وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی

رشد برهان ریاضی

۷

www.roshdmag.ir

ماهنامهٔ آموزشی و تربیتی برای دانش‌آموزان دورهٔ اول متوسطه
۴۰ صفحه / فروردین ماه ۱۴۰۵ / دورهٔ سی و یکم / شمارهٔ پی درپی ۱۶۱
پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵۱۲ / ISSN: 1735-4943

فوتبال، زندگی و... آب ۸
حساب چشمی! ۲۰
حباب‌های رسانه‌های اجتماعی ۳۸



جام زرین

الگوی ریاضی و ظرافت

تکوک زرین هخامنشی با بدنهٔ شیر بالدار با شیارهای افقی و گل لوتوس
ساخته شده از طلا.
ایران، همدان، دورهٔ هخامنشیان / سدهٔ پنجم پیش از میلاد

ابعاد: عرض: ۱۹ سانتی‌متر / ارتفاع: ۲۹/۹ سانتی‌متر / وزن ۱۹۳۰ گرم
موزهٔ ملی ایران باستان / **بازسازی تصویر:** آتلیهٔ مجلات رشد

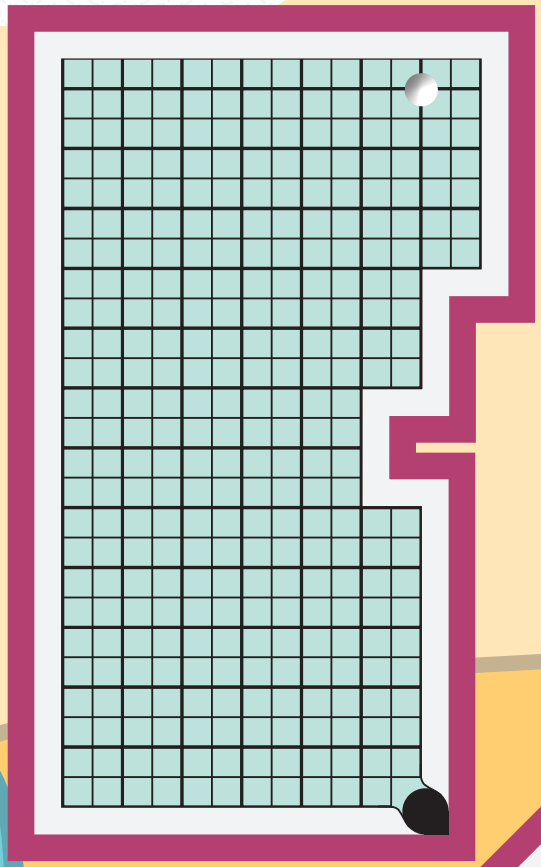
معمای تصویری

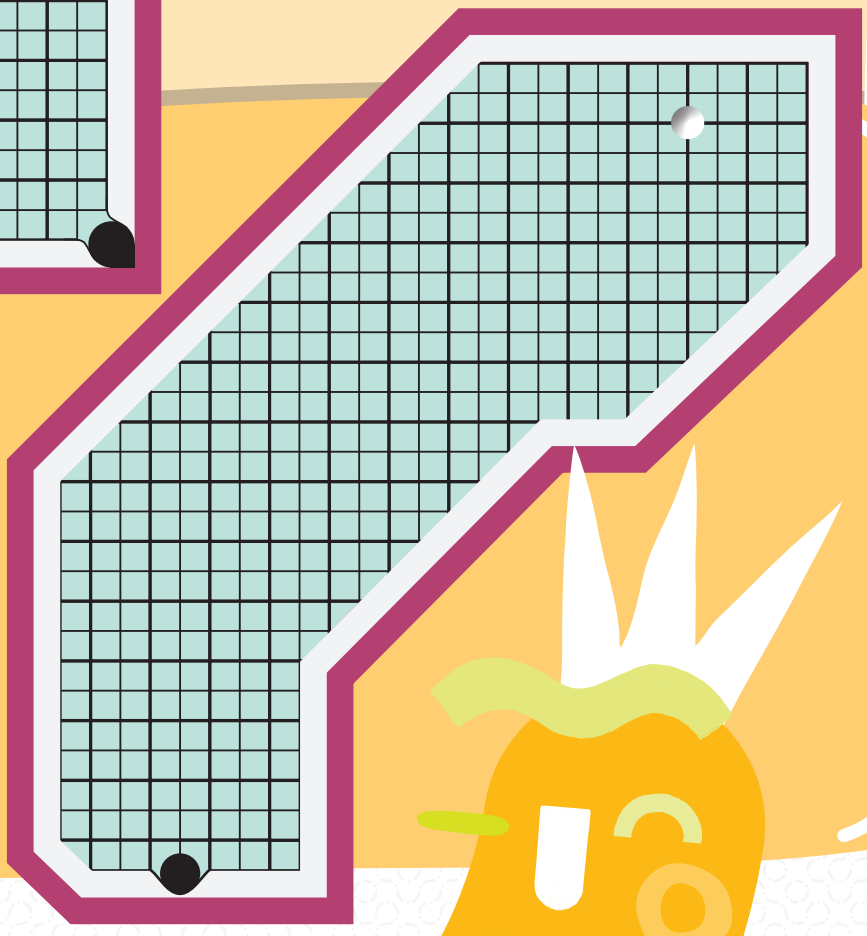
خسرو داودی

برای دیدن پاسخ رمزینه را پویش کنید.

زاویه‌های برابر

با توجه به استقبال زیادی که از معمای «زاویه‌های برابر» شمارهٔ قبل شد، در این شماره دو زمین بازی دیگر برای شما طراحی کرده‌ایم. نکتهٔ مهم این است که تنها یک مسیر مشخص برای رساندن توپ به سوراخ وجود ندارد. تلاش کنید تا راه‌های متفاوت را بیابید.





بسم الله الرحمن الرحیم

اللّهم صل علی محمد و آل محمد و عجل فرجهم

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی

رشد برهان ریاضی ۷

www.roshdmag.ir

ماهنامهٔ آموزشی و تربیتی برای دانش‌آموزان دورهٔ اول متوسطه
۴۰ صفحه / فروردین ماه ۱۴۰۵ / دورهٔ سی و یکم / شمارهٔ پی درپی ۱۶۱
پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵۱۲ / ISSN: 1735-4943

خانوادهٔ مجلات رشد همهٔ تلاش خود را کرده است تا این مجله در دسترس دانش‌آموزان قرار گیرد و همهٔ کودکان و نوجوانان میهن عزیز اسلامی‌مان امکان تهیهٔ آن را داشته باشند.

قیمت: ۳۰۰/۰۰۰ ریال

مدیر مسئول: **سید سعید بدیعی**
سردبیر: **حسین نامی‌ساعی** / مدیر داخلی: **پری حاجی‌خانی**
هیئت تحریریه: **جعفر اسدی گرمارودی** / **محرم ایردموسی** / **روح‌الله خلیلی بروجنی** / **خسرو داودی** / **محمدرضا سیدصالحی** / **آزاده فرزان** / **رضا فلاح مقدم** / **محمود نصیری**
ویراستار: **بهروز راستانی**
مدیر هنری: **کوروش پارسانژاد** / طراح گرافیک: **مجتبی زند**

نشانی کانال مجلهٔ رشد ریاضی برهان متوسطهٔ اول در پیام‌رسان شاد
@roshd_borhan1

با پویش رمزینه نظرات خود را با ما به اشتراک بگذارید.
nazar.roshdmag.ir

برای مشاهدهٔ شرایط ارسال مطلب و همکاری با ماهنامهٔ رشد ریاضی برهان متوسطهٔ اول، رمزینه را پویش کنید.

فروش و اشتراک مجلات رشد

سخن سردبیر
- **راز قنات در چرتکهٔ جمشید کاشانی** / حسین نامی‌ساعی / ۲

هندسه
- **مفهوم‌های هندسی و حل مسئله** / محمود نصیری / ۳
- **هندسهٔ مساوات** / محمدمهدی نسیمی / ۲۲

دانش
- **شبکه‌ها و مسیرها، مدل‌سازی ریاضی** / سامان فرحت / ۶

کاربرد
- **فوتبال، زندگی و ... آب** / آزاده فرزان / ۸
- **عددهای باینری** / جواد کلاه‌چی / ۲۹

مسئله
- **مسیرهای متفاوت در محاسبه‌های توانی** / جعفر اسدی‌گرماروی / ۱۱
- **چرا باید تصمیمی که گرفته‌ای را عوض کنی؟** / مهران مداح / ۱۸

علوم
- **نجوم ریاضیاتی** / روح الله خلیلی بروجنی / ۱۲

اقتصاد
- **از چرتکه تا ماشین‌حساب** / ژما جواهری‌پور / ۱۴

اولین‌ها
- **حساب چشمی!** / حبیب یوسف‌زاده / ۲۰

گزارش
- **کافه بستنی x و y** / مهلا مهریزی / ۲۶

مدرسه
- **کلاس آقای رهنما** / محمدتقی طاهری‌تنجانی / ۳۲
- **اشتباه‌های محاسباتی** / افشین خاصه‌خان / ۴۰

تاریخ
- **حکایت‌های علمی و خواندنی** / جعفر ربانی / ۳۶

سواد دیجیتال
- **حباب‌های رسانه‌های اجتماعی** / آریان خلیلی / ۳۸

در این ماه؛ فروردین ۱۴۰۵:
◄ **اول:** عید نوروز و عید فطر ◄ **دوازدهم:** روز جمهوری اسلامی ◄ **سیزدهم:** روز طبیعت ◄ **بیستم:** روز ملی فناوری هسته‌ای ◄ **بیست‌و پنجم:** شهادت امام جعفر صادق(ع) ◄ **بیست‌ونهم:** روز ارتش جمهوری اسلامی و نیروی زمینی ◄ **سی‌ام:** ولادت حضرت معصومه(س) و روز دختر

سخن سردبیر

سلام به شما همراهان پرتلاش برهان و مشتاقان یادگیری!

در شماره‌های گذشته با شخصیت‌های برجستهٔ علمی ایران، از **محمد بن موسی خوارزمی**، بنیان‌گذار علم جبر و الگوریتم، تا **ابوریحان بیرونی**، کاشف رازهای زمین و آسمان، و **خواجه نصیرالدین طوسی** که پلی باشکوه میان علوم ریاضیات، فلسفه و نجوم پدید آورد، آشنا شدیم. این بار می‌خواهیم دربارهٔ یکی از درخشان‌ترین ریاضی‌دانان ایرانی سخن بگوییم: **غیاث‌الدین جمشید بن مسعود کاشانی**، نابغه‌ای بزرگ از قرن نهم هجری.

غیاث‌الدین در شهر فرهنگی و هنرخیز کاشان به دنیا آمد؛ دیار شعر، تفکر فلسفی و هنر. از همان کودکی، عشق به عددها، ستارگان و اسرار طبیعت در وجود او نمایان بود. وی بخش مهمی از عمر خود را صرف تحقیق، نوشتن آثار علمی و طراحی ابزارهای علمی کرد. یکی از دستاوردهای مهم او محاسبهٔ عدد «پی»، این عدد شگفت‌انگیز هندسی است که نقشی اساسی در مطالعهٔ دایره‌ها دارد. کاشانی با روش‌هایی دقیق، عدد پی را تا ۱۶ رقم اعشار محاسبه کرد؛ شاهکاری بی‌مانند در دورهٔ خودش! همچنین دسته‌بندی معادله‌های درجهٔ اول تا چهارم و حل عددی معادله‌های درجهٔ چهارم و بالاتر نیز از دیگر کارهای ارزشمند اوست.

از دیگر آثار برجستهٔ او کتاب «مفتاح الحساب» یا «کلید محاسبات» است که با هدف سهولت در انجام محاسبه‌های ریاضی آن را نوشته است. این کتاب که به زبان فارسی است، روش‌های ساده‌ای برای انجام عملیات ریاضی، مانند ضرب، تقسیم، جذر و حل معادله‌ها ارائه می‌کند. اقدام او در نوشتن کتاب به زبان فارسی نشان‌دهندهٔ توجه ویژهٔ کاشانی به گسترش دانش عمومی است.

فعالیت‌های علمی غیاث‌الدین تنها به نوشتن کتاب محدود نبود. او در رصدخانهٔ مشهور سمرقند، بناشده به دستور **الغ‌بیگ**، مشغول مطالعات گسترده دربارهٔ حرکت اجرام آسمانی شد. ابزارهای پیشرفته‌ای که او طراحی کرده بود، به کاوش‌های دقیق نجومی کمک فراوانی کرد. این تحقیقات به تهیهٔ جدول‌های نجومی بی‌نظیری انجامید که جایگاه علمی او را بیش از پیش محکم کرد.

کاشانی علاوه بر آسمان، مجذوب زمین نیز بود. بررسی‌های علمی او نشان می‌دهند که وی نخستین فردی است که قنات‌ها را به طور علمی مورد مطالعه قرار داده و برای تعیین عمق چاه‌ها و شیب قنات‌ها روش‌های جدیدی مطرح ساخته است. محاسبه‌های دقیق او امکان مدیریت جریان آب را از اعماق زمین به سطح آن فراهم آورد.

همراهان عزیز، زندگی و میراث غیاث‌الدین جمشید کاشانی سرشار از درس‌های ارزشمند است. او بدون بهره‌گیری از ابزارهای محاسباتی مدرن، با پشتکار و صبر، توانست محاسبات دقیقی روی عدد پی انجام دهد. نمونه‌ای درخشان از تلاش، دقت و خلاقیت که می‌تواند برای همه الهام‌بخش باشد.

کاشانی ذهن خود را به یک حوزه محدود نکرد و با کنجکاوی در زمینه‌های متنوعی همچون نجوم، زمین‌شناسی و حتی سازوکار قنات‌ها پژوهش کرد. این کنجکاوی پیامی روشن برای ما دارد: «همواره پرسشگر باشیم و نترسیم از مواجهه با ناشناخته‌ها.»

برای او علم تنها در نظریه خلاصه نمی‌شد. کاشانی دانش خود را به عرصهٔ عمل برد و ابزارهایی ساخت که زندگی روزمرهٔ مردم زمانش را آسان کردند. نوشته‌های او به زبان ساده و روان فارسی، امکانی فراهم آورد تا حتی کسانی که دسترسی کمتری به منابع پیشرفته داشتند نیز بتوانند مفهوم‌های علمی را یاد بگیرند. دانشی که به اشتراک گذاشته نشود، از ارزش حقیقی خود تهی خواهد شد.

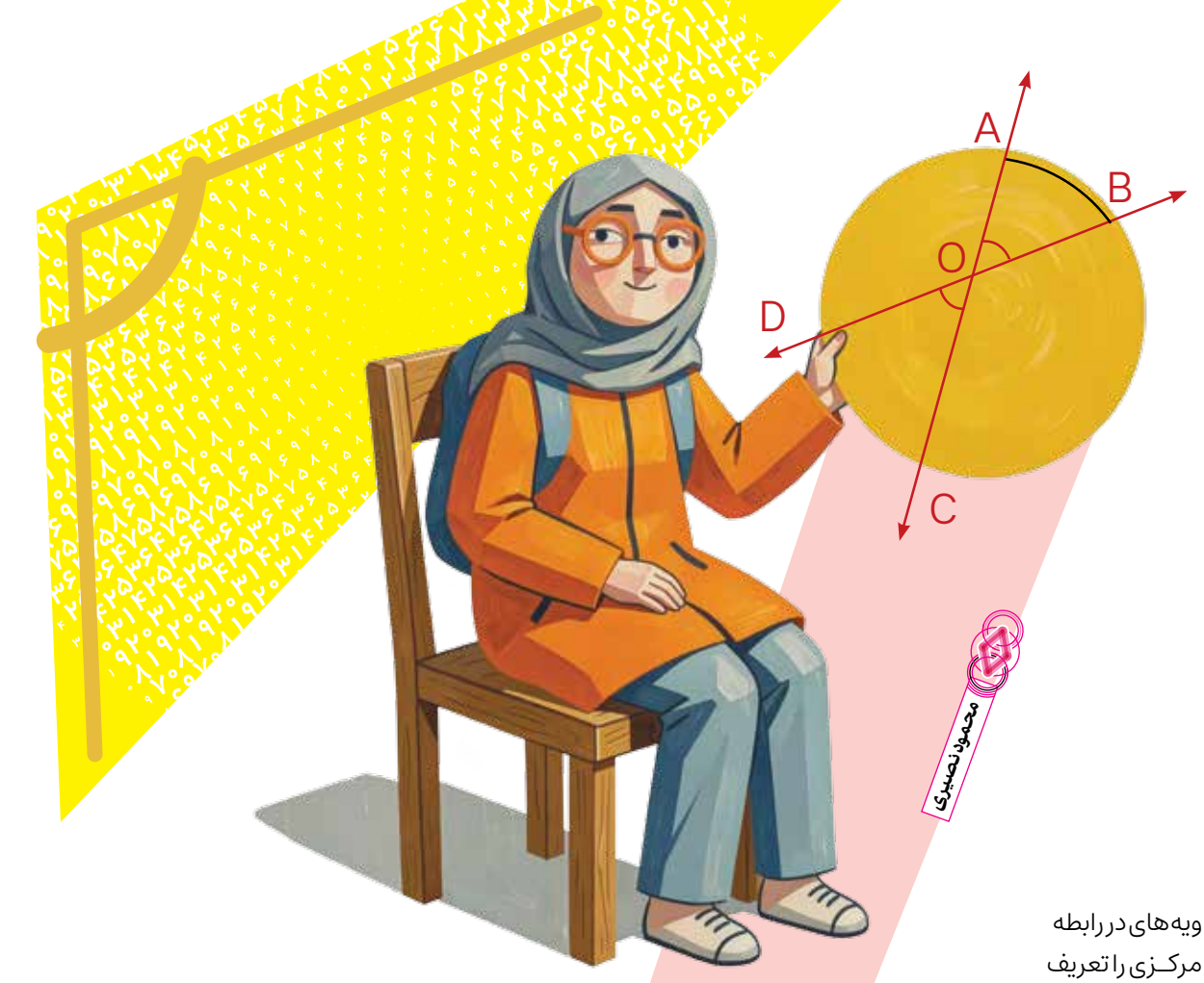
در زندگی کاشانی، ترکیب علم و زیبایی جایگاه ویژه‌ای داشت. او در رصدخانه‌ها فعالیت می‌کرد، ابزارهای دقیق می‌ساخت و با شور و شوق به زیبایی‌های آسمان می‌نگریست. اگر بخواهیم مسیر او را ادامه دهیم، باید با دقت عمیق‌تری به پیرامون خود بنگریم، با عشق و پشتکار بیاموزیم، و از دانش خود در جهت ساختن دنیایی بهتر بهره بگیریم. شاید روزی شما نیز بتوانید رازهای تازه‌ای از طبیعت یا عددها را کشف کنید.

همواره موفق و سربلند باشید.



راز قنات در چرتکهٔ جمشید کاشانی

حسین نامی ساعی



محمود نصیری

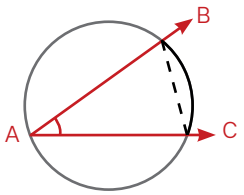
مفهوم‌های هندسی حل مسئله

زاویه‌ها و دایره

در بخش قبلی از زاویه‌های در رابطه با دایره، فقط زاویهٔ مرکزی را تعریف کردیم و ویژگی‌هایی را در مورد آن شرح دادیم. اکنون در دنبالهٔ بحث، زاویه‌های محاطی، ظلی، درونی و بیرونی را تعریف و ویژگی‌هایی از آن‌ها را بیان می‌کنیم.

زاویه‌های محاطی

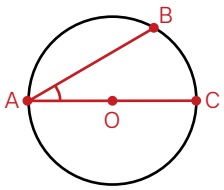
تعریف: زاویه‌ای را محاطی می‌گوییم که رأس آن روی دایره و دو ضلع آن دو وتر از دایره باشند.



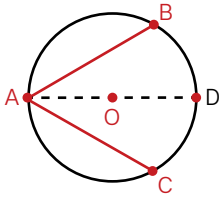
شکل ۱

کمانی از دایره را که بین دو ضلع زاویه قرار می‌گیرد، کمان دربرگیرنده یا کمان مقابل آن زاویه می‌نامند. وقتی دو انتهای یک وتر یا کمان روی ضلع‌های زاویهٔ محاطی قرار می‌گیرند، می‌گوییم آن وتر یا کمان زاویه را محاط می‌کند.

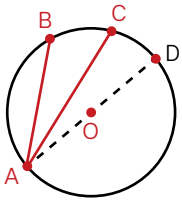
اکنون می‌خواهیم رابطه‌ای بین اندازهٔ زاویهٔ محاطی و اندازهٔ کمان نظیر یا مقابل آن پیدا کنیم:



شکل ۲



شکل ۳

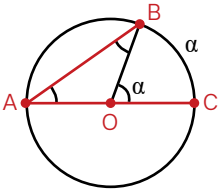


شکل ۴

اگر ضلع‌های زاویه را نسبت به مرکز دایره در نظر بگیریم، سه حالت می‌تواند رخ دهد: یا مرکز دایره روی یک ضلع زاویه قرار می‌گیرد (شکل ۲)، یا مرکز دایره درون زاویه واقع می‌شود (شکل ۳)، یا مرکز دایره در یک طرف هر دو ضلع زاویه واقع است (شکل ۴). فکر می‌کنید در کدام یک از سه حالتی که بیان کردیم بتوانیم ارتباطی بین اندازهٔ زاویهٔ محاطی $\angle BAC$ و اندازهٔ کمان مقابل آن برقرار کنیم؟

با کمی تفکر احتمالاً حالت اول، یعنی شکل ۲، می‌تواند گزینهٔ مناسبی باشد، زیرا یک ضلع زاویه از مرکز گذشته است و شاید بتوانیم ارتباطی برقرار کنیم. حتی در دو حالت دیگر، اگر از A، رأس زاویه، به O، مرکز دایره، وصل کنیم دو زاویه پدید می‌آیند که هر کدام همین حالت شکل ۲ هستند. پس به نظر می‌رسد که اگر در حالت شکل ۲ بتوانیم این رابطه را برقرار کنیم، دو حالت دیگر با دوبار به کاربردن این حالت ثابت می‌شوند.

با همهٔ این مزیت‌های حالت شکل ۲، یک ویژگی مهم دیگر نیز در این حالت وجود دارد که ما را وسوسه می‌کند اول به سراغ آن برویم؛ این ویژگی که اگر از O مرکز دایره به نقطهٔ B وصل کنیم، $\angle BOC$ یک زاویهٔ مرکزی است و از قبل ارتباط بین اندازهٔ آن و اندازهٔ کمان مقابل را می‌دانیم. یعنی اگر اندازهٔ کمان BC برابر α باشد، $\overset{\frown}{mBC}=\alpha$. آن وقت اندازهٔ زاویهٔ مرکزی مقابل این کمان هم α است. در نتیجه: $m\angle BOC=\alpha$. اکنون باید ارتباطی بین اندازهٔ $\angle BAC$ و $\angle BOC$ پیدا کنیم تا بتوانیم اندازهٔ $\angle BAC$ را پیدا کنیم.



شکل ۵

اگر $\triangle OAB$ را در نظر بگیریم، $\angle BOC$ در این مثلث چه زاویه‌ای است؟ قبلاً زاویهٔ خارجی را در مثلث تعریف و ویژگی آن را بیان کرده‌ایم. آیا می‌توانید آن را بیان کنید؟ اگر هم فراموش کرده‌اید، بدانید: $m\angle AOB=180-\alpha$. چرا؟ از طرف دیگر: $m\angle A+m\angle B=180-m\angle AOB$. چرا؟ از این دو رابطه چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ اگر به جای $m\angle AOB$ در رابطهٔ دوم جایگذاری کنیم، آنگاه داریم: $m\angle A+m\angle B=\alpha=m\angle BOC$. این همان ویژگی معروفی است که چنین بیان می‌شود: در هر مثلث، اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی، برابر مجموع اندازه‌های دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور آن است.

پس تا اینجا داریم: $m\angle A+m\angle B=\alpha$. اکنون فکر می‌کنید $\angle A$ و $\angle B$ چه ارتباطی با هم دارند؟ هر دو زاویهٔ $\triangle AOB$ هستند. حتماً حدس زده‌اید که: $m\angle A=m\angle B$. چرا؟ $\triangle OAB$ چه مثلثی است؟ بله چون $OA=OB$، پس $\triangle AOB$ متساوی‌الساقین است و دو زاویهٔ $\angle A$ و $\angle B$ هم‌اندازه‌اند.

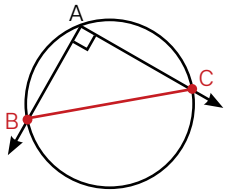
بنابراین: $2m\angle A=\alpha$ و $m\angle A=\frac{\alpha}{2}$. این همان رابطه‌ای است که به دنبالش بودیم. بنابراین اگر یک ضلع زاویهٔ محاطی از مرکز دایره بگذرد، اندازهٔ آن برابر نصف اندازهٔ کمان مقابل آن است.

فکر می‌کنید اثبات دو حالت دیگر با توجه به این حالت چگونه است؟ قبلاً توضیح دادیم. کافی است از A به مرکز دایره وصل کنیم و امتداد دهیم تا دایره را در نقطهٔ D قطع کند. در شکل ۳ اندازه‌ها را با هم جمع و در شکل ۴ اندازه‌ها را از هم کم می‌کنیم.

$$m\angle BAC=m\angle BAD+m\angle DAC=\frac{1}{2}m\overset{\frown}{BD}+\frac{1}{2}m\overset{\frown}{DC}=\frac{1}{2}m\overset{\frown}{BC}=\frac{1}{2}\alpha$$

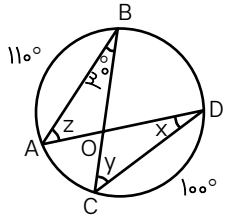
$$m\angle BAC=m\angle BAD-m\angle CAD=\frac{1}{2}m\overset{\frown}{BD}-\frac{1}{2}m\overset{\frown}{DC}=\frac{1}{2}m\overset{\frown}{BC}=\frac{1}{2}\alpha$$

نتیجه: اگر ضلع‌های یک زاویهٔ محاطی از دو سر قطر دایره بگذرند، آنگاه اندازهٔ آن ۹۰° است. چرا؟ برعکس اگر اندازهٔ یک زاویهٔ محاطی ۹۰° باشد، آنگاه ضلع‌های آن از دو سر یک قطر می‌گذرند. چرا؟ (شکل ۶)



شکل ۶

حل مسئله: در شکل ۷ داریم: $m\angle B=30°$ و $\overset{\frown}{mDC}=100°$ و $\overset{\frown}{mAB}=110°$. اندازه‌های x، y و z را پیدا کنید. آیا می‌توانید $m\angle BOD$ را محاسبه کنید؟



شکل ۷

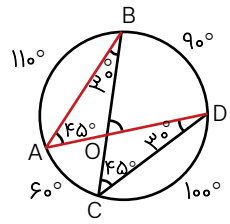
پاسخ: چون $m\angle ABC=30°$ در نتیجه: $\overset{\frown}{mAC}=60°$ (اندازهٔ کمان مقابل به زاویهٔ محاطی) از طرف دیگر $\angle ADC$ نیز محاطی و مقابل کمان $\overset{\frown}{AC}$ است، پس: $x=m\angle ADC=30°$. تا اینجای مسئله یک نتیجه گرفته می‌شود، می‌توانید آن را بیان کنید؟

نتیجه: در دایره زاویه‌های محاطی مقابل به یک کمان هم‌اندازه‌اند.

اکنون برای ادامهٔ مسئله باید اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{BD}$ محاسبه شود که ساده است؛ چرا؟

$$m\overset{\frown}{BD}=360^\circ-(110^\circ+60^\circ+100^\circ)=360^\circ-270^\circ=90^\circ$$

اکنون داریم: $z=y=\frac{1}{2}m\overset{\frown}{BD}=45^\circ$. همهٔ اندازه‌ها روی شکل ۸ نوشته شده‌اند.



شکل ۸

اما برای محاسبهٔ $m\angle BOD$، از مجموع اندازه‌های زاویه‌های درونی مثلث که برابر 180° است استفاده می‌کنیم:

$$m\angle AOB=180^\circ-(45^\circ+30^\circ)=105^\circ$$

اکنون $m\angle BOD$ را به روش‌های متفاوت می‌توانید محاسبه کنید.

$\angle BOD$ چه رابطه‌ای با $\angle AOB$ دارد؟

کافی است از مجموع اندازه‌های زاویه‌های مکمل استفاده کنید:

$$m\angle BOD=180^\circ-105^\circ=75^\circ$$

مسلماً: $m\angle AOC=75^\circ$. چرا؟ از چه قضیه‌ای استفاده می‌کنید.

اجازه بدهید در اینجا مسئله را کمی ادامه دهیم.

مجموع اندازه‌های کمان‌های $\overset{\frown}{BD}$ و $\overset{\frown}{AC}$ را پیدا کنید و بر ۲ تقسیم کنید:

$$\frac{m\overset{\frown}{BD}+m\overset{\frown}{AC}}{2}=\frac{90^\circ+60^\circ}{2}=\frac{150^\circ}{2}=75^\circ$$

مشاهده می‌کنید که اندازه‌های دو زاویهٔ متقابل به رأس $\angle BOD$ و $\angle AOC$ برابر نصف مجموع اندازه‌های دو کمان مقابل آن‌هاست.

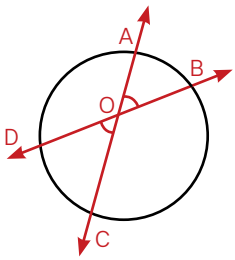
آیا این نتیجه درست است یا یک نتیجهٔ اتفاقی است؟ خودتان می‌توانید مثال‌های دیگری را بیان کنید. مشاهده می‌کنید که درست است، پس باید به دنبال اثبات مسئله در حالت کلی برویم.

به نظر می‌رسد به نوعی دیگر از زاویه در دایره رسیده‌ایم که البته رأس آن درون دایره است. پس ابتدا تعریفی را بیان می‌کنیم.

زاویه‌های درونی در دایره یا زاویه‌هایی که از تقاطع دو وتر متقاطع در دایره شکل می‌گیرند.

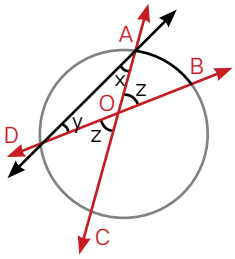
هرگاه دو خط که شامل دو وتر دایره هستند، در نقطه‌ای درون دایره متقاطع باشند، هریک از زاویه‌هایی را که رأس آن‌ها روی نقطهٔ تقاطع و هر ضلع آن‌ها روی یکی از این دو خط باشد، زاویهٔ درونی دایره می‌نامند.

دو خط $\overleftrightarrow{AC}$ و $\overleftrightarrow{BD}$ درون دایره در نقطهٔ O متقاطع‌اند (شکل ۹). هر یک از زاویه‌های $\angle AOB$، $\angle AOD$، $\angle DOC$ و $\angle COB$ را زاویهٔ درونی می‌نامند. البته مشاهده می‌کنید که این چهار زاویه دو به دو همرس و در نتیجه اندازه‌های برابر دارند. پس فقط کافی است یکی از آن‌ها را در نظر بگیریم.



شکل ۹

اکنون می‌خواهیم رابطه‌ای بین اندازهٔ زاویه‌های درونی و اندازهٔ کمان‌های مقابل آن‌ها بیابیم. می‌توانیم از ایدهٔ مسئلهٔ قبل بهره بگیریم. یعنی روشی را در نظر بگیریم که از اندازهٔ زاویه‌های محاطی استفاده می‌کند. پس کافی است خط $\overleftrightarrow{AD}$ را رسم کنیم. همه چیز آشکار می‌شود. این همان ایدهٔ رسم خط یا پاره‌خط پنهان است که در هندسه مرتباً از آن استفاده می‌شود.



شکل ۱۰

فکر می‌کنم اثبات واضح است. هدف پیدا کردن $m\angle AOB=m\angle COD=z$ است.

اگر دقت کنید ما مرتباً از این ویژگی زاویهٔ خارجی مثلث که اندازه‌اش برابر اندازهٔ دو زاویهٔ درونی غیرمجاور است استفاده می‌کنیم. یعنی مطابق شکل ۱۰ داریم: $z=x+y$.

اما x و y دو زاویهٔ محاطی هستند و نتیجهٔ مورد نظر بلافاصله حاصل می‌شود:

$$m\angle AOB=z=x+y=\frac{1}{2}m\overset{\frown}{DC}+\frac{1}{2}m\overset{\frown}{AB}$$
$$=\frac{1}{2}(m\overset{\frown}{DC}+m\overset{\frown}{AB})$$

بنابراین، اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی در دایره برابر است با نصف اندازه‌های کمان‌های مقابل دو زاویهٔ مقابل به رأسی که پدید می‌آیند. به همین ترتیب:

$$m\angle AOD=m\angle BOC=\frac{1}{2}(m\overset{\frown}{AD}+m\overset{\frown}{BC})$$

شبکه‌ها و مسیرها، مدل‌سازی ریاضی

پیاده‌روی روزانه در پارکی کنار رودخانه

سامان فرحت



غروب بود. **سوگل** و **سوگند** همراه مادرهایشان مشغول پیاده‌روی در پارکی کنار یک رودخانه بودند که چندین پل داشت. پل‌ها بخش‌های متفاوت پارک را به هم متصل می‌کردند.

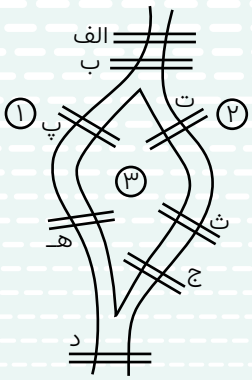
سوگند به سوگل گفت: «بیا از روی همهٔ پل‌ها یک بار رد شویم.»

سوگل در جواب گفت: «فکر خوبیه. ولی حوصله ندارم که از روی یک پل دوبار رد بشیم.»

سوگند گفت: «پس بیا یه جوری این کار رو انجام بدیم و مسیر رو طوری تنظیم کنیم که از هر پل دقیقاً یه بار بگذریم و بعد بریم خونه.»

سوگل در جواب گفت: «ولی مگه می‌شه این کاری رو که می‌گی انجام بدیم؟»

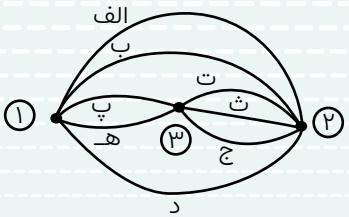
مادر سوگل و مادر سوگند که به این مکالمه گوش می‌دادند وارد بحث شدند. مادر سوگل گفت: «بچه‌ها خیلی بحث خوبی دارید. وارد دنیای گراف‌ها شدیم. بیایید سعی کنیم مسئلهٔ شما را به زبان ریاضی تبدیل کنیم.» بعد مادر سوگند نقشهٔ پارک را از اینترنت پیدا کرد و به بچه‌ها نشان داد (شکل ۱).



شکل ۱

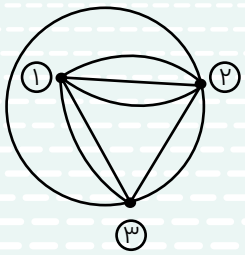
مادر سوگند گفت: «بچه‌ها بیایید به جای هر منطقه‌ای از پارک که یکپارچه است، یک نقطه قرار بدیم. یعنی در شکل ۱ سه منطقهٔ یکپارچه داریم. منطقه‌های ۱، ۲ و ۳ که داخل هیچ‌کدوم پل وجود نداره. هر پلی بین دو منطقهٔ متفاوت از ۱، ۲ و ۳ قرار داره.

حالا به جای هر منطقه‌ای یه نقطه در نظر می‌گیریم. در نتیجه سه نقطهٔ ۱، ۲ و ۳ داریم و بین اون‌ها تعدادی خط اتصال می‌کشیم. در واقع به ازای هر پلی در نقشهٔ اصلی، بیایید نقطه‌های مربوط را به هم اتصال بدیم. در نتیجه شکل ۲ به دست می‌یاد.



شکل ۲

دقت کنید که در شکل ۲ فقط وصل بودن و نبودن نقطه‌ها مهمه، نه جای نقطه‌ها و مدل خط واصل بین اون‌ها. برای مثال شکل ۳ از نظر مدل‌سازی خاص ریاضی که در حال انجام اون هستیم، همون شکل ۲ هستش. دقت کنید که ۲ و ۳ با سه یال (هر خط واصل را از این به بعد یال می‌نامیم) به هم وصل شدن. همون‌طور که در شکل ۲ نقطه‌های ۲ و ۳ با سه یال به هم وصل شدن. همچنین رأس‌های ۱ و ۲ (بله! رأس اسم دیگهٔ نقطه است اینجا) هم با ۳ یال به هم وصل شدن. این مدل‌سازی از نقشهٔ پارک رو گراف می‌نامند.



شکل ۳

گراف کاربردهای زیادی در رشته‌های متفاوت دارد. قبل از بیان کاربردهای دیگه بیایید مسئله‌ای رو که بین خودتان مطرح شده، به زبان گراف تبدیل و دوباره بیان کنید.»

سوگل و سوگند مشغول فکر شدند. وقتی که این سؤال مطرح شد، آن‌ها در ناحیهٔ ۱ در شکل ۱ مشغول راه‌رفتن بودند. سوگل گفت: «بسیار خب باید از نقطهٔ ۱ در گراف شروع کنیم. درسته! بعد باید به یال رو که از ۱ خارج می‌شه انتخاب کنیم. پس یا به ۲ می‌ریم یا به ۳.»

سوگند گفت: «دقیقاً! بعد هر جایی که رفتیم دوباره باید یک یال انتخاب کنیم و از آن نقطه دوباره خارج بشیم.»

سوگل گفت: «چقدر جالب شد! پس وقتی پیشنهاد تو عملیه، یعنی وقتی می‌تونیم از همهٔ پل‌ها دقیقاً یه بار بگذریم که بتونیم همهٔ یال‌ها را با شروع از رأس ۱ طی کنیم.»

بعد به هم نگاه کردند و با اشتیاق زیاد لبخند زدند و چشمانشان برق زد. مادر سوگل گفت: «عالی شد بچه‌ها! خیلی خوب بود. سعی کنید ببینید آیا می‌توانید برنامه‌ای برای پیاده‌روی پیدا کنید، به‌طوری که پیشنهادتون عملی بشه؟»

پس بچه‌ها با خودکار و کاغذ مشغول امتحان کردن حالت‌های متفاوت شدند و در نهایت مسیر پیاده‌روی را پیدا کردند (سعی کنید شما هم این کار را انجام دهید). مسیر آن‌ها از چپ به راست ۳-۲-۱-۲-۱-۳-۲-۳-۱ بود که متناسب با آن به ترتیب از روی نقشهٔ اصلی از چپ به راست ج-الف-ب-د-هـ-ث-ت-پ می‌شد.

در اینجا سوگند به نکته‌ای پی برد: «اما در انتهای مسیر بین دو رودخانه می‌مونیم و نمی‌تونیم بریم خانه!»

قیافه هر دو رفت توهم. چند بار دیگر تلاش کردند و هر بار در انتها به ناحیهٔ ۳ ختم می‌شدند. خیلی تعجب کردند و از مادرهایشان پرسیدند: چرا این اتفاق می‌افتد؟ و این جواب را شنیدند: «فرض کنید پل هـ رو نداشتیم یا در حال حاضر فرض کنید که نمی‌خوایم از روی پل هـ بگذریم. در این صورت آیا می‌تونیم از پارک خارج بشیم؟ یعنی آیا می‌تونیم به همان نقطهٔ اولیه (ناحیهٔ ۱) برگردیم، سوار ماشینمون بشیم و بریم؟» (شما هم تلاش کنید ببینید مسیر را می‌توانید پیدا کنید؟)

بچه‌ها توانستند و با یک ارفاق نقشه‌شان را پیاده کردند.

بچه‌ها شما امروز به یک مسئلهٔ مهم در ریاضیات پی بردید. این مسئله را پیدا کردن دور اویلری در گراف می‌نامند. یعنی یک مسیر در گراف که همهٔ یال‌ها را دقیقاً یک بار طی کند و به نقطهٔ اولیه بازگردد. برای همهٔ گراف‌ها، همان‌طور که دیدید این کار امکان‌پذیر نیست.

بچه‌ها پرسیدند که کِی این کار امکان‌پذیر است؟

به این موضوع فکر کنید تا بعد در مورد جواب بحث کنیم. یادتان باشد که باید در مورد مسئله‌ها تا می‌شود فکر کرد. فکر کردن است که باعث رشد می‌شود نه دانستن تنها! شما هم به این فکر کنید که چه شرطی لازم و کافی است برای وجود دور اویلری.

راهنمایی: به درجهٔ رأس‌ها مرتبط است (درجهٔ یک رأس تعداد یال‌های متصل به آن است).

فوتبال، زندگی و... آب

آزاده فرزان

قسمت اول: قصهٔ قنات و بچه‌های انار

روستای انار، استان کرمان

پنجشنبه، بعد از بازی فوتبال، بچه‌ها در حالی که هنوز نفس‌نفس می‌زدند، عرق‌ریزان به سمت روشویی کنار زمین رفتند تا سر و صورتشان را بشویند. **سام** در حالی که داشت شیر آب را باز می‌کرد گفت: «بابا **فربد** توی دروازه‌شون واقعاً گل نمی‌خوره!»

در همین حال دستش را گرفت زیر شیر آب که از شیر آب صدای قُل‌قُلی آمد و... و همین! آبی در شیر نبود!

نیما کمی آن‌طرف‌تر داد زد: «نگاه کن... لوله‌ها خالیه! حتی یه قطره هم آب نیست!»

هیراد نالان گفت: «سر و صورتمون از عرق خیسه... توی این گرد و خاک! ...»

پارسا گفت: «می‌گم که فقط باید بشینیم تا عرقمون خشک شه.»

محمدعلی هم شیر آب را چندبار باز و بسته کرد. صدای هوای خالی، مثل سوت کوتاهی از لوله درآمد. بعد همه با دست و صورتِ عرق کرده، به هم نگاه کردند و کنار زمین نشستند.

ارشیا: این جوری نمی‌شه... آب که نباشه، همین فوتبال هم دیگه نمی‌شه بازی کرد!

شب ارشیا بعد از خوردن شام ماجرا را برای پدربزرگش تعریف کرد. پدربزرگ روی تختِ حیاط نشسته بود، فانوس کوچکی کنار دستش روشن بود و صدای جیرجیرک‌ها از باغ می‌آمد.

ارشیا: امشب بعد از بازی... آب نبود. روشویی کنار زمین خشک بود!

پدربزرگ: بله عزیزم، بعدازظهر فشار آب خیلی کم بود. قدیم‌ها روستا آبِ خوبی از قنات‌هاش داشت. حتی توی تابستون داغ هم آب خنک در کانال‌های قنات وجود داشت. ولی خب، زمین فوتبال اون موقع‌ها وجود نداشت.

ارشیا: خب پدربزرگ چی شد اون آب قنات‌ها؟ راستی منظورتون از قنات همون راهِ زیرزمینیه که آب رو می‌یاره دیگه؟

پدربزرگ: بله عزیز دلم، قنات‌ها همون کانال‌هایی هستند که آب رو از چاه اصلی که معمولاً دور از روستاست، به روستا منتقل می‌کنند. چاه اصلی یا مادرچاه قنات بالای دامنه کوهه و هنوز هم آب داره. البته مدت‌هاست که مسیرش گرفته شده و لایروبی نشده.

چاه پر از آب هست هنوز؟!

چشم‌های ارشیا برق زد. حرفی که در دلش بود، پرید بیرون.

ارشیا: پدربزرگ! مگه چقدر چاه آب با روستا فاصله داره؟

پدربزرگ: می‌دونم که اون موقع‌ها آب را با قاطر به شهر می‌آوردیم و عزیز دلم تقریباً دوساعت طول می‌کشید.

ارشیا به‌سرعت حساب کرد: «یه قاطر معمولاً با بار سنگین در هر ساعت چهار کیلومتر راه می‌ره. با این حساب اگر دو ساعت طول می‌کشیده، پس ۸=۴×۲ کیلومتر فاصلهٔ چاه با روستاست؛ عالیه! با یک یه موتورِ آبِ قوی... و هشت کیلومتر کانال و لولهٔ بتنی بزرگ آب رو می‌آریم روستا!»

پدربزرگ خندهٔ معنی‌داری کرد و گفت: «حتماً که ایدهٔ خوبیه عزیزم... اول با دوستات برو





تصویرگر: سیدمیثم موسوی

و چـاه آب رو ببین. امیدوارم که با خبرهای خوبی برگردین.»

ارشـیا: فـردا بـا بچه‌ها می‌ریـم. فقط پدربزرگ، مسـیر رسـیدن به چاه کجاسـت؟

پدربزرگ: عزیز دلم خیلی سـاده اسـت. از جلوی مسجد که به سمت اولیـن باغ انار می‌ریـم، حتماً چاه‌های کوچیکی رو دیدی قبلاً. همون چاه‌هـا را ادامه بده. بعد از هـر ۴۰ متر چاه بعدی رو می‌بینی.

ارشیا: با حساب شما، مادر چاه حدود هشت کیلومتر دورتره.

ارشـیا همان لحظه برای سـام و نیما و بقیه پیام فرسـتاد: «بچه‌ها صبـح زود، با دوچرخه‌هاتون، سـاعت ۵، دم مسـجد. می‌ریم دنبال قنات قدیمی!»

صبـح آفتاب هنوز تیز نشـده بود که شـش نفر با دوچرخه‌هاشـون از روسـتا زدنـد بیرون. باد خنـک صبح، گرما و عرق دیـروز را کاملاً از یادشـان برده بود.

محمدعلـی: هشـت کیلومتر؟ یعنی رفت و برگشـتش ... شـانزده کیلومتـر؟ پـس بچه‌هـا حداقل نیم‌سـاعت بایـد رکاب بزنیم.

سـام: دعا کن چاه آب داشـته باشـه! اگه تهش آب داشـته باشـیم، می‌دونـی یعنی چی؟

نیما گفت: یعنی فوتبال هر روزمون ردیفه! 😀

وقتـی به اولیـن باغ انار رسـیدند، دهانـهٔ چند میله چـاه قدیمی را دیدنـد: دایره‌هایی تیره روی زمین که دور بعضی‌هایشـان با سـنگ هنـوز مرتب بود.

پارسا: اینا همه چاهه؟!

ارشـیا: پدربـزرگ گفت هر ۴۰ متر یکی هسـت... ولـی اینجا که خیلی زیاده.

سـام زیـر لـب گفـت: «اگـه بخوایـم یکی‌یکـی بشـماریم، تا شـب همین جاییـم.»

نیمـا: پس با حسـاب جلو می‌ریـم. ۸ کیلومتر یعنـی ۸۰۰۰ متر. اگه هـر ۴۰ متر یه چاه باشـه...

هیراد: یعنی ۸۰۰۰ تقسیم بر ۴۰...

نیما: می‌شه ۲۰۰. اما حواستون هست؟ این ۲۰۰ تا فاصله بین هر دو تا چاهه، نه تعدادِ خودِ چاه‌ها.

سام: پس تعداد چاه‌ها؟

نیما: اولِ مسیر یه چاه داریم، آخرِ مسیر هم یه چاه. یعنی ۲۰۰ + ۱ = ۲۰۱ تا.

هیراد کاغذی از کیفش درآورد و با مداد خط راستی کشید و شروع کردن به گذاشتن نقطه‌های روی خط؛ از عدد ۱ که چاه اصلی بود تا ۲۰۱ که آخرین چاه بود. در کنار اولین باغ انار عمق اولین میلهٔ چاه را اندازه گرفتند؛ عمقش کم بود.

پارسا: این یکی فقط یک و نیم متره.

سام: اون یکی که عقب‌تره چی؟

هیراد از سر میلهٔ چاه دوم داد زد: «دو متر! یعنی نیم متر بیشتر.»

نیما روی خاک با چوب نوشت: ۱/۵، ۲ ...

پارسا بلند گفت: «اگه بعدی ۲/۵ متر و بعدی ۳ متر بشه، یعنی احتمالاً هرقدر که می‌ریم سمت مادرچاه، نیم متر هر چاه عمیق‌تر می‌شه.»

محمدعلی: نمی‌خوام حالتون رو با ریاضی بگیرم، اما این یعنی یه دنباله. 😅

نیما: آره... از یه عدد شروع شده و هر بار یه مقدار ثابت بهش اضافه می‌شه.

همون که آقای **نامی** بهش می‌گفت: تفاضل مشترک! ما می‌تونیم اینجا بهش بگیم تفاضل چاه‌های مشترک. 😂 آخه تفاضل هر دو تا چاه یک عدد مشترکه؛ یعنی نیم متر!

محمدعلی خندید و ادامه داد: «تازه این دنبالهٔ عددها از همون معادلهٔ خط $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ به دست اومده، نه؟ چون اگه $x=0$ باشه، y یعنی عمق چاه اول می‌شه ۱/۵ متر که درسته. اگه $x=1$ باشه، y بعدی، یعنی عمق چاه دوم، می‌شه ۲ متر و به همین ترتیب...»

که سام با هیجان صحبت محمدعلی را قطع کرد و گفت: «پس این‌جوری عمقِ مادرچاه رو هم می‌تونیم بدون دیدنِ تهش حدس بزنیم! فقط بچه‌ها یه مطلبی که یادم هست اینه که بهتره به جای $x=0$ که عمق چاه اول را به ما می‌ده، معادلهٔ خط را طوری بنویسیم که به ازای $x=1$ عمق چاه اول را بده. به این ترتیب چاه اول عدد یک، چاه دوم عدد دو، و... چاه ۲۰۱ام، عدد ۲۰۱ عمقش رو مشخص می‌کنه!»

نیما: بله سام، می‌تونیم این‌جوری بگیم. پس معادلهٔ خط این عددها می‌شه: $y = 0/5x + 1$ و چون ۲۰۱ تا چاه داریم، پس عمق مادرچاه اصلی می‌شه: $y = 0/5 \times 201 + 1 = 101/5$ متر.

هیراد با هیجان داد زد: «این یعنی اندازهٔ یه ساختمون ۳۰ طبقه بچه‌ها!

ارشیا که دیگر معلوم بود از این همه عدد و معادلهٔ خط و دنباله و... خسته شده بود گفت: «بچه‌ها ما قراره که اول برسیم به مادرچاه و ببینیم که آب داره یا نه! اگر کلاس ریاضی می‌خواستیم که آقای نامی شنبه در مدرسه هستند!» 😫

حرف ارشیا درست بود! باید می‌رفتند و به چاه اصلی می‌رسیدند. همه شروع به رکاب‌زدن کردند و البته یواشکی به هر چاهی که می‌رسیدند می‌شمردند: ... ۱۷، ۱۸، ...، ۱۴۳، ۱۴۴، ... و تقریباً نیم ساعت بعد از حرکتشان، از اولین میلهٔ چاه: ۱۹۹، ۲۰۰ و بالاخره ۲۰۱! 😅

یکی‌یکی به آرامی از دوچرخه پیاده شدند... خوش‌حال از رسیدن به چاه اصلی و پر از دلهره و نگرانی از وجود داشتن یا وجود نداشتن آب در چاه! سکوت عجیبی بین همهٔ بچه‌ها به‌وجود آمده بود! آن‌قدر سکوت که حتی صدای خش‌خش کشیده شدن یک علف خشک روی زمین، از فاصلهٔ دور شنیده می‌شد.

ناگهان محمدعلی فریاد زد: «مسئله این است! بودن یا نبودن آب در چاه!» 😅

و سنگ بزرگی از زمین برداشت و به درون چاه پرتاب کرد... و اندک زمانی بعد که انگار متوقف شده بود... صدای سنگ از چاه شنیده شد: تقق، تقق... تقق... که ناگهان زیباترین صدا در چاه پیچید: تلللقققق و صدای آشنای خوردن سنگ به سطح آب!

بچه‌ها بدون اختیار فریاد می‌کشیدند و یکدیگر را بغل می‌کردند... انگار که در کرهٔ مریخ آب پیدا کرده‌اند!

شب بچه‌ها در خانهٔ آقای نامی که تا اینجای داستان احتمالاً متوجه شده‌اید که معلم ریاضی پایهٔ نهم بچه‌ها بود، جمع شدند تا در مورد فوتبال، ببخشید آب روستا، صحبت کنند. آقای نامی گفت: «باید آب به روستا منتقل شود. شما چه پیشنهادی دارید؟»

ادامه این داستان را در شمارهٔ ۸ بخوانید.

مسئله

مسیرهای متفاوت در محاسبه‌های توان‌دار

جعفر اسدی گرمارودی

در این شماره برای محاسبه‌های عددهای توان‌دار دو مسئله ارائه شده است: در روش اول، پاسخ هر دو را به کمک فن‌های محاسباتی ضرب و تقسیم عددهای توان‌دار به‌دست آورده‌ایم:

مسئلهٔ اول:

$$(۸^۳ \div ۱۶^۳) \times ۴^۳ = (\frac{۸}{۱۶})^۳ \times ۴^۳ = (\frac{۱}{۲})^۳ \times ۴^۳ = (\frac{۱}{\cancel{۲}} \times \cancel{۴})^۳ = ۲^۳$$

مسئلهٔ دوم:

$$\frac{۴^۵ \times ۴۸^۲ \times ۱۲^۵}{۴^۳ \times ۶^۳ \times ۲^۳} = \frac{۴۸^۵ \times ۴۸^۲}{۴۸^۳} = \frac{۴۸^۷}{۴۸^۳} = ۴۸^۴$$

توان‌های برابر

توان‌های برابر

اما در روش دوم حل چنین مسئله‌هایی از فن به‌توان‌رساندن عدد توان‌دار استفاده کرده‌ایم. در پایهٔ هشتم یاد گرفتیم که: $(a^m)^n = a^{mn}$. بنابراین در هر دو مسئله، برای اینکه از این فن استفاده کنیم، پایه‌ها را به صورت تجزیه‌شده نوشته‌ایم:

$$(۸^۳ \div ۱۶^۳) \times ۴^۳ = ((۲^۳)^۳ \div (۲^۴)^۳) \times (۲^۲)^۳ = (۲^۹ \div ۲^{۱۲}) \times ۲^۶ = ۲^{-۳} \times ۲^۶ = ۲^۳$$

$$\frac{۴^۵ \times ۴۸^۲ \times ۱۲^۵}{۴^۳ \times ۶^۳ \times ۲^۳} = \frac{(۲^۲)^۵ \times (۲^۴ \times ۳)^۲ \times (۲^۲ \times ۳)^۵}{(۲^۲)^۳ \times (۲ \times ۳)^۳ \times ۲^۳} = \frac{۲^{۱۰} \times ۲^۸ \times ۳^۲ \times ۲^{۱۰} \times ۳^۵}{۲^۶ \times ۲^۳ \times ۳^۳ \times ۲^۳} = \frac{۲^{۲۸} \times ۳^۷}{۲^{۱۲} \times ۳^۳} = ۲^{۱۶} \times ۳^۴$$

در پاسخ مسئلهٔ دوم، گرچه عددهای به‌دست‌آمده ظاهر متفاوت دارند، اما قابلیت تبدیل به یکدیگر را دارند:

$$۲^{۱۶} \times ۳^۴ = (۲^۴)^۴ \times ۳^۴ = (۲^۴ \times ۳)^۴ = (۱۶ \times ۳)^۴ = ۴۸^۴$$

قسمت هفتم: سکوتِ مطلق کیهان

نجوم ریاضیاتی

روح‌الله خلیلی بروجنی

علوم

در فضا می‌توانی فریاد بزنی، اما هیچ‌کس صدای تو را نخواهد شنید. دلیلش این است که فضا یک خلأ است؛ یعنی تقریباً هیچ ماده‌ای، حتی هوایی مثل هوای زمین، در آن وجود ندارد.

صدا برای منتقل‌شدن به یک مادهٔ واسطه نیاز دارد؛ ماده‌ای مانند هوا، آب یا حتی دیوار. نوسان‌های صوتی از طریق ذرات تشکیل‌دهندهٔ این مواد جابه‌جا می‌شوند و به گوش ما می‌رسند. اما در خلأ، چون تقریباً هیچ ذره‌ای برای انتقال این نوسان‌ها وجود ندارد، امواج صوتی نمی‌توانند حرکت کنند. به همین دلیل اگر در فضا فریاد بزنی، نوسان یا همان ارتعاش صدایت به جایی منتقل نمی‌شود و کسی آن را نمی‌شنود.

با این حال، فضانوردان داخل سفینه می‌توانند با هم صحبت کنند و صداها را بشنوند؛ چون داخل سفینه هوا وجود دارد. همان هوا باعث می‌شود صدای آن‌ها منتقل شود.



صدا چگونه تولید می‌شود؟

صدا در واقع نوعی نوسان یا ارتعاش (لرزش) است. وقتی جسمی می‌لرزد، این لرزش‌ها به محیط اطراف آن منتقل می‌شوند. صدا می‌تواند از موادی مثل هوا، آب یا جسم‌های جامد عبور کند. به این صورت که لرزش‌ها باعث می‌شوند ذرات هوا (یا هر ماده‌ای که صدا در آن حرکت می‌کند) شروع به لرزیدن کنند. این لرزش ذره‌به‌ذره منتقل می‌شود و به صورت موج‌های صوتی در فضا حرکت می‌کند. وقتی این موج‌های صوتی به گوش ما می‌رسند، وارد گوش می‌شوند و پردهٔ گوش را می‌لرزانند و به نوسان درمی‌آورند. سپس گوش و مغز ما این لرزش‌ها را پردازش می‌کنند و ما آن‌ها را به صورت صدا می‌شنویم.

به طور خلاصه:

- صدا از لرزش جسم‌ها به وجود می‌آید.
- این لرزش‌ها از طریق هوا یا مواد دیگر منتقل می‌شوند.
- موج‌های صوتی به گوش می‌رسند.
- مغز این موج‌ها را به صدا تبدیل می‌کند.



روی ماه هوا وجود ندارد، بنابراین صدا نمی‌تواند منتقل شود.



روی زمین هوا وجود دارد، به همین دلیل صدا می‌تواند منتقل شود و حرکت کند.

فعالیت ۱: محاسبهٔ تندی صوت در محیط‌های متفاوت

موضوع: بررسی فاصله و زمان رسیدن صدا

تندی صدا در محیط‌های مختلف متفاوت است: هوا ۳۴۰ متر بر ثانیه، آب ۱۴۸۰ متر بر ثانیه و فولاد ۵۱۰۰ متر بر ثانیه.

پرسش‌ها:

الف) اگر صدایی از فاصلهٔ ۱۰۰۰ متر منتشر شود، چقدر طول می‌کشد تا به گوش فردی در هوا، آب و فولاد برسد.

ب) نسبت سرعت صدا در فولاد به سرعت آن در هوا چقدر است؟

پ) برای زمان رسیدن صدا در محیط‌های متفاوت نمودار ستونی رسم کنید.

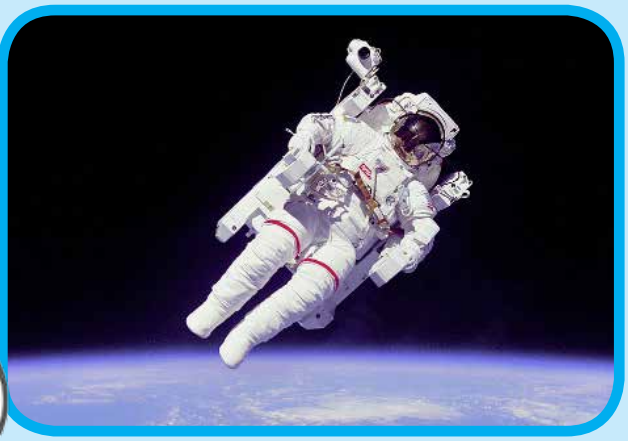
فضا چه بویی می‌دهد؟

فضانوردانی که از فضا به زمین بازگشته‌اند، توضیح داده‌اند که تحمل بوی لباس‌های فضایی‌شان بعد از راه‌پیمایی فضایی برایشان سخت بوده است. حتی بعضی از آن‌ها می‌گویند لباس‌های فضایی بویی کمی سوخته و فلزی می‌دهند؛ شبیه بوی فلز داغ.

خوب است بدانید

فضانوردانی که در فضا راه‌پیمایی می‌کنند، برای صحبت با یکدیگر از صدابر (میکروفون) و ارتباط رادیویی استفاده می‌کنند. در فضا خلأ وجود دارد و صدا نمی‌تواند بدون هوا منتقل شود. به همین دلیل، ارتباط آن‌ها از راه موج‌های رادیویی انجام می‌شود، نه از طریق موج‌های صوتی.

لباس فضایی از فضانوردان در برابر خلأ محافظت می‌کند. این لباس دارای هوا و فشار مناسب برای بدن است و اکسیژن لازم را فراهم می‌کند. همچنین لباس فضایی بدن را از دماهای شدید و خطرات محیط فضا حفظ می‌کند.



فعالیت ۲: محاسبهٔ زمان و دما (تناسب و معادلهٔ ساده)

دانشمندان متوجه شده‌اند که هر ۱۰ دقیقه راه‌پیمایی فضایی باعث افزایش ۱۵ درجهٔ سانتی‌گراد دمای سطح لباس فضایی می‌شود. فرض کنید دمای اولیهٔ لباس فضایی ۲۰ درجهٔ سانتی‌گراد است و بوی سوختگی زمانی حس می‌شود که فضانوردان بعد از بازگشت به فضاپیما، لباس را از کلاهک خود جدا کنند و دمای سطح لباس به ۸۰ درجهٔ سانتی‌گراد رسیده باشد.

پرسش‌ها:

الف) بعد از ۳۰ دقیقه راهپیمایی فضایی، دمای لباس فضایی چقدر می‌شود؟

ب) چند دقیقه طول می‌کشد تا دمای لباس به ۸۰ درجه برسد؟

پ) رابطهٔ دما و زمان را به صورت یک عبارت ریاضی بنویسید.

فعالیت ۳. مدل‌سازی ریاضی انتقال صوت

هدف: درک مفهوم خلأ و رابطهٔ آن با انتقال صوت از طریق مدل‌سازی ریاضی

شدت صوت با دور شدن از منبع و همچنین با تغییر محیط انتقال، کاهش می‌یابد. در خلأ، این کاهش به حدی زیاد است که صوت قابل شنیدن نیست. شدت صوت (I) با معادلهٔ زیر به فاصلهٔ d از منبع رابطه دارد:

$$I=\frac{P}{۴\pi d^{۲}}$$

که در آن P توان منبع صوت است.

۱. اگر توان فریاد یک انسان ۰/۰۰۱ وات باشد:

الف) شدت صوت در فاصلهٔ ۱ متری چقدر است؟

ب) شدت صوت در فاصلهٔ ۱۰ متری چقدر است؟

پ) شدت صوت در فاصلهٔ ۱۰ متری نسبت به فاصلهٔ ۱ متری چند برابر کاهش یافته است؟

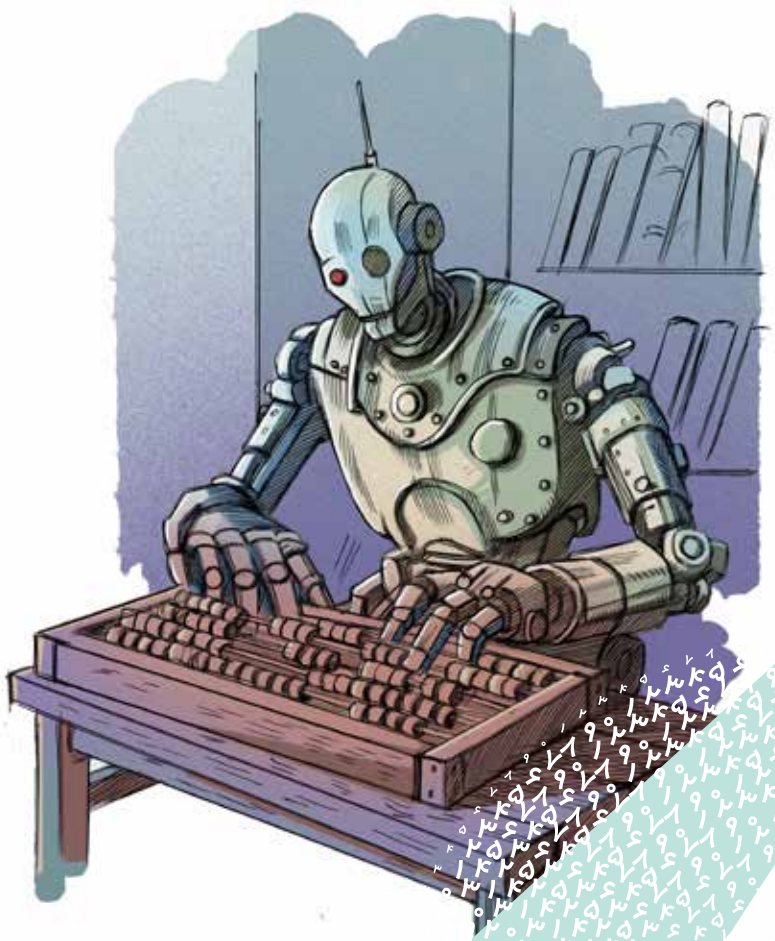
۲. در فضا (خلأ) شدت صوت نه تنها با فاصله کاهش می‌یابد، بلکه در ضریب انتقال محیط نیز ضرب می‌شود. اگر ضریب انتقال هوا را برابر ۱، آب را ۰/۸ و خلأ را ۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۱ در نظر بگیریم:

الف) یک صوت با شدت اولیهٔ ۱۰ واحد، پس از عبور از ۱ متر هوا چه شدتی دارد؟

ب) همان صوت پس از عبور از ۱ متر خلأ چه شدتی دارد؟

پ) آیا این عدد توضیح می‌دهد که چرا در فضا صدایی شنیده نمی‌شود؟





تصویرگر: سیدمیثم موسوی

ماشین حساب از چرتکه تا

تاریخچهٔ ابزارهای محاسباتی در اقتصاد و تجارت

زهرا جواهری‌پور

تصور کنید که می‌خواهید معاملهٔ بزرگ انجام دهید یا ثروت خود را حساب کنید، اما هیچ ماشینی برای این کار ندارید. فقط ابزاری ساده در دست دارید: **چرتکه**. در دنیای امروز، این ایده ممکن است عجیب به نظر برسد، چرا که ما به رایانه‌ها و نرم‌افزارهای پیچیدهٔ مالی عادت کرده‌ایم. اما واقعیت این است که در طول تاریخ، همین ابزارهای ساده به انسان‌ها کمک کرده‌اند تا از ابتدایی‌ترین مبادله‌ها تا بزرگ‌ترین امپراتوری‌های تجاری را مدیریت کنند.

این مقاله سفری جذاب به دنیای ابزارهای محاسباتی است که در طول قرن‌ها، اقتصاد و تجارت را متحول کرده‌اند. ما از چرتکه با مهره‌های رنگی آن که صدها سال پیش برای حساب و کتاب‌های روزمره به کار می‌رفت، شروع می‌کنیم. سپس با گذر از قلم و کاغذ و جدول‌های لگاریتم به دنیای پیچیده‌تر ماشین‌حساب‌های مکانیکی و الکترونیکی قدم می‌گذاریم. این ابزارها تنها وسایلی برای محاسبه نبودند، بلکه در هر مرحله، سرعت و دقت محاسبه‌ها را به شکل چشمگیری افزایش دادند و به تاجران و اقتصاددانان کمک کردند تصمیم‌های دقیق‌تر و بهتری بگیرند.

این مسیر تکاملی، از ابزارهای ساده و دستی تا رایانه‌ها و نرم‌افزارهای مالی مدرن، نشان می‌دهد که چگونه ریاضیات و فناوری دست‌در‌دست هم، پایه‌های دنیای پیچیدهٔ اقتصادی امروز را ساختند. در ادامه خواهیم دید که چگونه هریک از این ابزارها نه تنها روش حساب و کتاب را تغییر دادند، بلکه تأثیری عمیق بر بهره‌وری، مدیریت مالی و تحلیل داده‌ها در اقتصاد داشتند. پس آمادهٔ سفری هیجان‌انگیز در تاریخ عددها، ابزارها و پول شوید.

تاریخچهٔ عددها و دستگاه‌های شمارش

فکر کنید که انسان‌های اولیه چگونه می‌توانستند چیزهایی را بشمارند؟ برای مثال، چند گوسفند در یک گله وجود دارد؟ ابتدا آن‌ها از روش‌های بسیار ساده‌ای استفاده می‌کردند. شاید برای هر گوسفند، یک سنگ کوچک را کنار می‌گذاشتند، یا روی دیواره غار خطی می‌کشیدند. این خط‌ها و سنگ‌ها اولین نشانه‌های استفاده از عددها بودند.

با گذشت زمان و پیچیده‌تر شدن جامعه‌ها، انسان‌ها به روشی سازمان‌یافته‌تر برای شمارش نیاز پیدا کردند. اولین تمدن‌های بزرگ مثل سومریان و بابلیان در بین‌النهرین، دستگاه‌های شمارش مخصوص به خود را توسعه دادند. سومریان از دستگاهی بر مبنای عدد ۶۰ استفاده می‌کردند که هنوز هم در اندازه‌گیری زمان (۶۰ ثانیه در یک دقیقه) و زاویه‌ها (۳۶۰ درجه در یک دایره) دیده می‌شود.

در مصر باستان، دستگاه شمارش بر مبنای ۱۰ بود، اما برای هر توان از ۱۰ (مثل ۱۰، ۱۰۰ و ۱۰۰۰) یک نماد جداگانه داشتند. رومی‌ها نیز دستگاه عددهای خود را داشتند که حتماً با آن آشنا هستید (مثل I, V, X, L, C). این دستگاه گرچه در زمان خود کارآمد بود، اما برای محاسبه‌های پیچیده بسیار دشوار بود.

یکی از بزرگ‌ترین انقلاب‌ها در تاریخ عددها، با اختراع عدد صفر و دستگاه ده‌دهی توسط هندی‌ها رخ داد. این دستگاه که امروزه هم از آن استفاده می‌کنیم، بر پایهٔ ۱۰ رقم (۰ تا ۹) است. به لطف صفر، ارزش یک رقم به جایگاهش بستگی پیدا کرد. مثلاً در عدد ۲۵، رقم ۲ نشان‌دهندهٔ ۲۰ است، در حالی که در عدد ۲۵۰، نشان‌دهندهٔ ۲۰۰ است. این نوآوری بزرگ انجام محاسبه‌ها را بسیار ساده کرد و راه را برای پیشرفت‌های بعدی در ریاضیات و علوم، از جمله اقتصاد، باز کرد.

اصول کارکرد ابزارهای محاسباتی اولیه (چرتکه)

ابزارهای محاسباتی اولیه، مانند چُرتکه، بر پایهٔ چند اصل ساده و قابل‌درک کار می‌کردند. این ابزارها به مردم کمک می‌کردند بدون نوشتن و حتی بدون دانستن ریاضی پیشرفته، محاسبه‌های روزمره را انجام دهند. در ادامه اصول کارکرد این ابزارها را به زبانی کاملاً ساده توضیح می‌دهم:

۱. اصل «جابه‌جایی مهره‌ها» برای نشان‌دادن عدد

در چرتکه به جای نوشتن عددها، مهره‌ها نقش عدد را بازی می‌کنند. هر مهره که به سمت میلهٔ وسط یا قسمت فعال حرکت می‌کند، یعنی یک عدد به حساب اضافه شده است. اگر مهره را دور کنیم، یعنی آن عدد را حذف کرده‌ایم.

۲. اصل «ارزش مکانی»، مثل عددهای راست به چپ

میله‌های چرتکه مثل رقم‌های یک عدد عمل می‌کنند:

- میلهٔ راست ← واحد
- میلهٔ بعدی ← دهگان
- میلهٔ بعدی ← صدگان

و همین‌طور ادامه دارد. پس اگر در میلهٔ دهگان دو مهره را جلو بیاوریم، یعنی عدد ۲۰.

۳. اصل «جمع‌کردن با حرکت مهره‌ها»

برای جمع فقط کافی است مهره‌ها را به سمت بخش فعال حرکت دهیم. مثلاً برای محاسبهٔ ۳ + ۲، سه مهره را جلو می‌آوریم و بعد دو مهرهٔ دیگر را اضافه می‌کنیم؛ نتیجه عدد ۵ خواهد بود.

۴. اصل «کم‌کردن با برگرداندن مهره‌ها»

کم‌کردن هم ساده است. مثلاً برای ۳ - ۷، هفت مهره را جلو می‌آوریم و سه مهره را به عقب برمی‌گردانیم؛ باقی‌ماندهٔ مهره‌ها جواب است: ۴.

۵. اصل «تبدیل واحد به دهگان»

چرتکه نسخه‌ای ابتدایی از مفهوم «تبدیل» است. وقتی تعداد مهره‌های یک میله پر شد، مثلاً ده مهره، آن را خالی می‌کنند و یک مهره در میلهٔ دهگان جلو می‌آورند. این همان مفهوم ده تایکی، یک ده‌تا است.

۶. اصل «تصویرسازی ذهنی محاسبه‌ها»

با چرتکه کودکان و بزرگسالان بدون نوشتن، محاسبه‌ها را «می‌بینند». این باعث می‌شود روش آن نه‌تنها سریع، بلکه قابل‌فهم و قابل‌لمس باشد.

خلاصهٔ ساده

چرتکه مثل یک ماشین‌حساب دستی است که با حرکت دادن مهره‌ها، تقسیم‌بندی عددها به واحد، دهگان، صدگان، و تبدیل‌ها، به انسان کمک می‌کرد جمع، تفریق و حتی ضرب و تقسیم را انجام دهد. در ادامه مثالی کاملاً ساده و قابل‌فهم در مورد استفاده از چُرتکه برای انجام جمع ارائه می‌کنم:

مثال: محاسبهٔ ۱۳ + ۲۴ با چرتکه

۱. عدد ۲۴ را روی چرتکه قرار می‌دهیم.

- روی میلهٔ دهگان: دو مهره را بالا می‌آوریم ← (۲۰)
- روی میلهٔ واحدها: چهار مهره را بالا می‌آوریم ← (۴)

بنابراین عدد ۲۴ روی چرتکه ساخته می‌شود.

۲. حالا عدد ۱۳ را اضافه می‌کنیم.

برای ۱۳ باید:

- روی میلهٔ دهگان یک مهرهٔ دیگر بالا بیاوریم ← ۱۰ + ۲۰
- روی میلهٔ واحدها سه مهرهٔ دیگر بالا بیاوریم ← ۳ + ۴

۳. انجام جمع در میلهٔ واحدها

- چهار مهره داشتیم + سه مهرهٔ جدید ← مجموع ۷ مهره

پس میلهٔ واحدها عدد ۷ را نشان می‌دهد.

۴. انجام جمع در میلهٔ دهگان

- دو مهره داشتیم + یک مهرهٔ جدید ← مجموع ۳ مهره

پس میلهٔ دهگان عدد ۳۰ را نشان می‌دهد.

۵. نتیجهٔ نهایی روی چرتکه

- دهگان ← ۳
- واحد ← ۷

بنابراین نتیجهٔ ۱۳ + ۲۴ روی چرتکه برابر است با: ۳۷.

یک مثال ساده و قابل‌درک از ضرب با چُرتکه ارائه می‌کنم. این مثال برای دانش‌آموزان دورهٔ اول متوسطه مناسب است.

مثال: محاسبهٔ ۳ × ۴ با چرتکه

این مثال یکی از ساده‌ترین ضرب‌هاست و کمک می‌کند دانش‌آموزان مفهوم ضرب را روی چرتکه بهتر درک کنند.

۱. مفهوم ضرب روی چرتکه

در چرتکه ضرب معمولاً مانند جمع تکراری انجام می‌شود. مثلاً ۳ × ۴ یعنی چهار بار عدد ۳ را جمع کنیم.

۲. شروع محاسبه روی چرتکه

مرحلهٔ اول: قرار دادن عدد ۳. روی میلهٔ واحدها ۳ مهره را بالا می‌آوریم.

مرحلهٔ دوم: سه بار دیگر عدد ۳ را اضافه می‌کنیم.

- بار دوم: ۳ مهرهٔ دیگر اضافه ← مجموع ۶
- بار سوم: ۳ مهرهٔ دیگر ← مجموع ۹
- بار چهارم: ۳ مهرهٔ دیگر ← مجموع ۱۲

۳. تبدیل ۱۲ روی چرتکه

چون در واحدها نمی‌توانیم ۱۲ مهره داشته باشیم، تبدیل می‌کنیم:

- ۱۰ مهرهٔ واحد را برمی‌گردانیم، ۱ مهره در دهگان بالا می‌آوریم

در نتیجه:

- دهگان ← ۱
- واحدها ← ۲

نتیجهٔ نهایی روی چرتکه: ۱۲.

تکامل فناوری و تأثیر آن بر محاسبه‌های ریاضی در اقتصاد

رشد فناوری در طول تاریخ، شیوهٔ انجام محاسبه‌های ریاضی را به‌طور چشمگیری دگرگون کرده است. زمانی انجام یک محاسبهٔ ساده زمان و تلاش نیاز داشت و احتمال خطا در آن بالا بود. اما با پیشرفت ابزارهای محاسباتی، از چرتکه و خط‌کش محاسبه گرفته تا ماشین‌حساب و رایانه‌های امروزی، سرعت و دقت محاسبه‌ها چندین برابر شده است. این تحول در دنیای اقتصاد و تجارت اهمیت ویژه‌ای دارد، زیرا تصمیم‌گیری‌های اقتصادی بر پایهٔ محاسبه‌های دقیق و سریع انجام می‌شوند.

فناوری باعث شده است انسان بتواند با کمترین خطا و در کوتاه‌ترین زمان، قیمت‌ها را مقایسه کند، سود و زیان را بسنجد، و حتی آیندهٔ بازار را پیش‌بینی کند. به همین دلیل آشنایی با نقش فناوری در محاسبه‌های ریاضی به ما کمک می‌کند بهتر بفهمیم امروز چگونه اقتصاد جهانی با اتکای به ابزارهای هوشمند اداره می‌شود.

ریاضی مرتبط با فناوری و اقتصاد

مثال: محاسبهٔ سریع سود فروش با ماشین‌حساب

فرض کنید فروشنده‌ای ۵۰ بسته دفتر دانش‌آموزی دارد. قیمت خرید هر بسته ۳۰ هزار تومان بوده است. او هر بسته را ۴۵ هزار تومان می‌فروشد. می‌خواهیم محاسبه کنیم: فروشنده چقدر سود می‌کند؟

مرحلهٔ ۱. محاسبهٔ سود هر بسته

با ماشین‌حساب فقط کافی است:

سود هر بسته ۱۵٬۰۰۰ تومان ۴۵٬۰۰۰−۳۰٬۰۰۰=۱۵٬۰۰۰

مرحلهٔ ۲. محاسبهٔ سود کل

۷۵۰٬۰۰۰ تومان سود ۱۵٬۰۰۰× بسته ۵۰=تومان ۷۵۰٬۰۰۰

نتیجه: فروشنده با استفاده از محاسبه‌های سریع و دقیق ماشین‌حساب متوجه می‌شود که: مجموع سود او ۷۵۰ هزار تومان است.

مثال: محاسبهٔ درصد سود در یک معامله

فروشنده‌ای یک عدد ماشین اسباب‌بازی را به قیمت ۸۰ هزار تومان می‌خرد و آن را به قیمت ۱۰۰ هزار تومان می‌فروشد. می‌خواهیم بدانیم درصد سود فروشنده چقدر است؟

مرحلهٔ ۱. محاسبهٔ مقدار سود

سود = قیمت خرید − قیمت فروش

۲۰٬۰۰۰ تومان سود ۱۰۰٬۰۰۰−۸۰٬۰۰۰=۲۰٬۰۰۰

مرحلهٔ ۲. محاسبهٔ درصد سود

فرمول درصد سود:

$$\text{درصد سود} = \frac{\text{سود}}{\text{قیمت خرید}} \times ۱۰۰$$

$$\frac{۲۰,۰۰۰}{۸۰,۰۰۰} \times ۱۰۰ = ٪۲۵$$

نتیجه: فروشنده ۲۵ درصد سود کرده است.

مثال: محاسبهٔ مالیات یک کالا

قیمت یک کتاب کمک‌درسی ۱۲۰ هزار تومان است و نرخ مالیات بر ارزش افزوده ۹ درصد در نظر گرفته می‌شود. می‌خواهیم بدانیم مقدار مالیات و قیمت نهایی کتاب چقدر می‌شود.

مرحلهٔ ۱. محاسبهٔ سود هر بسته

مالیات = نرخ مالیات × قیمت کالا

۱۲۰,۰۰۰ × ۰/۰۹ = ۱۰,۸۰۰

پس مالیات کتاب: ۱۰,۸۰۰ تومان

مرحلهٔ ۲. محاسبهٔ قیمت نهایی

قیمت نهایی = مالیات + قیمت کالا

۱۲۰,۰۰۰ + ۱۰,۸۰۰ = ۱۳۰,۸۰۰

نتیجه: قیمت نهایی کتاب با احتساب مالیات برابر است با: ۱۳۰,۸۰۰ تومان.



نقش ابزارهای نوین در پیشرفت اقتصادی

فرض کنید یک فروشگاه اینترنتی هر روز صدها سفارش دریافت می‌کند. مدیر فروشگاه باید بداند: کدام کالاها پرفروش‌تر هستند، چه زمانی باید موجودی انبار را شارژ کند، و سود روزانهٔ فروشگاه چقدر است. اگر او بخواهد همهٔ این محاسبه‌ها را به‌صورت دستی انجام دهد، زمان زیادی از دست می‌رود و احتمال خطا هم بسیار زیاد است. اما با استفاده از نرم‌افزارهای حسابداری و تحلیل داده، فروشگاه می‌تواند ظرف چند ثانیه:

- تعداد کل فروش را محاسبه کند،
- سود و زیان روزانه را به‌طور دقیق به دست آورد،
- کالاهای پرفروش را شناسایی کند،
- و حتی پیش‌بینی کند که در ماه آینده چه محصولاتی بیشتر فروش خواهند داشت.

این ابزارهای نوین باعث می‌شوند:

- تصمیم‌های اقتصادی هوشمندانه‌تر گرفته شوند،
- زمان و هزینه‌ها کاهش یابند،
- سرعت و دقت محاسبه‌ها افزایش یابد،
- و کسب‌وکار سریع‌تر رشد کند.

به این ترتیب، فناوری‌های نوین نقش مهمی در افزایش کارایی اقتصادی و مدیریت دقیق‌تر دارند.

ریاضی فقط یک درس مدرسه‌ای نیست؛ زبان فهمیدن دنیا است. هرقدر بیشتر با مفهوم‌های ریاضی آشنا باشید، بهتر می‌توانید مسئله‌های واقعی زندگی، اقتصاد و حتی آیندهٔ شغلی خود را مدیریت کنید. امروز فناوری‌هایی مانند ماشین‌حساب، نرم‌افزارهای هوشمند، رایانه‌ها و حتی تلفن همراه شما، محاسبه‌های اقتصادی را ساده‌تر و دقیق‌تر از همیشه کرده‌اند. اگر یادگیری ریاضی را جدی بگیرید و از ابزارهای نوین استفاده کنید:

- سریع‌تر به جواب‌ها می‌رسید،
- خطاهایتان کمتر می‌شود،
- و می‌توانید مثل مدیری حرفه‌ای تصمیم‌های اقتصادی بهتری بگیرید.

یادگیری ریاضی یعنی ساختن آینده‌ای روشن‌تر، و استفاده از فناوری یعنی هوشمندانه‌تر و موفق‌تر بودن در مسیر زندگی. پس با علاقه و انگیزه ادامه دهید. دنیا منتظر ایده‌های خلاقانه و محاسبه‌های دقیق شماست!

«معمای مونتی‌هال» مسئله‌ای ساده در حوزهٔ احتمال است که نتایج آن، برای میلیون‌ها نفر به‌شدت غیرقابل‌باور است. این مسئله نه تنها یک بازی، بلکه یکی از قوی‌ترین پارادوکس‌ها در نشان‌دادن تضاد میان شهود انسانی و حقیقت دقیق ریاضی است.

شرح بازی

فرض کنید در یک مسابقهٔ تلویزیونی شرکت کرده‌اید. شرایط بازی کاملاً ساده و قاطع است. در مقابل شما سه در بسته قرار دارد. پشت یک در جایزه‌ای بزرگ (خودرو) و پشت دو در دیگر یک «گوسفند» قرار دارد. شما اولین انتخاب خود را انجام می‌دهید (فرض کنیم درِ شمارهٔ ۱ را انتخاب می‌کنید). در اینجا، نقش مجری حیاتی می‌شود. مجری که از محل جایزه آگاه است، یکی از دو در باقی‌مانده را که قطعاً گوسفند پشت آن است، باز می‌کند (مثلاً در شمارهٔ ۳).

حالا مجری با لبخندی به شما می‌گوید: «هنوز فرصت دارید. آیا می‌خواهید انتخاب‌تان را عوض کنید و درِ باقی‌مانده (شمارهٔ ۲) را انتخاب کنید؟»

چرا باید شک کنیم؟

منطق شهودی ما فریاد می‌زند: «دو در باقی مانده است. خودرو یا پشت این در است یا پشت آن. احتمال ۵۰-۵۰ است! عوض‌کردن فرقی نمی‌کند.»

منطق ریاضی اما به ما می‌گوید: «باید انتخابت را عوض کنی!» اگر انتخابتان را عوض کنید، شانس برنده شدن شما از $\frac{۱}{۳}$ به $\frac{۲}{۳}$ افزایش می‌یابد. اما چگونه ممکن است یک در، دو برابر در دیگر شانس داشته باشد؟ برای درک دلیل این ناسازنما (پارادوکس) باید کلید حل آن را دریابیم: اطلاعاتی که مجری اضافه می‌کند، کاملاً ارزشمند و اثرگذار است.



چرا باید تصمیمی که گرفته‌ای را عوض کنی؟

مهران مداح



چرا شانس اولیه از بین نمی‌رود؟

در آغاز بازی، شانس‌های شما به صورت زیر توزیع شده بودند:

- احتمال اینکه جایزه پشت درِ انتخابی شما باشد، برابر است با $\frac{1}{3}$.
- احتمال اینکه جایزه پشت دو درِ دیگر باشد برابر است با $\frac{2}{3}$.

زمانی که مجری یکی از دو درِ دیگر را حذف می‌کند، او شانس $\frac{2}{3}$ را از بین نمی‌برد، بلکه آن شانس را متمرکز می‌کند. او با آگاهی‌اش، در اشتباه محتمل را کنار می‌گذارد و کل شانس $\frac{2}{3}$ را به درهای باقی‌مانده منتقل می‌کند.

اثبات با جدول احتمال (نشان دادن انتقال شانس)

سناریوی زیر را در نظر بگیرید که در آن شما همیشه در ۱ را انتخاب کرده‌اید.

حالت ممکن	احتمال اولیهٔ جایزه	اگر در «۱» را انتخاب کنید	عمل مجری	اگر انتخاب خود را عوض کنید	اگر بر انتخاب اولیهٔ خود ماندگار باشید
۱	$\frac{1}{3}$	انتخاب درست	مجری درِ «۲» یا «۳» را باز می‌کند	می‌بازید	برنده می‌شوید
۲	$\frac{1}{3}$	انتخاب غلط	مجری مجبور است درِ «۳» را (که گوسفند پشت آن قرار دارد) باز کند	برنده می‌شوید	می‌بازید
۳	$\frac{1}{3}$	انتخاب غلط	مجری مجبور است درِ «۲» را (که گوسفند پشت آن قرار دارد) باز کند	برنده می‌شوید	می‌بازید

با جمع‌بندی نهایی به این نتیجهٔ قاطع می‌رسیم:

احتمال اینکه انتخاب اولیهٔ خود را عوض نکنید و برنده شوید، برابر است با $\frac{1}{3}$.

احتمال اینکه انتخاب اولیهٔ خود را عوض کنید و برنده شوید، برابر است با $\frac{2}{3}$.

نقش آگاهی

کلید اصلی ناسازنما این است که در بازی مونتی‌هال، شانس درهای باقی‌مانده برابر نیست. بنابراین معمای مونتی‌هال فراتر از یک سرگرمی ساده است؛ درس بزرگی در نظریهٔ احتمال شرطی است که ثابت می‌کند اطلاعات آگاهانه می‌تواند مسیر بازی را به نفع ما تغییر دهد و شهود ما را در دنیای عددها کاملاً به چالش بکشد.

انجام محاسبه‌های دقیق ریاضی همیشه و همه‌جا امکان‌پذیر نیست. بنابراین ریاضی‌دان‌ها گاهی مجبور می‌شوند تخمین بزنند. تخمین‌زدن می‌تواند پاسخ حدودی یک مسئله را مشخص کند. یکی از پادشاهان قدیم هندوستان وقتی با یک مسئلهٔ به‌ظاهر حل‌ناشدنی روبه‌رو شد، فهمید که با روش تخمین‌زدن می‌تواند حدس‌های خوبی بزند و به جواب نزدیک شود.



تصویرگر: فراز برازنده‌گان

حساب چشمی!

حبیب یوسف‌زاده

طبق یک افسانهٔ هندی، شاه «ریتوپارنا»[1] که ریاضی‌دان برجسته‌ای هم بود، روزی میان همراهانش ادعا کرد که با یک نگاه به یک درختِ خاص، می‌تواند تعداد برگ‌هایش را حساب کند.
همراهانش که نمی‌توانستند چنین حرفی را باور کنند و خیال می‌کردند جناب پادشاه دارد خالی‌بندی می‌کند، با اجازهٔ او، پس از قطع درخت شروع کردند به شمردن برگ‌ها و سرانجام در کمال شگفتی دیدند که پادشاه درست حدس زده است. اما او چطور توانسته بود این کار را بکند؟!

با استفاده از روش گِردکردن عددها و تخمین

در واقع شاه ریتوپارنا برگ‌های درخت را تک‌تک نشمرده بود، بلکه تخمین زده بود. برای این کار، ابتدا تعداد برگ‌های چندتا از شاخه‌های فرعی را شمرده بود. شاخه‌هایی که او برگ‌هایشان را شمرده بود، هرکدام حدود بیست تا برگ داشتند. حالا باید می‌فهمید که هرکدام از شاخه‌های اصلیِ درخت، چندتا شاخهٔ فرعی دارد. او پی برد که شاخه‌های اصلی بین چهار تا شش شاخهٔ فرعی دارند. وقتی معدل گرفت، معلوم شد هر شاخهٔ اصلی به‌طور متوسط پنج شاخهٔ فرعی دارد. چون شمردن شاخه‌های اصلی راحت بود، خیلی سریع آن‌ها را شمرد و دید که در مجموع ده‌تا هستند.
و به این ترتیب حساب کرد:
۱۰ شاخه اصلی × ۵ شاخه فرعی × ۲۰ برگ = ۱۰۰۰ برگ

تکرار کار پادشاه با حدس زدن تعداد کلمه‌های یک کتاب

کافی است تعداد کلمه‌های یک سطر و بعد تعداد سطرهای یک صفحه از کتاب را بشماریم تا تعداد کلمه‌های آن صفحه به دست آید. سپس باید این کار را برای مثلاً پنج صفحهٔ دیگر انجام دهیم و معدل تعداد کلمه‌های آن پنج صفحه را به دست آوریم. این‌طوری معلوم می‌شود که هر صفحه به‌طور متوسط چند کلمه دارد. در پایان، این عدد را در تعداد صفحه‌های کتاب ضرب می‌کنیم تا تعداد کلمه‌های آن مشخص شود. ممکن است نتیجه کاملاً دقیق نباشد، اما خیلی نزدیک به واقعیت خواهد بود.

گرد کردن عددها برای محاسبه‌های ذهنی

فرض کنید می‌خواهید حاصل‌جمع تقریبی دو عدد ۱۶۸ و ۷۴۳ را سریع به دست آورید. کافی است آن‌ها را دوبار متوالی گرد کنید:

۷۴۳ + ۱۶۸ = ۹۱۱
۷۴۰ + ۱۷۰ = ۹۱۰
۷۰۰ + ۲۰۰ = ۹۰۰

تمرین:

با استفاده از یک ترازو حدس بزنید در یک کاسه پر از لوبیا چندتا لوبیا وجود دارد؟ در یک کیسهٔ ۱۰ کیلویی چطور؟

پی‌نوشت

1. Rituparna

مساوات هندسی

محمدمهدی نسیمی

ما از بچگی با مفهوم «بلندبودن و کوتاه‌بودن»، «بزرگی و کوچکی» و «بیشتری و کمتری» سروکار داشته‌ایم. مثلاً دیده‌ایم که ساختمان‌ها از ما بلندتر و بزرگ‌ترند یا حشره‌ها از ما کوتاه‌تر و کوچک‌ترند. اما مرز میان همهٔ این‌ها «به‌اندازه‌بودن» است. به‌اندازه‌بودن یعنی چه؟ آیا به‌اندازه‌بودن به معنی مساوی‌بودن است؟ تصویر ۱ را ببینید. در سمت چپ تصویر به هر کس به‌طور مساوی مکعب‌های چوبی داده شده است و در سمت راست به هر کس متناسب با قدش مکعب داده‌اند.

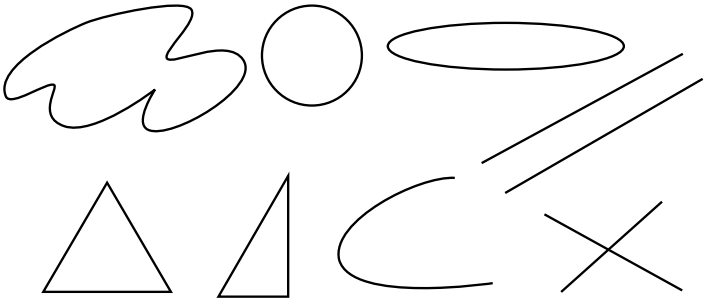


تصویر ۱

اینکه مساوات چقدر عادلانه است و چگونه باید عدالت را رعایت کرد، بحث مهم و دشواری است. ما این‌بار به این بهانه مساوات را میان شکل‌های هندسی بررسی می‌کنیم! دقت کنید که در این نوشتار، استاندارد اثبات ریاضی را رعایت نکرده‌ایم و بیشتر به آزمون‌وخطا پرداخته‌ایم.

مساوات در هندسه

به شکل‌های زیر توجه کنید. حدس می‌زنید کدام‌ها نوعی از مفهوم مساوی‌بودن را در دل خود دارند و کدام‌ها اصلاً ندارند؟

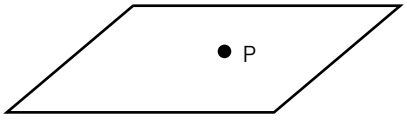


در ادامه به بررسی بعضی از این شکل‌ها می‌پردازیم و خواهیم دید که چگونه شکل‌های متفاوت با نوعی از تساوی سروکار دارند.

۱. مساوات برای یک نقطه

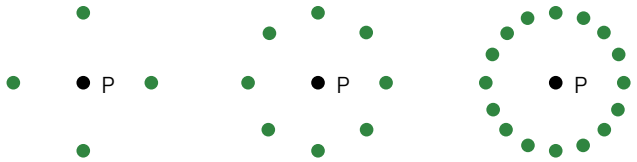
ساده‌ترین موجود هندسی «نقطه» است. مانند شکل ۱، نقطه‌ای را در یک صفحه در نظر بگیرید و نامش را P بگذارید. معمولاً در هندسه اندازه‌گیری را با فاصله و زاویه انجام می‌دهند.

پرسش اول: «از میان همهٔ نقطه‌های روی صفحه، آن‌هایی که فاصله‌شان با P برابر ۱ سانتی‌متر است کدام‌ها هستند؟»



شکل ۱

سعی کنید به کمک خط‌کش این نقطه‌ها را بیابید. وقتی آرام‌آرام نقطه‌هایی را می‌یابیم که از نقطهٔ P یک واحد فاصله دارند، به شکل‌های ۲، ۳ و ۴ می‌رسیم.



شکل ۲ شکل ۳ شکل ۴

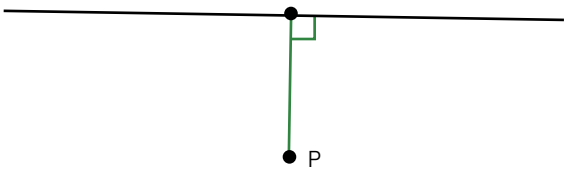
بله دایره! مرکز دایره مساوات را میان همهٔ نقطه‌ها رعایت می‌کند و میان هیچ نقطه‌ای از دایره فرقی نمی‌گذارد.

۲. مساوات برای یک خط

حالا به جای نقطه، یک خط را در نظر بگیرید و آن را l بنامید. سؤال را برای خط تکرار می‌کنیم.

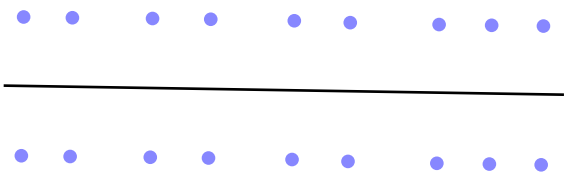
پرسش دوم: «از میان همهٔ نقطه‌های روی صفحه، آن‌هایی که فاصله‌شان با l برابر ۱ سانتی‌متر است کدام‌ها هستند؟»

دقت کنید که فاصلهٔ نقطه از خط یعنی: **طول کوتاه‌ترین پاره‌خطی که نقطه را به خط وصل می‌کند.** بعداً ثابت می‌شود که این پاره‌خط، همان پاره‌خطِ عمود بر خط است. مثلاً در شکل ۵ پاره‌خط سبزرنگ کوتاه‌ترین پاره‌خطی است که نقطهٔ P را به خط وصل می‌کند.



شکل ۵

دوباره سعی کنید به کمک خط‌کش و کاغذ پاسخ پرسش را بیابید. احتمالاً با پیدا کردن چند نقطه به چیزی شبیه به شکل ۶ می‌رسید.

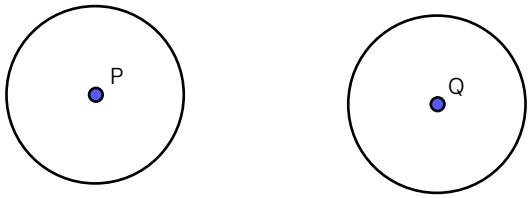


شکل ۶

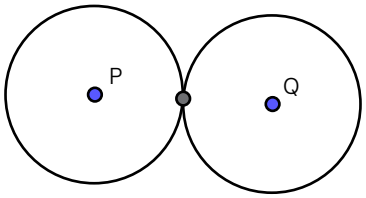
بله! پاسخ، دو خط موازی با فاصلهٔ ۱ سانتی‌متر از خط l است.

۳. مساوات برای دو نقطه

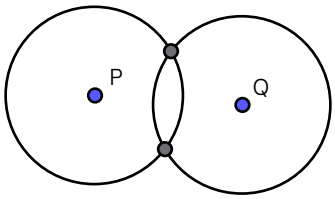
دو نقطهٔ P و Q را روی صفحه در نظر بگیرید. اگر بپرسیم: «از میان همهٔ نقطه‌های روی صفحه، آن‌هایی که فاصله‌شان با P و Q برابر ۱ سانتی‌متر است، کدام‌ها هستند؟» پاسخ بی‌مزه می‌شود. کافی است دایره‌ای به شعاع ۱ واحد را حول هر یک از این نقطه‌ها رسم کنیم. با توجه به فاصلهٔ دو نقطه، پاسخ یا دو نقطه است یا یک نقطه یا هیچ نقطه (شکل‌های ۷، ۸ و ۹).



شکل ۷



شکل ۸

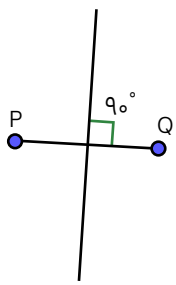


شکل ۹

بنابراین بیایید سؤال را کمی عوض کنیم.

پرسش سوم: «از میان همهٔ نقطه‌های روی صفحه، کدام نقطه‌ها هستند که میان P و Q فرقی نمی‌گذارند؟ یعنی نقطه‌هایی که فاصله‌شان از P برابر باشد با فاصله‌شان از Q.»

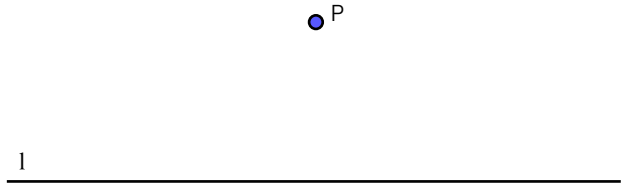
واضح است که یکی از این نقطه‌ها، نقطهٔ وسط P و Q است. حال اگر از این **مکانی** که به یک اندازه به P و Q توجه کرده است، در **جهتی** که به یک اندازه به P و Q توجه می‌کند حرکت کنیم، تعداد زیادی نقطه به دست می‌آیند که همگی مساوات را میان P و Q رعایت می‌کنند. اما کدام جهت است که میان P و Q فرقی نمی‌گذارد؟ بله! جهتِ عمود بر پاره‌خط PQ. آری! عمود منصف پاره‌خط PQ میان این دو نقطه فرقی نگذاشته و پاسخ پرسش است.



شکل ۱۰

۴. مساوات برای یک نقطه و یک خط

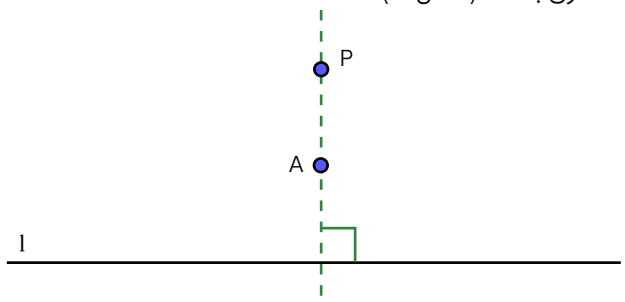
این بار نقطهٔ P و خط l را در نظر بگیرید (شکل ۱۱).



شکل ۱۱

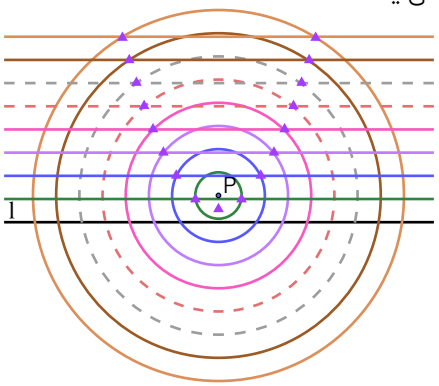
پرسش چهارم: «از میان همهٔ نقطه‌های در صفحه، کدام نقطه‌ها هستند که میان P و l فرقی نمی‌گذارند؟ یعنی نقطه‌هایی که فاصله‌شان از P برابر باشد با فاصله‌شان از l.»

برای پاسخ به این پرسش مدتی وقت بگذارید و سعی کنید به کمک خط‌کش حدود ۱۰ نقطه از چنین نقطه‌هایی را بیابید. واضح است که یک نقطه، نقطهٔ A است و همچنین پاسخ نهایی باید متقارن باشد (شکل ۱۲).



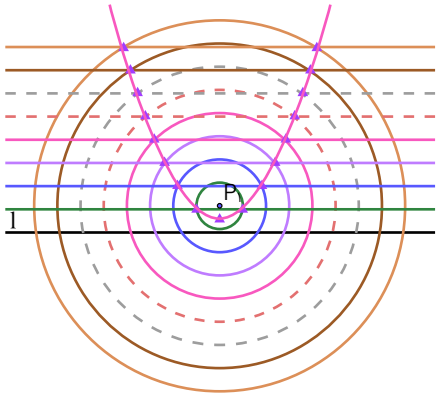
شکل ۱۲. نقطهٔ A از نقطهٔ P و خط l به یک فاصله است و خط چین سبزرنگ محور تقارن شکل است.

همچنین نقطه‌های زیرِ خط l، به l نزدیک‌ترند تا به P و بنابراین هرچه هست، بالای خط l است. به کمک موارد ۱ و ۲ شکل ۱۳ به‌دست می‌آید.



شکل ۱۳

دایره‌ها نقطه‌هایی با فاصلهٔ ۱ واحد، ۲ واحد و ... ۸ واحد از نقطهٔ P را نشان می‌دهند. خط‌های موازیِ خط l نیز نقطه‌هایی با فاصله‌های ۱ واحد، ۲ واحد و ... ۸ واحد از l را نمایش می‌دهند. در این شکل خط آبی‌رنگ نشان‌دهندهٔ همهٔ نقطه‌هایی است که از خط l به فاصلهٔ ۲ واحد قرار دارند و دایرهٔ آبی‌رنگ نیز همهٔ نقطه‌هایی را نشان می‌دهد که از نقطهٔ P، ۲ واحد فاصله دارند. بنابراین از اشتراک خط و دایرهٔ هم‌رنگ، دو نقطه به‌دست می‌آید که میان خط و نقطهٔ اولیه فرقی نمی‌گذارند. به همین صورت در شکل ۱۳ هفده نقطه را یافته و با مثلث‌های بنفش آن‌ها را نمایش داده‌ایم. سپس با به‌دست‌آوردن نقطه‌های دیگر منحنی شکل ۱۴ حاصل می‌شود.



شکل ۱۴

به این شکل سهمی می‌گویند. بنابراین سهمی شکلی است که میان یک نقطه و یک خط فرقی نمی‌گذارد و مساوات را میان آن‌ها رعایت می‌کند.

۵. مساوات برای دو خط

فرض کنید دو خط l و h داده شده‌اند.

پرسش پنجم: «از میان همهٔ نقطه‌های روی صفحه، کدام نقطه‌ها میان l و h فرقی نمی‌گذارند؟

دو خط l و h را یک بار موازی و یک بار متقاطع در نظر بگیرید و سعی کنید پاسخ این پرسش را خودتان بیابید.»

۶. مساوات برای یک نقطه و یک دایره

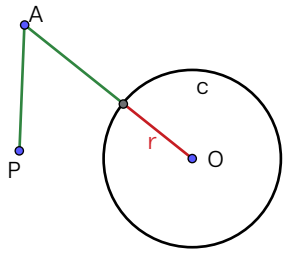
فرض کنید نقطه‌ای به نام P و دایره‌ای به نام c داده شده‌اند. مرکز و شعاع این دایره را به ترتیب O و r بنامید.

پرسش ششم: «از میان همهٔ نقطه‌های روی صفحه، کدام نقطه‌ها میان P و c فرقی نمی‌گذارند؟»

اصلاً فاصلهٔ یک نقطه از یک دایره یعنی چه؟ مثل قبل فاصله یعنی **طول کوتاه‌ترین پاره‌خطی که نقطه را به دایره وصل می‌کند.** بعداً ثابت می‌شود که این پاره‌خط همان پاره‌خطی است که امتدادش از مرکز دایره می‌گذرد. اکنون برای پاسخ به پرسش ششم، با توجه به قرارگیری یک نقطه و یک دایره روی صفحه، چهار حالت را بررسی می‌کنیم:

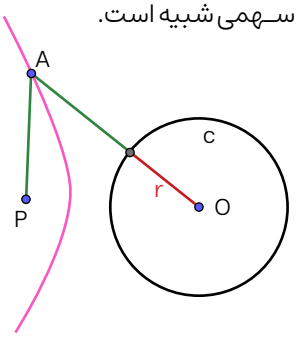
الف) حالتی که نقطه بیرون از دایره است

در شکل ۱۵ فاصلهٔ نقطهٔ A از دایرهٔ c با فاصلهٔ نقطهٔ A از نقطهٔ P برابر است. اگر شعاع دایره را به این طول بیفزاییم، پاره‌خط AO به‌دست می‌آید. بنابراین همیشه داریم: AP+r=AO.



شکل ۱۵

مثلاً اگر شعاع دایره برابر ۲ واحد باشد، برای دو نقطهٔ داده‌شدهٔ P و Q به دنبال نقطه‌هایی هستیم که همیشه ۲ واحد به P نزدیک‌ترند تا به O. این نقطه‌ها نصفِ شکلی به نام **هذلولی** را می‌سازند که در نگاه اول به یک سهمی شبیه است.



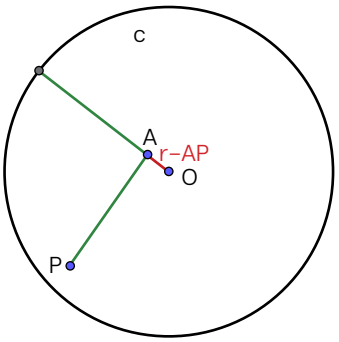
شکل ۱۶

ب) حالتی که نقطه روی دایره است

در این حالت پاسخ یک نیم‌خط است. چرا؟

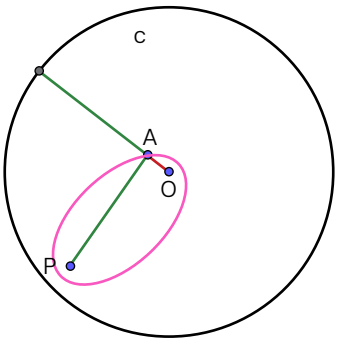
ج) حالتی که نقطه داخل دایره و غیر از مرکز دایره است

در شکل ۱۷ فاصلهٔ نقطهٔ A از دایرهٔ c با فاصلهٔ نقطهٔ A از نقطهٔ P برابر است و اگر این طول را از شعاع دایره کم کنیم، پاره‌خط AO به‌دست می‌آید. بنابراین همیشه داریم: r=AP+AO.



شکل ۱۷

مثلاً اگر شعاع دایره برابر ۲ واحد باشد، برای دو نقطهٔ داده‌شدهٔ P و O به دنبال نقطه‌هایی هستیم که مجموع فاصله‌شان از P و O همیشه برابر ۲ واحد باشد. این نقطه‌ها یک **بیضی** را تشکیل می‌دهند (شکل ۱۸). سعی کنید به کمک یک نخ، بیضی رسم کنید.



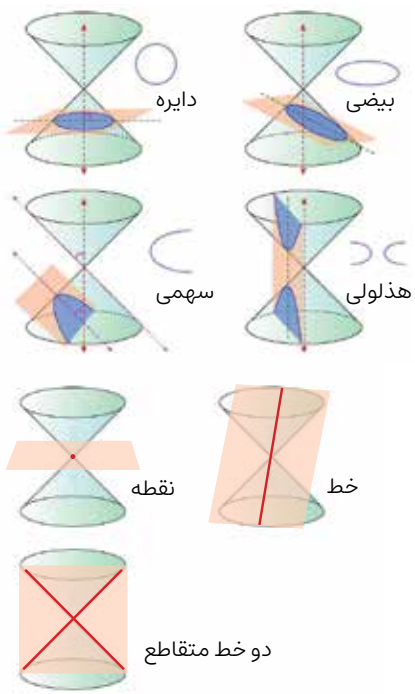
شکل ۱۸

د) حالتی که نقطه مرکز دایره است

این حالت را نیز شما بررسی کنید.

مقاطع مخروطی

ما شکل‌های متفاوتی را به کمک رعایت مساوات به‌دست آوردیم. می‌توان تمام این شکل‌ها را در یک شکل سه‌بعدی دید! شکل ۱۹ مقطع‌های یک مخروط کامل با یک صفحه را نمایش می‌دهد. دربارهٔ این شکل‌ها جست‌وجو کنید.



شکل ۱۹

راوی گزارش:
مهلا مهریزی
دانش‌آموز پایهٔ هفتم دبیرستان متوسطهٔ اول ایرانا، شهرستان ورامین

با راهنمایی و هدایت:
خانم نجمه قندالی
مدیر مدرسه

و

خانم محدثه قلی‌کُرد
دبیر ریاضی



کافه بستنی y و x

همه‌چیز از یک جشن ساده شروع شد «جشن دههٔ ریاضی»



بـاز آبان شـده بـود و حال و هوای مدرسـه و بوی پاییز، با هم ترکیب قشنگی ساخته بود. بوی نارنج حیاط مدرسـه هوش از سر بچه‌ها می‌بـرد. بـاز هم یک صبـح دیگـر و صبحگاه جذاب مدرسه، اما این‌بار با همهٔ صبحگاه‌ها فرق داشـت. خانم قندالی، مدیر مدرسـه با کلی بن کافه به اسـتقبال بچه‌ها آمد و اعلام کـرد که به مناسـبت دههٔ ریاضیـات بچه‌ها می‌تواننـد کلاس به کلاس به کافهٔ مدرسـه بروند و سـفارش بدهند.

از صبـح دل تـو دل کسـی نبـود کـه نوبـت کلاسـمان بشـود و بـا بچه‌ها برویـم کافه. هرچند دقیقه همهمه می‌شد و بین بچه‌ها اختـلاف نظر بود که چـی انتخاب کنند و کلی نقشـه که کجا بشـینند تا صندلی‌هایشـان کنـار هم باشـد و بتوانند از خاطـرات دو روز آخر هفته تعریف کنند. بالاخره سـاعت دوم شـد و انتظارها به پایان رسـید. ما قرار شد با دبیر ریاضی‌مان، خانم قلی‌کُرد به کافه بریم.

خانـم قلی‌کرد که وارد کلاس شـد گفت: «بچه‌ها بـرای اینکه راحت‌تر بریـم کافه و مزاحم بقیهٔ کلاس‌ها نشـیم، ازتون می‌خوام گروه‌های درسـی‌تون رو تشـکیل بدید و گروه به گروه برید سمت کافه.»

و از آنجـا کـه تعـداد بچه‌ها زیاد بود، بـه نماینـدهٔ گروه‌هایمان نفری یـک برگـه داد تا نمایندهٔ هر گروه سـفارش‌های گروهـش را بگیرد و بعـد تحویل مسـئول کافه بدهد.

بعـد از کلـی ذوق و شـوق وارد کافـه شـدیم. تازه متوجه شـدیم که کافه برای جشـن ریاضی حسـابی تزئین شـده است. روی شیشه‌ها علامت‌های جمع و تفریق و ضرب چسـبانده بودند. روی تختهٔ بزرگ کنار کافه هم نوشـته شـده بـود: «امروز سـفارش‌ها فقط به‌صورت گروهی و خلاصه‌شـده پذیرفته می‌شـود.»

زیـرش هم با رنگ قرمز نوشـته شـده بود: «هرسـفارش یک عبارت است.»

هرگروه سر جای خودش نشست و همهمه‌ها بالا رفت. خانم قلی‌کرد به هر گروه یک منو داد. منوی کافه هم انگار از جشن ریاضی بی‌نصیب نبود و شـکل و شـمایلش تغییر کرده بود. از منوهـای هرروزه تبدیل شده بود به پنج کارت رنگی پر از شکل‌های هندسی که روی هرکدام یک اسـم نوشته شـده بود. پایین هر کارت هم یک حرف کوچک انگلیسی بـود. اما بچه‌ها فقط به فکر انتخاب کردن و مشـورت با دوستانشـان بودنـد و انـگار بقیهٔ جزئیات برایشـان مهم نبود. مدیر مدرسـه برای



همه سنگ تموم گذاشته بود. منو کافه این‌بار پر بود: «بستنی x، آب‌میوه y، فالوده z، آب‌میوه بستنی yx و فالوده‌بستنی zx»
هرکسی سؤالی داشت:

- خانم بستنیش چیه؟
- خانم چندتا می‌تونیم انتخاب کنیم؟
- خانم ...

سؤال‌های بچه‌ها تمامی نداشت و صدای شوخی و خنده‌هایشان کافه را پر کرده بود. خانم معلم گفت: «بچه‌ها یه مدل بستنی داریم و فقط هم یه انتخاب دارید. دقت کنید که وقتی سفارشاتون ثبت می‌شه دیگه نمی‌تونید تغییر بدید.»
رها که همیشه چندتا چندتا خوراکی می‌خورد و به شکموی کلاس معروف بود، گفت: «خانم می‌شه فالوده‌بستنی بگیریم، ولی به‌جای اینکه با هم بیارن، یه فالوده بیارن و یه بستنی.»
همهٔ بچه‌ها با هم خندیدن و گفتند اینجا هم دست از شکموبودن برنمی‌دارد. همه مشغول انتخاب شدند و از دوستانشان مدام سؤال می‌کردند. تا اینکه خانم معلم گفت: «بچه‌ها! نمایندهٔ هر گروه بایسته و سفارش گروهش رو اعلام کنه.»
و از **مریم** خواست تا همهٔ سفارش‌ها را روی تختهٔ کنار کافه که جای نوشتن تک بیت‌های **مولانا** و **سعدی** بود، یادداشت کند تا سفارش کسی از قلم نیفتد.
زهرا اولین نفر داوطلب شد و گفت: «خانم گروه ما یه بستنی داره، یه آب‌میوه، یه بستنی و یه فالوده.»
مریم گفت: «زهرا یه بستنی، یه آب‌میوه یه بستنی چیه؟! خب بگو دوتا بستنی و یه آبمیوه... من می‌خوام بنویسم!»
همه یک صدا گفتند: «آره بدویید دیگه!...»
مریم گفت: «بچه‌ها برای اینکه زودتر سفارشامون آماده بشه و بتونیم بعدش کلی بازی کنیم، هر گروه لطفاً سفارشارو جمع بزنه و خیلی خلاصه و ساده به من اعلام کنه.»



سفارش‌ها شروع شدند:

- یه فالوده‌بستنی، دوتا آب‌میوه، یه بستنی
- دوتا آب‌میوه‌بستنی، دوتا بستنی
- ...

مریم دانه‌به‌دانه و گروه‌به‌گروه سفارش‌ها را روی تخته نوشت. بعد با صدای بلند گفت: «بچه‌ها تموم شد؟ کسی نمی‌خواد سفارش رو تغییر بده؟ من می‌خوام جمع بزنم‌ها تا برم سفارش‌هارو اعلام کنم.»

همهٔ بچه‌ها یک‌صدا گفتند: «نه!» و از مریم خواستند زودتر شروع کند به جمع‌زدن سفارش‌ها. مریم شروع کرد به شمارش... ۲تا اینجا و ۳تا اینجا، پس روی هم می‌شه ۵ تا بستنی... مریم بعد از جمع‌زدن سفارش‌ها رفت و سفارش‌ها را به مسئول کافه تحویل داد. همان‌طور که بچه‌ها مشغول صحبت بودند خانم معلم به بچه‌ها گفت: «دخترا شما اصلاً به منوهای جدید کافه دقت کردید؟ چه فرقی کردن؟»

هستی گفت: «خانم خب منوها جدا جدا شدن پر از شکل‌های هندسی شدن و یه حرف انگلیسیم روشون نوشته شده.»

بچه‌ها تازه آن موقع بود که نظرشون جلب شد و گفتند: «آره!...»

- بچه‌ها نگاه کنید، مثلاً نوشته بستنی=x و آب‌میوه =y و...

تازه آن‌موقع بود که سؤال‌ها شروع شدند:

- خانم برا چی اینجوری نوشته شده ...
- خانم یعنی چی اصلاً؟!
- خانم الان مثلاً من می‌تونستم بگم یه x می‌خوام؟

زهره از آن طرف با خنده گفت: «پس برای منم یه xy لطفاً!»

بچه‌ها تازه از این طور سفارش‌دادن خوششان آمده بود و شروع کردند به اینکه با حرف‌های انگلیسی سفارش بدهند.

خانم قلی‌کرد گفت: «بچه‌ها حالا موافقید هر گروه سفارش‌هاش رو یه مدل دیگه و با حرف‌های جدید به دوستانش اعلام کنه؟»

همه یک صدا موافقت کردند. بازی این‌طور بود که هر کس بلند می‌شد و سفارشش را می‌گفت. آن‌وقت همهٔ بچه‌ها یک‌صدا سفارش‌های آن گروه را به‌صورت خلاصه اعلام می‌کردند.

گروه یک: «یه ایکس و یه وای و یه ایکس و یه ایکس وای.»

همهٔ بچه‌ها یک‌صدا گفتند: «پس می‌شه دوتا ایکس و یه وای و یه ایکس وای.»

بازی همین‌طور ادامه داشت و تختهٔ کنار کافه پر شده بود از عبارت‌هایی که بچه‌ها سفارش داده بودند. بعد از اتمام سفارش‌ها خانم معلم گفت: «بچه‌ها این حرف‌های انگلیسی شما رو یاد کدوم درس ریاضی می‌ندازه؟»

بچه‌ها کمی فکر کردند و بعد یک‌صدا گفتند: «خانم متغیرها! ما توی ریاضی به جای متغیرها از این حرف‌ها استفاده می‌کردیم.»

خانم معلم با سؤالاتش هر لحظه یک علامت سؤال در ذهن بچه‌ها درست می‌کرد و با هر سؤالش چند ثانیه بچه‌ها رو به سکوت و فکرکردن وامی‌داشت. سؤال بعدی خانم معلم همه رو شوکه کرد...

- چرا ما اومدیم سفارشا رو با هم جمع کردیم؟ چرا نگفتیم یه بستنی، یه آب‌میوه، یه بستنی، یه...

نرگس گفت: «خب خانم ساده‌تر شد دیگه. خیلی سخته که بخوایم دونه‌به‌دونه سفارش بدیم.»

خانم معلم که از جواب‌دادن بچه‌ها لذت می‌برد، سؤال بعدی را با هدف دیگری مطرح کرد:

- بچه‌ها شما توی جمع‌کردن سفارشا چه چیزهایی رو با هم جمع کردید؟

بچه‌ها یک‌صدا گفتند: «خب خانم معلومه بستنی با بستنی جمع شد، آب‌میوه با آب‌میوه ...»

زهرا گفت: «خب خانم می‌تونیم بگیم توی بازی که با هم انجام دادیم، حرف‌های انگلیسی رو با هم جمع کردیم؟ یعنی ایکس با ایکس، وای با وای و...»

یلدا در ادامهٔ حرف زهرا گفت: «خانم پس می‌تونیم بگیم ما چیزایی رو با هم جمع کردیم که از یه جنس‌بودن؟ شبیه به هم بودن؟»

خانم معلم گفت: «آفرین به شما بچه‌ها، دقیقاً همین‌طوره. ما اومدیم چیزهایی رو که شبیه به هم بودند با هم جمع کردیم تا به یه عبارت ساده‌تر برسیم.»

رها گفت: «خب خانم اگه این‌طوره، پس چرا ما ایکس رو با ایکس‌وای جمع نکردیم؟ مگه اینا شبیه هم نیستن؟»

مهسا در جواب رها گفت: «خب رها دقت کن دیگه. مگه ما توی سفارشا بستنی و آب‌میوه‌بستنی رو با هم جمع کردیم که بتونیم ایکس رو با ایکس‌وای جمع کنیم؟»

همهٔ بچه‌ها با هم یک‌صدا گفتند: «پس خانم ما چیزایی رو با هم جمع می‌کنیم که دقیقاً شبیه به هم باشن.»

معلم که از پاسخ درست و نکته‌سنجی بچه‌ها به وجد آمده بود گفت: «همون‌طور که ما توی کافه سفارش‌های شبیه به هم رو با هم جمع کردیم تا ساده‌تر بشن، توی ریاضی هم متغیرهایی رو که شبیه به هم هستند با هم جمع می‌کنیم تا یک عبارت جبری ساده داشته باشیم.»

بچه‌ها تازه آن وقت بود که راز نوشتهٔ روی تخته را درک کردند: «هر سفارش یک عبارت است.»

سفارش‌هایی با طعم ریاضی رسیدند و بچه‌ها خوش‌حال از اینکه یکی دیگر از کاربردهای ریاضی را در زندگی کشف کردند.

عددهای باینری



جواد کلاه‌چی

شاید تابه‌حال عبارت «عددهای باینری» به گوشتان نخورده باشد یا به آن توجه نکرده باشید، اما قطعاً هر روز دارید از آن‌ها استفاده می‌کنید؛ تمامی گوشی‌ها، رایانه‌ها و قطعه‌های الکترونیکی به کمک عددهای باینری کار می‌کنند. خب اول ببینیم کی این عددها را اختراع کرد؟ عددهای باینری همان عددهای صفر و یک هستند. خیلی سال پیش آدم‌ها فهمیدند می‌شود فقط با دو علامت «۰» و «۱» همهٔ عددهای دنیا را درست کرد:

عدد ۱: می‌شود ۱.

عدد ۲: می‌شود ۱۰ (یعنی یک «دو» و صفر «یک»).

عدد ۳: می‌شود ۱۱.

عدد ۴: می‌شود ۱۰۰.

این روش را ریاضی‌دانی خیلی باهوش به اسم **لایب‌نیتس** کشف و مرتب کرد. بعدها وقتی آدم‌ها رایانه ساختند، دیدند که دستگاه‌ها خیلی راحت می‌توانند «خاموش = ۰» و «روشن = ۱» را بفهمند. برای همین همهٔ رایانه‌ها و تلفن‌های همراه با همین صفر و یک کار می‌کنند. یعنی ما هر چیزی که توی گوشی می‌بینیم (عکس، فیلم یا بازی)، در واقع پشتش یک عالمه صفر و یک پنهان شده‌اند.

چرا باینری درست شد؟

ما آدما معمولاً با ۱۰ تا عدد (۰ تا ۹) می‌شماریم، چون ۱۰ تا انگشت داریم. ولی دانشمندان فکر کردند: «اگر فقط ۲ تا عدد (۰ و ۱) داشته باشیم، آیا باز هم می‌توانیم همه چیز را بشماریم؟» جوابش این بود: «بله.»

چرا باینری برای رایانه خوب است؟

رایانه نمی‌تواند مثل ما فکر کند. فقط بلد است برق هست یا برق نیست» را بفهمد. برق هست = ۱ و برق نیست = ۰.

پس باینری دقیقاً مثل زبان خودش است. برای همین است که همهٔ عکس‌ها، صداها و بازی‌ها آخرش به صفر و یک تبدیل می‌شوند.



جایگاه‌ها در باینری

در عددهای معمولی (ده‌دهی)، هر جایگاه ۱۰ برابر می‌شد:

- یکی‌ها
- ده تایی‌ها
- صد تایی‌ها
- هزار تایی‌ها
- و...

در باینری (دوتایی)، هر جایگاه ۲ برابر می‌شود:

- جایگاه اول = ۱
- جایگاه دوم = ۲
- جایگاه سوم = ۴
- جایگاه چهارم = ۸
- جایگاه پنجم = ۱۶
- جایگاه ششم = ۳۲
- جایگاه هفتم = ۶۴
- جایگاه هشتم = ۱۲۸

و همین‌طور ادامه می‌دهد.

مثال ۱. عدد باینری ۱۱۰۱ معادل چه عدد ده‌دهی است؟

بیایم از راست به چپ نگاه کنیم:

رقم اول (راست‌ترین): ۱ × ۱ = ۱

رقم دوم: ۰ × ۲ = ۰

رقم سوم: ۱ × ۴ = ۴

رقم چهارم: ۱ × ۸ = ۸

حالا همه رو جمع می‌کنیم: پس ۱۱۰۱ باینری = ۱۳ ده‌دهی

خب حالا فرض کنید می‌خواهیم عددی را بر اساس باینری بنویسیم. آن وقت چه عددهایی را باید جمع کنیم تا به عدد مورد نظر برسیم؟ قطعاً روش‌های راحت‌تری هم وجود دارند.

روش اول: روش تبدیل عدد به باینری (زبان ساده)

فرض کنید می‌خواهید عددی مثل ۱۳ را به باینری بنویسید:

۱. همیشه از عددهای ۲ شروع می‌کنیم:

۱ - ۲ - ۴ - ۸ - ۱۶ - ۳۲ - ...

(هر دفعه دو برابر می‌شوند.)

۲. نگاه می‌کنیم بزرگ‌ترین عددی که از ۱۳ کوچک‌تر یا مساوی با آن می‌شود، چه عددی است؟ ۱۶ بزرگ است، پس می‌رویم سراغ ۸؛ توی جای ۸ یک «۱» می‌گذاریم.

۳. حالا ۱۳ منهای ۸ می‌شود ۵. بزرگ‌ترین عددی که توی فهرستمان توی ۵ جا می‌شود چه عددی است؟ عدد ۴. پس توی جای ۴ هم یک «۱» می‌گذاریم.

۴. حالا ۵ منهای ۴ می‌شود ۱.

عدد ۲ نمی‌تواند جا بشود، پس آنجا «۰» می‌گذاریم.

عدد ۱ جا می‌شود، پس آنجا «۱» می‌گذاریم.

در نتیجه داریم:

جایگاه‌ها: ۸ - ۴ - ۲ - ۱

باینری ۱۳ = ۱۱۰۱

(یعنی ۸ + ۴ + ۰ + ۱ = ۱۳)

روش دوم: تبدیل عدد ۱۳ به باینری با تقسیم بر ۲:

۱. عدد ۱۳ را بر ۲ تقسیم می‌کنیم (۲÷۱۳): خارج قسمت ۶ و باقی‌مانده ۱ می‌شود.

۲. عدد ۶ را بر ۲ تقسیم می‌کنیم (۲÷۶): خارج قسمت ۳ و باقی‌مانده ۰ می‌شود.

۳. عدد ۳ را بر ۲ تقسیم می‌کنیم (۲÷۳): خارج قسمت ۱ و باقی‌مانده ۱ می‌شود.

۴. عدد ۱ را بر ۲ تقسیم می‌کنیم (۲÷۱): خارج قسمت ۰ و باقی‌مانده ۱ می‌شود.

حالا باقی‌مانده‌ها را از پایین به بالا می‌نویسیم: ۱۱۰۱. پس عدد ۱۳ در باینری معادل ۱۱۰۱ است.

چهار عمل اصلی در باینری

جمع باینری

در جمع باینری، فقط با ۰ و ۱ سروکار داریم. قاعده‌ها خیلی ساده هستند:

۰ + ۰ = ۰

۰ + ۱ = ۱

۱ + ۰ = ۱

۱ + ۱ = ۱۰

(یعنی «۰» می‌نویسیم و «۱» را می‌بریم به ستون بعدی؛ مثل ده‌دهی که ۹+۱ می‌شود ۱۰).

مثال ۲. حاصل جمع ۱۰۱ (ده‌دهی = ۵) با ۱۱ (ده‌دهی = ۳) را بنویسید.

$$\begin{array}{r} 101 \\ +011 \\ \hline 1000 \end{array}$$

توضیح

در ستون اول داریم: ۱+۱=۱۰. صفر را می‌نویسیم و یک را می‌بریم بالا.

در ستون دوم داریم: ۰+۱+ اون ۱ قرضی = ۱۰. صفر را می‌نویسیم و یک را می‌بریم بالا.

در ستون سوم داریم: ۱+۰+ اون ۱ قرضی = ۱۰. صفر را می‌نویسیم و یک را می‌بریم بالا.

در ستون جدید فقط همان «۱» می‌ماند.

نتیجه می‌شود: ۱۰۰۰ (که در ده‌دهی مساوی ۸ است).

تفریق باینری

تفریق هم مثل جمع ساده است، فقط گاهی باید «قرض بگیریم».

قاعده‌ها:

۰ − ۰ = ۰

۱ − ۰ = ۱

۱ − ۱ = ۰

۰ − ۱ = ۱ (با قرض گرفتن از ستون بعدی)

مثال ۳. حاصل ۱۰۱ (ده‌دهی = ۵) منهای ۱۱ (ده‌دهی = ۳) چه عددی می‌شود؟

$$\begin{array}{r} 101 \\ -011 \\ \hline 010 \end{array}$$

توضیح

در ستون اول داریم: ۱−۱=۰.

در ستون دوم داریم: ۰−۱ که نمی‌شود! پس از ستون بعدی (سمت چپ) قرض می‌گیریم. عدد سمت چپ (۱) تبدیل می‌شود به ۰ و این ستون ۲ می‌شود (که در باینری یعنی «۱۰»). حالا داریم: ۲−۱=۱

در ستون سوم، بعد از قرض گرفتن، ۰ می‌ماند: ۰−۰=۰.

در نتیجه پاسخ می‌شود: ۰۱۰ (که در ده‌دهی مساوی ۲ است).

ضرب باینری

عددهای باینری فقط ۰ و ۱ هستند، پس قوانین خیلی ساده‌اند:

رقم اول	رقم دوم	حاصل ضرب
۰	۰	۰
۰	۱	۰
۱	۰	۰
۱	۱	۱

یعنی وقتی ۱ ضرب ۱ شود، ۱ می‌شود و هر چیز دیگری ضرب شود، ۰ می‌شود.

روش ضرب مرحله‌ای

۱. مثل ضرب دهدهی، هر رقم را در هر رقم ضرب می‌کنیم.

۲. حاصل ضرب هر خط را یک خانه به چپ می‌بریم؛ مثل ضرب چند رقمی.

۳. جمع خط‌ها را انجام می‌دهیم.

مثال ۴. حاصل ضرب ۱۰۱×۱۱ را به دست آورید.

$$\begin{array}{r} 101 \\ \times\ 11 \\ \hline 101 \\ +1010 \\ \hline 1111 \end{array}$$

(۱×۱۰۱)

(۱×۱۰۱، یک خانه به چپ)

در نتیجه داریم: ۱۱۱۱ = ۱۱×۱۰۱

تقسیم باینری

تقسیم باینری شبیه تقسیم ده‌دهی است:

۱. عدد بزرگ‌تر را تقسیم می‌کنیم به اندازهٔ عدد کوچک‌تر (مقسوم علیه).

۲. اگر عدد در ستون فعلی کوچک‌تر بود، ۰ می‌گذاریم و به یک رقم بعدی می‌آوریم.

۳. اگر بزرگ‌تر یا مساوی بود، ۱ می‌گذاریم و از آن عدد کم می‌کنیم.

۴. ادامه می‌دهیم تا همهٔ رقم‌ها تمام شوند.

مثال ۵. حاصل تقسیم ۱۱۰۱ ÷ ۱۰ را به دست آورید.

$$\begin{array}{r|l} 1101 & 10 \\ -10 & 11 \\ \hline 10 & \\ -10 & \\ \hline 01 & \end{array}$$

(خارج قسمت)

(باقی‌مانده)

در نتیجه داریم: خارج قسمت = ۱۱ و باقی‌مانده = ۱.

کلاس آقای رهنما

راهبرد شروع با حل مسئلهٔ ساده‌تر

محمدتقی طاهری تنجانی

آقای **رهنما** (دبیر ریاضی): امروز می‌خواهیم با یکی دیگر از راهبردهای حل مسئله آشنا شویم. «راهبرد شروع با حل مسئلهٔ ساده‌تر» یکی از مهم‌ترین راهبردهای حل مسئله در ریاضیات است. در این روش وقتی با یک مسئلهٔ دشوار یا پیچیده روبه‌رو می‌شویم، ابتدا نسخه‌ای ساده‌تر از همان مسئله را بررسی می‌کنیم و بعد از اینکه راه‌حل نسخهٔ ساده‌شده را پیدا کردیم، الگو یا روش به‌دست آمده را به مسئلهٔ اصلی تعمیم می‌دهیم. این راهبرد برای زمانی است که مسئله نامعمول یا جدید باشد، یا محاسبه‌ها سنگین و پیچیده باشند، و یا الگوی مشخصی دیده نشود.

اجازه دهید با یک مثال مطلب را بیشتر توضیح بدهم. در نظر بگیرید که ۲۷ سکه داریم که همگی مشابه هم هستند و فقط وزن یکی از سکه‌ها از سایر سکه‌ها سبک‌تر است. ترازوی دوکفه‌ای هم داریم و با حداقل



چندبار وزن‌کردن می‌توانیم سکهٔ سبک‌تر را بیابیم.

مصطفوی: ۱۳تای آن را در یک کفه و ۱۳ تا را در یک کفهٔ دیگر قرار می‌دهیم و یکی بیرون می‌ماند. اگر کفه‌ها مساوی باشند، سکهٔ سبک‌تر همان است که بیرون ترازو مانده، و اگر یکی از کفه‌ها بالاتر باشد، سکهٔ سبک‌تر در آن کفه قرار دارد.

آقای رهنما: خب حالا اگر بخواهیم این روند را ادامه بدهیم، وزن‌کردن‌هایمان زیاد می‌شود؛ ما دنبال روشی با کم‌ترین وزن‌کردن هستیم. اجازه دهید مسئله را ساده‌تر کنیم و روشی را که به دست می‌آید، تعمیم دهیم.

فرض کنید تعداد سکه‌ها ۳ تا باشد که یکی از آن‌ها سبک‌تر است. با چند بار وزن‌کردن سکهٔ سبک‌تر مشخص می‌شود؟

حسینی: اگر همان ایدهٔ آقای مصطفوی را انجام دهیم، با یک بار وزن‌کردن سکه مشخص می‌شود. اگر در هر کفه یک سکه بگذاریم و کفه‌ها مساوی باشند، سکهٔ بیرون ترازو سبک‌تر است. وگرنه سکه‌ای که در کفهٔ سبک‌تر قرار گرفته سکهٔ سبک‌تر است.

آقای رهنما: آفرین! حالا اگر ۹ سکه داشته باشیم و یکی سبک‌تر باشد چطور؟

مصطفوی: آقا فهمیدم! ۹ سکه را به سه دستهٔ ۳تایی A، B و C تقسیم می‌کنیم. A را در یک کفه و B را در کفهٔ دیگر قرار می‌دهیم با یک بار وزن‌کردن مشخص می‌شود سکهٔ سبک‌تر در دستهٔ A، B یا C قرار دارد. حالا آن دسته که ۳ سکه دارد و یکی از آن‌ها سبک‌تر است را هم مثل حالتی که آقای حسینی گفتند وزن می‌کنیم تا سکهٔ سبک‌تر مشخص شود.

آقای رهنما: آفرین، یعنی در حالت ۹ سکه با حداقل ۲ بار وزن‌کردن سکهٔ سبک‌تر مشخص می‌شود. حالا اگر ۲۷ سکه باشد چطور؟

محمودی: فکر می‌کنم ایده را پیدا کرده‌ام. کافی است ۲۷ سکه را به سه دستهٔ ۹تایی A، B و C تقسیم کنیم. با یک بار وزن‌کردن و قراردادن A و B در کفه‌های ترازو متوجه می‌شویم که سکهٔ سبک‌تر در کدام دستهٔ A، B یا C قرار دارد. بعد همان کاری را انجام می‌دهیم که آقای مصطفوی توضیح دادند.

آقای رهنما: آفرین، یعنی حداقل با سه بار وزن‌کردن می‌توانیم سکهٔ سبک‌تر را پیدا کنیم. دیدید که ما مسئله را ساده‌تر کردیم و از حل مسئلهٔ ساده‌تر به ایدهٔ حل مسئلهٔ اصلی رسیدیم. حالا بیایید مسئلهٔ دیگری را بررسی کنیم. در یک صفحهٔ شطرنج ۸×۸ چند مربع وجود دارد؟

احمدی: آقا واضح است: ۶۴ تا.

مصطفوی: نه آقا درست نیست. علاوه بر تعداد مربعی که آقای احمدی گفت، مربع‌های ۲×۲ هم هستند.

حسینی: همین‌طور مربع‌های ۳×۳ و ...

آقای رهنما: توجه کنید مربع‌های موجود از ۱×۱ که تعدادشان ۶۴ تاست و بعد ۲×۲ و ۳×۳ تا ۸×۸ می‌تواند باشد، پس ما با مسئلهٔ ساده‌ای روبه‌رو نیستیم و باید الگویی برای مسئله پیدا کنیم. بیایید مسئلهٔ ساده‌تری را که با آن مرتبط است، بررسی کنیم. در یک صفحهٔ مربعی ۲×۲ چند مربع وجود دارد؟

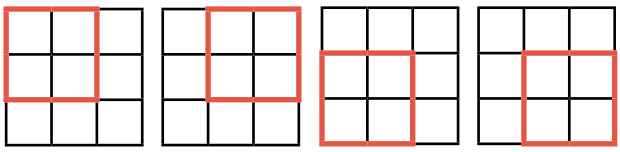
حسینی: آقا ۴ تا مربع ۱×۱ و یک مربع ۲×۲.

آقای رهنما: آفرین، حالا اگر صفحهٔ مربعی ۳×۳ باشد چطور؟

حسینی: آقا ۹ تا مربع ۱×۱ و ۴ تا مربع ۲×۲ و ۱ مربع ۳×۳.

آقای رهنما: آفرین! هر چند مربع‌های ۱×۱ و ۳×۳ واضح هستند، ولی مربع‌های ۲×۲ را باید مشخص کنیم. بیا پای تختهٔ کلاس و آن‌ها را مشخص کن.

حسینی (پای تابلو می‌رود): در هر حالت من مربع‌های ۲×۲ را مشخص کرده‌ام.



شکل ۱

آقای رهنما: کاملاً درست است. حتماً توجه دارید که ما برای تعداد مربع‌های صفحهٔ شطرنجی ۸×۸ نمی‌توانیم همهٔ شکل‌ها را رسم کنیم؛ چون تعدادشان زیاد است. پس باید الگویی برای این کار بیابیم. بیایید تا اینجا اطلاعاتمان را فهرست کنیم. به جدول ۱ نگاه کنید.

جدول ۱. تعداد مربع‌ها در صفحهٔ شطرنجی

ابعاد صفحهٔ شطرنجی	۱×۱	۲×۲	۳×۳	...
تعداد مربع‌ها	۱	۴+۱	۹+۴+۱	...

مصطفوی: فکر می‌کنم ایدهٔ محاسبه را پیدا کردم. برای شمردن تعداد مربع‌ها در هر حالت مربع یک عدد داریم. در تعداد مربع‌های صفحهٔ شطرنجی ۳×۳ ما 3^2 تا مربع ۱×۱ و 2^2 تا مربع ۲×۲ و 1^2 تا مربع ۳×۳ داریم.

آقای رهنما: آفرین! حالا می‌توانی تعداد مربع‌های صفحهٔ شطرنجی ۴×۴ را محاسبه کنی.

مصطفوی: 1^2 تا مربع ۴×۴، 2^2 تا مربع ۳×۳ و 3^2 تا مربع ۲×۲ و 4^2 تا مربع ۱×۱؛ یعنی: $4^2+3^2+2^2+1^2=30$.

آقای رهنما: آفرین، حالا می‌توانید تعداد مربع‌های صفحهٔ شطرنجی ۸×۸ را حساب کنید.

مصطفوی: آقا می‌شود: $8^2+\ldots+3^2+2^2+1^2$.

آقای رهنما: آفرین. البته این مجموع می‌شود ۲۰۴ تا و می‌دانید شمردن این تعداد مقدور نبود. حالا صفحهٔ شطرنجی به هر ابعادی باشد، می‌توانید با همین الگو تعداد مربع‌ها را به دست آورید.

خب فکر می‌کنم با این راهبرد بهتر آشنا شدید. برای تسلط بر این راهبرد و راهبردهای دیگر، باید مسئله‌های متنوعی را حل کنید. حالا بیاید این مسئله را حل کنیم: تعداد شما دانش‌آموزان در کلاس ۳۲ نفر است. حالا اگر در این کلاس هر نفر با همهٔ افراد دیگر فقط یک بار دست بدهد، تعداد دست‌دادن‌ها چند تاست؟

احمدی: آقا شمردن آن دشوار است و امکان دارد دقت نکنیم و یک نفر دوبار با نفر دیگر دست بدهد. خیلی شلوغ می‌شود!

آقای رهنما (می‌خندد): نه جانم هدفم این نیست که بلند شوید و هر نفر با بقیه دست بدهد. می‌خواهم با فکرکردن و یافتن یک الگو، جواب مسئله را پیدا کنید. مسئله را ساده‌تر کنید مثلاً فرض کنید ۳، ۴ یا ۵ نفر باشید.

محمودی: آقا در حالت سه نفر من با دو نفر دست می‌دهم. حالا اگر آن دو نفر هم با هم دست بدهند، کار دست‌دادن تمام می‌شود. جمعاً سه بار عمل دست‌دادن انجام می‌گیرد.

آقای رهنما: آفرین، حالا اگر ۴ نفر باشید چطور؟

محمودی: من با ۳ نفر دست می‌دهم و کنار می‌روم. حالا نفر دیگر با ۲ نفر دست می‌دهد و می‌رود کنار. دو نفر باقی‌مانده هم یک بار دست می‌دهند. پس تعدادش می‌شود: ۶=۱+۲+۳ حالت.

آقای رهنما: حالا می‌توانید همین الگو را برای ۳۲ نفر انجام بدهید.

مصطفوی: پس نفر اول با ۳۱ نفر و نفر دوم با ۳۰ نفر دست می‌دهد. بعد هم دو نفر باقی‌مانده یک عمل دست‌دادن را انجام می‌دهند که حاصلش می‌شود: $1+\ldots+29+30+31$.

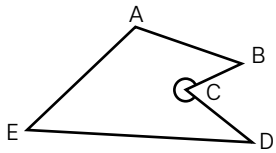
آقای رهنما: آفرین. این مجموع برابر است با ۴۹۶ حالت. البته راه‌های دیگری هم برای حل مسئله وجود دارند. مثلاً توجه کنید عمل دست‌دادن بین دو نفر انجام می‌شود. طبق اصل ضرب برای انتخاب نفر اول ۳۲ حالت و برای نفر دوم ۳۱ حالت وجود دارد. پس تعداد حالت‌ها می‌شود: ۳۱×۳۲. اما باید توجه داشت این عدد دو برابر عددی است که قبلاً به دست آورده‌ایم. دلیلش چیست؟

مصطفوی: عمل دست‌دادن بین دو نفر انجام می‌شود. لذا این عدد دو برابر عددی است که قبلاً به دست آورده‌ایم.

آقای رهنما: آفرین. همین‌طور که آقای مصطفوی گفتند، چون عمل دست‌دادن ترتیب خاصی ندارد، یک بار A با B و بار دیگر B با A دست داده و عمل یک بار انجام شده، ولی دوبار محاسبه شده است که باید حاصل ۳۱×۳۲ را به ۲ تقسیم کنیم تا با عدد قبلی یکسان شود. حالا بیایید مسئله‌ای را حل کنیم که بی‌ارتباط به مسئلهٔ دست‌دادن‌ها نیست. در یک ۱۰ ضلعی محدب چند قطر وجود دارد؟

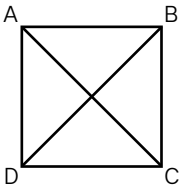
احمدی: چند ضلعی محدب یعنی چه؟

آقای رهنما: سؤال خوبی پرسیدی. چندضلعی‌هایی که همهٔ زاویه‌های داخلی‌شان کمتر از ۱۸۰ درجه باشند محدب هستند، ولی چندضلعی شکل ۲ محدب نیست، چون زاویهٔ C بیش از ۱۸۰ درجه است.



شکل ۲

البته حتماً می‌دانید که برای رسم قطر چندضلعی باید یک رأس را به رأس غیرمجاورش وصل کنیم. مثلاً در یک چهارضلعی محدب دو قطر داریم؛ مثل شکل ۳ که AC و DC قطر هستند.



شکل ۳

حالا برگردیم به مسئلهٔ خودمان. در یک ۱۰ ضلعی محدب چند قطر وجود دارد؟

محمودی: آقا قطر بین دو رأس رسم می‌شود، ولی دو رأس نباید مجاور باشند. درست است؟

آقای رهنما: بله همین‌طور است.

مصطفوی: آقا اگر بخواهیم شبیه مسئلهٔ دست‌دادن‌ها

عمل کنیم، می‌توانیم از رأس اول به ۷ رأس وصل کنیم؟

آقای رهنما: چطور؟

مصطفوی: به خود رأس و دو رأس مجاورش نمی‌توانیم وصل کنیم.

آقای رهنما: آفرین کاملاً درست است. ادامه بده.

مصطفوی: پس از هر رأس به ۷ رأس می‌شود وصل کرد تا تعداد قطر به دست آید. ۱۰ رأس داریم، پس تعداد قطرها می‌شود ۷×۱۰. این‌طور نیست؟

آقای رهنما: نه جانم! مثل عمل دست‌دادن که بین دو نفر انجام می‌گرفت و دوبار محاسبه می‌شد، اینجا هم هر قطر دوبار محاسبه شده است. پس باید ۷×۱۰ را بر دو تقسیم کنیم که می‌شود:

$$\frac{۷\times۱۰}{۲}=۳۵$$

دیدید چقدر مسئله‌ها به هم شبیه‌اند؟! شما با حل یک مسئله و آشنایی با راهبرد آن، برای حل مسئلهٔ بعدی آماده می‌شوید. هرچه مسئله‌های متنوع‌تری حل کنید، با شگردهای حل مسئلهٔ بیشتری آشنا می‌شوید.

حالا به عنوان آخرین مسئله برای این جلسه، محاسبه کنید مجموع عددهای فرد ۱ تا ۱۰۰۰ چقدر است؟ به شما فرصت می‌دهم درگیر حل مسئله شوید.

بچه‌ها دست به کار شدند و آقای رهنما با قدم‌زدن در کلاس و مشاهدهٔ حل بچه‌ها گفت: «شما باید مسئلهٔ ساده‌تر را حل کنید. عددهای فرد ۱ تا ۵ یا ۷ یا ۱۰ را حساب کنید تا به کشف یک قاعدهٔ کلی نائل شوید.»

احمدی: آقا ما چند تا از حالت‌های خاص را به دست آورده‌ایم. اجازه بدهید پای تخته بنویسیم و به کمک شما قاعده را پیدا کنیم.

آقای رهنما: بفرمایید.

احمدی تختهٔ کلاس را کاملاً پاک کرد و از سمت چپ، تساوی‌های زیر را نوشت:

$$۱+۳=۴$$

$$\underbrace{۱+۳}+۵=۴+۵=۹$$

$$\underbrace{۱+۳+۵}+۷=۹+۷=۱۶$$

$$\underbrace{۱+۳+۵+۷}+۹=۱۶+۹=۲۵$$

احمدی: آقا یک مورد هم کشف کردم: حاصل همهٔ موارد مربع کامل است.

آقای رهنما: آفرین. حالا ارتباطی بین این مربع کامل‌ها و مجموع پیدا کن.

مصطفوی: آقا به نظر می‌رسد تعداد عددهای فرد جمع‌شده در سمت چپ را به توان دو رسانده‌ایم. مثلاً در حالت $۲^۲=۳+۱$، عدد ۲ همان تعداد عددهای فرد ۱ و ۳ است و یا در حالت آخر، ۵ تا عدد فرد اولیه جمع شده‌اند و حاصل شده است ۲۵ و یا $۵^۲$.

آقای رهنما: آفرین. حالا با همین استدلال می‌توانید مجموع عددهای فرد ۱ تا ۱۰۰۰ را حساب کنید.

احمدی: واضح است: ۱۰۰۰ به توان دو!

آقای رهنما: نه جانم باید تعداد عددهای فرد ۱ تا ۱۰۰۰ را در نظر بگیری و نه تعداد کل عددها را!

محمودی: آقا ما ۵۰۰ تا عدد فرد داریم و ۵۰۰ تا عدد زوج. پس جواب مسئله می‌شود $۵۰۰^۲$ این‌طور نیست؟

آقای رهنما: آفرین. جواب مسئله می‌شود: $۵۰۰^۲$ و یا ۲۵۰۰۰۰.

خب فرصتمان برای امروز به پایان رسید. تعدادی تمرین برای منزل شما در نظر گرفته‌ام که با تفکر مستقل در مورد آن‌ها، مهارت بیشتری در استفاده از راهبرد شروع با حل مسئلهٔ ساده‌تر پیدا می‌کنید. مبصر کلاس برگه‌های تمرین را توزیع کنید.

تمرین

۱. ۲۷ سکه با ظاهر یکسان داریم که از نظر وزن یکی با سایر سکه‌ها متفاوت است (سبک‌تر یا سنگین‌تر است). با حداقل چند بار وزن‌کردن با یک ترازوی دو کفه می‌توان سکهٔ متفاوت را مشخص کرد؟

۲. حاصل‌جمع مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد ۳۶۰ برابر ۱۱۷۰ است. حاصل‌جمع معکوس‌های مقسوم‌علیه‌های ۳۶۰ چقدر است؟

۳. سه جعبهٔ «سیب»، «پرتقال» و «سیب و پرتقال» داریم. برچسب‌های روی آن‌ها اشتباه هستند. با برداشتن فقط یک میوه از یک جعبه چگونه می‌توان برچسب‌ها را اصلاح کرد؟

۴. روی محیط یک دایره ۲۰ نقطه مشخص شده است. با این نقطه‌ها چند وتر می‌توان رسم کرد؟

۵. مجموع عددهای طبیعی ۱ تا ۱۰۰۰ چقدر است؟



تصویرگر: فراز برازندگان

حکایت‌های علمی و خواندنی

در اعماق زمین

جعفر ربانی

جهان امروز ما را مهندسان ساخته‌اند و همچنان می‌سازند؛ مهندسانی از همهٔ رشته‌ها: از برق و عمران و شیمی و پزشکی و صنایع گرفته تا کشاورزی و رایانه و هوافضا و معدن و... آن‌ها شبانه‌روز روی زمین، در اعماق زمین، روی دریاها یا در عمق آن‌ها و در فضاهای نزدیک یا بسیار دور مشغول کارند. اما باید دانست که هیچ‌کس نمی‌تواند بدون دانستن ریاضیات در سطح عالی و دانشگاهی مهندس شود. ریاضیات زبان علم و فناوری است و بدون آن هیچ کاری در این زمینه پیش نمی‌رود.

اکنون می‌خواهم برایتان از معدن بگویم که چه بسا، شما که اکنون این مجلهٔ ریاضی را می‌خوانید، روزی مهندس معدن شوید و به اعماق زمین بروید. البته می‌دانیم که همهٔ معدن‌ها زیر زمین نیستند و بسیاری از آن‌ها «روباز» یعنی روی زمین هستند؛ مثل معدن‌های مس سرچشمه در کرمان. در ادامه نخست قطعه‌ای کوتاه از **ژول ورن** می‌آورم که تخیلی است و حدود ۱۵۰ سال پیش نوشته شده است:

تاکنون هیچ‌کس از عمق بیش از ۳/۳ کیلومتر در زمین پایین‌تر نرفته است، در صورتی که شعاع کرهٔ زمین ۶۴۰۰ کیلومتر است. هنوز تا مرکز کرهٔ زمین راه بسیار دور و درازی مانده است. با وجود این ژول ورن، با آن قدرت ابداعی که داشت، قهرمانان کتاب خود به نام «مسافرت به مرکز زمین»، یعنی پروفسور **لیدن بروک** و برادرزاده‌اش **اکسل** را به اعماق دوردست زمین فرستاد. او در زمان خود، حادثه‌های حیرت‌انگیزی را که برای این مسافران زیر زمین پیش آمده بود، توصیف کرده که از جملهٔ آن‌ها «افزایش تراکم هوا» است.

می‌دانید که هر چه از سطح زمین بالا برویم، هوا به سرعت رقیق می‌شود. خوب است بدانید که تراکم هوا- هرچه بالاتر برویم- با تصاعد هندسی کم می‌شود، در حالی که ارتفاع با تصاعد عددی زیاد می‌شود. برعکس، وقتی از سطح دریا پایین برویم، هوا تحت فشار طبقه‌های بالایی هر لحظه متراکم‌تر می‌شود. حالا صحبت‌های لیدن بروک و عموزاده‌اش را در عمق ۴۸ کیلومتری زمین بشنویم.

عمو گفت:
«نگاه کن ببین فشارسنج چه درجه‌ای را نشان می‌دهد.»
- فشار بسیار زیاد است.
- حالا خواهی دید که اگر آهسته پایین برویم، به‌تدریج به تراکم (فشار) هوا عادت می‌کنیم و هیچ آسیبی نمی‌بینیم.
- اگر درد گوش را به حساب نیاوریم.
- مهم نیست.
من تصمیم گرفتم به عمویم اعتراض نکنم و گفتم:
«بسیار خب عمو، بودن داخل هوای پرفشار حتی مطبوع و خوشایند است. شما متوجه شده‌اید که صدا در این هوای متراکم چقدر شدید پخش می‌شود.
- البته. در این هوای متراکم حتی آدم ناشنوا می‌تواند بشنود.
حالا به قطعهٔ دیگری توجه کنید که واقعی است و تخیلی نیست و حدود صد سال پیش نوشته شده است:
«چه کسی بیش از همه به مرکز زمین نزدیک شده است؟ البته کارگران معادن. ما می‌دانیم که عمیق‌ترین چاه جهان در آفریقای جنوبی حفر شده است. عمق این چاه بیش از ۳ کیلومتر است. منظور ما عمقی که سر متهٔ حفاری به آن رسیده، یعنی ۷/۵ کیلومتر، نیست، بلکه پایین رفتن خود آدم‌ها به عمق زمین است.»
دکتر **لوک دورتن**، نویسندهٔ فرانسوی، دربارهٔ چاه معدن «مورو ولخو» به عمق ۲۳۰۰ متر که خودش به ته آن رفته است چنین حکایت می‌کند:
«معدن طلای مورو ولخو در ۴۰۰ کیلومتری رودوژانیرو (آرژانتین) واقع است. ما پس از ۱۶ ساعت مسافرت با راه‌آهن در منطقهٔ سنگلاخی به دره‌ای عمیق سرازیر شدیم که جنگل‌های انبوه از هر سو آن را احاطه کرده بودند. در آنجا یک شرکت انگلیسی رگه‌های طلا را از چنان عمقی استخراج می‌کرد که هرگز انسان تا آن عمق پایین نرفته بود.
چاه معدن به صورت پلکانی مرکب از شش پله یا مرحله - چاه‌های قائم و سپس تونل افقی - در امتداد رگه‌های طلا حفر شده بود. لباس کارکتانی و نیم‌تنهٔ چرمی پوشیدیم. گفتند احتیاط کنید زیرا کوچک‌ترین سنگی که از بالا به چاه بیفتد ممکن است کسی را زخمی کند. یکی از سرمهندسان معدن ما را راهنمایی می‌کرد. به نخستین تونل که چراغ‌های پرنور در آن می‌سوخت وارد شدیم. باد بسیار سردی با دمای چهار درجه برای خنک‌کردن اعماق چاه می‌وزید و ما از سرما می‌لرزیدیم.
سوار یک قفس فلزی شدیم و به عمق یک چاه ۷۰۰ متری رفتیم و به دومین تونل رسیدیم. سپس باز وارد دومین چاه شدیم. هوا گرم شد. سرمهندس گفت اینجا که هستیم پایین‌تر از سطح دریاست. از سومین چاه به بعد هوا بسیار گرم شد، طوری که صورت‌هایمان می‌سوخت. عرق‌ریزان و با کمر خم زیر سقف کوتاه تونل پیش رفتیم. صدای غرش رعدآسای ماشین‌ها و متهای حفاری به گوش می‌رسید. کارگرانی را دیدیم که لخت و برهنه در میان گرد و خاک فراوان کار می‌کردند. قطره‌های عرق از سر تا پایشان روان بود و پی‌درپی شیشه‌های آب را به یکدیگر می‌دادند. به تکه‌های سنگ معدن طلا که تازه کنده شده بودند، نمی‌شد دست زد. حرارت آن‌ها ۵۷ درجه بود پرسیدیم: روزی چقدر طلا استخراج می‌کنید؟ گفتند: روزی در حدود ۱۰ کیلوگرم. منظورشان این بود که از انبوه سنگ‌هایی که به بالا می‌بردند، پس از تصفیه و فراوری ۱۰ کیلو طلا به دست می‌آمد.».
لوک دورتن که این گزارش را نوشته، از شرایط کار در عمق معدن و استثمار شدید کارگران گفته و حرارت زیادی که تحمل آن بسیار دشوار است.
در پایان از یک حادثهٔ معدن می‌گویم که در همین اواخر یعنی سال ۲۰۱۰ اتفاق افتاد، اما پایانی خوش داشت و نشان داد که فناوری‌های نوین تا چه حد به بهبود وضع معدن‌ها کمک کرده‌اند.
در کشور شیلی معدن‌های مس فراوانی، ولی در عمق بسیار وجود دارند. برعکس معدن‌های مس ما که گفتیم روی زمین هستند. در سال ۲۰۱۰ یکی از معدن‌های شیلی ریزش کرد و ۳۳ معدنچی در آن محبوس شدند. طول تونل‌هایی که به انتهای معدن می‌رسیدند حدود ۵ کیلومتر بود که بسته شد و امکان بازکردن آن نبود. مهندسان نجات فکر دیگری به خاطرشان رسید که آن را با مشورت و کارشناسان جهانی، از جمله کارشناسان ناسا، اجرا کردند.
ابتدا چاهی به عمق ۷۰۰ متر و قطر حدود ۷۰ سانتی‌متر حفر کردند تا به محل محبوس‌شدگان برسند. حفر این چاه ۴۴ روز طول کشید. در هفدهمین روز، وقتی مته از چاه بالا آمد، کاغذی را که روی مته چسبانده شده بود دیدند که نوشته بود: ما هر ۳۳ نفرمان در پناهگاه زنده هستیم.
با این خبر خوش حفر تونل ادامه یافت و به پایان رسید و توانستند برای مدتی آب، غذا، دارو و... برای محبوس‌شدگان به پایین بفرستند.
سپس به نجات آن‌ها اقدام کردند. به این صورت که کپسولی به اندازهٔ حجم بدن یک نفر ساختند و پس از هماهنگی با خود معدنچیان محبوس، یکایک آن‌ها را از عمق معدن به روی زمین آوردند و همگی را نجات دادند. این کار در مجموع ۶۷ روز طول کشید و به عنوان عجیب‌ترین نجات در تاریخ معدن‌های جهان ثبت شد.
به همین متن کوتاه که خواندید توجه کنید. در اینجا کلمه‌هایی وجود دارند که اگر کسی ریاضی نداند، نمی‌تواند بفهمد معنی آن‌ها چیست؛ این کلمه‌ها: عمق، کیلومتر، شعاع، مرکز، فشار هوا، فشارسنج، تصاعد عددی، تصاعد هندسی، ساعت، درجه، درجهٔ حرارت، کیلوگرم و قطر.

حباب‌های رسانه‌های اجتماعی

دغدغه‌های دنیای دیجیتال برای نوجوانان

(قسمت هفتم)

آریان خلیلی



سکو (پلتفرم)های رسانه‌های اجتماعی به کاربران امکان می‌دهند که محتوای دلخواه خود را مشاهده کنند و هم‌زمان مطالب ناخواسته را پالایه (فیلتر) یا حذف کنند. این فرایند صرفاً نتیجهٔ فناوری نیست، بلکه ریشه در ویژگی‌های روان‌شناختی انسان نیز دارد؛ از جمله تمایل طبیعی ما به تأیید باورهای قبلی خود.

حباب رسانه‌های اجتماعی چیست؟

حباب رسانه‌های اجتماعی که با عنوان «حباب پالایه»[1] نیز شناخته می‌شود، پدیده‌ای است که در آن کاربران عمدتاً با محتوا، دیدگاه‌ها و اطلاعاتی مواجه می‌شوند که با علاقه‌ها و باورهایشان همخوانی دارد. این پدیده از دو عامل اصلی ناشی می‌شود:

۱. انتخاب‌های کاربر: کاربران می‌توانند افرادی یا محتواهایی را که با آن‌ها موافق نیستند مسدود، نادیده یا حذف کنند. این رفتار به مرور زمان باعث می‌شود خوراک خبری[2] آنان یک‌سویه و محدود شود.

۲. الگوریتم‌های سکوها: بسیاری از شبکه‌های اجتماعی از الگوریتم‌هایی استفاده می‌کنند که بر اساس رفتار گذشتهٔ کاربران (پسند (لایک)، اشتراک‌گذاری، و زمان توقف روی محتوا)، مطالبی را نمایش می‌دهند که احتمال تعامل با آن‌ها بیشتر است.

در نتیجه، برای مثال فردی که از یک سبک غذایی یا ورزش خاص حمایت می‌کند، به‌ندرت با محتوای انتقادی نسبت به آن مواجه می‌شود.



طرفداران فوتبال احتمالاً محتوایی را می‌بینند که نظر آن‌ها را در مورد بهترین ورزش‌بودن فوتبال تأیید می‌کند.



کسانی که در یک حباب آشپزی خانگی هستند، به احتمال زیاد محتوای انتقادی نسبت به فست‌فود و افرادی که آن را می‌خورند، مشاهده می‌کنند.

پیامدهای حباب‌های اطلاعاتی

زمانی که افراد در رسانه‌های اجتماعی تنها با دیدگاه‌های همسو با خود روبه‌رو می‌شوند، خطر جدایی اجتماعی و فکری‌شان افزایش می‌یابد. این وضعیت می‌تواند به کاهش تدریجی توانایی درک دیدگاه‌های متفاوت، تضعیف گفت‌وگوی سازنده و افزایش قطبی‌شدن جامعه منجر شود.

چرا افرادی را که شبیه ما هستند لایک می‌کنیم؟

بر اساس پژوهش‌های روان‌شناسی اجتماعی، انسان‌ها به‌طور طبیعی به سلیقه‌های افرادی گرایش پیدا می‌کنند که شباهت‌هایی با آن‌ها دارند؛ از نظر ظاهر، سبک زندگی، پیشینهٔ اجتماعی یا تجربیات شخصی. این شباهت‌ها پایه‌های شکل‌گیری دوستی و اعتماد را می‌سازند، زیرا ارتباط و همدلی را آسان‌تر می‌کنند. با وجود جنبه‌های مثبت این موضوع، چنین گرایشی می‌تواند دامنهٔ درک ما را نسبت به افرادی که شبیه ما نیستند محدود کند و ما را در چارچوبی بسته از روابط و دیدگاه‌ها نگه دارد.

اعتماد و اطلاعات

انسان‌ها معمولاً اطلاعاتی را که از سوی افراد مورد اعتمادشان ارائه می‌شوند، باور دارند؛ حتی زمانی که آن افراد تخصص یا دانش مرتبط در آن زمینهٔ خاص ندارند. این موضوع در فضای شبکه‌های اجتماعی می‌تواند به گسترش اطلاعات نادرست یا تحلیل‌های غیرعلمی منجر شود، زیرا اعتماد شخصی جایگزین ارزیابی انتقادی منابع می‌شود.

فعالیت ۱. نمودار حباب علاقه‌ها (آمار و نمودار)

هدف: جمع‌آوری داده، درصدگیری، و رسم نمودار دایره‌ای یا ستونی

از دانش‌آموزان کلاس خود بخواهید ۲۰ پستی را که به‌تازگی در شبکه‌های اجتماعی (یا نمونهٔ فرضی) دیده‌اند بررسی کنند و آن‌ها را در دسته‌های سرگرمی، آموزشی، خبری، ورزشی و سیاسی قرار دهند.

پرسش‌ها:

- هر دسته چند درصد از کل پست‌ها را تشکیل می‌دهد؟
- نمودار دایره‌ای رسم کنید.
- کدام دسته بیشترین سهم را دارد؟

نتیجه‌گیری: آیا نمودار نشان‌دهندهٔ «حباب محتوایی» است؟

فعالیت ۲. شبیه‌سازی الگوریتم با احتمال (احتمال و آمار)

هدف: آشنایی با احتمال

فرض کنید الگوریتم یک شبکهٔ اجتماعی، با احتمال ۰/۶ محتوای مورد علاقهٔ شما، با احتمال ۰/۳ محتوای خنثا و با احتمال ۰/۱ محتوای مخالف دیدگاه شما را نشان می‌دهد:.

- اگر ۱۰ فرسند (پست) را در این شبکهٔ اجتماعی ببینید، به‌طور میانگین چند فرسند همسو با نظر شماست؟
- احتمال اینکه ۵ پست پشت سر هم همسو باشند چقدر است؟

گفت‌وگوی پایانی: این نتیجه‌ها چگونه باعث تقویت باورهای ما می‌شوند؟

فعالیت ۳. اعتماد و خطای آماری (درصد و تحلیل داده)

هدف ریاضی: درصد، مقایسه و تحلیل داده

فرض کنید در یک کلاس ۳۰ نفره، ۱۸ نفر به خبرهایی که دوستانشان منتشر می‌کنند اعتماد دارند و ۱۲ نفر فقط به منابع رسمی اعتماد می‌کنند.

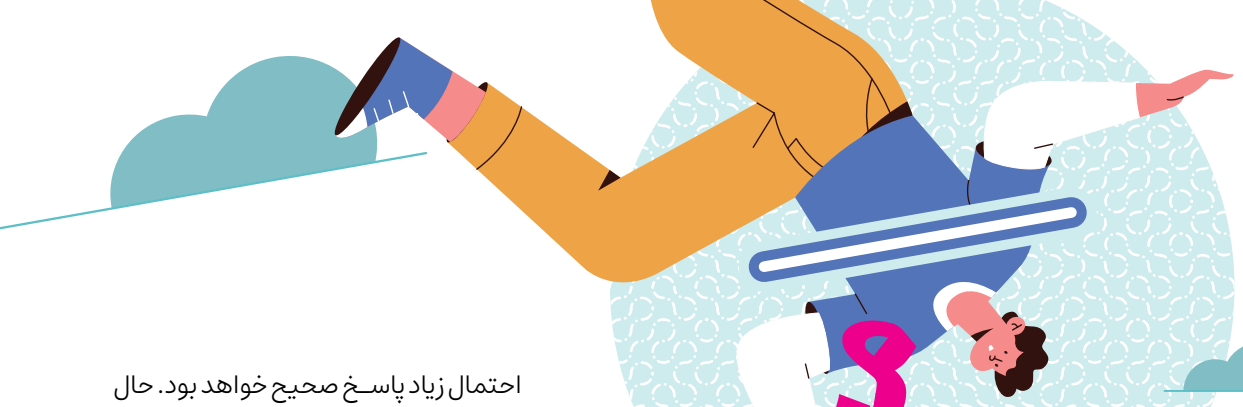
پرسش‌ها:

- چند درصد کلاس به دوستان اعتماد دارند؟
- اگر ۵ نفر نظرشان تغییر کند، درصدها چگونه تغییر می‌کند؟
- نمودار ستونی رسم کنید.

گفت‌وگوی پایانی: آیا اعتماد همیشه به معنی درست بودن اطلاعات است؟

پی‌نوشت‌ها

1. Filter Bubble
2. Feed



اشتباه‌های محاسباتی

افشین خاصه‌خان

همراهان درمانگاه ریاضی درود بر شما. امیدواریم سال جدید خورشیدی را پرانرژی آغاز کنید و خودتان را برای درس و مدرسه آماده کرده باشید.

اشتباه متداول: به‌کار بردن نادرست قدر مطلق

یکی دیگر از اشتباه‌هایی که دانش‌آموزان مرتکب می‌شوند، به‌کار بردن نادرست قدر مطلق است. تعداد قابل توجهی از دانش‌آموزان در محاسبه‌های قدرمطلق چنین خطاهایی را مرتکب می‌شوند:

$$|x-y|=x+y \quad , \quad |1-\sqrt{2}|=1+\sqrt{2}$$

تشخیص علت

دلیل عمدهٔ چنین اشتباهی آن است که این دانش‌آموزان تصور می‌کنند قدر مطلق همانند یک دستگاه مثبت‌کننده عمل می‌کند؛ به‌طوری که هر چه داخل آن است باید مثبت شود. این تصور در محاسبه‌های ساده مانند زیر درست عمل می‌کند:

$$|-۴|=۴ \quad , \quad |۳|=۳$$

اما در محاسبه‌های پیچیده این تصور مشکل‌زا می‌شود و تعریف مفهومی‌تر و عمیق‌تری می‌طلبد.

تجویز و درمان

برای درمان این نارسایی باید فعالیت‌های ساده‌ای برای دانش‌آموزان طراحی شود تا مفهوم دقیق قدرمطلق را در این فعالیت‌ها بفهمند. به این ترتیب محور عددهای حقیقی را رسم می‌کنیم و نقطه‌ای را به‌عنوان مبدأ در نظر می‌گیریم. با واحدی معین عددهای صحیح را روی محور مشخص می‌کنیم. حال از دانش‌آموز می‌خواهیم فاصلهٔ نقطهٔ ۴ را از مبدأ محاسبه کند. سپس از او می‌خواهیم فاصلهٔ ۴- را نیز از مبدأ حساب کند. به احتمال زیاد پاسخ صحیح خواهد بود. حال وقت آن است که به او بگوییم نماد جبری مفهوم فاصله در ریاضیات «$|\ \ |$» و به نام قدر مطلق معروف است.

حال از او می‌خواهیم فاصلهٔ عدد مثبت ۴ را از مبدأ به زبان ریاضی بنویسد و جواب آن را محاسبه کند: $|۴-۰|=|۴|=۴$

و همان را برای ۴- نیز تکرار کند:

$|-۴-۰|=|-۴|=۴$

اکنون از او می‌خواهیم جاهای خالی جملهٔ زیر را پر کند:

قدرمطلق هر عدد مثبت برابر با ..... آن عدد و قدرمطلق هر عدد منفی برابر با ..... آن عدد است.

اگر او معنی این جمله را عمیق بفهمد می‌تواند با عمل به آن به سؤال‌های زیر پاسخ دهد:

$|1-\sqrt{2}|=-(1-\sqrt{2})=-1+\sqrt{2}$

چون $-1+\sqrt{2}$ یک عدد منفی است، لذا فاصلهٔ آن از مبدأ برابر قرینه‌اش خواهد بود.

نسخهٔ تکمیلی

بهتر است این دانش‌آموزان از فصل ۲ کتاب ریاضی نهم، درس ۳ را عمیق یاد بگیرند؛ یعنی متن کتاب را با تأمل بخوانند، فعالیت‌های آن‌ها را انجام دهند، مطالب یادگرفتهٔ خود را با مثال‌ها تطبیق دهند، و سپس کار در کلاس‌ها و در پایان مسئله‌های آخر درس را حل کنند. در این صورت می‌توانند درک درستی از قدر مطلق داشته باشند و مسئله‌های مربوط به آن را به راحتی حل و تفسیر کنند.

برای آشنایی بیشتر با مفهوم قدرمطلق رمزینه را پویش کنید.



در ایـن شـماره می‌خواهیـم با هم سـفری کوچک به دنیـای هنر و خلاقیت داشـته باشیم. با استفاده از مقداری نخ و یک قلاب ساده، یـاد می‌گیریـم چگونه وسـیله‌ای کوچک، زیبـا و کاربردی بسـازیم؛ یـک نشـان‌گذار کتاب تا صفحـه‌ای را کـه مطالعه می‌کردیـد، از یاد نبرید. یـا یک آویز کیف یـا حتی یک جاکلیدی جـذاب. این کار نه‌تنها سرگرم‌کننده است، بلکه به شما کمک می‌کند مهارت‌های جدیدی یـاد بگیرید و ببینید چگونه از ترکیب ریاضی و هنر می‌توان چیزهای کاربردی و چشـم‌نواز خلق کرد.

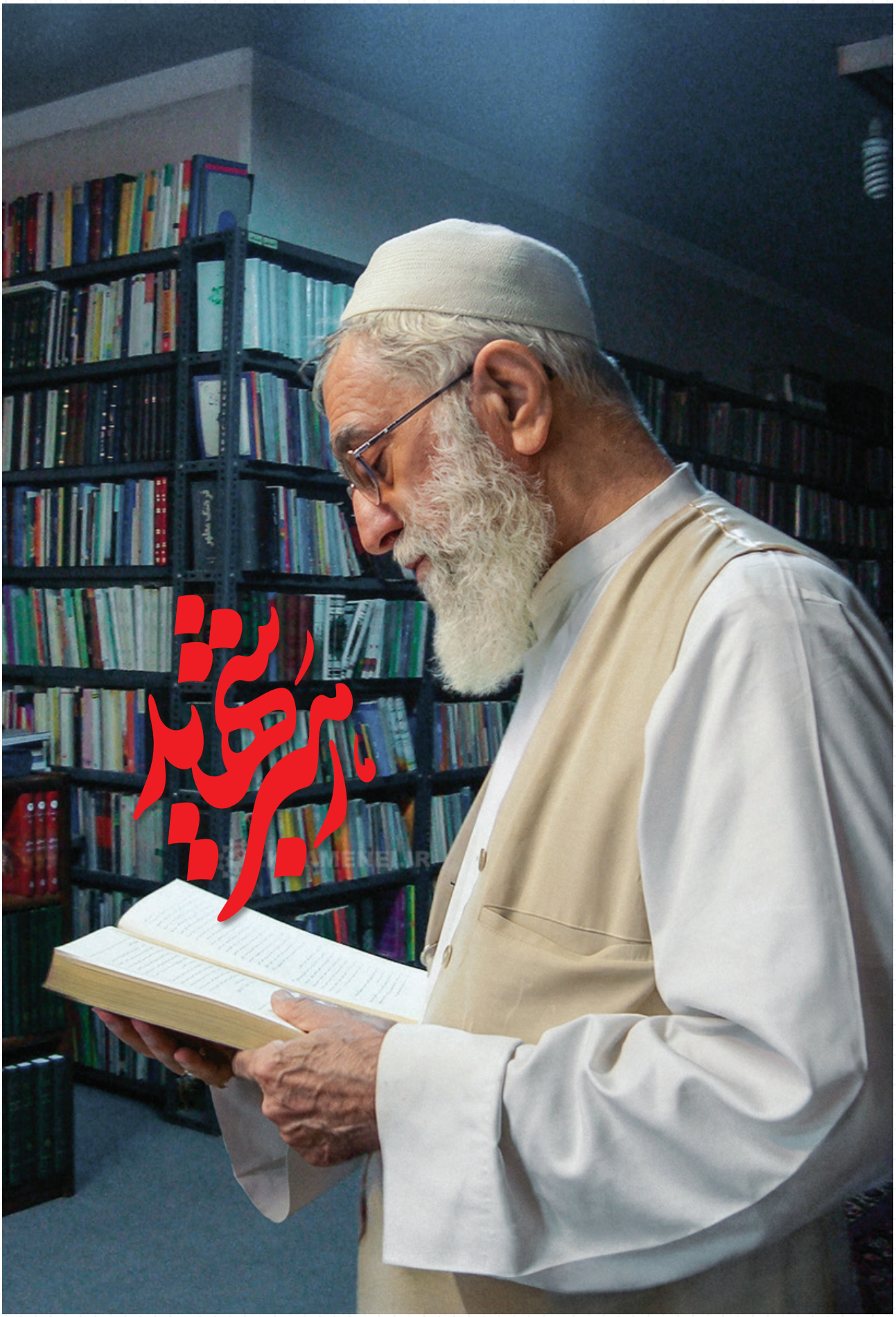
در پایـان کار، نتیجـه تـلاش شـما می‌تواند هدیـه‌ای خـاص بـرای دوسـتانتان باشـد، وسـیله‌ای کاربـردی بـرای خودتان یـا حتی یک کسـب‌وکار کوچک. پس آماده شـوید تا بـا کمی صبـر و دقت، از نخ‌های سـاده، اثری هنری و شـخصی بسازید که همیشه یادآور خلاقیـت و توانایی‌هـای شـما خواهد بود.



مارمولک در کتاب

ندا نعمتی

برای دیدن مراحل ساخت رمزینه را پویش کنید.


تبریک شهید