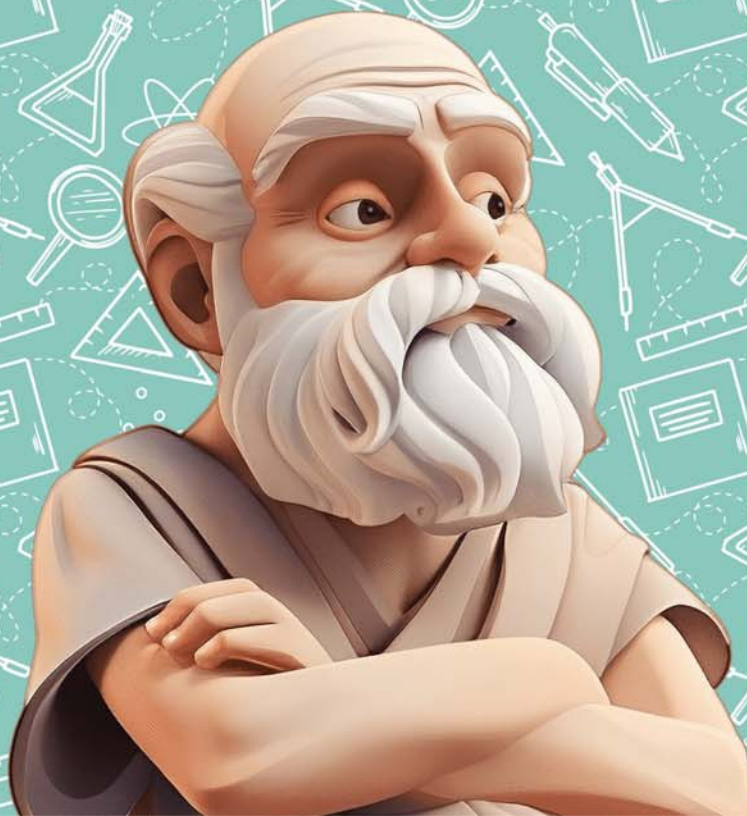
کنار گذاشت و پیش خود دستگاه شمارشی اختراع کرد که با آن ممکن بود هر عدد بزرگی را بنویسیم و بخوانیم. ارشمیدس ۲۰۰۰ سال پیش از **نیوتون** و **لایبنیتز**، انتگرال را اختراع کرد. دانش تعادل و قوانین مربوط به آن و برخی از اصول مکانیک را به وضوح و دقت بیان کرد و قوانین اهرم را کشف کرد. ارشمیدس در مورد خودش گفته‌ای دارد که با وجود گذشت قرن‌ها جاودان مانده است: «نقطهٔ اتکایی به من بدهید، من زمین را از جا بلند خواهم کرد.» عین همین اظهار به‌صورت دیگری در متون ادبی زبان یونانی از قول ارشمیدس نقل شده است، اما مفهوم در هر دو صورت یکی است. ارشمیدس همچون عقاب گوشه‌گیر و منزوی بود. در جوانی به مصر مسافرت کرد و مدتی در شهر اسکندریه به تحصیل پرداخت. در این شهر دو دوست قدیمی یعنی **کونون** (ریاضی‌دان) و **اراتوستن** (ریاضی‌دان) را یافت. در زندگی آرام خود همیشه ذهنش پویا بود.

کتاب‌هایی دربارهٔ خصوصیات و روش‌های اندازه‌گیری شکل‌ها و حجم‌های هندسی، از قبیل مخروط، منحنی حلزونی و خط مارپیچ، سهمی، سطح کره «مادهٔ غذایی» و استوانه نوشته است. علاوه بر آن او قوانینی دربارهٔ سطح شیب‌دار، پیچ، اهرم و مرکز ثقل کشف کرد. از اختراعات مهم او هم می‌توان به دست آهنی و آینهٔ آتش‌زا اشاره کرد. ارشمیدس عدد پی (π) را با یکی از روش‌های نوین ریاضیات به‌دست آورد. وی ثابت کرد عدد پی، یعنی نسبت محیط دایره به قطر آن، عددی محصور بین دو عدد $3\frac{1}{7}$ و $3\frac{10}{71}$ است. علاوه بر این، روش‌های متفاوتی برای تعیین جذر تقریبی عددها به‌دست آورد. از مطالعهٔ آن‌ها معلوم می‌شود که وی پیش از ریاضی‌دانان هندی با کسرهای متصل یا مداوم متناوب (کسرهای مسلسل) آشنایی داشته است. در حساب روش غیرعملی و چند عملی یونانیان را که برای نمایش عددها از علامت‌های متفاوت استفاده می‌کردند،

خشم آمد که دیگر سفارش سردارش را فراموش کرد. ناگهان با عصبانیت تمام شمشیر خود را بر پیکر دانشمند بزرگ عصر خویش فرود آورد. و این بود سرانجام تلخ مؤثرترین ریاضی‌دان عصر یونان باستان. با رفتن این دانشمند بزرگ مدت‌زمانی طولانی سرعت حرکت ماشین علمی جهان علم، به‌خصوص ریاضیات، کند شد و این است تأثیر بزرگان علوم و دانشمندان جهان، بر جامعهٔ بشری و تحولات آیندهٔ علوم.

فعالیت در حوزه‌های دیگر

ارشمیدس در رشتهٔ ریاضیات از ظرفیت‌های هوشی بسیار بالا و چشمگیری برخوردار بود. او منجنیق‌های شگفت‌آوری برای دفاع از سرزمین‌های خود اختراع کرد که بسیار سودمند افتادند. او توانست سطح و حجم جسم‌هایی مانند کره، استوانه و مخروط را حساب کند و روش نوینی برای اندازه‌گیری در دانش ریاضی پدید آورد. همچنین محاسبهٔ عدد π (پی) نیز از کارهای گرانقدر اوست.



۳۹

شماره ۱۳۱ پاییز سال ۱۴۰۱

یک شکل هندسی غیرمنتظره مثلث رولو

محمدرضا اسفندیاری
دکترای ریاضی و دبیر ریاضی، کرمان



چکیده

در این نوشته «مثلث رولو»^۱ را معرفی کرده‌ایم. نخست تعریف، تاریخچه و برخی از ویژگی‌های ریاضی آن را بیان داشته‌ایم. سپس یک سلسله از کاربردهای آن را در صنعت، مکانیک، معماری و ... ارائه داده‌ایم.

معرفی و ویژگی‌های ریاضی

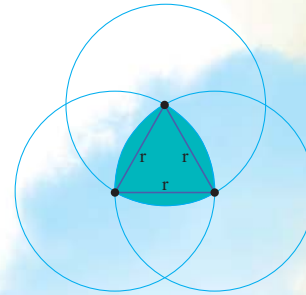
مثلث رولو شکل هندسی بسیار ساده‌ای دارد که از اشتراک سه دایره یکسان به‌دست می‌آید. اگر از هر رأس مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع r دایره‌ای به شعاع r رسم کنیم، ناحیه مشترک بین این سه دایره یک منحنی بسیار مهم و کاربردی است که به نام مثلث رولو معروف است (شکل ۱ را ببینید).



۴۰

شماره ۱۳۱ | پاییز ۱۴۰۱

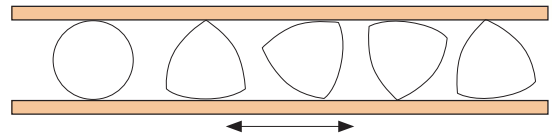
این شکل به افتخار **فرانتز رولو**^۲، مهندس آلمانی و مدرس دانشکده فنی برلین در قرن نوزدهم، رولو نام‌گذاری شد. وی در مطالعه ماشین‌های مکانیکی در کارهایش، از این منحنی استفاده کرده است.



شکل ۱

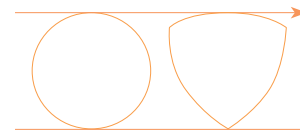
همان‌طور که در شکل ۱ می‌بینید، مرکز هر دایره محل تقاطع دو دایره دیگر است.

ویژگی بسیار مهم و کاربردی مثلث رولو داشتن «عرض ثابت»^۳ است. بعد از دایره، مثلث رولو ساده‌ترین و شناخته شده‌ترین منحنی با عرض ثابت است. منظور از عرض ثابت این است که فاصله هر دو خط موازی بدون توجه به جهت این خط‌ها که با این منحنی مماس باشد، یکسان است.



شکل ۲

برای منحنی‌های با عرض ثابت، «قضیه باریه»^۴ بیان می‌کند که محیط هر منحنی با عرض ثابت w ، بدون توجه به شکل دقیق آن، برابر با πw است. این قضیه را **جوزف-امیل باریه**^۵ برای اولین بار در سال ۱۸۶۰ بیان کرده است.



شکل ۳

در شکل ۳، محیط دایره و مثلث رولو یکسان است. با فردضلعی‌های منتظم، می‌توان منحنی با عرض ثابتی ساخت که مثلث رولو منحنی ساخته شده از مثلث متساوی الاضلاع است. به همین طریق با پنج‌ضلعی منتظم، هفت‌ضلعی منتظم و ... می‌توان منحنی‌هایی با عرض ثابت ایجاد کرد (شکل ۴ را ببینید).

بنا بر قضیه باریه، تمام منحنی‌های با عرض ثابت محیط یکسانی دارند. ولی بین تمام منحنی‌های با عرض ثابت مثلث رولو کمترین مساحت را دارد.

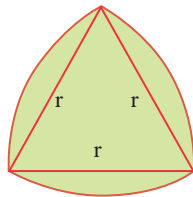


شکل ۴

محیط تمام شکل‌های بالا یکسان است! ولی مثلث رولو کمترین و دایره بیشترین مساحت را دارد. مثلث رولو مانند هر شکل هندسی دیگری ویژگی‌های ریاضی قابل توجهی دارد. در اینجا فرمول مساحت این منحنی را بیان می‌کنیم.

گزاره: مساحت مثلث رولو با شعاع کمان r برابر است با:

$$A = \frac{1}{2}(\pi - \sqrt{3})r^2$$

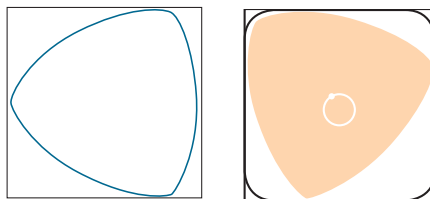


شکل ۵

اثبات این گزاره را به خواننده علاقه‌مند واگذار می‌کنیم.

کاربردهای مثلث رولو

ویژگی عرض ثابت مثلث رولو باعث شده است که این شکل کاربردهای زیادی داشته باشد. مثلث رولو با عرض ثابت به راحتی داخل یک مربع می‌چرخد که این ویژگی باعث کاربردهای بسیاری در صنعت، خودروسازی، حفاری، ساخت مته‌ها و دریل‌ها، و برخی بیل‌های مکانیکی و چرخه‌ها شده است.



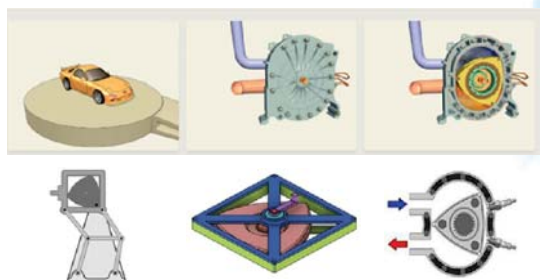
شکل ۶

• در معماری و هنر:



تصویر ۴

• در صنعت خودروسازی و اجسام مکانیکی:



تصویر ۵

دوچرخه تصویر ۱ ویژگی بسیار جالب منحنی‌های با عرض ثابت را نشان می‌دهد.



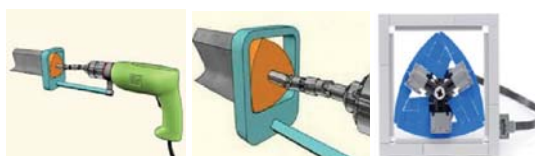
تصویر ۱

نتیجه‌گیری

مثلث رولو یک شکل هندسی بسیار ساده و قابل فهم برای دانش‌آموزان است. علاوه بر ویژگی‌های جالب ریاضی و مفهوم‌های هندسی، مانند دایره، مثلث متساوی‌الاضلاع، قطاع دایره، زاویه و ...، کاربردهای بسیار مهمی در زندگی واقعی، صنعت و معماری دارد. از این رو می‌توان گفت جای این شکل هندسی در کتاب‌های درسی ریاضی خالی است. به‌ویژه اینکه امروزه متخصصان امر آموزش برای علاقه‌مندشدن دانش‌آموزان، به کاربردهای ریاضی بسیار اهمیت می‌دهند.

در ادامه برخی از کاربردهای مثلث رولو را مشاهده می‌کنید:

• در حفاری و مته‌ها:



تصویر ۲

• در پوش‌ها در کنتورهای آب، چاه‌های فاضلاب:



تصویر ۳

پی‌نوشت‌ها

1. Reuleaux triangle
2. Franz Reuleaux
3. constant width
4. Barbier's theorem
5. Joseph-Émile Barbier

منابع

1. https://en.wikipedia.org/wiki/Reuleaux_triangle
2. <https://mathworld.wolfram.com/ReuleauxTriangle.html>
3. <https://en.etudes.ru/etudes/reuleaux-triangle/>
4. <https://www.geogebra.org/search/reuleaux%20triangle>



۴۲

شماره ۱۳۱ | پاییز ۱۴۰۱

پیشرو

نمونه سؤالات های امتحان کتبی

بارویلرد مفهومی



پاسخ
سؤالات

جواد شوهانی

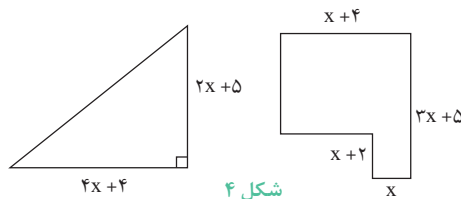
دکترای ریاضی، دبیر ریاضی مدارس استعدادهای درخشان

علی یعقوبی

دبیر ریاضی مدارس استعدادهای درخشان

۴. در شکل ۴، مساحت های شکل های هندسی با هم برابر هستند. مقدار x را به دست آورید.

(ریاضی و آمار ۱، فصل ۱، درس ۲: حل معادله درجه ۲ و کاربردها)



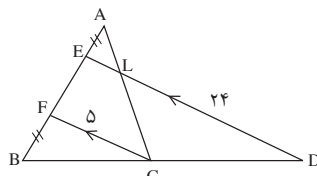
شکل ۴

۵. نقطه های $A(4,5)$ و $B(5,3)$ و $C(-1,1)$ مختصات سه رأس یک مثلث هستند. فاصله نقطه $D(8,4)$ از عمودمنصف ضلع BC را به دست آورید.

(ریاضی ۲، فصل ۱، درس ۱: هندسه تحلیلی)

۶. با توجه به شکل ۵، اگر داشته باشیم: $AE = BF$ و $DL = 24$ و $CF = 5$ ، طول EL را مشخص کنید. ($CF \parallel DE$)

(ریاضی ۲، فصل ۲، درس ۲: استدلال و قضیه تالس)



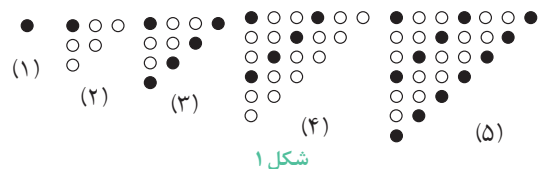
شکل ۵

۷. معادله نیمسازهای دو خط $y - 3x = -1$ و $y - x$ را بنویسید.

(حسابان ۱، فصل ۱، درس ۵: آشنایی با هندسه تحلیلی)

۱. در الگوی زیر، در شکل پانزدهم، اختلاف دایره های توپر و توخالی را تعیین کنید.

(ریاضی ۱، فصل ۱، درس ۳ و ۴: الگو و دنباله های حسابی و هندسی)

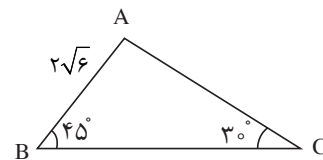


شکل ۱

۲. با توجه به شکل ۲، مساحت مثلث ABC را به دست آورید.

($C = 30^\circ$ و $B = 45^\circ$ و $AB = 2\sqrt{6}$)

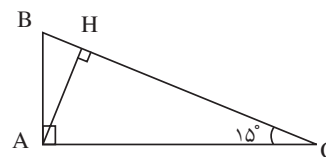
(ریاضی ۱، فصل ۲، درس ۱: نسبت های مثلثاتی)



شکل ۲

۳. در مثلث قائم الزاویه ABC ، (شکل ۳) $\hat{C} = 15^\circ$ است. ثابت کنید در این مثلث ارتفاع وارد بر وتر، $\frac{1}{4}$ وتر است. $AH = \frac{1}{4}BC$

(هندسه ۱، فصل ۱، درس ۲: استدلال)



شکل ۳



۱۴۳۳

شماره ۱۳۱ | پاییز ۱۴۰۳

۱۵. تابع $f(x) = \begin{cases} 5-2x & -5 < x \leq a \\ 2-x & a < x < 6 \\ 2x+3 & 6 \leq x \end{cases}$ در بازه $(-5, b)$ نزولی است. مقدار a را طوری تعیین کنید که b بزرگترین مقدار ممکن باشد.

(حسابان ۲، فصل ۱، درس ۲: توابع یکنوا)

۱۶. جواب‌های کلی معادله $\cos 4x - \sin 2x = 0$ را به دست آورید.

(حسابان ۲، فصل ۲، درس ۲: معادلات مثلثاتی)

۱۷. با حرف‌های کلمه «قورمه‌سبزی» چند کلمه ۶ حرفی می‌توان نوشت، به طوری که:
(الف) با حرف نقطه‌دار شروع شود و به حرف بدون نقطه ختم شود.

(ب) تعداد نقطه‌های آن کمتر از تعداد حرف‌هایش باشد؟
(هیچ حرفی تکرار نشود و معنی‌دار بودن کلمه هم اهمیتی ندارد.)

(ریاضی و آمار ۳، فصل ۱، درس ۱: شمارش)

۱۸. از بین ۴ مهره آبی، ۳ مهره قرمز، ۲ مهره زرد و ۱ مهره مشکی که در ظرفی قرار دارد، چهار مهره برمی‌داریم. چقدر احتمال دارد که بین مهره‌های انتخابی هیچ مهره قرمزی وجود نداشته باشد و حداقل دو مهره آبی وجود داشته باشد؟

(ریاضی و آمار ۳، فصل ۱، درس ۲: احتمال)

۱۹. اگر حاصل جمع درایه‌های $A = \begin{bmatrix} 1 & \log 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \log 9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \log 27 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 1 & \log 729 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ به صورت $\log\left(\frac{3^a}{b}\right)$ باشد، حاصل $a+b$ را به دست آورید.

(هندسه ۳، فصل ۱، درس ۱: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها)

۲۰. باقی‌مانده تقسیم عدد 5^{237} بر ۳۹ برابر با a است. مقدار a را به دست آورید و سپس معادله سیاله $ax + 6y = 19$ را حل کنید و جواب‌های عمومی آن را به دست آورید.
(گسسته، فصل ۱، درس ۳: هم‌نهشتی در عددهای صحیح و کاربردها)

۸. تابع‌های زیر را رسم کنید.

(الف) $y = [\sin x] \quad -2\pi \leq x \leq 2\pi$

(ب) $y = [x + 2[x]] \quad 0 \leq x \leq 4$

(حسابان ۱، فصل ۲، درس ۲: انواع توابع)

۹. با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها، درستی هم‌ارزی $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$ را اثبات کنید.

(ریاضی و آمار ۲، فصل ۱، درس ۱: گزاره‌ها و ترکیب گزاره‌ها)

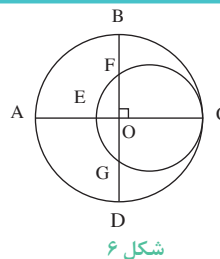
۱۰. گزاره‌های زیر را به صورت نماد ریاضی بازنویس کنید.
(الف) مجموع مربع‌های دو عدد، کوچک‌تر یا مساوی مربع مجموع آن دو عدد است.

(ب) مجذور عددی از جذر آن عدد، سه واحد بیشتر است.
(ج) حاصل ضرب عددی در قرینه‌اش، از معکوس آن عدد بزرگ‌تر است.

(ریاضی و آمار ۲، فصل ۱، درس ۲: استدلال ریاضی)

۱۱. در شکل ۶ دو دایره بر هم مماس هستند. اگر $AE = 12$ و $BF = 8$ باشند، مساحت دایره کوچک‌تر را به دست آورید.
(قطرهای AC و BD از دایره بزرگ بر هم عمودند.)

(هندسه ۲، فصل ۱، درس ۲: رابطه‌های طولی در دایره)



شکل ۶

۱۲. با استفاده از جدول ارزش درستی گزاره‌ها، نشان دهید:
 $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$

(آمار و احتمال، فصل ۱، درس ۱: آشنایی با منطق ریاضی)

۱۳. ضابطه تابع وارون تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 & x \leq 0 \\ -\sqrt{x} & x > 0 \end{cases}$ را بنویسید.

(ریاضی ۳، فصل ۱، درس ۳: تابع وارون)

۱۴. اگر $\tan \theta = \frac{1}{3}$ باشد، مقدار $\cos 4\theta$ را محاسبه کنید.
(ریاضی ۳، فصل ۲، درس ۲)



۴۴

شماره ۱۳۱ پاییز ۱۴۰۱

چشم انداز

نمونه سؤال های آزمون سراسری بارویکرمفهومی

جوادشوهانی

دکترای ریاضی، دبیر ریاضی مدارس استعدادهای درخشان

علی یعقوبی

دبیر ریاضی مدارس استعدادهای درخشان



پاسخ
سؤالات

(ب) $\frac{144}{1000}$

(د) $\frac{36}{100}$

(الف) $\frac{135}{1000}$

(ج) $\frac{216}{1000}$

(هندسه ۱، فصل ۲، درس ۲: قضیه تالس)

۴. دو کارگر با هم کاشی کاری یک ساختمان را در ۱۸ روز تمام می کنند. اگر هر یک به تنهایی کار انجام دهند، کارگر اول ۱۵ روز زودتر از کارگر دوم این کار را انجام می دهد. سرعت کارگر اول چند برابر سرعت کارگر دوم است؟

(ب) $\frac{8}{3}$

(د) $\frac{6}{5}$

(الف) $\frac{4}{3}$

(ج) $\frac{3}{2}$

(ریاضی و آمار ۱، فصل ۱، درس ۳، معادله های شامل عبارت های گویا)

۵. اگر α و β ریشه های معادله $4x^2 - 12x + 1 = 0$ باشند، مقدار $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ چقدر است؟

(ب) ۳

(د) ۶

(الف) ۲

(ج) ۴

(ریاضی ۲، فصل ۱، درس ۲، معادله درجه دوم و تابع درجه ۲)

۶. در مستطیل ABCD، از رأس A و C به قطر BD دو عمود AE و CF را رسم می کنیم. اگر $AB = 8\sqrt{3}$ و $BC = 8$ باشند، طول EF کدام است؟

(ب) ۸

(د) ۱۲

(الف) $4\sqrt{3}$

(ج) $8\sqrt{3}$

(ریاضی ۲، فصل ۲، درس ۳: تشابه مثلث ها)

۱. از تعداد اعضای مجموعه A با مجموعه B و $\frac{2}{5}$ از تعداد اعضای مجموعه B با مجموعه A مشترک هستند. اگر $n(A \cup B) = 36$ باشد، $n(B \cap A')$ کدام است؟

(ب) ۸

(د) ۱۶

(الف) ۱۲

(ج) ۲۰

(ریاضی ۱، فصل ۱، درس ۱: مجموعه ها)

۲. با توجه به خط های d_1 و d_2 در شکل زیر، مقدار $b(a+1)$ کدام است؟

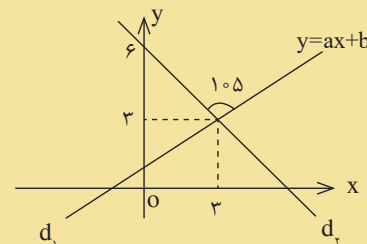
(ب) ۲

(د) $\frac{3}{4}$

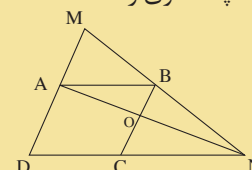
(الف) ۳

(ج) $\frac{15}{4}$

(ریاضی ۱، فصل ۲، درس ۲)



۳. در شکل زیر $\frac{AM}{AD} = \frac{2}{3}$ و ABCD متوازی الاضلاع است. مساحت مثلث OCN چه کسری از مساحت مثلث MDN است؟



۴۵

شماره ۱۳۱ | پاییز ۱۴۰۱

۱۰. در مورد استدلال زیر، کدام یک از موارد زیر درست است؟

مقدمه (۱) اگر $\Delta > 0$ باشد، آنگاه معادله درجه دوم، ۲ جواب دارد.

مقدمه (۲) معادله درجه دوم $x^2 + 4x - 5 = 0$ ، دو جواب دارد.

$\therefore \Delta > 0$ است.

الف) قیاس استثنایی است.

ب) نتیجه به دست آمده نادرست است.

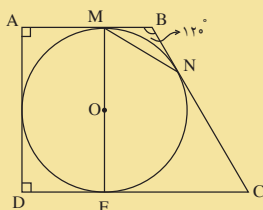
ج) روش به کار رفته در این استدلال درست است.
د) استدلال مغالطه است.

(ریاضی و آمار ۲، فصل ۱، درس ۲: استدلال ریاضی)

۱۱. در شکل زیر دایره‌ای به شعاع ۴ درون دوزنقه قائم‌الزاویه ABCD محاط شده است. اگر $\hat{B} = 120^\circ$ باشد، مساحت چهارضلعی MNCE را به دست آورید.

- الف) $20\sqrt{3}$ (ب) $12\sqrt{3}$
ج) $40\sqrt{3}$ (د) $24\sqrt{3}$

(هندسه ۲، فصل ۱)



۷. ریشه‌های معادله $x^2 - 6x + 4 = 0$ ، عددهای α و β هستند. حاصل $(\alpha - \frac{1}{\beta})^2 + (\beta - \frac{1}{\alpha})^2$ کدام است؟

- الف) $14/75$ (ب) $15/75$
ج) $16/25$ (د) $15/25$

(حسابان ۱، فصل ۱، درس ۲: معادله‌های درجه دوم)

۸. اگر $f(x) = 4 + \sqrt{x+3}$ باشد، مجموعه جواب‌های

معادله $(f \circ f^{-1})_{(x)} = (f^{-1} \circ f)_{(x)}$ کدام است؟

- الف) $\mathbb{R}$ (ب) $[-3, +\infty)$
ج) $[-3, 4]$ (د) $[4, +\infty)$

(حسابان ۱، فصل ۲، درس ۳: وارون توابع)

۹. چند مورد از موارد زیر، هم‌ارزی درستی را نمایش می‌دهند؟

$$I) (p \vee \sim q) \wedge (q \vee \sim p) \equiv p \Leftrightarrow q$$

$$II) \sim (p \wedge q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

$$III) (\sim p \Rightarrow q) \wedge (\sim p \Rightarrow \sim q) \equiv p$$

- الف) صفر (ب) یک
ج) دو (د) سه

(ریاضی و آمار ۲، فصل ۱، درس ۱: گزاره‌ها و ترکیب گزاره‌ها)



۴۶

شماره ۱۳۱ | پاییز ۱۴۰۱

۱۲. نقیض گزاره زیر کدام است؟

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{Z}; (x^2 < y^2) \Rightarrow (x < y)$$

(الف) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{Z}; (x^2 \geq y^2) \Rightarrow (x \geq y)$

(ب) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{Z}; (x^2 \geq y^2) \wedge (x < y)$

(ج) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{Z}; (x^2 \geq y^2) \Rightarrow (x \geq y)$

(د) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{Z}; (x^2 < y^2) \wedge (x \geq y)$

(آمار و احتمال، فصل ۱، درس ۱: نقیض گزاره‌های سور)

۱۳. اگر $f(x) = (x^2 + 2x)^2$ باشد، مجموعه جواب‌های

معادله $(f \circ f)(x) > f(4x^2)$ شامل چند عدد صحیح منفی است؟

(الف) صفر (ب) ۱

(ج) ۲ (د) بی‌نهایت

(ریاضی ۳، فصل ۱، درس ۱ و ۲: تابع‌های صعودی و نزولی و ترکیب توابع)

۱۴. معادله $\sin^4 x + \sin x = \cos^4 x$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند

جواب دارد؟

(الف) ۱ (ب) ۲

(ج) ۳ (د) ۴

(ریاضی ۳، فصل ۲، درس ۲: معادلات مثلثاتی)

۱۵. چند مورد از جمله‌های زیر نادرست است؟

(I) تابع $f(x) = \frac{\cos x}{\cos x}$ تابعی متناوب است، اما دوره تناوب اصلی ندارد.

(II) دوره تناوب تابع $g(x) = \sin |x|$ برابر با π است.

(III) اگر تابع $f(x)$ صعودی باشد، $\frac{1}{f(x)}$ نزولی است.

(IV) هر نقطه بحرانی یک تابع، یک اکسترمم نسبی برای آن تابع است.

(الف) ۴ (ب) ۳

(ج) ۲ (د) ۱

(حسابان ۲، فصل ۱ و ۲)

۱۶. مجموع جواب‌های معادله $\sin x + \cos x = 1$ در بازه

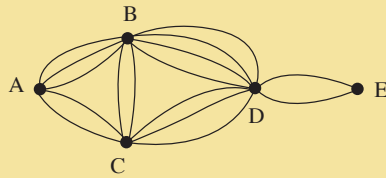
$[0, 2\pi]$ کدام است؟

(الف) $\frac{\pi}{2}$ (ب) 3π

(ج) 5π (د) —

(حسابان ۲، فصل ۲، درس ۲: معادلات مثلثاتی)

۱۷. در شکل زیر به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر E برویم؛ به‌طوری که از هر شهر حداکثر یک‌بار عبور کنیم؟



(الف) ۶۸ (ب) ۷۲

(ج) ۹۲ (د) ۱۰۴

(ریاضی و آمار ۳، فصل ۱، درس ۱: شمارش)

۱۸. چه تعداد از جمله‌های زیر درست است؟

(I) طرح و برنامه‌ریزی دومین گام برای یافتن داده‌هاست.
(II) در تعدادی داده آماری، چارک سوم همیشه از چارک اول بزرگ‌تر است.

(III) اگر در داده‌ها، داده دورافتاده وجود نداشته باشد، میانه مناسب‌ترین معیار گرایش به مرکز است.

(IV) $\frac{6!}{3!} = 2!$

(الف) ۱ (ب) ۲

(ج) ۳ (د) صفر

(ریاضی و آمار ۳، فصل ۱)

۱۹. اگر: $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ و ماتریس X جواب معادله $AX = A^{-1}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس X کدام گزینه است؟

(الف) ۱ (ب) -۱

(ج) ۴ (د) -۴

(هندسه ۳، فصل ۱، درس ۲: وارون ماتریس و دترمینان)

۲۰. چند مورد از موارد زیر مثال نقض دارد؟

(I) مجموع هر دو عدد گنگ عددی گنگ است.

(II) میانگین حسابی دو عدد مثبت از میانگین هندسی آن‌ها بیشتر است.

(III) عدد $n^2 + n + 41$ ($n \in \mathbb{N}$) عددی اول است.

(الف) ۰ (ب) ۱

(ج) ۲ (د) ۳

(گسسته، فصل ۱، درس ۱: استدلال ریاضی)



۴۷

شماره ۱۳۱ | پاییز ۱۴۰۱

چگونه برای المپیاد ریاضی آماده شویم؟

(قسمت اول)

آرش رستگار

عضو هیئت علمی دانشگاه صنعتی شریف

محمد حسین نادری

دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه صنعتی شریف

پرسش جبر

فرض کنید n عددی طبیعی باشد و $a_1, \dots, a_{n-1}$ عددهای حقیقی دلخواه باشند. دنباله‌های $u_0, \dots, u_n$ و $v_0, \dots, v_n$ را به صورت استقرایی با داده‌های زیر تعریف می‌کنیم:



برای مشاهده پاسخ نمونه سؤال جبر المپیاد، رمزینه را پویش کنید.

$$u_0 = u_1 = v_0 = v_1 = 1$$

$$u_{k+1} = u_k + a_k u_{k-1}$$

$$v_{k+1} = v_k + a_{n-k} v_{k-1}$$

برای $k = 1, \dots, n-1$ برقرار است.

در مورد u_n و v_n چه می‌توانید بگویید؟

پرسش ترکیبیات

فرض کنید n عددی طبیعی باشد. کوچک‌ترین عدد طبیعی k را پیدا کنید با این خاصیت: بر عددهای حقیقی داده شده $a_1, \dots, a_d$ به طوری که $a_1 + a_2 + \dots + a_d = n$ و برای $i = 1, 2, \dots, d$ داشته باشیم: $0 \leq a_i \leq k$ می‌توان این عددها را به گروه افراز کرد (که ممکن است برخی گروه‌ها تهی باشند)، به طوری که مجموع عددها در هر گروه حداکثر برابر یک باشد.



برای مشاهده پاسخ نمونه سؤال ترکیبیات، رمزینه را پویش کنید.

پرسش نظریه اعداد

اگر $\mathbb{N}$ مجموعه عددهای طبیعی باشد، تمام تابع‌های $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ را پیدا کنید که برای هر دو عدد طبیعی m و n داشته باشیم:



برای مشاهده پاسخ نمونه سؤال نظریه اعداد المپیاد، رمزینه را پویش کنید.

$$m^f + f(n) \mid mf(m) + n$$

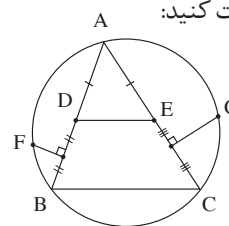
سبک آموزشی ما، در چگونگی آماده‌شدن برای آزمون المپیاد، با سبک رایج تفاوت‌هایی دارد. مثلاً صورت سؤال‌ها را طور دیگری مطرح می‌کنیم و یا راه‌حل‌ها را مرحله به مرحله و با پرسش‌هایی آگاه‌کننده پیش می‌بریم. در هر شماره با چهار پرسش در زمینه‌های هندسه، جبر، ترکیبیات و نظریه عدد مواجه خواهید شد. به این پرسش‌ها فکر کنید و بعد راه‌حل آن‌ها را در رمزینه زیر هر سؤال به صورت مرحله به مرحله دنبال کنید و پس از هر مرحله بیندیشید.

پرسش هندسه

فرض کنید $\triangle ABC$ مثلثی با زاویه‌های حاده و دایره محیطی Γ باشد. همچنین D و E به ترتیب نقطه‌هایی روی AB و AC باشند؛ به طوری که $AD=AE$. عمود منصف پاره خط‌های BD و CE خم‌های کوچک $\widehat{AB}$ و $\widehat{AC}$ را به ترتیب در نقطه‌های F و G قطع می‌کنند. شکل را به دقت رسم کنید و ببینید برای این شکل چه احکامی را می‌توانید ثابت کنید:



برای مشاهده پاسخ نمونه سؤال هندسه المپیاد، رمزینه را پویش کنید.



ابتدا حدس‌های خود را یادداشت کنید و بعد یکی یکی آن‌ها را اثبات یا رد کنید.



۴۸

شماره پاییز ۱۳۹۱



برای پاسخ مسائل مسابقه‌ای و جایزه‌دار شماره قبل رمزینه را پویش کنید.



محسن روایتی
کارشناس، ریاضی

[illegible]

عددهای بیرون هر سطر و ستون، تعداد ردیف‌های مربع سیاه را که در آن سطر یا ستون وجود دارند، نشان می‌دهند. برای مثال ۴، ۵، ۹ و ۲ نمایش ۴ ردیف مربع سیاه ۴، ۵، ۹ و ۲ تایی است. در واقع عددهای جدا نمایش‌دهنده حداقل یک فضای خالی بین آن‌ها هستند.

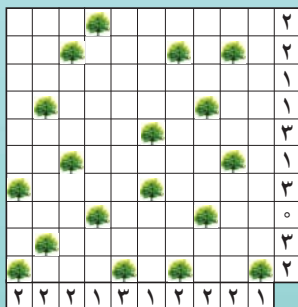


جدول راهنما

جدول راهنما

جدول ۱: اہمیت

گل‌ها را در بالا، پایین یا طرفین درخت‌ها قرار دهید. گل‌ها نباید به صورت سطری، ستونی یا قطری کنار یکدیگر قرار گیرند. تعداد گل‌های هر سطر و ستون بیرون از جدول نشان داده شده است. هر درخت فقط به یک گل وصل می‌شود.



	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									

عده‌های بیرون جدول تعداد
الماس موجود در هر سطر و ستون
را نشان می‌دهند. هر یکپایانه
(فلش) نشان‌دهنده‌ی راستای قرارگیری یک یا چند الماس را
نشان می‌دهد و داخل خانه‌ی یکپایانه، الماسی وجود ندارد. ممکن
است الماس بلافاصله بعد از یکپایانه یا با فاصله از آن قرار گیرد و
ممکن است برای تمامی الماس‌ها به یکپایانه‌ی هجدهم موجود باشد.
ممکن است قبل از یکپایانه هم الماس‌ها وجود داشته باشند.



حدود، اہنما



اگر فکر می‌کنی
دوچرخه‌های با این
نوع چرخ‌ها وجود نداره
پس بیا بریم صفحه ۳۰...

