بســـم‌الله‌الرحمن‌الرحیـــم

اللّهم‌صل‌علی‌محمدوآل‌محمدوعجل‌فرجهم

خانوادهٔ مجلات رشد همهٔ تلاش خود را کرده است تا این مجله در دسترس عموم دانش‌آموزان قرار گیرد و همهٔ کودکان و نوجوانان میهن عزیز اسلامی‌مان امکان تهیهٔ آن را داشته باشند.

قیمت: ۳۰۰/۰۰۰ ریال

وزارت آموزش‌وپرورش
سازمان پژوهش‌وبرنامه‌ریزی‌آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی

رشد
برهان ریاضی ۳

www.roshdmag.ir

ماهنامهٔ آموزشی و تربیتی برای دانش‌آموزان دورهٔ اول متوسطه

۴۰ صفحه / آذر ماه ۱۴۰۴ / دورهٔ سی و یکم / شمارهٔ پی درپی ۱۵۷

پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵۱۲ / ISSN: 1735-4943

نشانی کانال مجلهٔ رشد ریاضی برهان متوسطهٔ اول در پیام‌رسان شاد
@roshd_borhan1

با پویـش رمزینـه نظرات خود را با ما به اشتراک بگذارید.
nazar.roshdmag.ir

برای مشاهـدهٔ شرایط ارسال مطلب و همکاری با مـاهنامهٔ رشــد ریاضی برهـان متوسطهٔ اول، رمزینـه را پویـش کنید.

فروش و اشتراک مجلات رشد

در این ماه؛ آذر ۱۴۰۴:

◀ **سوم**: شهادت حضرت فاطمه زهرا(س) ◀ **پنجم**: روز بسیج مستضعفان ◀ **هفتم**: روز نیروی دریایی، روز نوآوری و فناوری ایران ساخت ◀ نهم: روز بزرگداشت شیخ مفید ◀ **دهم**: شهادت آیت‌الله سیدحسن مدرس و روز مجلس ◀ **دوازدهم**: روز قانون اساسی جمهوری اسلامی ایران ◀ **سیزدهم**: وفات حضرت ام‌البنین(س) ◀ **شانزدهم**: روز دانشجو ◀ **بیستم**: ولادت حضرت فاطمه زهرا(س)، روز زن و تولد حضرت امام خمینی(ره) ◀ **بیست‌وپنجم**: روز پژوهش ◀ **سی‌ام**: جشن شب یلدا

سخن سردبیر

ریاضیات: میراث فرهنگی

حسین نامی ساعی

سلام دوستان! در این شماره قصد داریم دربارهٔ اهمیت مطالعهٔ تاریخ ریاضیات و تأثیر آن بر فهم عمیق‌تر این علم صحبت کنیم. مطالعهٔ تاریخ ریاضیات گامی جذاب به درون اندیشهٔ بشری است. این مسیر فرصتی عالی برای آموختن مفهوم‌های دقیق‌تر ریاضیات است و پنجره‌ای به زندگی دانشمندان بزرگ باز می‌کند که با تلاش و خلاقیت خود، مسیرهای علمی را روشن کرده‌اند.

توصیهٔ من به شما این است: این سفر تاریخی نه تنها شناخت مسائل علمی را برای شما ساده‌تر می‌کند، بلکه شوق و علاقه به یادگیری و احترام به دستاوردهای بشری را در شما برمی‌انگیزد. پس زودتر این سفر را آغاز کنید و ببینید چگونه ریاضی می‌تواند فرصت‌های جدیدی را برای شما مهیا کند! با کنجکاوی به گذشته نگاهی بیندازید و به سراغ منابعی بروید که زندگی و دستاوردهای ریاضی‌دانان بزرگ را شرح می‌دهند و معرفی می‌کنند. داستان‌هایی از **خوارزمی**، **خیام**، **ابوریحان**، **خواجه نصیرالدین طوسی**، **کاشانی**، **نیوتن**، **گاوس** و دیگران را بخوانید تا ببینید چگونه این دانشمندان، با تفکر خلاق و شجاعت علمی، توانستند مسئله‌های زمان خود را حل کنند. از آن‌ها الهام بگیرید و مسیر خود را بسازید!

وقتی زندگی دانشمندان بزرگ را مطالعه می‌کنید، می‌توانید از تلاش‌هایشان انگیزه بگیرید تا در یادگیری ریاضیات مشتاق و خلاق باشید. به خاطر داشته باشید که ریاضیات دانشی با پیشینهٔ هزاران ساله است و امروز یکی از پایه‌های اصلی دانش انسانی محسوب می‌شود.

بسیاری از ما هنگام یادگیری ریاضی از کاربردها و فرمول‌های آن استفاده می‌کنیم، اما کمتر به تاریخچهٔ این علم و نقش آن در فهم بهتر ریاضیات توجه می‌کنیم. تاریخ ریاضیات پلی است که گذشته را به حال متصل می‌کند و دیدگاه‌ها و زاویه‌های جدیدی از این دانش را روشن می‌سازد. مطالعهٔ تاریخ ریاضیات نه تنها شناخت عمیق‌تری از مفهوم‌ها و روش‌ها به ما می‌دهد، بلکه کمک می‌کند ارتباط میان مباحث ریاضی و نیازهای بشر را در طول زمان درک کنیم. دانستن اینکه چگونه انسان‌های قدیم با ابزارهای ابتدایی و اندیشه‌های خلاق خود مفهوم‌های پیچیدهٔ ریاضی را کشف کرده‌اند، ترس و نگرانی ما را نسبت به پیچیدگی این علم کاهش می‌دهد. برای مثال، وقتی داستان زندگی **محمدبن‌موسی خوارزمی**، پدر جبر، را مطالعه می‌کنیم، درمی‌یابیم که چگونه مشکلات روزمرهٔ مردم دوران او، الهام‌بخش کشف ایده‌های جدید ریاضی بوده‌اند. همچنین تلاش‌های **نیوتن** و **لایب‌نیتس** در بنیان‌گذاری حساب پیشرفته نشان‌دهندهٔ پاسخ‌های ریاضیات به نیازهای بشر برای درک پدیده‌های طبیعی است.

مطالعهٔ تاریخ ریاضیات علاوه بر جنبهٔ علمی، ابعاد انسانی این علم را نیز آشکار می‌کند. با دانستن اینکه نظریه‌ها و مفهوم‌های بزرگ ریاضی نتیجهٔ تلاش‌های فردی یا گروهی در طول زمان هستند، حس احترام و ارزش بیشتری نسبت به این علم در ما شکل می‌گیرد. علاوه بر این، فهم تاریخچهٔ ریاضیات به ما کمک می‌کند دریابیم که یادگیری ریاضیات فرایندی پویا و قابل دسترس است.

بنابراین بیایید به ریاضیات و تاریخ آن به عنوان میراث فرهنگی نگاه کنید. ریاضیات تنها مجموعه‌ای از فرمول‌ها نیست، بلکه نتیجهٔ قرن‌ها تفکر، آزمون و خطا، و پیروزی‌های انسان‌هاست. در نهایت، مطالعهٔ تاریخ ریاضیات نه تنها به فهم بهتر مفهوم‌های علمی کمک می‌کند، بلکه انگیزه‌ای به ما می‌دهد تا همچون پیشینیان، با ذهنی کنجکاو و خلاق، به کشف ناشناخته‌ها بپردازیم. این مطالعه یادآوری می‌کند که ریاضیات بخشی جدایی‌ناپذیر از زندگی بشری است و مسیر پیشرفت و تحول ما ادامه خواهد داشت.

سلامت و پیروز باشید

مفهوم‌های هندسی و حل مسئله

دایره

محمود نصیری

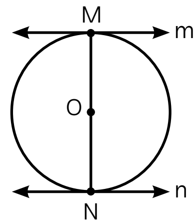
در بخش قبلی، یکی از مهم‌ترین مفهوم‌های دایره را که خط مماس بر دایره است تعریف کردیم. خط مماس بر دایره را در کتاب‌های هندسه معمولاً به دو صورت تعریف می‌کنند. این دو تعریف معادل هم هستند، به این معنی که هرکدام را که به‌عنوان تعریف بپذیریم، می‌توانیم دیگری را به کمک آن ثابت کنیم.

۱. خط مماس بر دایره خطی در صفحهٔ دایره است که فقط با آن یک نقطهٔ مشترک دارد.
۲. خطی را که در صفحهٔ دایره، بر یک انتهای شعاعی از دایره که روی دایره واقع است عمود باشد، خط مماس بر دایره می‌نامند.

چنانچه توضیح دادیم، قسمت (۲) را چه به‌صورت تعریف و چه به‌صورت قضیه مطرح کنیم، روشی عملی را برای رسم خط مماس بر دایره در نقطه‌ای روی آن ارائه می‌دهد و از این نظر اهمیت دارد.

اگر با مفهوم‌هایی که تاکنون در مورد دایره بیان کرده‌ایم به‌خوبی آشنا شده باشید، می‌توانید مسئلهٔ ۱ را به سادگی حل کنید.

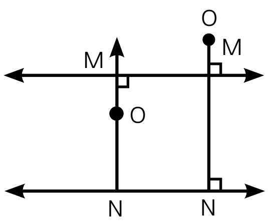
مسئلهٔ ۱. دو خط موازی هم m و n در نقطه‌های M و N بر دایره‌ای به مرکز O مماس‌اند. ثابت کنید خط MN از مرکز دایره می‌گذرد.



شکل ۱

به روش‌های متفاوتی می‌توانید مسئله را حل کنید. بکوشید از اینکه خط مماس بر دایره بر خط شامل شعاعی از دایره که از نقطهٔ تماس می‌گذرد عمود است استفاده کنید. شاید ابتدا این به ذهن برسد که از مرکز دایره به نقطه‌های M و N وصل کنیم و ثابت کنیم O، M و N روی یک خط واقع‌اند. اما این به سادگی کارساز نیست. پس بهتر است از O مرکز دایره به یکی از نقطه‌های M یا N وصل و ثابت کنیم از دیگری می‌گذرد. فرض کنید از O به N، نقطهٔ تماس خط n با دایره، وصل کرده‌اید. خط ON بر خط مماس n عمود است؛ چرا؟ کافی است نشان دهید خط ON از نقطهٔ M نقطهٔ تماس خط m و دایره نیز می‌گذرد. قبلاً با این ویژگی خط‌های موازی آشنا شده‌اید که اگر خطی بر یکی از آن‌ها عمود باشد، بر دیگری نیز عمود است. پس خط ON بر خط m نیز عمود است. می‌دانیم خط OM نیز بر خط m عمود است. پس باید خط ON در همان نقطهٔ M بر خط m عمود باشد؛ چرا؟ اگر چنین نباشد چه اتفاقی رخ می‌دهد؟ بله در این صورت از نقطهٔ O دو خط بر خط m عمود رسم شده است که این امکان ندارد. پس خط MN از مرکز دایره می‌گذرد و مسئله ثابت شده است.

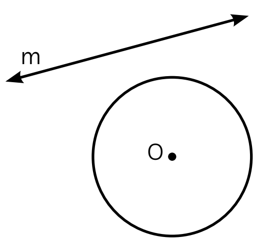
اگر کمی به صورت مسئله دقت کنیم، می‌بینیم که این مسئله می‌تواند به صورت کلی‌تر نیز مطرح شود و بنابراین به سادگی ثابت می‌شود. صورت کلی‌تر چنین است: «اگر از نقطه‌ای در صفحهٔ دو خط موازی، بر این دو خط عمودهایی رسم کنیم این دو خط بر هم منطبق هستند.» از کدام ویژگی دو خط موازی استفاده می‌کنید؟ کافی است بدانید هر خط که بر یکی از دو خط موازی عمود باشد، بر دیگری نیز عمود است.



شکل ۲

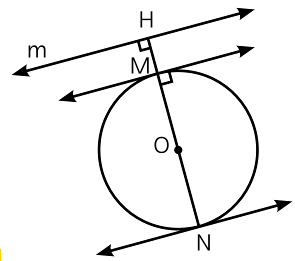
مسئلهٔ بعدی یکی از مسئله‌های مهم در زمینهٔ رسم مماس بر دایره است.

مسئلهٔ ۲. دایره‌ای به مرکز O و خط m در یک صفحه مفروض‌اند. خطی موازی خط m رسم کنید به طوری که بر دایره مماس باشد. برای حل کافی است، به بحث‌هایی که در قسمت‌های قبلی بیان کردیم خوب توجه کنید.



شکل ۳

اگر از O مرکز دایره بر خط m عمود OH را رسم کنیم، دایره را در دو نقطهٔ M و N قطع می‌کند. چرا اگر در M و N خط‌هایی را عمود بر خط MN رسم کنیم، جواب‌های مسئله هستند؟



شکل ۴

به تعریف خط مماس و قضیهٔ معادل آن توجه کنید.

دایره و کاربرد آن در نقطه‌هایی با ویژگی‌های خاص

چنانچه قبلاً توضیح دادیم بعد از پاره‌خط، دایره مهم‌ترین و کاربردی‌ترین شکل در هندسه است. زیرا ویژگی به یک فاصله بودن یک مجموعه نقطه از یک نقطهٔ ثابت، در حل مسئله‌های زیادی کاربرد دارد.
از سال‌های قبل با محاسبهٔ محیط و مساحت دایره آشنا هستید. محاسبهٔ مساحت و محیط دایره از دیرباز مورد توجه ریاضی‌دان‌ها بوده است. در حالت کلی، برای اندازه‌گیری طول شکل‌هایی که از پاره‌خط‌ها تشکیل نشده باشند، مانند دایره، به یک فرایند حدگیری نیاز است که در ریاضیات پیشرفته‌تر با آن آشنا می‌شوید. بعداً خواهیم دید که با داشتن معادلهٔ آن‌ها می‌توانیم طول این نوع شکل‌ها را محاسبه کنیم؛ حتی به‌طور تقریبی.
جالب است بدانیم که فرایند حد که بیشتر از چهار قرن سابقه ندارد، ریشه در مفهوم‌های تقریبی محاسبهٔ طول و مساحت این نوع شکل‌هایی دارد که مشابه دایره هستند و از پاره‌خط‌ها تشکیل نشده‌اند. این‌گونه محاسبه‌ها سابقهٔ بیش از دو هزار سال دارند. در واقع مساحت و محیط دایره وابسته به عددی است که این عدد گویا نیست و آن را عدد π (بخوانید عدد پی) نامیده‌اند. در محاسبه‌ها این عدد را به تقریب برابر ۳/۱۴ اختیار می‌کنند. اگر P محیط دایره به شعاع R باشد، آن‌گاه محیط آن که از رابطهٔ $P=2\pi R$ به دست می‌آید، نتیجهٔ یک تعریف و این ادعاست که نسبت محیط هر دایره به قطر آن مقداری ثابت است.
بد نیست بدانیم که ایدهٔ اصلی این مفهوم قدیمی، یعنی $\pi=\frac{P}{2R}$ که به روش «افنا» شهرت دارد، به ریاضی‌دانی به نام **ادوکس** منسوب است که در حدود چهار قرن قبل از میلاد می‌زیست. یونانیان می‌دانستند که اگر دو دایره دارای محیط‌های P_1 و P_2 باشند و قطرهای آن‌ها $2R_1$ و $2R_2$ باشد، آنگاه داریم:

$$\frac{P_1}{2R_1}=\frac{P_2}{2R_2}=\pi$$

بهتر است این مفهوم را کمی بیشتر توضیح دهیم. اگر با یک تکه نخ محیط یا دور یک سکه را اندازه‌گیری کنید و قطر آن را نیز اندازه بگیرید، از تقسیم محیط بر قطر به عدد π می‌رسید. حال اگر یک دایره به قطر بسیار بزرگ، حتی دایره‌ای که روی کرهٔ زمین واقع باشد را در نظر بگیرید و نسبت محیط به قطر آن را محاسبه کنید، باز هم به عدد π می‌رسید؛ هرچند این نسبت‌ها تقریبی محاسبه می‌شوند.
می‌توانید یک شکل دایره‌ای به قطر یک سانتی‌متر و یک شکل دایره‌ای به قطر ۱۰۰ سانتی‌متر را در نظر بگیرید و نسبت محیط به قطر را برای آن‌ها به دست آورید. به‌طور تقریبی به نتیجه‌های یکسان، یعنی عددی نزدیک به ۳/۱۴ می‌رسید. البته به کمک قضیه‌هایی که بعداً با آن‌ها آشنا می‌شوید، می‌توانیم این مفهوم‌ها را به‌طور دقیق ثابت کنیم. در مقاله‌های بعدی بیشتر توضیح خواهیم داد.

دکتر رضا فلاح مقدم
عضو هیئت علمی
دانشگاه فرهنگیان تهران

کسرهای واحد، الگوریتم حریصانه و هوش مصنوعی ولفرام آلفا

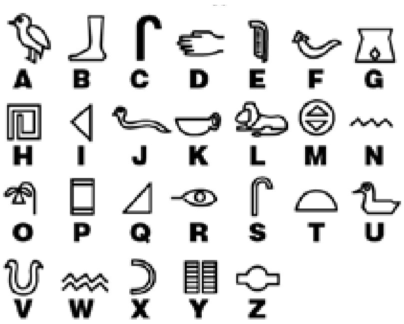
(قسمت دوم)

در قسمت قبل از این سلسلهٔ سه‌گانهٔ مقاله‌ها کسرهای واحد را بررسی کردیم. کسرهای واحد یا کسرهای معیار در حقیقت نوعی از کسرهای متعارفی هستند که صورت آن‌ها عدد یک است. در بخش قبل در مورد تجزیهٔ یک کسر متعارف به صورت مجموعی از کسرهای واحد بحث کردیم. کسر مصری به کسری گفته می‌شود که مجموع تعدادی متناهی از کسرهای واحد مجزاست؛ مانند:

$$\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۶}.$$

کسرهای مصری در حدود سال ۲۰۵۰ قبل از میلاد در مصر باستان ساخته و جایگزین علامت هیروگلیف شدند. هیروگلیف نوعی خط تصویری است که در مصر باستان برای نوشتن به کار می‌رفت. این خط از نقاشی‌ها و نمادهایی تشکیل شده بود که هر کدام می‌توانستند یک کلمه، صدا یا مفهوم خاصی را نشان دهند. خط هیروگلیف قدمتی ۵۰۰۰ ساله دارد و حدود ۳۰۰۰ سال زبان نوشتاری مصریان بود. طرز نگارش آن به دو صورت عمودی و افقی بود که در آغاز هیروگلیف عمودی و سپس هیروگلیف افقی پدید آمد.

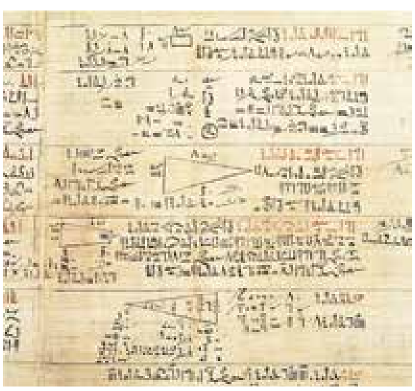
تصویر ۱. کسر مصری



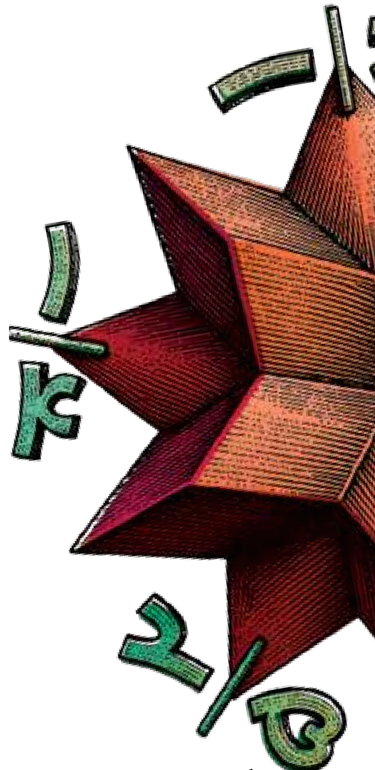
تصویر ۲. علامت‌های خط هیروگلیف

تصویر ۳. نمونه‌ای از دیوارنگاره با خط هیروگلیف

جدولی که کسرهای به شکل $\frac{۲}{۸}$ را به صورت مجموع کسرهای واحد متمایز نشان می‌دهد، در رول پاپیروس مصری معروف (حدود ۱۶۵۰ سال قبل از میلاد) در سال ۱۸۵۸ توسط **هنری رایند**، مجموعه‌دار (کلکسیونر) عتیقهٔ اسکاتلند پیدا شد.

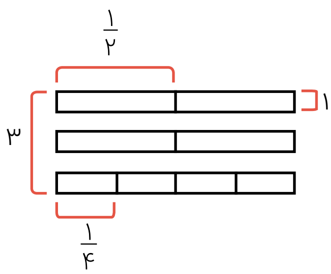


تصویر ۴. پاپیروس مصری کشف‌شده توسط هنری رایند



اگرچه کاربرد اصلی کسرهای مصری مشخص نیست، چندین پیشنهاد روشنگر دربارهٔ چگونگی نمایش آن ارائه شده است. کسر مصری به‌عنوان یک نماد خاص همچنان در قرون وسطا مورد استفاده قرار می‌گرفت. همان‌طور که **راهام** (۲۰۱۲) می‌گوید، وقتی از **آندره ویل** (ریاضی‌دان فرانسوی که به دلیل اثرگذاری اساسی خود در نظریهٔ اعداد شهرت دارد؛ ۱۹۹۸-۱۹۰۶) در مورد دلیل استفادهٔ مصریان از این نماد سؤال شد، او برای لحظه‌ای فکر کرد و سپس گفت: «توضیح آن آسان است. آن‌ها اشتباه کردند. کسر واحد، مانند $\frac{1}{2}$ یک کسر مصری است. اگرچه می‌توان آن را به‌عنوان مجموع کسرهای واحد دیگر نشان داد؛ مثلاً $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$. گاهی کسر مصری به‌عنوان یک نمایش خاص از یک کسر (یا یک عدد گویای مثبت) از طریق مجموع محدودی از کسرهای واحد متمایز شناخته می‌شود. بنابراین مجموع $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$ که برابر $\frac{13}{15}$ است، نمایش کسر مصری $\frac{13}{15}$ در نظر گرفته نمی‌شود. در حالی که نمایش $\frac{13}{15}$ به‌صورت یک کسر مصری دارای پاسخی به‌صورت $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{30}$ است. با این حال جمع دیگری که با سه کسر واحد متمایز وجود دارد، $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$ است که برابر $\frac{13}{15}$ می‌شود.»

اغلب کسرهای مصری را می‌توان برای حل مؤثرتر مسئله‌های سادهٔ تقسیم در مقایسه با استفاده از مفهوم مقسوم و مقسوم‌علیه به کار برد؛ مانند تقسیم سه کیک یکسان بین چهار نفر. از تساوی $\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ که سمت راست آن کسر مصری است، می‌توان برای انجام تقسیم به روشی متفاوت استفاده کرد (تصویر ۵).



تصویر ۵. کسر مصری $\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$

سه کیک به هشت تکه تقسیم می‌شود و در نتیجه به هر نفر نصف کیک به اضافهٔ یک چهارم آن می‌رسد. به همین ترتیب از تساوی $\frac{3}{5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$ می‌توان برای تقسیم سه کیک یکسان بین پنج نفر استفاده کرد. کیک‌ها به ۱۰ قطعه تقسیم می‌شوند (به‌جای اینکه به ۱۵ قسمت، با توجه به مفهوم مقسوم و مقسوم‌علیه، تقسیم شوند). به این ترتیب به هر نفر یک کیک به اضافهٔ یک‌دهم آن می‌رسد. باید توجه داشت که چنین روش خلاقانه‌ای برای تقسیم کیک‌ها به تعداد کمتری از قطعه‌ها از طریق کسرهای مصری، سودمندی را با خلاقیت مرتبط می‌کند.

پس روش دوم یکی از دو ویژگی اصلی اولی را دارا است. لازم به ذکر است که یک کسر مصری همیشه تعداد قطعات کمتری را در مقایسه با روش مقسوم و مقسوم‌علیه ایجاد نمی‌کند. یک مثال ساده چنین است: $\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$. با استفاده از این نمایش می‌توان دو کیک را در نظر گرفت و هر یک را به سه قطعهٔ مساوی تقسیم کرد. سپس یکی از شش قطعهٔ ایجادشده را به پنج قطعهٔ مساوی تقسیم کرد. در نتیجه ما پنج قطعهٔ $\frac{1}{3}$ کیک و پنج قطعه $\frac{1}{15}$ کیک داریم که در مجموع ده تکه است. البته در همان زمان با تقسیم هر یک به پنج قطعهٔ مساوی ده قطعه حاصل می‌شود.

مثال پیچیده‌تر دیگری که با کسر مصری ارائه می‌شود، این است: $\frac{3}{7}=\frac{1}{3}+\frac{1}{11}+\frac{1}{231}$. در اینجا سه کیک داریم. در تقسیم هر کیک به هفت قطعهٔ مساوی با روش مقسوم و مقسوم‌علیه، ۲۱ تکه ایجاد می‌شود. کسر مصری هفت قطعه می‌دهد که هر کدام $\frac{1}{3}$ کیک است. پس ۷ قطعه که هر کدام $\frac{1}{11}$ کیک است و ۷ عدد دیگر که هر کدام $\frac{1}{231}$ کیک است. بار دیگر هر دو تقسیم ۲۱ قطعه تولید می‌کنند. توجه داشته باشید:

$$7\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{11}+\frac{1}{231}\right)=\frac{7}{3}+\frac{7}{11}+\frac{7}{231}=\frac{77+21+1}{33}=\frac{99}{33}=3$$

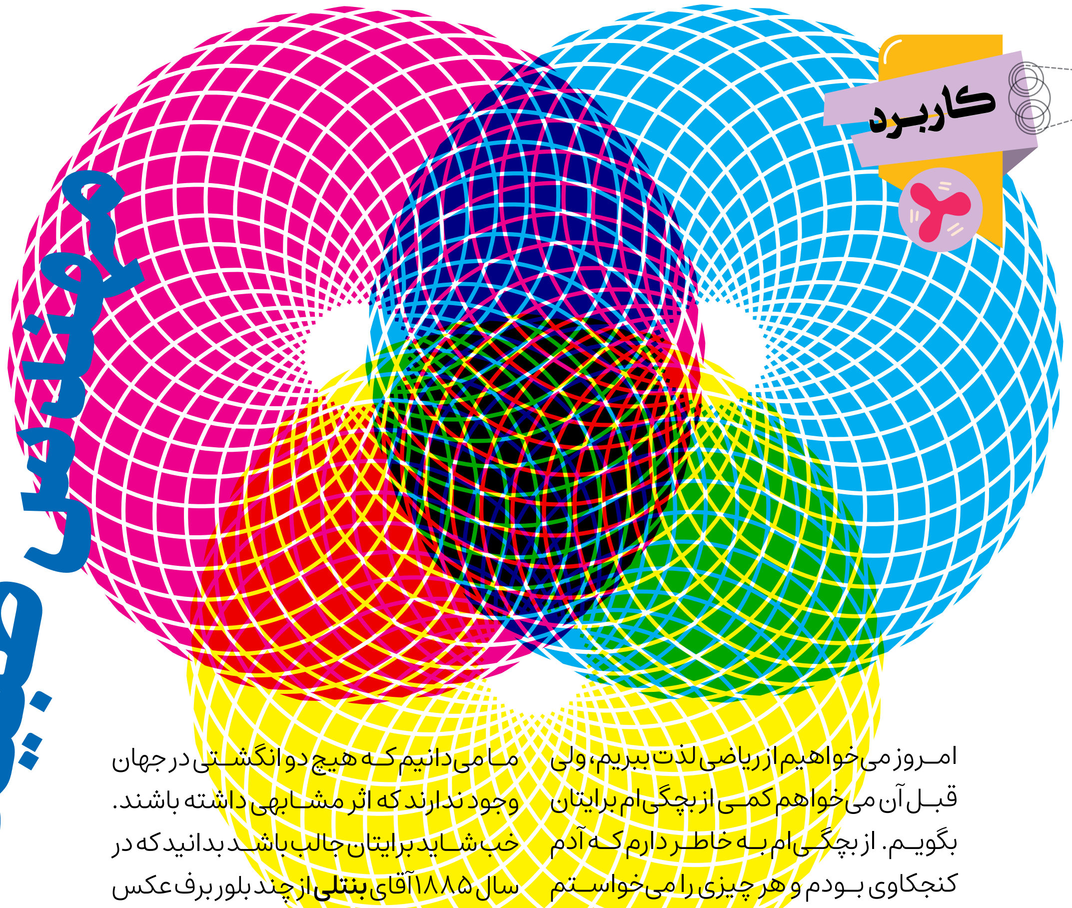
یعنی از کنار هم قرار دادن تمام ۲۱ قطعه می‌توان دید که در برخی موارد، هم یک کسر مصری و هم روش مقسوم و مقسوم‌علیه می‌توانند تعداد یکسانی قطعه ارائه دهند و در مورد خاص تقسیم سه کیک بین هفت نفر، خلاقیت این است که بی‌فایده‌بودن استفاده از کسر مصری را تشخیص دهیم. در قسمت سوم این سلسله از مقاله‌ها، الگوریتم حریصانه و هوش مصنوعی ولفرام آلفا را معرفی خواهیم کرد و با استفاده از آن کسرهای مصری را بررسی خواهیم کرد.

منبع

آبراموویچ، سرگی و کانل، مایکل ال.؛ (۲۰۲۱). توسعهٔ دانش عمیق در ریاضی دورهٔ متوسطه. کتابی برای تدریس در عصر فناوری. اشپرینگر. ترجمهٔ: رضا فلاح مقدم.

ریاضی یا مهندس طبیعت

رضا شوشیان



امروز می‌خواهیم از ریاضی لذت ببریم، ولی قبل آن می‌خواهم کمی از بچگی‌ام برایتان بگویم. از بچگی‌ام به خاطر دارم که آدم کنجکاوی بودم و هر چیزی را می‌خواستم یاد بگیرم، حتماً باید نمایی از آن را مشاهده می‌کردم تا به خوبی درکش کنم. به همین دلیل از وقتی معلم شده‌ام سعی کرده‌ام که شما فرزندان ایران زمین را با درس ریاضی آشتی بدهم.

یکی از مهم‌ترین کارهایی که برای آشتی دادن فرزندانم با ریاضی، مهندس طبیعت، انجام داده‌ام، نشان‌دادن نماهایی از اصول ریاضیات در طبیعت است. حالا می‌خواهیم با هم کمی در طبیعت زیبای ریاضیات سیر کنیم.

- بریم بچه‌ها؟

بچه‌ها: بریم!

یکی از بهترین شهودهایی که می‌توان از ریاضیات در طبیعت ارائه داد، بی‌شک دانه‌های برف هستند! به شکل ۱ دقت کنید.

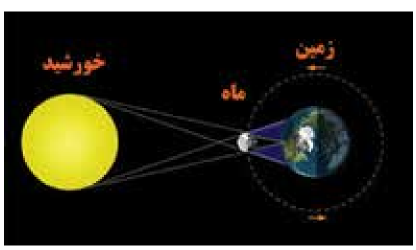
شکل ۱. بلور برف زیر ریزبین (میکروسکوپ)

ما می‌دانیم که هیچ دو انگشتی در جهان وجود ندارند که اثر مشابهی داشته باشند. خب شاید برایتان جالب باشد بدانید که در سال ۱۸۸۵ آقای **بنتلی** از چند بلور برف عکس گرفت و آن‌ها را زیر ریزبین (میکروسکوپ) قرار داد و متوجه اتفاق عجیب شد! هیچ دو بلور برفی یکسان نبودند!

او به عکس گرفتن از بلورهای برف به مدت ۵۰ سال ادامه داد، ولی باز هم هیچ چیز تغییر نکرد و حتی دو بلور یکسان هم نیافت. در این حین او متوجه موضوع جالب‌تری شد: همهٔ بلورهای برف از یک ویژگی مشابه برخوردار بودند؛ همه شش‌وجهی و متقارن بودند!

اعتراف کنید که لذت بردید تا برویم سراغ مورد بعدی!

شاید فکر کنید دیوانه شده‌ام، ولی حتی در پدیدهٔ خورشیدگرفتگی (کسوف) نیز می‌توان رد پای ریاضیات را یافت! به شکل ۲ دقت کنید.



شکل ۲. پدیدهٔ کسوف

یک کسوف کامل وقتی رخ می‌دهد که زمین، ماه و خورشید در یک خط راست یا تقریباً در یک خط راست قرار بگیرند و قرص ماه به طور کامل روی خورشید را بپوشاند. اما ربط ریاضی به کسوف چیست؟ وقوع کسوف کامل، به دلیل وجود تناسب میان اندازهٔ ماه و خورشید، امکان‌پذیر است. درحالی که خورشید ۴۰۰ بار بزرگ‌تر از ماه است، فاصلهٔ آن از زمین هم ۴۰۰ برابر بیشتر است. این اختلاف فاصله سبب می‌شود، اندازه‌هایشان با هم برابری کنند و ما بتوانیم شاهد کسوف کامل در زمین باشیم و با استفاده از این فرصت، از جو بیرونی خورشید اطلاعات زیادی به دست آوریم.

به جز زمین، در هیچ یک از سیاره‌های منظومهٔ شمسی پدیدهٔ گرفتگی خورشید با ظرافتی که در زمین اتفاق می‌افتد، رخ نمی‌دهد.

اما برویم سراغ مورد سوم: سؤالی از شما دارم که می‌خواهم در دلتان جواب بدهید: عسل دوست دارید؟

فـارغ از اینکـه جوابتـان بـه این سـؤال چه باشـد، باید بگویم که ریاضی در فرایند تولید عسـل نقش مهمی بـازی می‌کند! چطوری؟ به شـکل ۳ توجه کنید.

شکل ۳. کندوی زنبور عسل

حـالا ربط ریاضی به عسـل چیسـت؟ یک‌بار دیگـر به شـکل ۳ توجـه کنید. کدام شـکل هندسـی را می‌بینید؟ آفرین! شش ضلعی! همـه چـی زیر سـر ایـن شـش ضلعی‌های منتظم اسـت! حالا شـاید این سـؤال برای شـما پیش بیاید که چرا اینکه کندو از شـش ضلعی تشـکیل بشود، مهم است؟ خب این شما و این هم جواب سؤال: «انسان قرن‌ها از شـش ضلعی‌های منتظم کندوهای زنبور عسل شـگفت‌زده بود؛ شـکلی که انسان‌ها بـرای کشـیدن آن از خط‌کش و پـرگار کمک می‌گیرند، اما زنبورها آن را به شـکلی غریزی خلـق می‌کنند.

ریاضی‌دانان معتقدند، علت ایجاد شکل‌های شـش‌ضلعی ایـن اسـت کـه این شـکل‌ها بیشـترین اسـتحکام را ایجـاد می‌کننـد و بالاتریـن کارایـی را در ذخیره‌سـازی عسـل دارنـد. در عین حال هم کمترین میزان موم در سـاخت آن‌ها صرف می‌شـود.

تشـکیل کندو به شـکل‌هایی مثـل دایره یا چند ضلعی‌های دیگر نیز امکان‌پذیر اسـت، امـا در تمـام ایـن تقسـیم‌بندی‌ها، جاهای خالـی بـدون اسـتفاده بـه وجـود می‌آیند و نمی‌تـوان از تمـام محیـط برای انبارسـازی اسـتفاده کرد.

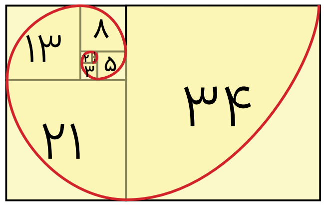
مطمئنم که دارید با ریاضی آشـتی می‌کنید، بـه خاطر همین ادامه می‌دهیم.

برویـم سـراغ کاربرد چهـارم: کاربـرد دنبالهٔ فیبوناچـی در طبیعـت!

قبل از اینکه با کاربردهای دنبالهٔ فیبوناچی در طبیعت آشـنا شویم، ببینیم که اصلاً دنبالهٔ فیبوناچی چیست. «دنبالهٔ فیبوناچی»[1] سری عددهایـی اسـت کـه در آن هر عـدد (به جز دو عدد اول) مجموع دو عدد قبلی اسـت.

برای مثال به دنبالهٔ زیر توجه کنید:

۰،۱،۱،۲،۳،۵،۸،۱۳،۲۱،۳۴،۵۵ ....



شکل ۴. نمایشی از دنبالهٔ فیبوناچی

به جمله‌های دنباله دقت کنید:

جملهٔ سوم: ← ۰+۱=۱

جملهٔ چهارم: ← ۱+۱=۲

جملهٔ پنجم: ← ۱+۲=۳

جملهٔ ششم: ← ۲+۳=۵

جملهٔ هفتم: ← ۳+۵=۸

...

امـا یک موضوع جالب: اگر هر عدد در دنبالهٔ فیبوناچـی را بـه عـدد پیش از خود تقسـیم کنیـم، مقـدار ایـن نسـبت‌ها به‌تدریـج به عـددی ثابـت ـ کـه ۱/۶۱۸ اسـت ـ نزدیـک می‌شـود. به عدد ۱/۶۸۱، «نسـبت طلایی» می‌گوینـد که مثال‌های زیادی از شـهود این نسـبت را در طبیعـت می‌تـوان یافت و ما در اینجا بـه دو مورد اشـاره می‌کنیم:

۱. همیـن الان بروید و به آینه نگاه کنید! بله درست فهمیدید، نسـبت طلایی را می‌توان در صورت انسان دید!

بلـه این‌گونه اسـت؛ صـورت انسـان‌ها نیز از الگوهـای ریاضـی تقارن و نسـبت طلایی بی‌نصیـب نیسـت. حتـی مطالعات نشـان می‌دهند، کسـانی که تقارن و تناسب طلایی در اجـزای صورتشـان نمود دقیق‌تـری پیدا کرده است، از نظر فیزیکی جذاب‌تر هستند.

بر اسـاس مطالعات، دهان و بینی در نقاطی با نسـبت طلایی از فاصلهٔ میان دو چشـم و انتهـای چانه قرار دارند.

همچنیـن زیباترین لبخندها از آن کسـانی اسـت که اندازهٔ دندان پیشین آن‌ها ۱/۶۱۸ بـار بزرگ‌تـر از دندان‌هـای کنـاری و ایـن دندان‌هـا نیز ۱/۶۱۸ بار بزرگ‌تر از دندان‌های نیـش باشـند. به‌نظـر می‌رسـد مـا از نظر فیزیکی پایبند نسـبت طلایی هستیم و این ویژگی، شـاخص بالقوهٔ سـلامت تولید مثل در انسان‌هاسـت.

۲. مـورد دیگـری که می‌توان نسـبت طلایی را مشـاهده کرد، گل آفتاب‌گردان اسـت. به شـکل ۵ دقت کنید.

شکل ۵. نسبت طلایی و دنبالهٔ فیبوناچی در ساختار گل آفتاب‌گردان

دانشمندان دریافته‌اند، در گل آفتاب‌گردان رشـد دانه‌هـا از مرکـز به سـمت بیـرون بر اسـاس الگوی دنبالـهٔ عددهـای فیبوناچی صـورت می‌گیرد. طبق نتایج تحقیقات انجام شـده، نسـبت قطر هـر مارپیچ بـه مارپیچ بعـدی ۱/۶۱۸ اسـت. ایـن الگـو عـلاوه بـر آفتاب‌گردان در بسیاری از برگ‌ها، گل‌برگ‌ها و دانه‌هـا نیز دیده می‌شـود.

دانشـمندان می‌گوینـد علـت تبعیـت آفتاب‌گـردان و دیگـر گیاهـان از ایـن الگـو کارایـی آن اسـت. ایـن الگو باعث می‌شـود کـه تعـداد دانه‌هـا حداکثـر باشـد.

امیدوارم که توانسـته باشـم کمی دید شما را نسـبت بـه ریاضـی بهتر کنـم و شـما را با ریاضی آشـتی دهـم. از آنجـا کـه می‌دانـم فرزندانـی داریم که چالش را دوسـت دارند، یـک چالـش را برایشـان مطـرح می‌کنـم: «ساختار **دنا (دی‌ان‌ای)** چه ربطی به ریاضیات دارد؟»

پی‌نوشت

1. Fibonacci sequence

رایانه‌ها چگونه محاس

سامان فرحت

همان‌طور که می‌دانید، زبان رایانه‌ها فقط از ۰ و ۱ تشکیل شده است، اما رایانه نیاز دارد «عملگر»هایی داشته باشد تا به کمک آن‌ها بتواند با کلمه‌های متشکل از ۰ و ۱ محاسبه کند (که همان کار اصلی رایانه است). **علی** و **رضا** قصد دارند با حل مسئله‌ای چگونگی کار رایانه‌ها را بهتر بفهمند. پدر آن‌ها که استاد مدارهای منطقی در دانشگاه است، برای آن‌ها چالش زیر را مطرح می‌کند:

- فرض کنید هر سیمی دارای دو وضعیت خاموش یا روشن است. به این معنی که آیا جریان از آن رد می‌شود یا خیر $\frac{0}{1}$. با نوشتن ۱ و ۰ روی هر سیم نشان می‌دهیم که آیا جریان از آن رد می‌شود یا خیر.
- گیت AND که آن را با نشان می‌دهیم و معادل آن حرف فارسی «و» است، فقط وقتی که هر دو ورودی آن روشن یا ۱ باشند خروجی ۱ می‌دهد و در غیر این صورت (در سه حالت دیگر) خروجی آن ۰ است. یعنی برای A B C نمودار ۱ را می‌توان رسم کرد.

A	B	C
۱	۱	۱
۱	۰	۰
۰	۱	۰
۰	۰	۰

جدول ۱

گیت OR که آن را با نشان می‌دهیم و معادل آن حرف فارسی «یا» است، فقط وقتی که هر دوی ورودی‌ها ۰ باشند خروجی صفر می‌دهد و در غیر این صورت برابر ۱ است. به عبارت دیگر برای A B C می‌توان جدول ۲ را کشید.

A	B	C
۱	۱	۱
۱	۰	۱
۰	۱	۱
۰	۰	۰

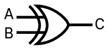
جدول ۲

- گیت NOT که آن را با نشان می‌دهیم و معادل فارسی آن «نقیض» است، وضعیت سیم را در خروجی تغییر می‌دهد. یعنی سیم روشن را خاموش و سیم خاموش را روشن می‌کند. پس برای A B جدول ۳ تعیین‌کننده است.

A	B
۱	۰
۰	۱

جدول ۳

- گیت XOR که آن را با نشان می‌دهیم و معادل فارسی ندارد! با AND و OR تفاوت دارد. به این صورت عمل می‌کند که اگر زوج تا از ورودی‌ها ۱ باشند (یعنی هیچ کدام یا هر دو)، خروجی ۰ می‌شود و در غیر این صورت (دقیقاً یک ورودی روشن و دیگری خاموش)،

خروجی ۱ می‌شود. یعنی برای  جدول ۴ را می‌توان رسم کرد.

A	B	C
۱	۱	۰
۱	۰	۱
۰	۱	۱
۰	۰	۰

جدول ۴

اطلاعات بالا را پدر علی و رضا به آن‌ها می‌دهد و سپس روی چند نکته تأکید می‌کند:

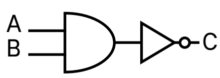
«اول اینکه مدارهای رایانه‌ای، وقتی خیلی از نزدیک به آن‌ها نگاه کنید، ساختاری شبیه به گیت‌های بالا دارند. دوم اینکه گیت XOR مانند جمع در مبنای ۲ عمل می‌کند.

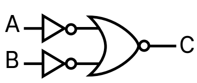
سوم اینکه AND واقعاً شبیه «و» در فارسی است و می‌گوید خروجی‌اش فقط وقتی جریان می‌دهد که ورودی اول «و» ورودی دوم روشن باشند.

چهارم اینکه OR هم واقعاً مانند «یا» عمل می‌کند و هر وقت حداقل یکی از دو ورودی روشن باشد، خروجی را روشن می‌کند.

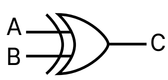
پنجم اینکه NOT هم هرچه بگیرد را برعکس می‌کند و معادل منفی کردن جمله در فارسی است.

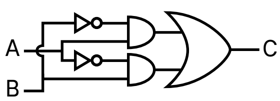
حالا از شما می‌خواهم در مورد این موضوع فکر کنید که: چرا دو مدار زیر معادل هستند؟ به این معنی که هر حالت ممکن ورودی را به دو مدار بدهیم، خروجی یکسان خواهد بود.»





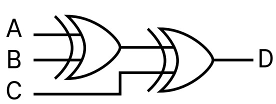
پس از آنکه بچه‌ها به این نکته پی بردند، پدر از آن‌ها می‌خواهد فکر کنند که: چرا دو مدار زیر معادل‌اند؟





بچه‌ها پس از حل مسئلهٔ بالا خیلی شگفت‌زده شدند. حالا پدر می‌خواهد که تلاش کنند و ببینند آیا مدار ساده‌ای معادل با مدار زیر می‌توانند پیدا کنند یا خیر!

البته پس از مدتی لو می‌دهد که پیدا کردن مدار سادهٔ معادل امکان ندارد!



محمد دشتی

ریاضیات شخصیتی کارآمد با روابط اجتماعی بالا!

گفت‌وگو با کیاراد طهماسبیان، دانش‌آموز پایهٔ نهم مدرسهٔ سمپاد

در دنیا هر پدری همواره آرزو دارد فرزندانش به بالاترین درجه از دانش و سواد برسند تا بتوانند در زندگی فردی و اجتماعی خود مفید باشند. در این میان اینکه پدری با داشتن فوق تخصص مغز و اعصاب که می‌تواند همهٔ اوقات او را به خود اختصاص دهد، به فکر آیندهٔ فرزند خود باشد، به‌گونه‌ای که بخشی از وقت خود را اختصاصاً برای فرزندش بگذارد، بسیار قابل تقدیر است.

دکتر طهماسبیان اما فراتر از پیگیری درس و مشق فرزندش، به برخی فعالیت‌هایی که ممکن است از نگاه برخی خانواده‌ها جنبی و بی‌اهمیت جلوه کند، نیز اهمیت داده است؛ به‌گونه‌ای که همراه با **کیاراد** به دفتر مجلهٔ رشد آمده و تلاش کرده است فرزندش را با فعالیت‌های کمک‌درسی نیز از نزدیک آشنا کند. امری که باعث شده است کیاراد نیز در هدف‌گذاری خودش رشتهٔ پزشکی و رشتهٔ داروسازی را هدف قرار دهد و برای رسیدن به چنین چشم‌اندازی تلاش کند.

آنچه در ادامه می‌خوانید حاصل گفت‌وگویی کوتاه با کیاراد طهماسبیان است که کلاس هشتم را پشت سر گذاشته و در یکی از مدرسه‌های سمپاد یا همان مدرسه‌های وابسته به «سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان» تحصیل می‌کند.

آقا کیاراد از اینکه وقت گذاشتی و با مجلهٔ خودت، یعنی رشد ریاضی برهان، گفت‌وگو می‌کنی ممنونیم. برایمان بگو آیا تا حالا شده است در زندگی روزمره‌ات مثلاً در خرید، آماده‌کردن یک تحقیق یا پروژه، در آشپزی یا برنامه‌ریزی درسی و از این قبیل کارها از ریاضی استفاده کنی؟

من هم خدمت شما و همهٔ خوانندگان این مجلهٔ خواندنی و به‌خصوص هم‌سن‌وسال‌های خودم سلام می‌کنم. به‌طور طبیعی ما اگر از آنچه در مدرسه می‌خوانیم و یاد می‌گیریم در زندگی روزمره استفاده کنیم، در حقیقت توانسته‌ایم دانش و آگاهی خودمان را در زندگی به کار بگیریم. به همین دلیل من هم گاهی در خریدهای روزمره، برای محاسبه‌ها از ریاضی استفاده می‌کنم. به علاوه دو سال گذشته در پژوهشی دربارهٔ عدد آووگادرو، استفادهٔ زیادی از ریاضیات کردیم؛ موضوعی که باعث شد عملاً در کاربرد نیز از این علم مهم استفاده کنیم.

به نظر تو وقتی با ماشین‌حساب و ابزار و وسایل، همهٔ محاسبه‌ها را به‌راحتی انجام می‌دهند، اساساً چرا باید ریاضی بخوانیم؟

سؤال خوبی است، چون در بسیاری از موارد دیگر هم باید به آن پاسخ بدهیم. از نظر من ریاضی به محاسبه‌های روزمره محدود نیست و در نظام آموزشی نوین کاربردهای خیلی زیادی دارد. به همین دلیل ریاضی را باید بیاموزیم. هر قدر هم بیشتر در ریاضیات ماهر باشیم، معادله‌های ریاضی و حتی فیزیکی و واکنش‌های شیمیایی برای ما ساده‌تر می‌شوند. خوشبختانه پیشرفت فناوری‌های آموزشی سبب شده است ما فرصت بیشتری برای پرداختن به کارهای اصلی خود داشته باشیم و این موضوع مهمی است.

فکر می‌کنی ریاضی چه نقشی می‌تواند در آیندهٔ شغلی افراد داشته باشد؟

این موضوع با توجه به شغل فرد، برای هر کسی می‌تواند متفاوت باشد، ولی حتی در علوم تجربی مثل شیمی و پزشکی هم ریاضی استفادهٔ قابل توجهی دارد. خیلی جاها هم شاید ریاضی به چشم نیاید، ولی از آن استفاده می‌شود. جدا از آن، ریاضیات با تقویت مهارت‌های تحلیلی و حل مسئله، فرصت‌های شغلی فراوانی در زمینه‌های مهندسی، علوم رایانه، علوم داده، هوش مصنوعی، مالی، پزشکی و بسیاری صنایع دیگر فراهم می‌کند و به افراد امکان می‌دهد در شغل‌های پردرآمد و نوظهور نقش مؤثری ایفا کنند.

آیا ریاضی در طراحی بازی‌های رایانه‌ای یا پویانمایی هم کاربرد دارد؟

صددرصد. کاربردهای خیلی زیادی دارد، مثل تنظیمات صفحه و تنظیم چیزهای مدنظر. علاوه بر آن ریاضیات و دیگر درس‌های این حوزه، برای طراحی بازی و پویانمایی (انیمیشن) ضروری هستند. در زمینه‌هایی چون گرافیک، شبیه‌سازی فیزیکی، هوش مصنوعی، و پویانمایی‌های پیچیده هم کاربرد دارند. هندسه برای مدل‌سازی سه‌بعدی و مفهوم‌های برداری و ماتریسی برای حرکت‌ها و موقعیت‌دهی اشیا در فضا به کار می‌روند. همچنین، آمار و احتمال در طراحی رویدادهای تصادفی و هوش مصنوعی نقش دارد. مثلاً در پویانمایی، انتگرال برای کنترل نرم سرعت حرکت‌ها و ریگ‌بندی شخصیت‌ها (کاراکترها) مورد استفاده قرار می‌گیرد.

اگر بخواهی چیزی را اختراع کنی، فکر می‌کنی ریاضی چطور می‌تواند کمکت کند؟

با یکی از دوستانم حدود یک سالی روی ژل‌های آتش‌زا کار کردیم و چند نمونه هم حاصل شد. در این کار از ریاضیات برای محاسبهٔ واکنش‌ها و درصد مواد در مادهٔ نهایی استفاده کردیم. اگر این راه را ادامه بدهیم، صددرصد استفادهٔ بیشتری هم از ریاضی خواهیم داشت. باید به یاد داشته باشیم، ریاضی چون پایهٔ منطقی و تفکر دارد، می‌تواند در همهٔ زمینه‌ها به‌خصوص در بحث اختراع به دانش‌آموزان کمک کند. جدا از آن، مخترع شدن مسیری پر از خلاقیت، تجربه و تلاش است که حتماً کسی که ریاضی را خوب فهمیده است، می‌تواند در این مسیر از آن استفاده کند.

به نظرت ریاضی در رشته‌هایی مثل پزشکی، مهندسی یا حتی هنر چه کاربردهایی دارد؟

ریاضی در پزشکی، در تصویربرداری‌ها نقش بالایی دارد. در مهندسی عملاً مهم‌ترین عامل ریاضی است. در هنر هم در جاهایی مثل تنظیم خط‌ها و رسمشان و خیلی چیزهای دیگر، می‌شود از ریاضی کمک گرفت. در واقع ریاضیات علمی است که با منطق شکل، کمیت و چیدمان سروکار دارد. نقش ریاضی در زندگی روزمرهٔ ما بسیار پررنگ است، تا آنجا که من شنیده و خوانده‌ام: «ریاضی‌دانان کاربردی» از ریاضیات برای حل مشکلات دنیای واقعی، حتی در مسائلی مانند اقتصاد استفاده می‌کنند و «ریاضی‌دانان محض» از ریاضیات برای گسترش دانش فعلی بهره می‌گیرند و غالباً در دانشگاه‌ها مشغول به کار می‌شوند. با چنین تعریفی به نظرم ریاضی‌دان می‌تواند در صنایعی مثل بانکداری، هوافضا، مهندسی و... مشغول کار شود و در نتیجه انتخاب‌های زیادی خواهد داشت.

به نظر کیاراد چه چیزی باعث می‌شود فردی از ریاضی خوشش بیاید یا از آن فراری باشد؟ اگر قرار باشد ریاضی را به یکی از دوستانت معرفی کنی، چه می‌گویی که علاقه‌مند شود؟

در مورد خودم، واقعیت این است که مسئله‌های جذاب معمولاً مرا جذب می‌کنند، ولی بعضی از مسئله‌های هندسی و بعضی مسئله‌های تکراری باعث می‌شوند که انگیزهٔ زیادی برای انجامشان نداشته باشم. اگر بخواهم ریاضی را به یکی از دوستانم معرفی کنم، سعی می‌کنم با مطالب خارج از درس، مثل ترکیبیات علاقه‌مندش کنم. البته باید توجه داشته باشیم عوامل زیادی باعث ایجاد علاقه یا بیزاری از ریاضی می‌شوند؛ از جمله تجربه‌های منفی گذشته، اضطراب ریاضی و ترس از شکست، شیوهٔ تدریس نامناسب بعضی معلم‌ها، نداشتن مهارت‌های پایه، یا درک نادرست مفهوم‌های ریاضی. همچنین، رویکرد تعاملی در تدریس، استفاده از بازی، تمرین و تکرار مداوم، و ایجاد اعتمادبه‌نفس می‌تواند در علاقه‌مندشدن افراد به ریاضی مؤثر باشد.

خودت دوست داری ریاضی را چطور یاد بگیری؟ با بازی، فیلم، پروژه‌های عملی یا روش‌های سنتی؟

روش‌های معمول و متعادل را بیشتر ترجیح می‌دهم که در خودشان همهٔ این عامل‌ها را داشته باشند و تنوع بیشتری برای مخاطب ایجاد کنند. البته برای یادگیری بهتر ریاضی، تسلط بر مفهوم‌های پایه، حضور منظم و فعال در کلاس، نوشتن جزوه و حل تمرین خیلی مهم است و باعث می‌شود مفهوم‌های ریاضی در ذهن فرد بهتر تثبیت شوند.

آیا تا حالا شده است در حل مسئله‌ای، اول فکر کنی حل آن غیرممکن است و بعد آن را حل کنی؟ در لحظهٔ حل آن چه حسی داشتی؟

در مسئله‌های هندسه و مسئله‌های ترکیبیات این موضوع خیلی برای من پیش آمده است و بعد از حل مسئله احساس راحتی خاصی داشته‌ام که بعد از حل مسئله‌های ساده‌تر معمولاً ندارم.

اگر ریاضی شخصیت داشت، فکر می‌کنی دارای چه ویژگی‌هایی بود؟ مهربان، سخت‌گیر، یا؟...

احتمالاً یکی از ویژگی‌های بارز آن شخصیت چندکاره‌بودن می‌شد، چون عملاً در تمام رشته‌ها نقش بزرگی ایفا می‌کند. احتمالاً شخصیتی کارآمد با روابط اجتماعی بالا داشت.

در آینده مثلاً اگر معلم، مهندس، پزشک یا پژوهشگر بشوی، دوست داری با ریاضی چه کاری انجام بدهی؟

برای پاسخ به این سؤال باید کمی جلوتر بروم، اما در حال حاضر هدفم رشته‌های پزشکی و داروسازی است و در این دو رشته دوست دارم از ریاضی استفاده کنم؛ به‌خصوص در زمینهٔ ترکیب‌های شیمیایی. زیرا می‌دانم ریاضیات در ترکیب‌های شیمیایی برای این موارد کاربرد دارد: محاسبهٔ نسبت‌های مولی مواد؛ تعیین مقدار انرژی آزادشده یا مصرف‌شده در واکنش‌ها؛ پیش‌بینی حجم گازهای تولیدی؛ محاسبهٔ غلظت محلول‌ها؛ تعیین سرعت واکنش‌ها. به طور کلی، ریاضیات ابزاری ضروری برای کمی‌سازی و پیش‌بینی نتیجه‌های واکنش‌های شیمیایی است.

نجوم ریاضیاتی

قسمت سوم: منشأ پیدایش جهان

روح‌الله خلیلی بروجنی

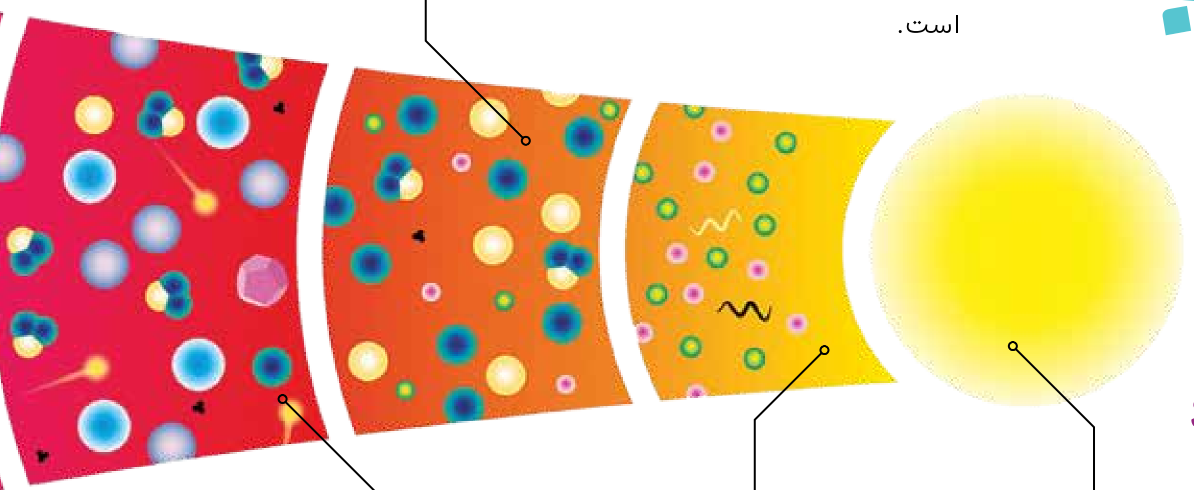
اشاره

دانشمندان فکر می‌کنند که منشأ پیدایش جهان به حدود ۱۳/۸ میلیارد سال پیش باز می‌گردد و با رویدادی به نام «مِهبانگ» یا انفجار بزرگ (بیگ‌بنگ)، جهان و همهٔ چیزهای موجود در آن خلق شده‌اند.

فعالیت ۱/ دانشمندان با اندازه‌گیری سرعت انبساط کیهان، سن تقریبی آن را حدود ۱۳/۸ میلیارد سال تخمین زده‌اند. فرض کنید کهکشانی در فاصلهٔ ۱ میلیارد سال نوری از زمین قرار دارد و با سرعت ۷۰ کیلومتر بر ثانیه از ما دور می‌شود. اگر تندی دور شدن کهکشان ثابت باشد، چه مدت طول می‌کشد تا فاصلهٔ آن با ما به دو میلیارد سال نوری برسد؟ از رابطهٔ $\text{تندی} = \frac{\text{مسافت}}{\text{زمان}}$ استفاده کنید. توجه کنید که یک سال نوری حدود ۹۴۶۰ میلیارد کیلومتر است.

ذرات شکل می‌گیرند

در مرحلهٔ بعدی ایجاد جهان، ذرات کوچکی به نام پروتون‌ها و نوترون‌ها شروع به شکل‌گیری کردند. این ذرات هستهٔ اتم‌ها را تشکیل می‌دهند که واحد (بلوک) های سازندهٔ همه چیز هستند.



مهبانگ

پیدایش جهان با انفجاری معروف به مهبانگ آغاز شده است. این یک نظریهٔ علمی است.

انبساط جهان

پس از مهبانگ، جهان، در حالی که بسیار داغ بود، به سرعت منبسط شد!

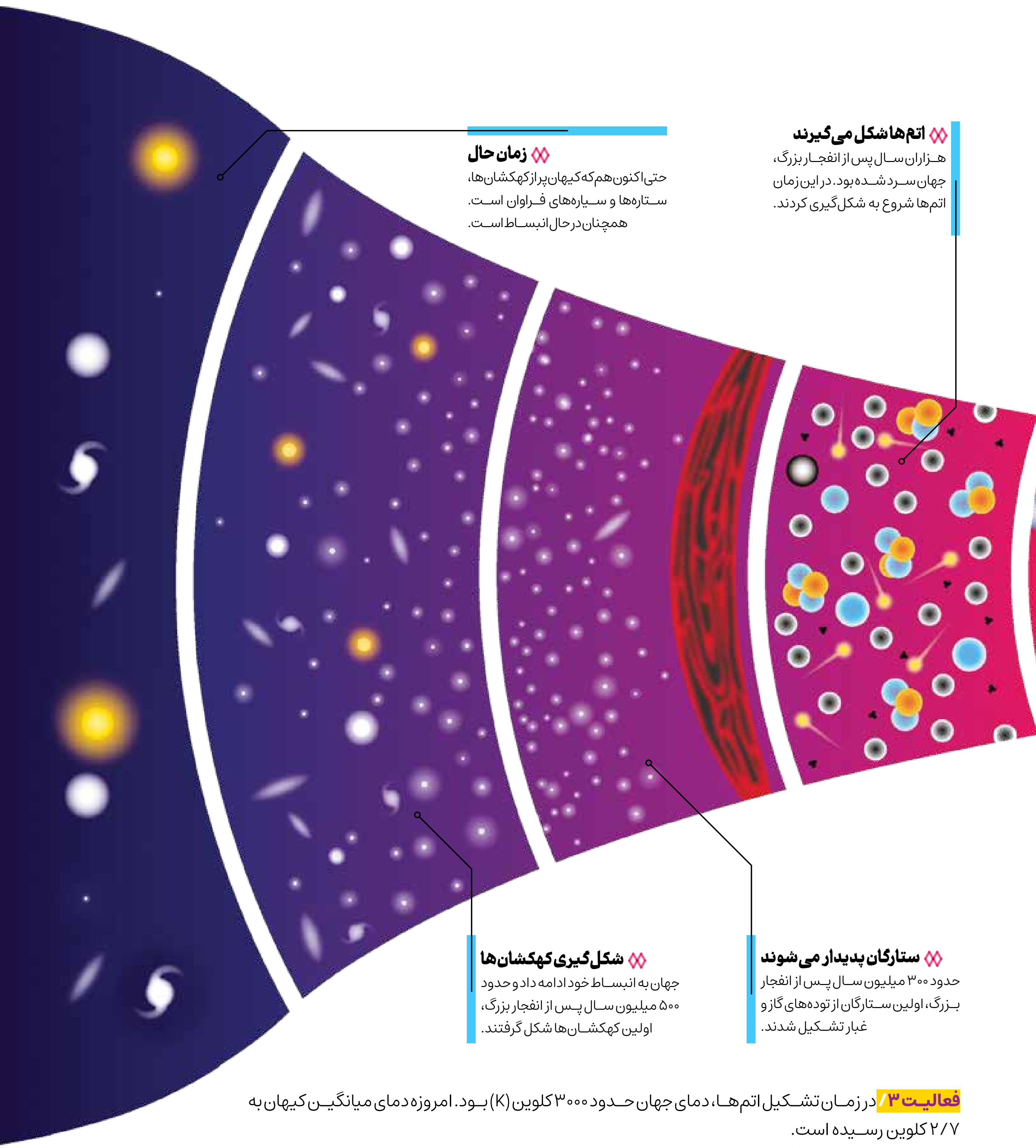
تشکیل ماده

در اولین ثانیه پس از مهبانگ، جهان شروع به سرد شدن کرد و ماده تشکیل شد.

ریاضیات کیهان

دانشمندان می‌توانند با مطالعهٔ سرعت انبساط کیهان در حال حاضر، سن آن را محاسبه کنند و حدس بزنند. آن‌ها همچنین می‌توانند قدیمی‌ترین جرم‌های موجود در فضا را بررسی کنند تا دریابند اجزای تشکیل‌دهندهٔ کیهان چگونه و چه زمانی ساخته شده‌اند.

فعالیت ۲/ قدیمی‌ترین ستاره‌های کشف‌شده در کهکشان راه‌شیری حدود ۱۳/۳ میلیارد سال سن دارند. سن زمین حدود ۴/۵ میلیارد سال است. تفاوت سن قدیمی‌ترین ستاره‌ها و زمین را محاسبه کنید. اگر سن کیهان را به صورت یک خط‌کش به طول ۱۳۸ سانتی‌متر نمایش دهیم، سن زمین و قدیمی‌ترین ستاره‌ها روی این خط‌کش در چه نقطه‌هایی قرار می‌گیرند؟



فعالیت ۳/ در زمان تشکیل اتم‌ها، دمای جهان حدود ۳۰۰۰ کلوین (K) بود. امروزه دمای میانگین کیهان به ۲/۷ کلوین رسیده است.

الف) تفاوت دمای جهان در آن زمان و امروز را محاسبه کنید.

ب) در علوم هفتم دیدید که با استفاده از رابطهٔ **۲۷۳ - دمای کلوین = دمای سلسیوس** می‌توان دمای کلوین را به دما برحسب درجهٔ سلسیوس تبدیل کرد. دمای جهان در زمان تشکیل اتم‌ها برحسب درجهٔ سلسیوس ($^\circ C$) چقدر است؟

فرمول موفقیت در بازاریابی

ژما جواهری‌پور

تا به حال به این فکر کرده‌اید که چطور بعضی کسب‌وکارها این‌قدر موفق‌اند و مشتری‌های زیادی دارند؟ یا چطور می‌دانند که دقیقاً چه چیزی را برای چه کسانی تبلیغ کنند؟ شاید فکر کنید این‌ها رازهای پیچیده‌ای هستند که فقط متخصصان از آن سر درمی‌آورند، اما واقعیت این است که بخش زیادی از این موفقیت‌ها ریشه در یک علم جذاب و البته کاربردی دارد: ریاضیات! بله درست خواندید، ریاضیاتی که شاید در نگاه اول فقط در کتاب‌های درسی و فرمول‌های انتزاعی دیده باشید، کلید درک دنیای بازاریابی و جذب مشتری است.

در این مقاله می‌خواهیم با هم سفری هیجان‌انگیز به دنیای آمار و احتمال داشته باشیم و ببینیم چطور همین مفهوم‌های ساده و دوست‌داشتنی ریاضی می‌توانند به ما کمک کنند تا بفهمیم مشتریان چه می‌خواهند، چطور یک تبلیغ موفق بسازیم و حتی پیش‌بینی کنیم که کدام پویش (کمپین) بازاریابی شانس بیشتری برای جذب مشتری دارد. از نظرسنجی‌های ساده گرفته تا تحلیل داده‌ها و کشف شانس موفقیت یک پویش تبلیغاتی، همه و همه به کمک ابزارهای ریاضی ممکن می‌شوند. پس آماده باشید تا با هم فرمول موفقیت در بازاریابی را کشف کنیم و ببینیم چطور ریاضی می‌تواند به شما کمک کند در دنیای واقعی، مشتریان بیشتری جذب کنید!

بازاریابی نوین، بیش از هر زمان دیگری به داده‌ها وابسته است. برای اینکه پویش‌های تبلیغاتی اثربخش باشند و مشتریان به درستی شناسایی شوند، استفاده از ابزارهای ریاضی ضروری است. در اینجا چند مثال جذاب از کاربرد مفهوم‌های آماری، احتمال و نمودارها در مباحث اقتصادی و بازاریابی آورده شده است:

آمار توصیفی: شناخت مشتریان با عددها

آمار توصیفی به ما کمک می‌کند داده‌های جمع‌آوری شده از مشتریان را خلاصه و سازمان‌دهی کنیم و از دل آن‌ها به اطلاعات مفیدی دست یابیم. نخست در مورد مبانی بازاریابی، یعنی شناخت مشتری، تبلیغات و پویش‌های بازاریابی دو مثال بخوانیم:

مثال ۱. یافتن سلیقهٔ اغلب مشتریان برای یک محصول جدید

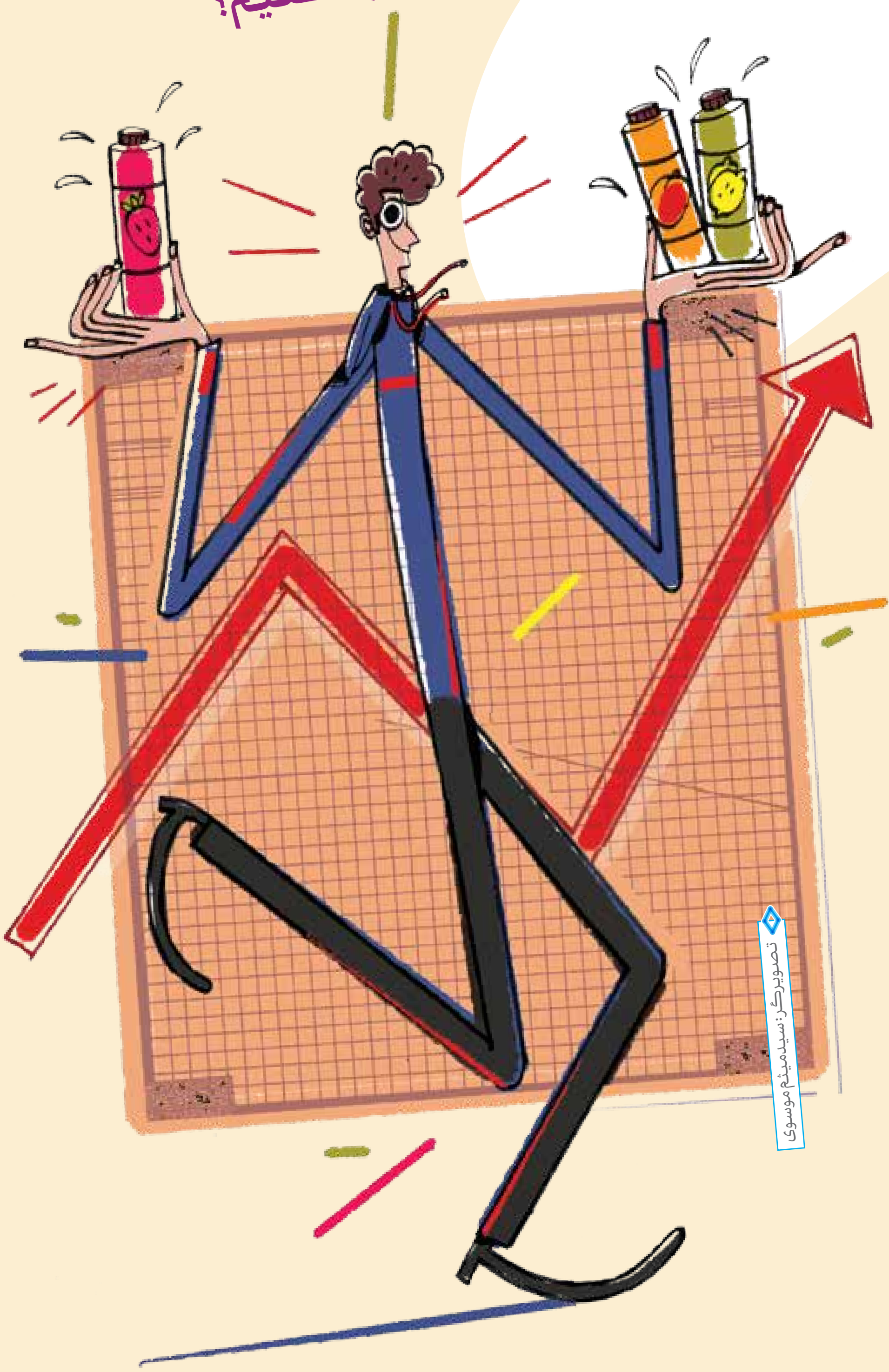
فرض کنید یک شرکت تولیدکنندهٔ نوشیدنی قصد دارد طعم جدیدی به بازار عرضه کند. به این منظور یک نظرسنجی از ۱۰۰ نفر از مشتریان بالقوه انجام می‌دهد و از آن‌ها می‌خواهد که به سه طعم پیشنهادی (لیمو، توت‌فرنگی و انبه) از ۱ تا ۵ امتیاز بدهند (۱: اصلاً دوست ندارم و ۵: خیلی دوست دارم).

- **جمع‌آوری و سازمان‌دهی داده‌ها:** پس از جمع‌آوری داده‌ها، می‌توانیم تعداد افرادی را که هر امتیاز را به هر طعم داده‌اند، ثبت کنیم.
- **میانگین:** با محاسبهٔ میانگین امتیاز هر طعم، می‌توانیم بفهمیم که کدام طعم به طور کلی محبوب‌تر است.

اگر میانگین امتیاز طعم لیمو ۴/۲، توت‌فرنگی ۳/۵ و انبه ۴/۵ باشد، نشان می‌دهد که طعم انبه به طور متوسط بالاترین امتیاز را از مشتریان دریافت کرده است.

- **مد:** مد (رایج‌ترین امتیاز) می‌تواند نشان دهد که کدام امتیاز برای هر طعم بیشتر تکرار شده است. مثلاً اگر بیشترین تعداد افراد به طعم انبه امتیاز ۵ داده باشند، این طعم دارای مد ۵ است که نشان‌دهندهٔ محبوبیت بسیار بالای آن بین گروه بزرگی از پاسخ‌دهندگان است.

چگونه با آمار و احتمال مشتریان بیشتری جذب کنیم؟



تصویرگر: سید میثم موسوی

- **میانه:** میانه (امتیاز وسطی وقتی داده‌ها مرتب شده‌اند) به ما کمک می‌کند تا دید بهتری از تمایل کلی مشتریان داشته باشیم؛ به‌خصوص اگر امتیازهای پرت وجود داشته باشند. مثلاً اگر میانهٔ امتیازهای طعم انبه ۴ باشد، یعنی نیمی از افراد امتیاز ۴ یا بالاتر به آن داده‌اند.

کاربرد در بازاریابی

با استفاده از این آمارها شرکت می‌تواند تصمیم بگیرد که کدام طعم را برای عرضه به بازار انتخاب کند و پویش‌های تبلیغاتی خود را بر اساس سلیقهٔ اغلب مشتریان هدف قرار دهد.

احتمال: پیش‌بینی موفقیت پویش‌ها

احتمال به ما کمک می‌کند شانس وقوع یک رویداد را پیش‌بینی کنیم که در بازاریابی برای ارزیابی اثربخشی تبلیغات و پویش‌ها بسیار مفید است.

مثال ۲. شانس دیده‌شدن تبلیغ برخط شما

فرض کنید یک شرکت تولیدکنندهٔ کفش، یک پویش تبلیغاتی برخط را در یک وبگاه پربازدید اجرا کرده است. این وبگاه اعلام می‌کند که به‌طور متوسط از هر ۱۰۰۰ بازدیدکننده، ۱۰ نفر روی برنمای (بنر) تبلیغاتی کلیک می‌کنند.

- **محاسبهٔ احتمال:** احتمال اینکه یک بازدیدکنندهٔ تصادفی روی تبلیغ شما کلیک کند، برابر است با:

احتمال کلیک $= \frac{۱۰}{۱۰۰۰} = ۰/۰۱$

این یعنی شانس کلیک روی تبلیغ شما ۱ درصد است.

- **پیش‌بینی تعداد کلیک‌ها:** اگر شرکت ۵۰۰,۰۰۰ بازدیدکننده را برای وبگاه پیش‌بینی کند، می‌تواند انتظار داشته باشد که تقریباً:

تعداد کلیک‌ها $= ۵۰۰,۰۰۰ \times ۰/۰۱ = ۵۰۰۰$

این یعنی انتظار می‌رود حدود ۵۰۰۰ کلیک روی تبلیغ صورت گیرد.

کاربرد در بازاریابی: این پیش‌بینی به شرکت کمک می‌کند بودجهٔ کمپین، بازده سرمایه‌گذاری و هدف‌های فروش خود را واقع‌بینانه‌تر تنظیم کند. اگر تعداد کلیک‌ها کمتر از حد انتظار باشد، شرکت می‌تواند راهبرد تبلیغاتی خود را تغییر دهد.
با موضوع تحلیل بازار و درک نیازها و خواسته‌های مشتریان با مثالی آشنا شویم:

مثال ۳. تحلیل نظرسنجی رضایت مشتری با آمار توصیفی

موضوع اقتصادی: یک شرکت تولیدکنندهٔ نوشیدنی‌های طبیعی قصد دارد میزان رضایت مشتریان خود را از محصول جدید، «آب‌میوهٔ استوایی»، بسنجد تا درک بهتری از نیازها و خواسته‌های مشتریان به دست آورد.

سناریوی ریاضی: شرکت یک نظرسنجی برخط از ۱۰۰ نفر از مشتریانی که محصول جدید را خریداری کرده‌اند، انجام می‌دهد. یکی از سؤال‌های نظرسنجی این است: «میزان رضایت شما از طعم آب‌میوهٔ استوایی چقدر است؟» و پاسخ‌ها در مقیاس ۱ تا ۵ (۱: بسیار ناراضی، ۲: ناراضی، ۳: متوسط، ۴: راضی، ۵: بسیار راضی) جمع‌آوری شدند.

داده‌های فرضی:

- تعداد پاسخ‌های با امتیاز ۱: ۵ نفر
- تعداد پاسخ‌های با امتیاز ۲: ۱۰ نفر
- تعداد پاسخ‌های با امتیاز ۳: ۲۵ نفر
- تعداد پاسخ‌های با امتیاز ۴: ۴۰ نفر
- تعداد پاسخ‌های با امتیاز ۵: ۲۰ نفر

محاسبه‌ها و نمایش ریاضی

- **میانگین رضایت:** برای به‌دست‌آوردن میانگین رضایت، مجموع امتیازها را بر تعداد کل پاسخ‌دهندگان تقسیم می‌کنیم:

$$\text{میانگین} = \frac{(1\times 5)+(2\times 10)+(3\times 25)+(4\times 40)+(5\times 20)}{100}$$

$$= \frac{5+20+75+160+100}{100}$$

$$= \frac{360}{100} = 3/6$$

تفسیر: میانگین رضایت ۳/۶ نشان‌دهندهٔ رضایت نسبتاً خوب مشتریان است که کمی بالاتر از حد متوسط قرار می‌گیرد.

مد رضایت: مدی که بیشترین تکرار را دارد، امتیاز ۴ (۴۰ نفر) است.

تفسیر: این یعنی بیشترین تعداد مشتریان، از طعم آب‌میوهٔ استوایی «راضی» بوده‌اند.

میانهٔ رضایت: با توجه به ۱۰۰ پاسخ، میانه بین پاسخ‌های ۵۰اُم و ۵۱اُم قرار می‌گیرد. با مرتب‌سازی داده‌ها (که در اینجا به صورت گروه‌بندی شده داریم):

- تا امتیاز ۲: ۵ + ۱۰ = ۱۵ پاسخ
- تا امتیاز ۳: ۱۵ + ۲۵ = ۴۰ پاسخ
- تا امتیاز ۴: ۴۰ + ۴۰ = ۸۰ پاسخ

درمی‌یابیم که پاسخ‌های ۵۰اُم و ۵۱اُم هر دو در گروه با امتیاز ۴ قرار می‌گیرند.

تفسیر: میانهٔ رضایت نیز ۴ است که نشان‌دهندهٔ تمایل مشتریان به سمت رضایت بالاست.

مثال ۴. نظرسنجی نوشیدنی و تصمیم‌گیری کافه (آمار توصیفی و رفتار مصرف‌کننده)

فرض کنید کافه‌ای جدید در حال راه‌اندازی است و می‌خواهد بهترین نوع نوشیدنی را به مشتریانش ارائه دهد. صاحب کافه از ۱۰۰ نفر از افراد محلی نظرسنجی می‌کند و از آن‌ها می‌پرسد که از بین سه نوع دمنوش، چای و قهوه کدام را ترجیح می‌دهند. نتایج به شرح زیر است:

- ۴۰ نفر دمنوش را ترجیح می‌دهند.
- ۳۵ نفر چای را ترجیح می‌دهند.
- ۲۵ نفر قهوه را ترجیح می‌دهند.

تحلیل آماری:

- **جمع‌آوری و سازمان‌دهی داده‌ها:** داده‌ها جمع‌آوری (۴۰، ۳۵، ۲۵) و سازمان‌دهی شده‌اند (تعداد افرادی که هر نوع نوشیدنی را ترجیح می‌دهند).
- **مد:** مد این داده‌ها دمنوش است، چون بیشترین تعداد افراد آن را ترجیح داده‌اند (۴۰ نفر).
- **میانگین:** میانگین تعداد ترجیحات در اینجا معنی ندارد، زیرا داده‌ها کیفی هستند (نوع نوشیدنی) نه کمی.
- **میانه:** برای محاسبهٔ میانه باید داده‌ها را به صورت صعودی یا نزولی مرتب کنیم. اگر انواع نوشیدنی را بر اساس تعداد ترجیح‌ها مرتب کنیم (قهوه: ۲۵، چای: ۳۵، دمنوش: ۴۰)، میانه چای خواهد بود (مقدار وسط).

کاربرد یافته‌ها

با استفاده از این آمار توصیفی، صاحب کافه می‌تواند تصمیم‌های بهتری در مورد موجودی نوشیدنی خود

بگیرد. از آنجاکه دمنوش محبوب‌ترین گزینه است (مد)، صاحب کافه باید مطمئن شود که به اندازهٔ کافی دمنوش متنوع با کیفیت بالا در اختیار دارد. همچنین با توجه به ترجیح‌ها می‌تواند تبلیغات و پیشنهادهای ویژهٔ خود را بر اساس این داده‌ها تنظیم کند.

مثال ۵. شانس موفقیت یک برنامهٔ کاربردی جدید (احتمال و رفتار مصرف‌کننده)

شما یک توسعه‌دهندهٔ برنامهٔ کاربردی (اپلیکیشن) هستید و قصد دارید برنامهٔ جدیدی برای سفارش برخط غذا بسازید. قبل از شروع توسعه، شما تحقیقات بازار را انجام می‌دهید و متوجه می‌شوید که در منطقهٔ شما:

- احتمال اینکه مردم از برنامه‌های جدید سفارش غذا استفاده کنند، به طور کلی ۶۰ درصد است.
- از بین افرادی که از این برنامهٔ جدید استفاده می‌کنند، احتمال اینکه از طراحی کاربرپسند (UI/UX) عالی استقبال کنند، ۸۰ درصد است.
- از بین افرادی که از برنامهٔ جدید استفاده می‌کنند، احتمال اینکه از قیمت‌های رقابتی استقبال کنند، ۷۰ درصد است.

تحلیل احتمال:

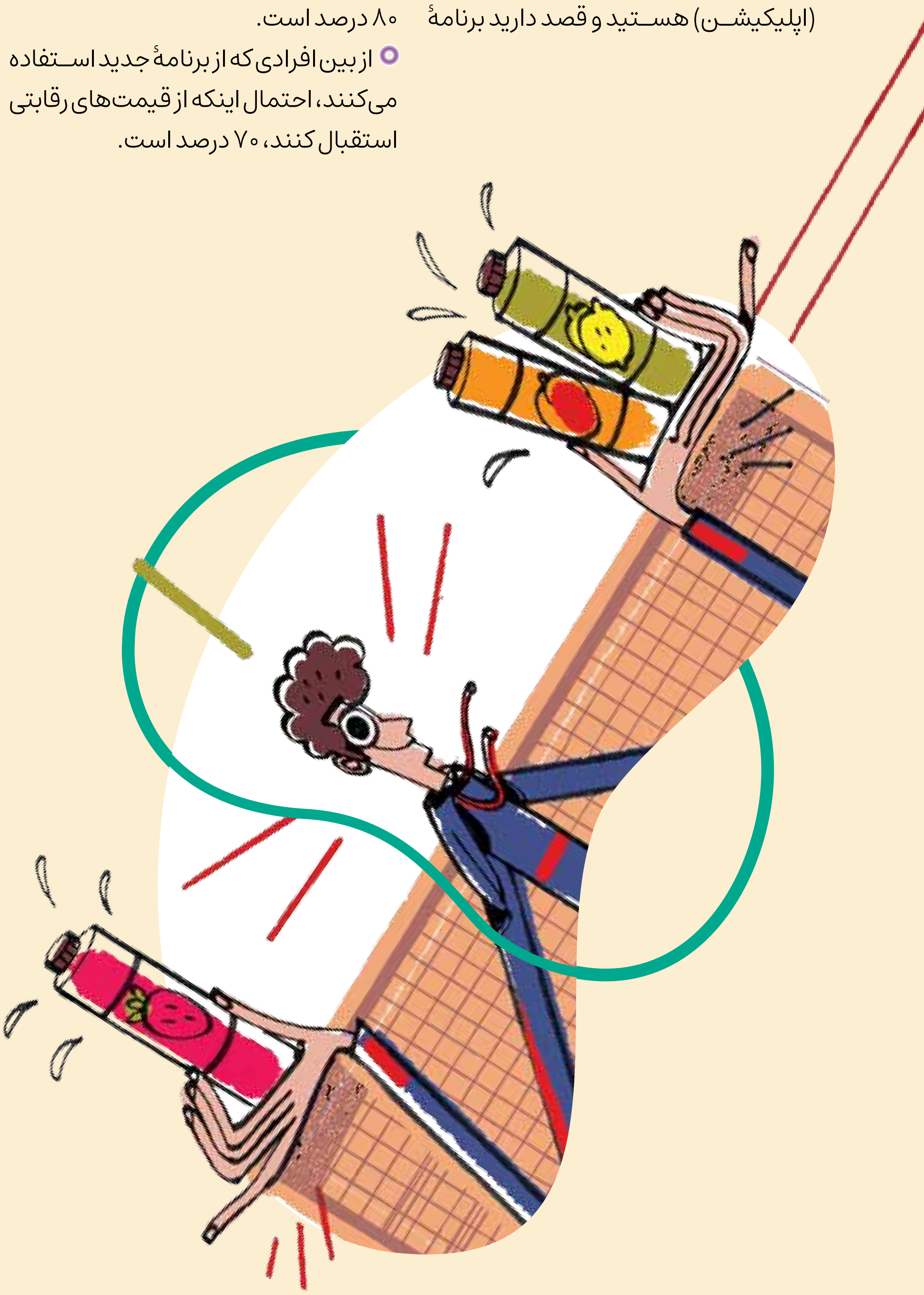
- احتمال کلی موفقیت برنامهٔ کاربردی (استفادهٔ مردم)   P(استفاده)=۰/۶۰
- احتمال استقبال از طراحی عالی
P(طراحی | استفاده)=۰/۸۰
(احتمال شرطی: احتمال استقبال از طراحی به شرط استفاده از برنامه)
- احتمال استقبال از قیمت‌های رقابتی
P(قیمت | استفاده)=۰/۷۰
(احتمال شرطی: احتمال استقبال از قیمت به شرط استفاده از برنامه)
- اگر بخواهیم احتمال اینکه یک فرد هم از برنامه استفاده کند و هم از طراحی عالی آن استقبال کند را محاسبه کنیم، می‌توانیم از فرمول احتمال شرطی استفاده کنیم:
P(طراحی‌واستفاده)=P(استفاده|طراحی)×P(استفاده)
=۰/۸۰×۰/۶۰=۰/۴۸ (۴۸ درصد)

کاربرد یافته‌ها

این محاسبه‌های احتمالی به شما کمک می‌کنند تصمیم‌هایی راهبردی بگیرید:

- با توجه به اینکه احتمال استفادهٔ کلی ۶۰ درصد است، سرمایه‌گذاری روی این ایده منطقی به نظر می‌رسد.
- تأکید بر طراحی کاربرپسند بسیار مهم است، زیرا احتمال استقبال از آن بالاست. این نشان می‌دهد که مصرف‌کنندگان به تجربهٔ کاربری اهمیت زیادی می‌دهند و سرمایه‌گذاری در این بخش می‌تواند بازده خوبی داشته باشد.
- قیمت‌گذاری رقابتی نیز عامل مهمی است، اما شاید به اندازهٔ طراحی عالی حیاتی نباشد.

این مثال‌ها نشان می‌دهند که چگونه مفهوم‌های ریاضی می‌توانند به طور مستقیم در درک و پیش‌بینی رفتار مصرف‌کننده و اتخاذ تصمیم‌های هوشمندانه در دنیای واقعی کاربرد داشته باشند.



عددها روی ترازو

حبیب یوسف‌زاده

تصویرگر: فراز برازادگان

اگر در یک مسئلهٔ ریاضی دنبال چیز نامعلومی می‌گردید، باید به سراغ جبر بروید. جبر شاخه‌ای از ریاضیات است که در آن از حرف‌های الفبا و نمادهای خاصی برای نشان‌دادن چیزهایی که برای ما مجهول هستند، استفاده می‌شود. با استفاده از چیزهای معلوم و اصول جبر، می‌شود مقدار این مجهول‌ها را به دست آورد. تفکر جبری در علوم متفاوت اهمیت زیادی دارد؛ به‌ویژه در رشته‌های مهندسی، فیزیک و علوم رایانه.

الجبر

جبر از واژهٔ عربی «الجبر» گرفته شده است. در ریاضی این کلمه ربطی به اجبار و این چیزها ندارد، بلکه به معنی جبران کردن است. واژهٔ جبر را اولین بار ریاضی‌دان ایرانی، محمد بن‌موسی خوارزمی در قرن سوم هجری (۸۲۰ میلادی) در کتاب خود به نام «الجبر و المقابله» استفاده کرد. او با این ایده خود، فصل جدیدی را در دنیای ریاضیات آغاز کرد.

کاربرد جبر در تعیین مقدار دارو

برای معالجهٔ بیماران مقدار مناسب دارو اهمیت زیادی دارد. پزشکان با توجه به وضعیت بیمار، میزان تأثیر دارو، وزن بیمار و عوامل دیگر، مقدار دارو را تجویز می‌کنند.

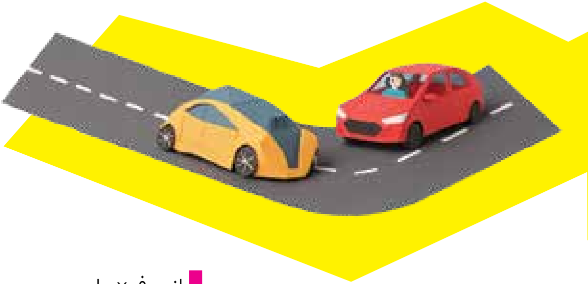
x از کجا آمده؟

X

خوارزمی در کتاب‌های خود به جای مجهول، از کلمهٔ شیء (چیز) استفاده می‌کرد. وقتی کتاب‌هایش به زبان اسپانیایی ترجمه شدند، آن‌ها شیء را به صورت xey می‌نوشتند که بعدها از مخفف این کلمه، یعنی x استفاده کردند.

جبر در جاده‌ها

علـم جبر بـه رایانه‌ها و هوش مصنوعی امـکان می‌دهد خودروهای بـدون راننـده را هدایت کنند. خـودروی بدون راننده، با اسـتفاده از علـم جبر و اطلاعات رایانه‌اش محاسـبه می‌کند که دقیقاً چه زمانی بایـد تغییر مسـیر دهد، کی ترمز کند و چقدر شـتاب بگیرد.



عملیات مقابله

هر معادلهٔ جبری شـبیه ترازوست. هر کاری که در یک طرف انجام می‌دهیم، باید در طرف مقابل هم انجام دهیم تا تعادل برقرار بماند. در اینجا می‌دانیم که الماس به علاوهٔ ۲ وزنه، مساوی ۶ وزنه است. حالا از طریق علم جبر، وزن الماس را حساب می‌کنیم.

از حرف x برای نشان‌دادن وزن الماس استفاده می‌شود.

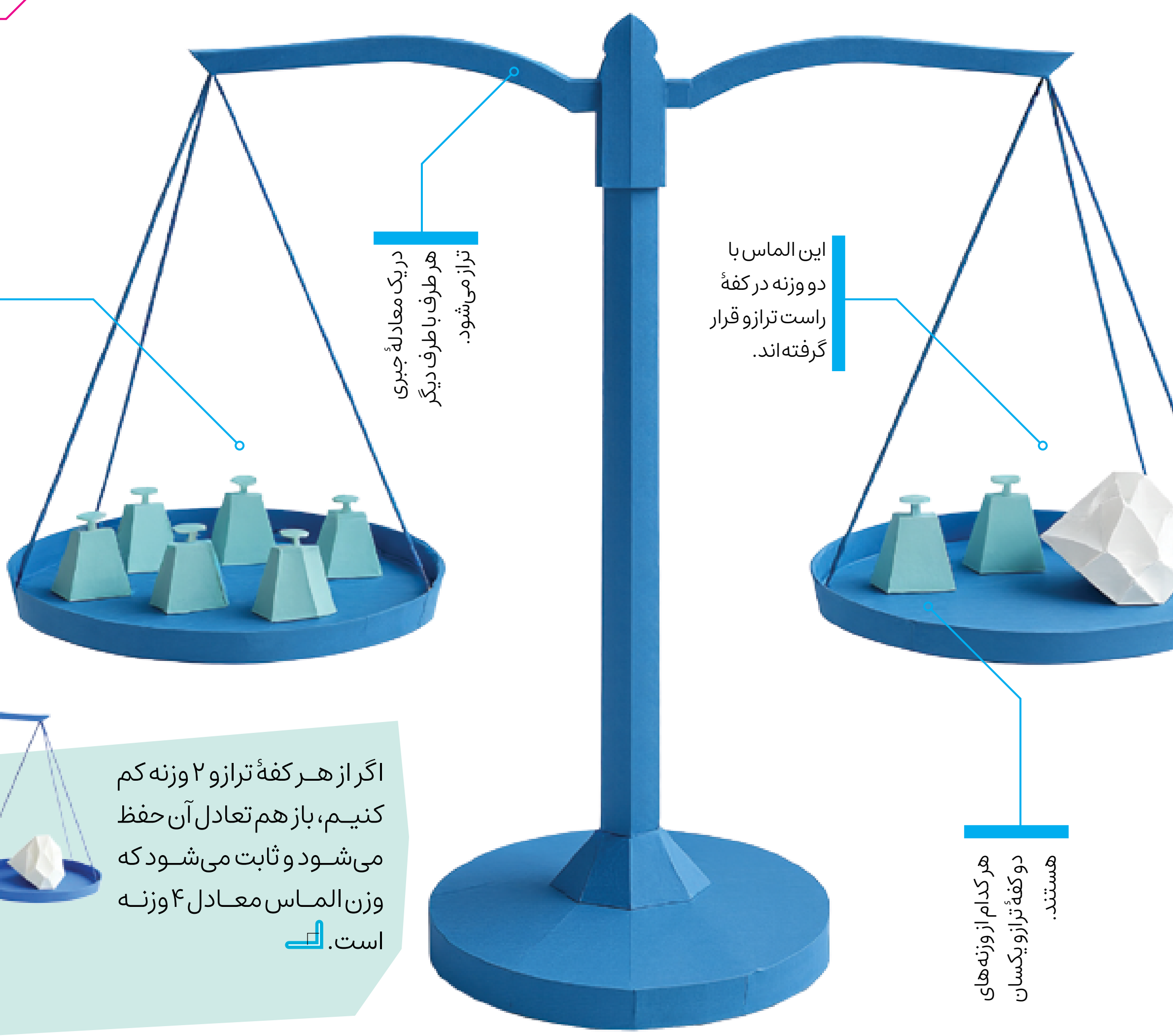
$$x + ۲ = ۶$$

$$-۲ \downarrow \quad -۲ \downarrow$$

$$x = ۴$$

برای یافتن وزن x از هر کفهٔ ترازو دو وزنه کم می‌کنیم.

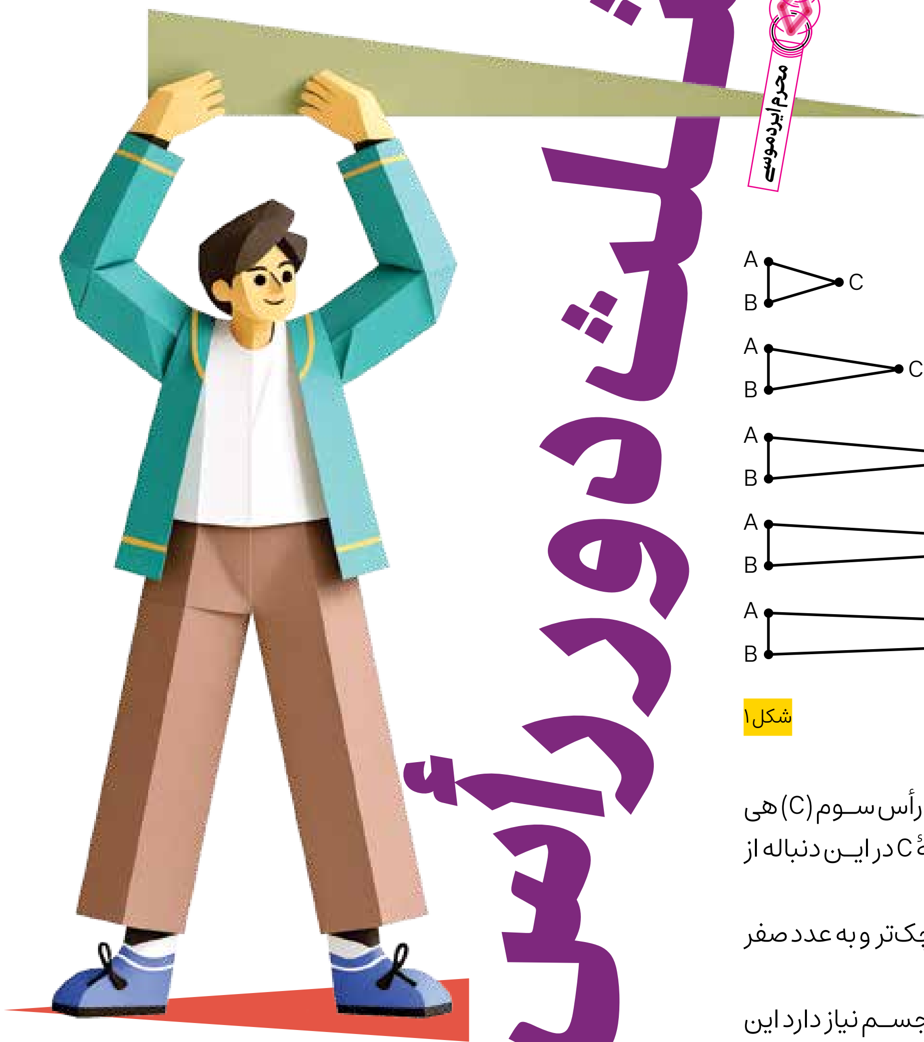
به این ترتیب از علم جبر استفاده می‌کنیم تا نشان دهیم وزن الماس مساوی ۴ است.



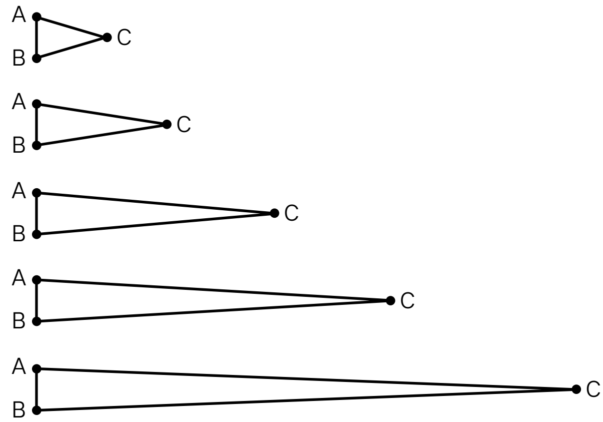
اگر از هـر کفهٔ ترازو ۲ وزنه کم کنیـم، باز هم تعادل آن حفظ می‌شـود و ثابت می‌شـود که وزن الـماس معـادل ۴ وزنـه است.

مثلث دور رأس

محرم ایردموسی



مثلث‌های شکل ۱ را ببینید:



شکل ۱

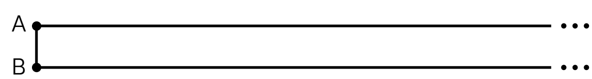
دو رأس A و B از این مثلث‌ها ثابت هستند و رأس سوم (C) هی دورتر و دورتر می‌شود. به نظر شما اندازهٔ زاویهٔ C در این دنباله از مثلث‌ها چه تغییری می‌کند؟

درست حدس زدید. اندازهٔ زاویهٔ C کوچک و کوچک‌تر و به عدد صفر نزدیک می‌شود.

حال سؤالی که در اینجا پیش می‌آید و البته به تجسم نیاز دارد این است که اگر در یک دنبالهٔ نامتناهی از مثلث‌ها، رأس C را دورتر و دورتر کنیم (تصور کنید که نقطهٔ C در فاصلهٔ بی‌نهایت از دو رأس A و B قرار بگیرد)، اندازهٔ زاویهٔ C در حالت حدی چقدر خواهد بود؟ دو ضلع AC و AB نسبت به هم چه وضعی خواهند داشت؟

با یک رأس در بی‌نهایت

البته تجسم این حالت حدی قدری غیرمعمول است، اما آیا می‌توانیم تصور کنیم که در حالت حدی شکل ۲ را خواهیم داشت؟

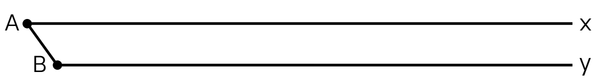


شکل ۲

و اگر رأس C در بی‌نهایت است و در دسترس ما نیست. ما این مثلث غیرمعمول را مثلثی «دوررأس» می‌نامیم.

تعریف مثلث دور رأس

خط شکستهٔ xABy را مثلث دوررأس می‌نامیم هرگاه دو نیم خط xA و yB از این خط شکسته موازی باشند (شکل ۳).

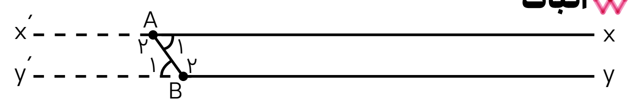


شکل ۳

می‌توانید تصور کنید که دو نیم خط موازی xA و yB در بی‌نهایت یکدیگر را قطع کرده‌اند و رأس سوم مثلث همان تقاطع دو خط موازی xA و yB است! توجه کنید که این یک تجسم است و در هندسهٔ اقلیدسی هیچ‌گاه دو خط موازی یکدیگر را قطع نمی‌کنند. به عبارت دیگر مثلث دوررأس، در هندسهٔ اقلیدسی یک مثلث محسوب نمی‌شود.

در ادامه می‌خواهیم بررسی کنیم که این مثلث نامتعارف و عجیب کدام‌یک از خواص مثلث‌ها را دارد. مهم‌ترین خاصیت مثلث کدام است؟ بله درست است. مجموع سه زاویهٔ هر مثلث برابر است با ۱۸۰ درجه. آیا این خاصیت در مثلث دوررأس نیز برقرار است؟ می‌توان گفت به نوعی این خاصیت برقرار است. اگر زاویهٔ بین دو خط موازی را برابر صفر در نظر بگیریم، آنگاه می‌توان نشان داد که مجموع زاویه‌های یک مثلث دوررأس برابر همان ۱۸۰ درجه است. (چرا؟)

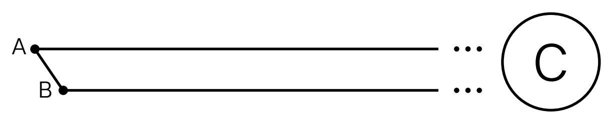
اثبات



شکل ۴

اگر دو خط موازی xx' و yy' و خط مورب AB را در نظر بگیریم، آنگاه از قضیهٔ دو خط موازی و مورب می‌دانیم اندازهٔ دو زاویهٔ $A_۱$ و $B_۱$ برابر است (شکل ۴). از طرف دیگر مجموع دو زاویهٔ $B_۱$ و $B_۲$ برابر ۱۸۰ درجه است. پس مجموع دو زاویهٔ $A_۱$ و $B_۲$ نیز ۱۸۰ درجه خواهد بود. اندازهٔ بین دو نیم‌خط موازی Ax و By هم صفر فرض شد. پس مجموع زاویه‌های مثلث دوررأس xABy برابر ۱۸۰ درجه است.

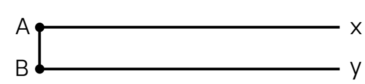
با اندکی تقریب در تجسم، می‌توانید مثلث دوررأس xABy را مثلثی با رأس CBCA در نظر بگیرید که رأس C در بی‌نهایت و اندازهٔ آن صفر است (شکل ۵).



شکل ۵

حالت خاص مثلث دوررأس

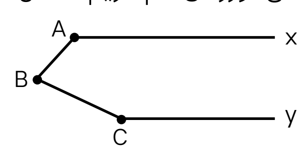
در حالتی که اندازهٔ دو زاویهٔ A و B برابر باشد (شکل ۶)، خواهیم داشت:
$\angle A = \angle B = ۹۰^\circ$



شکل ۶

حال بیایید کمی این مثلث جدید را گسترش دهیم.

سؤال ۱. آیا چهارضلعی دوررأس هم داریم؟ شکل ۷ را ببینید.



شکل ۷

همانند مثلث دوررأس می‌توانیم این خط شکسته با دو نیم‌خط موازی را چهارضلعی دوررأس بنامیم. موافق هستید؟

تمرین ۱. ثابت کنید مجموع زاویه‌های یک چهارضلعی دوررأس برابر ۳۶۰ درجه است.

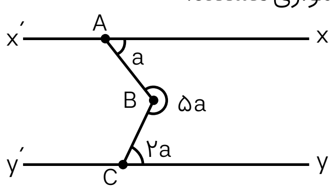
برای حل تمرین فوق حداقل سه راه وجود دارد. سعی کنید همانند اثباتی که در کتاب درسی برای مجموع زاویه‌های چهارضلعی داشتید عمل کنید. هر چهارضلعی ABCD را می‌توان در مثلث ABC و ADC افراز کرد و...

سؤال ۲. آیا اینجا هم می‌توان گفت که هر چهارضلعی دوررأس xABCy را می‌توان به دو مثلث دوررأس افراز کرد؟ تلاش کنید که خودتان این افراز را بیابید.

سؤال ۳. آیا می‌توان چهار ضلعی xABCy را به یک مثلث (معمولی) و یک مثلث دوررأس (غیرمعمولی) افراز کرد؟ آیا این افراز شما را به راه‌حلی برای تمرین ۱ می‌رساند؟

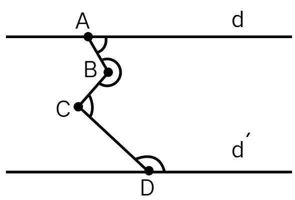
تمرین ۲. در شکل ۸ مقدار a چقدر است؟

دو خط xx' و yy' موازی هستند.



شکل ۸

تمرین ۳. در شکل ۹ مجموع زاویه‌های A، B، C و D چقدر است؟



شکل ۹

تمرین ۴. تعریف مثلث دوررأس و چهارضلعی دوررأس را به nضلعی دوررأس تعمیم دهید. شکل یک شش‌ضلعی دوررأس را بکشید.

تمرین ۵. مجموع زاویه‌های یک nضلعی دوررأس چقدر است؟ (با این فرض که زاویهٔ بین دو خط موازی را صفر فرض کنیم.)

نکتهٔ پایانی

چند ضلعی دوررأس در هندسهٔ اقلیدسی عضو مجموعهٔ چندضلعی‌ها نیست و در واقع یک خط شکسته است؛ خط شکسته‌ای که دو نیم‌خط انتهایی آن موازی هستند و ما تجسم کردیم که این دو نیم‌خط، دو ضلع مجاور از یک چندضلعی خیالی هستند که در بی‌نهایت یکدیگر را قطع کرده‌اند و...

به قول شاعر بزرگ، **نیما یوشیج**:

«فکر را پر بدهید

و نترسید که از سقف عقیده برود بالاتر»

شکل‌های مجموع ثابت

محمدمهدی نسیمی

در دو شمارهٔ گذشتهٔ مشاهده کردیم که:

۱. مثلث متساوی‌الاضلاع مجموع‌ثابت است.

۲. یک چهارضلعی مجموع‌ثابت است اگر و تنها اگر متوازی‌الاضلاع باشد.

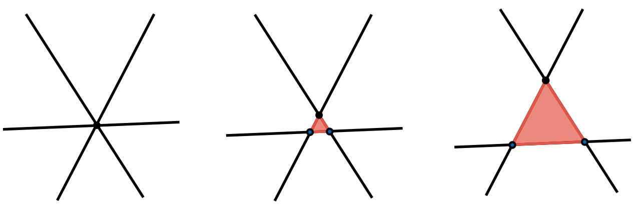
۳. بیرون از چندضلعی‌های مجموع‌ثابت نیز خاصیتی مشابه مجموع‌ثابت بودن دارد. سپس به زبانِ واحدی مجموع‌ثابت بودن را برای نواحی متفاوت داخل شکل و بیرون از شکل بیان کردیم.

۴. به کمک خط‌های موازی شیوه‌ای برای ساخت n-ضلعی‌های مجموع‌ثابت ارائه دادیم.

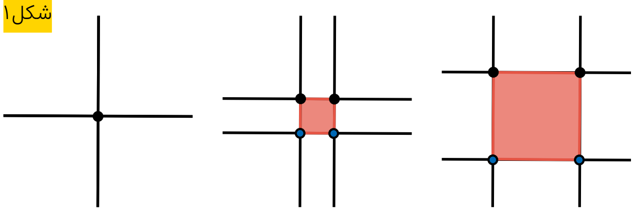
اکنون در ادامه و پیش از آنکه ویژگی‌های دیگر شکل‌های مجموع‌ثابت را بشناسیم، خیالمان را رها می‌کنیم و تعدادی سؤالِ بی‌پاسخ می‌پرسیم.

حالا که دیدیم بیرونِ شکل‌های مجموع‌ثابت نیز مجموع‌ثابت است، به نظر می‌رسد که موضوع دربارهٔ یک چندضلعی نیست و دربارهٔ تعدادی خط است! این گذر از چندضلعی به تعدادی خط چیز کمی نیست، زیرا اولاً به ما اجازه می‌دهد که هر موقع لازم بود، از محدودیت‌های تعریف چندضلعی‌ها بیرون بیاییم و آزادانه به زبان تعدادی خط فکر کنیم، و ثانیاً می‌توانیم هندسه‌مان را در صفحهٔ مختصات بنشانیم و از هندسهٔ تحلیلی کمک بگیریم. مورد دوم خارج از بحث ماست و در اینجا تنها به مورد اول می‌پردازیم.

۱. با حرکت دادن خط‌های مثلثِ متساوی‌الاضلاع، در یک حالت حدی به سه خط همرس می‌رسیم که دیگر یک چندضلعی نیست، اما به سادگی مجموع‌ثابت است (شکل ۱). البته دقت کنید که حالت حدی یک مربع به شکل ۲ می‌انجامد و دیگر مجموع‌ثابت نیست، زیرا دو خطِ موازی روی یکدیگر افتاده‌اند و در هندسهٔ اقلیدسی ابزاری برای تفاوت قائل شدن میان دو خطِ منطبق بر هم نداریم. حالت حدی باقی چندضلعی‌های منتظم کدام شکل‌های مجموع‌ثابت را به دست می‌دهد؟

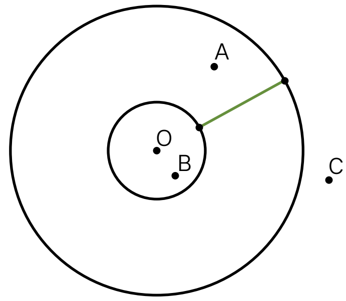


شکل ۱



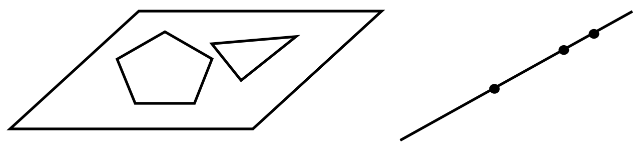
شکل ۲

۲. پرسش این است که: «خط‌ها را چگونه بچینیم تا یک شکل مجموع‌ثابت را تشکیل بدهند؟». اگر در اینجا به جای خط، موجود دیگری را قرار دهیم، چه می‌شود؟ مثلاً: «دایره‌ها را چگونه بچینیم تا یک شکل مجموع‌ثابت را تشکیل دهند؟» هر دو دایرهٔ متمایز هم‌مرکز یک شکل مجموع‌ثابت را تشکیل می‌دهند (شکل ۳). می‌توان همین سؤال را برای موجودات هندسی دیگر و یا حتی موجودات جبری نیز مطرح کرد.



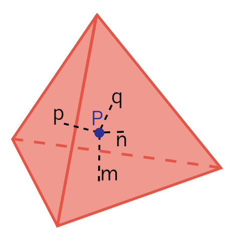
شکل ۳. دو دایره به مرکز O. با نوشتن یک جمع مناسب برای فاصلهٔ نقاط A، B و C از دو دایره، مقدار ثابتی برابر با اختلاف دو شعاع (طول پاره‌خط سبز رنگ) به‌دست می‌آید.

۳. می‌توانیم فضا را کوچک کنیم. به‌جای چندضلعی‌های روی یک صفحهٔ دوبعدی، نقاطِ روی یک خط تک‌بعدی را در نظر بگیرید و بپرسید: «نقاط را چگونه بچینیم تا یک شکل مجموع‌ثابت را تشکیل بدهند؟» شبیه به دو خط موازی در صفحه، هر دو نقطه‌ای روی یک خط، مجموع‌ثابت هستند (شکل ۴).



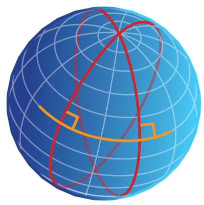
شکل ۴. نقاط به‌عنوان موجودات و
خط به‌عنوان فضا، در برابر چندضلعی‌ها به‌عنوان موجودات و صفحه به‌عنوان فضا

۴. برعکس، می‌توانیم فضا را بزرگ کنیم. می‌توان دربارهٔ چندوجهی‌ها در فضای سه‌بعدی سؤال کرد و شبیه گذر از چندضلعی به خط‌ها، پرسش را این‌گونه دربارهٔ صفحه‌ها مطرح کرد: «صفحه‌ها را چگونه در یک فضای سه‌بعدی بچینیم تا یک شکل مجموع‌ثابت را تشکیل بدهند؟» بررسی کنید آیا یک چهاروجهی منتظم شبیه به مثلث متساوی‌الاضلاع مجموع‌ثابت است؟ آیا شبیه به آنکه هر سه‌ضلعی مجموع‌ثابت مثلث متساوی‌الاضلاع است، هر چهاروجهی مجموع‌ثابت هم چهاروجهی منتظم است؟ (شکل ۵)



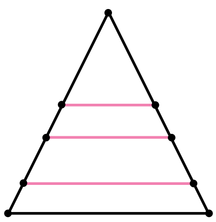
شکل ۵

۵. اصلاً می‌توان فضا را طور دیگری تغییر داد و به اصطلاح از فضاهای اقلیدسی خارج شد. مثلاً می‌توان یک کره را در نظر گرفت و به کمک دایره‌های عظیمهٔ آن (بزرگ‌ترین دایره‌ها) چندضلعی‌های متفاوتی را تشکیل داد. چندضلعی‌های مجموع‌ثابت هندسهٔ اقلیدسی با چندضلعی‌های مجموع‌ثابت هندسهٔ کروی چه رابطه‌ای دارند؟ (شکل ۶)



شکل ۶. مثلثی در هندسهٔ کروی

۶. دیدیم که اگر مثلثی مجموع‌ثابت باشد، حتماً متساوی‌الاضلاع است. اما در مثلث متساوی‌الساقین نیز روی پاره‌خط‌های موازی قاعده، جُداجُدا نقاط مجموع‌ثابت داریم (شکل ۷). پس می‌توان چنین سؤالی را هم مطرح کرد: «در یک شکل (مثل مثلث متساوی‌الساقین) همهٔ نقطه‌هایی که مجموع فاصله‌شان از ضلع‌ها برابر یک عدد ثابت باشد، کدام‌اند؟» دقت کنید که در این صورت لازم نیست شکل اصلی مجموع‌ثابت باشد.

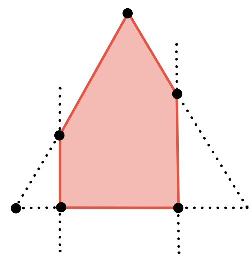


شکل ۷. اگرچه مثلث متساوی‌الساقین
یک شکل مجموع‌ثابت نیست، روی هر پاره‌خط موازی قاعده مجموع‌ثابت است.

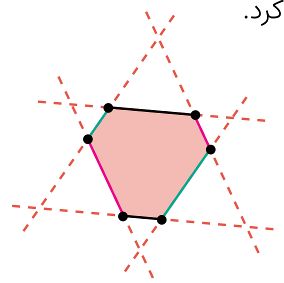
۷. اگر در سؤال قبل، خود را به چندضلعی‌ها محدود نکنیم و شکلِ داده‌شده را تنها یک نقطه بگیریم، حاصل «همهٔ نقاطی که از نقطهٔ داده‌شده به فاصلهٔ ۵ هستند» دایره‌ای به شعاع ۵ است. لطفاً یک کاغذ بردارید و دو نقطه را به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر روی صفحه مشخص کنید. حال به کمک خط‌کش ۱۵ نقطه را بیابید که مجموع فاصله‌شان از این دو نقطه برابر ۴ سانتی‌متر باشد. این نقاط بخشی از کدام شکل هستند؟

۸. می‌توان یک متوازی‌الاضلاع را به چشم دو جفت ضلع موازی دید که هر کدام از آن جفت ضلع‌های موازی، خودشان یک شکل مجموع‌ثابت هستند. در این شرایط می‌گوییم: «متوازی‌الاضلاع به دو جفت ضلع موازی **تجزیه** می‌شود.» همچنین پنج‌ضلعی شکل ۸ الف به یک مثلث متساوی‌الاضلاع و یک جفت ضلع موازی تجزیه می‌شود. اما خود مثلث متساوی‌الاضلاع، یا خود یک جفت ضلع موازی، قابل تجزیه نیست. در این شرایط می‌گوییم: «مثلث متساوی‌الاضلاع یک شکل مجموع‌ثابت **اول** است.» شبیه به عددهای طبیعی که به عددهای اول تجزیه می‌شوند و عددهای اول باقی عددها را تولید می‌کنند، چندضلعی‌های مجموع‌ثابتِ اول نیز تولیدکنندهٔ باقی چندضلعی‌های مجموع‌ثابت هستند. یک مثال خاص از چنین تولیدی، روشِ ساخت n-ضلعی‌های

مجموع‌ثابتی بود که در شمارهٔ قبل مطرح کردیم. چون می‌دانیم هر چهارضلعی مجموع‌ثابتی لزوماً متوازی‌الاضلاع است و متوازی‌الاضلاع نیز اول نیست، پس هیچ چهارضلعی مجموع‌ثابت اولی وجود ندارد. بنابراین یک سؤال طبیعی این است که: «برای کدام nها چندضلعی‌های اول وجود دارند؟» همچنین خوب است دقت کنید که این تجزیه مانند تجزیهٔ عددهای طبیعی یکتا نیست! برای نمونه، شکل ۸ ب را می‌توان به دو مثلث متساوی‌الاضلاع یا به سه جفت ضلع موازی تجزیه کرد.



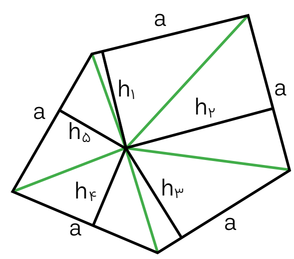
شکل ۸ الف



شکل ۸ ب

منتظم نیاز نیست، هم‌زاویه کافی ست!

در شمارهٔ قبل نشان دادیم که چندضلعی‌های منتظم همگی مجموع‌ثابت هستند. چندضلعی منتظم به دو بال «برابری همهٔ ضلع‌ها» و «برابری همهٔ زاویه‌ها» احتیاج دارد. اما دیدیم که کافی است چندضلعی ما محدب باشد و طول ضلع‌هایش با یکدیگر برابر باشند؛ حالا چه زاویه‌هایش برابر باشند چه نباشند (شکل ۹).



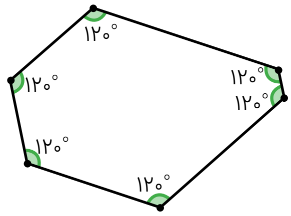
شکل ۹

این بار ادعا می‌کنیم که برعکسش هم برقرار است! یعنی:

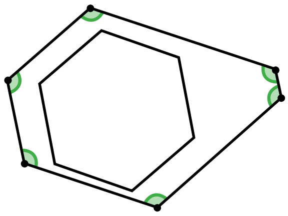
قضیه: اگر همهٔ زاویه‌های یک n-ضلعی با هم برابر باشند، آن n-ضلعی مجموع‌ثابت است.

برهان: ما در اینجا برهان را برای یک ۶-ضلعی بیان می‌کنیم (شکل ۱۰ الف)، اگرچه با تغییرات اندکی تمام برهان برای n-ضلعی دلخواه نیز برقرار است.

گام اول: n-ضلعی داده شده را P بنامید. یک ۶-ضلعی منتظم را به قدری کوچک در نظر بگیرید که داخل P جا شود. آن را R بنامید. R را در داخل P طوری بچرخانید که یکی از ضلع‌های P با یکی از ضلع‌های R موازی شود (شکل ۱۰ ب). به کمک قضیهٔ موازی مورب، بقیهٔ ضلع‌های این دو چندضلعی نیز با یکدیگر موازی‌اند.

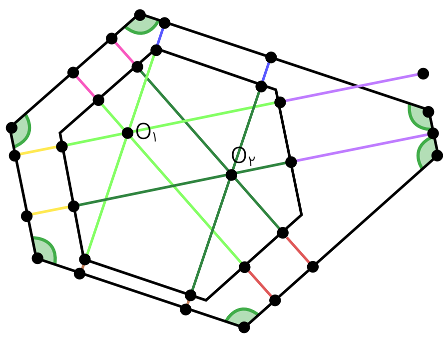


شکل ۱۰ الف



شکل ۱۰ ب

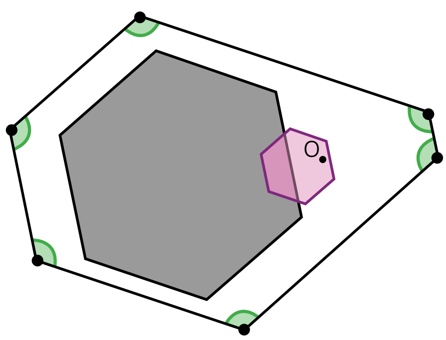
گام دوم: نقاط دلخواه O_1 و O_2 را در درون R در نظر بگیرید. از مجموع‌ثابت بودن چندضلعی منتظم R می‌دانیم که مجموع طول پاره‌خط‌های سبز کم‌رنگ و سبز پررنگ با یکدیگر برابر است. از طرف دیگر، با توجه به موازی بودن دوبه‌دوی ضلع‌ها، طول پاره‌خط‌های هم‌رنگ، دو به دو با یکدیگر برابرند (شکل ۱۱).



شکل ۱۱

بنابراین مجموع فاصله‌های نقطهٔ O_1 از ضلع‌های P با مجموع فاصله‌های نقطهٔ O_2 از ضلع‌های P برابر است و چون این دو نقطه دلخواه بودند، تمام نقاط داخل R نسبت به چندضلعی P مجموع‌ثابت هستند.

گام سوم: اما دربارهٔ نقاط بیرون از R چه؟ دقت کنید که R می‌تواند هر ۶-ضلعی منتظمِ کوچکی در داخل P باشد. پس هر نقطه‌ای در یک R مناسب قرار داشته باشد، در آن ناحیه مجموع‌ثابت است. همچنین از آنجا که این چندضلعی‌های منتظم را می‌توان طوری در نظر گرفت که با یکدیگر اشتراک داشته باشند، آن عددِ مجموع‌ثابتشان نیز باید با یکدیگر برابر باشد (شکل ۱۲).



شکل ۱۲

ماجرای مادربزرگ و بستنی

آزاده فرزان

بستنی اول!

زنگ آخر مدرسه که خورد، نیما سوار دوچرخه‌اش شد. او می‌خواست در راه رفتن به خانه، سری هم به مادربزرگش بزند. چشمش که به بستنی‌فروشی افتاد، به ذهنش رسید با یک بستنی خوش‌مزه مادربزرگش را غافلگیر کند. بستنی را خرید و راه افتاد. با اینکه دو چراغ راهنمایی در مسیرش بود، اما آن روز ظاهراً «**خوش‌شانس**» بود! به هرکدام از چراغ‌ها که رسید، سبز بودند. پس بدون معطلی از چراغ‌ها گذشت و وارد کوچهٔ بن‌بست خانهٔ مادربزرگ شد. زنگ خانه را زد، از پله‌ها بالا رفت و با یک بستنی تازه، به مادربزرگ رسید. مادربزرگ

مثـل همیشـه بـا لبخنـد در خانه را بـاز کرد و نیمـا را در آغوش گرفت. با هم نشسـتند و بسـتنی خوردند و کلی از باهم‌بـودن لـذت بردند.

بستنی دوم!

چنـد روز بعـد، نیمـا دوبـاره تصمیـم گرفت کـه بعد از مدرسـه دو تا بسـتنی بخرد و به دیدن مادربزرگش برود. بعد از مدرسـه سـوار دوچرخه‌اش شـد و به سمت خانهٔ مادربزرگ راه افتاد. اما این بار وقتی به چراغ اول رسـید، چراغ قرمز شـد. پس صبر کرد تا چراغ سبز شود و بعد به مسیرش ادامه داد. به چراغ دوم که رسید، خوشبختانه سـبز بود. از چراغ رد شـد و به کوچهٔ بن‌بسـت مادربزرگ رسـید. زنگ در را زد و مثل همیشـه مادربـزرگ به گرمی او را در آغوش گرفت. اما وقتی نیما بسـتنی را از پاکتش درآورد، اتفاقـی که نباید، افتاده بود... بسـتنی آب شـده بـود... مادربزرگ لبخنـد زد ولی نیما نه...

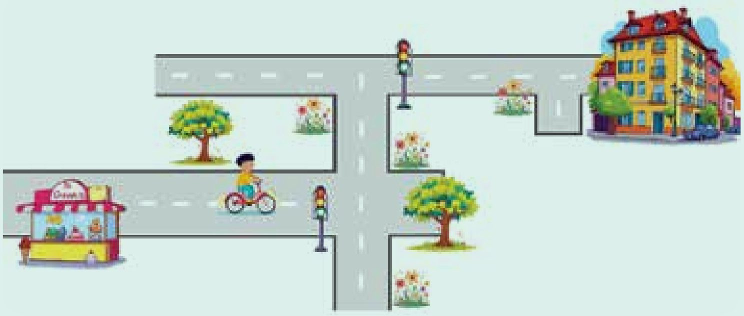
برنامه‌ریزی نیما برای آب‌نشدن بستنی!

نیمـا تصمیـم گرفت که این مشـکل را حل کنـد. واقعاً بسـتنی آب‌شـده برایش قابل تحمل نبود. بـا خودش گفـت: «باید بفهمم چه زمانی حرکت کنم تا پشـت هیچ کـدام از چراغ قرمزهـا نمانم!»

اول از همـه بایـد متوجه می‌شـد که زمـان چرخهٔ کامل سـبز، زرد و قرمزشـدن هر چـراغ راهنمایی چنـد ثانیه اسـت؟ چه زمانی چراغ سـبز و در چه زمانی چرخه تکرار می‌شود؟ پس بعد از مدرسه سراغ دو تا چراغ راهنمایی رفت و با زمان‌سـنجی (کرنومتری) که از معلم ورزشـش قـرض کرده بود، زمان چراغ‌ها را انـدازه گرفت. نتیجه‌ها به صـورت زیر بودند:

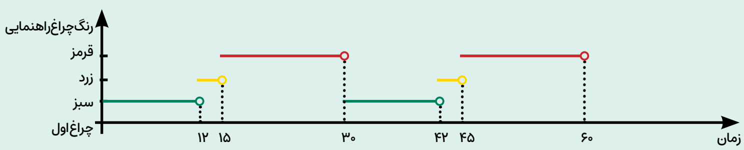
چراغ اول:
سبز: ۱۲ ثانیه
زرد: ۳ ثانیه
قرمز: ۱۵ ثانیه
چرخهٔ کامل: ۳۰ ثانیه

چراغ دوم:
سبز: ۸ ثانیه
زرد: ۳ ثانیه
قرمز: ۸ ثانیه
چرخهٔ کامل: ۱۹ ثانیه

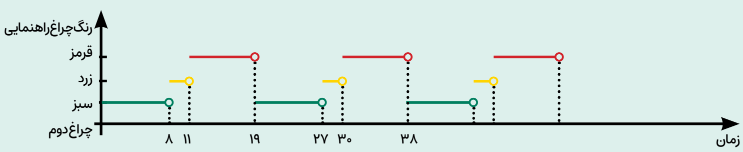


بعد از محاسـبهٔ زمان‌های فـوق ایدهٔ جالبی به ذهنش رسـید. سـعی کرد با نمـودار این اطلاعـات را مرتب کند. نموداری کشـید که یک محورش زمان و محور دیگرش رنگ چراغ را نشـان مـی‌داد. جالـب بود که هرکـدام از دو نمـودار بـه صورت منظم و یکسـان تکرار می‌شـدند و یـک شـکل متناوب را تشـکیل می‌دادند.

نمودار چراغ اول



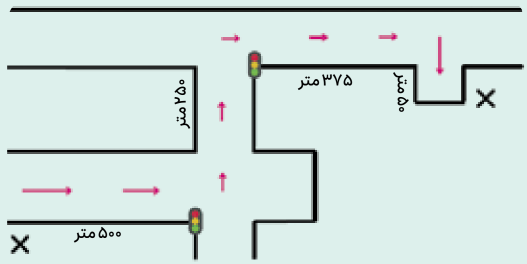
نمودار چراغ دوم



مورد دیگری که باید مشخص می‌کرد، فاصلهٔ قسـمت‌های متفاوت مسـیر بـود. روز بعد بدون دوچرخه به مدرسـه رفت و در مسـیر برگشـت با توجه به اینکه هر دو قدمش یک متر می‌شـد، فاصله‌های زیر را مشخص کرد:

بستنی‌فروشی تا چراغ اول: ۵۰۰ متر
چراغ اول تا چراغ دوم: ۲۵۰ متر
چراغ دوم تا کوچهٔ بن‌بست: ۳۷۵ متر
کوچهٔ بن‌بست تا در خانه: ۵۰ متر

بعد از جمع‌آوری داده‌های بالا، از مسـیرش یک کروکی کشـید و بعـد فکر کرد...



حالا باید چه کار کند که پشت هیچ کدام از چراغ قرمزها نماند؟
تصمیم گرفت که مسئله را ساده‌تر کند. به این منظور ابتدا فرض کرد که در مسیر فقط یک چراغ راهنمایی، یعنی چراغ اول، وجود دارد، و بعد چراغ دوم. تصمیم منطقی به نظر می‌رسید...

تحلیل چراغ اول

با توجه به سرعت دوچرخه، ۲۵۰ متر بر دقیقه، و مسافت بستنی‌فروشی تا چراغ راهنمایی، ۵۰۰ متر، زمان طی کردن این مسافت دو دقیقه به دست آمد. با توجه به زمان سبزشدن چراغ راهنمایی اول که در رأس هر دقیقه زوج بود، اطلاعات زیر را یادداشت کرد:

۲:۰۲

...

۲:۲۸

۲:۳۰

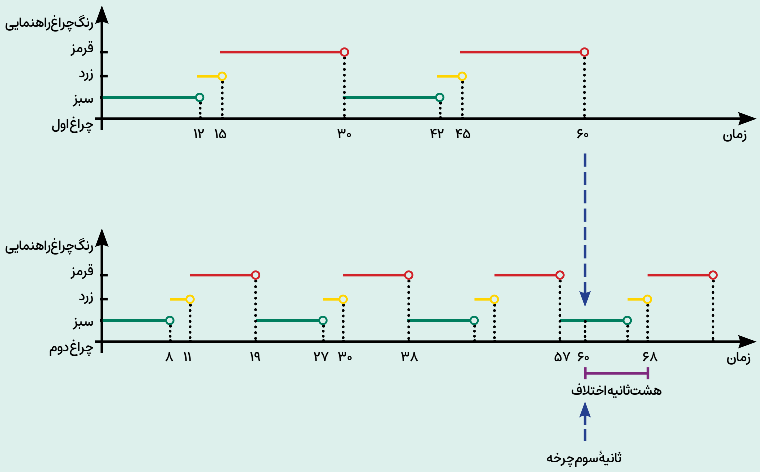
۲:۳۲

۲:۳۴

ساعت تعطیلی مدرسه ۲:۱۵ بود و نیما ساعت ۲:۲۵ دقیقه به بستنی‌فروشی می‌رسید. پس باید زمان حرکتش یکی از زمان‌های جدول بالا می‌بود که بعد از گذشت دو دقیقه، وقتی از بستنی‌فروشی به چراغ راهنمایی می‌رسید، در آن لحظه چراغ راهنمایی سبز باشد. البته به دلیل اینکه مجموع زمان چراغ سبز و زرد ۱۵ ثانیه است، می‌توانست ۱۵ ثانیه هم تأخیر داشته باشد.

تحلیل چراغ دوم

چراغ دوم ۲۵۰ متر بعد از چراغ اول بود، یعنی با سرعت دوچرخه، ۶۰ ثانیه بعد از عبور از چراغ اول به چراغ دوم می‌رسید. از آنجا که چرخهٔ چراغ دوم ۱۹ ثانیه‌ای و شروع سبزشدن هر دو چراغ هم‌زمان در ۲:۳۲:۰۰ بود، ساعت ۲:۳۳:۰۰، یعنی زمانی که ۶۰ ثانیه از چرخهٔ ۱۹ ثانیه‌ای گذشته بود که می‌شود سه تا ۱۹ ثانیه به علاوهٔ سه ثانیه.



با توجه به هشت ثانیه اختلافی که از ثانیهٔ سوم چراغ سبز تا شروع چراغ قرمز وجود داشت، نیما می‌تونست شروع حرکتش از بستنی‌فروشی را در بازهٔ ۲:۳۰:۰۰ تا ۲:۳۰:۰۸ انتخاب کند و مطمئن باشد بستنی را قبل از آب شدن به منزل مادربزرگش می‌رساند.

نیما مسئله را حل کرد!

نیما بی‌صبرانه منتظر خریدن بستنی فردا بود، چون مطمئن شده بود که دیگر موفقیتش از «**خوش‌شانسی**» نیست.

اما بچه‌ها، به نظرتان نیما با روش دیگری هم می‌توانست این مسئله را حل کند؟ می‌توانید مشخص کنید برای اینکه بستنی آب نشود چه بازه‌های زمانی دیگری برای شروع حرکت از بستنی‌فروشی وجود داشتند؟ راستی اگر یک چراغ دیگر در مسیر بود، نیما باید چه کار می‌کرد؟

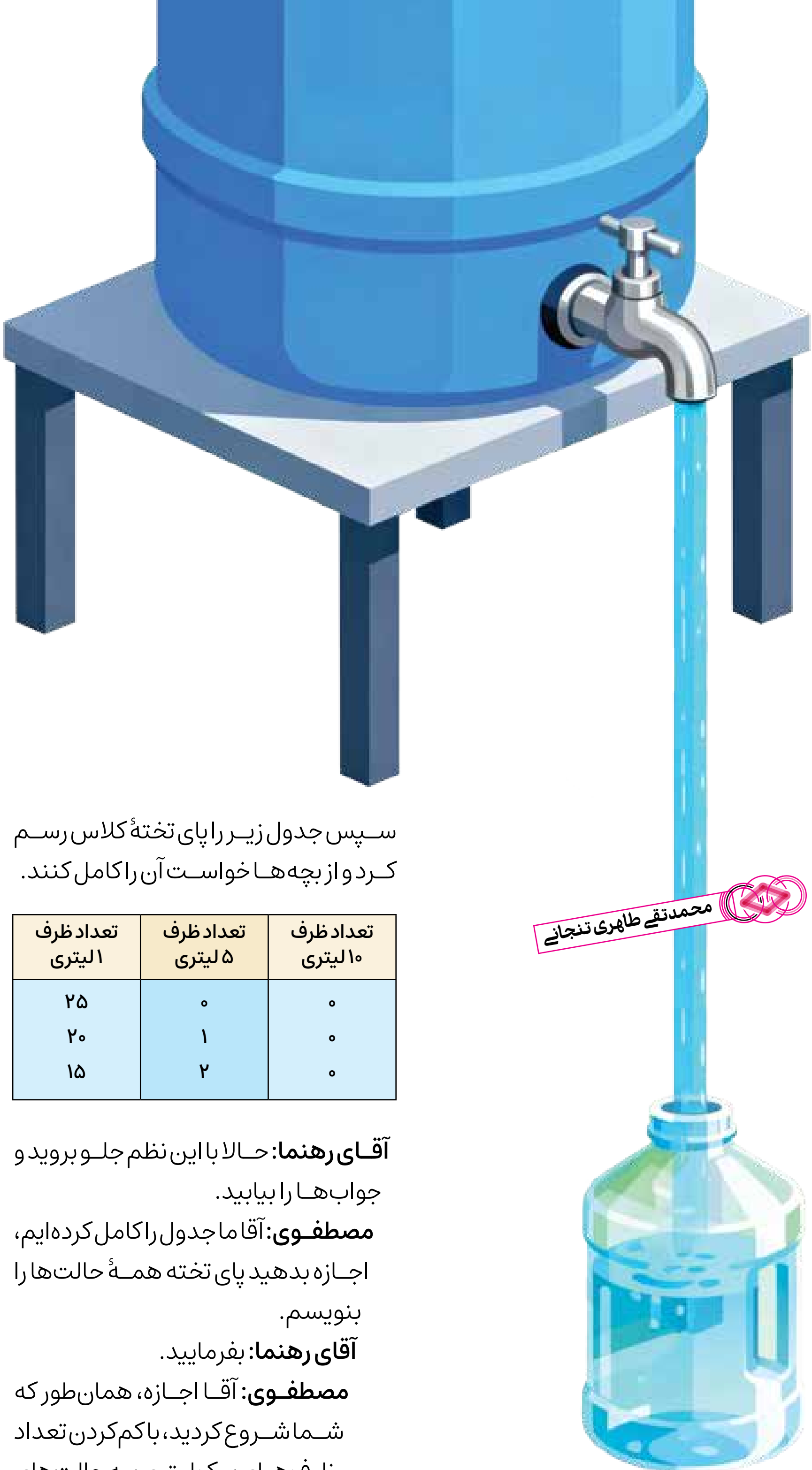
نگران نباشید! چراغ چهارم را دیگر نمی‌خواهم به مسئله اضافه کنم؛ اگر دوست داشتید خودتان اضافه کنید.

می‌توانید خودتان یک چراغ با زمان‌هایی که می‌خواهید به مسیر اضافه و مسئله را حل کنید و برای ما بفرستید. ما قول می‌دهیم که برای شما بستنی بخریم و آب‌نشده به دستتان برسانیم.

کلاس آقای رهنما

راهبرد تنظیم جدول نظام‌دار

محمدتقی طاهری تنجانی



آقای رهنما (دبیر ریاضی): امروز می‌خواهیم با یکی دیگر از راهبردهای حل مسائل ریاضی آشنا شویم. **سازمان‌دهی داده‌ها از طریق جدول** به ما کمک می‌کند بتوانیم الگویی از دل آن‌ها کشف کنیم و اطلاعات پنهانی در داده‌ها را به دست آوریم. این روش یکی از کارهای مؤثر برای دسته‌بندی و مرتب‌کردن داده‌ها و اطلاعات است. اجازه بدهید با ذکر چند مثال با این راهبرد بیشتر آشنا شویم.
تانکر آبی داریم. می‌خواهیم ۲۵ لیتر آب از آن خارج کنیم و در یک منبع کوچک‌تر بریزیم. برای این کار ظرف‌های ۱ لیتری، ۵ لیتری و ۱۰ لیتری داریم. همهٔ ترکیب‌های ممکن برای انجام این کار را بیابید.
بچه‌ها دست به کار شدند.

محمودی: آقا با ۲۵ تا ظرف یک لیتری این کار شدنی است!

آقای رهنما: خُب این یکی از جواب‌هاست. ما می‌خواهیم همهٔ حالت‌ها را بیابیم.

حسینی: آقا با ۵ ظرف ۵ لیتری و یا ۴ تا ظرف ۵ لیتری و ۵ تا ظرف یک لیتری هم این کار ممکن است.

آقای رهنما: هر چند جواب‌هایی که بیان می‌کنید همگی درست هستند، اما ما دنبال روشی هستیم که ضمن مشاهدهٔ همهٔ حالت‌ها، تعداد آن‌ها را هم بیابیم. بهتر است جدولی رسم کنیم و همهٔ حالت‌ها را در آن خلاصه کنیم.

سپس جدول زیر را پای تختهٔ کلاس رسم کرد و از بچه‌ها خواست آن را کامل کنند.

تعداد ظرف ۱۰ لیتری	تعداد ظرف ۵ لیتری	تعداد ظرف ۱ لیتری
۰	۰	۲۵
۰	۱	۲۰
۰	۲	۱۵

آقای رهنما: حالا با این نظم جلو بروید و جواب‌ها را بیابید.

مصطفوی: آقا ما جدول را کامل کرده‌ایم، اجازه بدهید پای تخته همهٔ حالت‌ها را بنویسم.

آقای رهنما: بفرمایید.

مصطفوی: آقا اجازه، همان‌طور که شما شروع کردید، با کم‌کردن تعداد ظرف‌های یک لیتری به حالت‌های دیگر جدول می‌رسیم...

و جدول را به این صورت کامل می‌کند:

۱۰ لیتری	۵ لیتری	۱ لیتری
۰	۰	۲۵
۰	۱	۲۰
۰	۲	۱۵
۱	۰	۱۵
۰	۳	۱۰
۱	۱	۱۰
۲	۰	۵
۱	۲	۵
۰	۴	۵
۲	۱	۰
۱	۳	۰
۰	۵	۰

آقای رهنما، ضمن تأیید راه‌حل مصطفوی، ادامه داد: «حالا ما با این جدول مطمئن هستیم که ۱۲ حالت وجود دارد و همه را در نظر گرفته‌ایم.»

محمودی: آقا ما جدول را جور دیگری کشیده‌ایم. اجازه هست آن را مطرح کنم.

آقای رهنما: البته، بفرمایید پای تخته. باید توجه کنید هر نوع جدول دیگری باید به همین ۱۲ حالت منتهی شود.

محمودی جدول زیر را ارائه کرد:

۱ لیتری	۵ لیتری	۱۰ لیتری
۰	۱	۲
۵	۰	۲
۰	۳	۱
۵	۲	۱
۱۰	۱	۱
۱۵	۰	۱
۰	۵	۰
۵	۴	۰
۱۰	۳	۰
۱۵	۲	۰
۲۰	۱	۰
۲۵	۰	۰

آقای رهنما: آفرین! این با جدول قبل فرقی ندارد و تعداد حالات هم همان ۱۲ تاست. مهم این است که جدول طوری منظم شود که افراد دیگر هم بتوانند نظام حاکم بر آن را دریابند. حالا به یک مسئلهٔ دیگر توجه کنید:

امیرعلی ۱۹ توپ یکسان دارد و می‌خواهد توپ‌ها را در سه دسته قرار دهد به‌طوری که در هر دسته تعداد توپ‌ها عددی فرد باشد. به چند حالت این کار ممکن است؟ حالا دست به کار شوید.

ایمانی: من جدول را کامل کردم. اجازه بدهید پای تخته بنویسم.

آقای رهنما: بفرمایید.

ایمانی پای تخته می‌رود و جدول زیر را تنظیم می‌کند:

دستهٔ سوم	دستهٔ دوم	دستهٔ اول
۱۷	۱	۱
۱۵	۳	۱
۱۳	۵	۱
۱۱	۷	۱
۹	۹	۱
۷	۱۱	۱
۵	۱۳	۱
۳	۱۵	۱
۱	۱۷	۱

آقای رهنما: دست نگه دارید آقای ایمانی. از ردیف پنجم به بعد تکرار موارد بالاست. مثلاً دستهٔ ۱، ۱۱ و ۷ همان است که در ردیف چهارم آمده. تکراری‌ها باید حذف شوند.

ایمانی: ببخشید به این نکته توجه نکرده بودم.

سپس جدول را اصلاح می‌کند:

دستهٔ سوم	دستهٔ دوم	دستهٔ اول
۱۷	۱	۱
۱۵	۳	۱
۱۳	۵	۱
۱۱	۷	۱
۹	۹	۱
۱۳	۳	۳
۱۱	۵	۳
۹	۷	۳
۷	۷	۵
۵	۹	۵

آقای رهنما: بسیار خب. آقای ایمانی چرا ادامه ندادید؟

ایمانی: آقا وقتی دستهٔ اول ۷ یا ۹ یا هرچه شود، تکرار یکی از حالت‌های قبل می‌شود. تعداد حالت‌های متفاوت این مسئله ۱۰ تاست که مشاهده می‌شود.

آقای رهنما: آفرین. همان‌طور که مشاهده می‌کنید، نظم در جدول نشان می‌دهد که همهٔ حالت‌های ممکن در نظر گرفته شده‌اند.

حالا بیایید یک مسئلهٔ دیگر حل کنیم: مساحت یک مستطیل ۷۲ مترمربع و محیط آن حداکثر ۶۰ متر است. اگر طول و عرض مستطیل عددهای صحیح باشند، چند نوع مستطیل وجود دارد؟ مساحت مستطیل چطور به‌دست می‌آید؟

بچه‌ها: طول ضرب در عرض آن.

آقای رهنما: و محیط مستطیل؟

بچه‌ها: دوبرابر مجموع طول و عرض آن.

آقای رهنما: آفرین حالا اگر طول مستطیل x و عرض آن y باشد، باید داشته باشیم: $xy=72$ و $x+y\le 30$. حالا جدول نظام‌دار را تشکیل می‌دهیم و مواردی را که با این شرایط تطبیق دارند به‌دست می‌آوریم:

نتیجه	y	x
×	۷۲	۱
×	۳۶	۲
✓	۲۴	۳
✓	۱۸	۴
✓	۱۲	۶
✓	۹	۸

مسئله چهار جواب دارد.

حالا به این مسئله توجه کنید: همهٔ جواب‌های صحیح نامعادلهٔ $x^2+y^2\le 9$ را به‌دست آورید.

محمودی: آقا اجازه! باز هم مثل مثال قبل جدول در نظر بگیریم و شرایط را بررسی کنیم؟

آقای رهنما: بله، جدول تشکیل بدهید.

حالا یک نفر بیاید و همهٔ حالت‌های جواب مسئله را فهرست کند.

حسینی: اگر اجازه بفرمایید، من این کار را انجام بدهم.

آقای رهنما: بیا پای تخته و همهٔ حالت‌ها را فهرست کن.

حسینی پای تابلو می‌رود و جدول زیر را تنظیم می‌کند:

x	y
۱	۳و۲و۱
۲	۲و۱
۳	۰

آقای رهنما: هرچند این‌ها برخی از حالت‌های مورد نظر هستند، اما باید توجه داشت که عددهای صحیح هم مثبت و هم منفی هستند. علاوه بر آن صفر هم یک عدد صحیح است!

سپس جدول را به صورت زیر کامل می‌کند:

x	y	تعداد حالت‌ها
۰	±۳و±۲و±۱و۰	۱×۷=۷
±۱	±۲و±۱و۰	۲×۵=۱۰
±۲	±۲و±۱و۰	۲×۵=۱۰
±۳	۰	۲×۱=۲

پس در مجموع ۲۹ حالت برای رابطهٔ داده شده وجود دارد. شما با چند مثال و استفاده از راهبرد تنظیم جدول نظام‌دار آشنا شدید. به‌عنوان آخرین مثال که امروز بررسی می‌کنیم به این سؤال توجه کنید:

چند عدد سه رقمی وجود دارد که یکانش عدد حسابی کمتر از ۳ و دهگانش عددی زوج و صدگانش عددی فرد باشد.

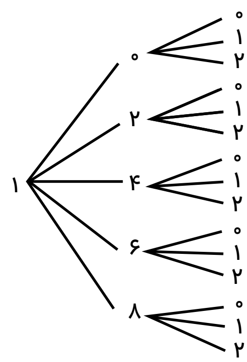
اکبری: آقا عددهای حسابی همان عددهای طبیعی‌اند.

آقای رهنما: علاوه بر عددهای طبیعی صفر هم بین آن‌ها وجود دارد.

مصطفوی: آقا به نظر می‌رسد تعداد حالت‌ها خیلی زیاد باشد و شمارش آن‌ها مشکل است.

آقای رهنما: بله تعداد آن‌ها نسبت به مواردی که بررسی کردیم زیادتر است و برای نظام‌مند نوشتن آن‌ها و اینکه موردی از قلم نیفتد، می‌توانیم از نمودار درختی برای نشان‌دادن تعدادشان بهره ببریم.

صدگانِ عدد سه رقمی در این مسئله رقمی فرد است؛ یعنی ۱، ۳، ۵، ۷ یا ۹. حالا با فرض اینکه صدگان ۱ باشد، دهگان می‌تواند هر یک از رقم‌های ۰، ۲، ۴، ۶ یا ۸ باشد و برای هر یک از این حالت‌ها یکان می‌تواند یکی از رقم‌های ۰، ۱ یا ۲ باشد. این اطلاعات را با نمودار زیر که به آن نمودار درختی می‌گویند فهرست می‌کنیم:



برای شمارش تعداد آن‌ها کافی است سرشاخه‌ها را بشماریم که تعداد آن برابر است با: $۵×۳=۱۵$. حالا می‌توانید با همین الگو برای حالت‌هایی که رقم صدگان ۳ یا ۵ یا ۷ یا ۹ می‌باشد جواب‌ها را بیابیم. پس تعداد حالت‌ها برای جواب مسئله برابر است با $۷۵=۱۵×۵$.

البته ما زیرکانه از نوشتن همهٔ جواب‌ها در جدول فرار کردیم، ولی مسئله حل شد. خُب فرصت امروز تمام شد. تعدادی تمرین برای منزل در نظر گرفته‌ام که با راهبرد و تنظیم جدول نظام‌مند آن‌ها را حل کنید. مبصر کلاس برگه‌های سؤال‌ها را توزیع کنید.

تمرین

۱. حاصل ضرب دو عدد ۳۶۰ و مجموع آن‌ها کم‌تر از ۱۰۰ است. همهٔ حالت‌های ممکن برای آن دو عدد را به دست آورید.

۲. می‌دانیم ارزش هر گزاره یا درست است یا نادرست. اگر درست را با T و نادرست را با F نشان دهیم، جدول ارزش چهار گزارهٔ p، q، r و s را نسبت به هم تشکیل دهید. این چهار گزاره نسبت به هم چند حالت دارند؟

۳. هر نقطه در صفحهٔ مختصات دارای طول x و عرض y است و آن را به صورت زوج مرتب (x,y) نشان می‌دهیم. چند نقطه با مختصات صحیح وجود دارند که روی دایره به معادلهٔ $x^2+y^2=۴$ و یا داخل آن باشند. (راهنمایی: جواب‌های نامعادلهٔ $x^2+y^2\le۴$ را بیابید.)

۴. هفت تیم بسکتبال A، B، C، D، E، F و G دوبه‌دو با هم مسابقه می‌دهند. اگر هر دو تیم در مجموع سه بازی با هم داشته باشند، تعداد بازی‌های بین تیم‌ها را به دست آورید.

۵. یک مغازه‌دار به چند طریق می‌تواند یک ایران‌چک ۱۰۰ هزارتومانی را به اسکناس‌های ۲، ۵ و ۱۰ هزار تومانی تبدیل کند.

۶. **مریم**، **زهرا**، **طاهره** و **مینا** در یک مسابقهٔ دو شرکت می‌کنند. اگر هیچ دو نفری هم‌زمان به خط پایان نرسند، همهٔ حالت‌هایی را که این چهار نفر به خط پایان می‌رسند فهرست کنید.

مسئله

ترفندهای توانی

جعفر اسدی گرمارودی

در محاسبه‌های توانی می‌توان از ترفندها و روش‌های متفاوتی استفاده کرد و در بعضی مسئله‌ها و مثال‌ها، چندین راه‌حل را به کار برد. در این شماره به مسئلهٔ زیر می‌پردازیم و در شمارهٔ بعد نیز باز یک مسئلهٔ محاسباتی در ارتباط با توان مطرح می‌کنیم و روش‌های حل آن را شرح می‌دهیم.

مسئله: حاصل $\frac{۵^۷+۵^۳}{۵^۴}$ را به ساده‌ترین شکل ممکن به‌دست آورید.

با توجه به اینکه خط کسری به معنای تقسیم است، می‌توان از این موضوع استفاده کرد. در ادامه سه راه‌حل ارائه خواهد شد که در هر سه راه‌حل، تقسیم توان‌ها مرحلهٔ دوم همهٔ راه‌حل‌ها خواهد بود.

راه‌حل اول: تفکیک کسر

هنگامی می‌توان دو کسر را جمع کرد که مخرج دو کسر برابر باشد: $\frac{a}{x}+\frac{b}{x}=\frac{a+b}{x}$

چون مخرج کسر مسئلهٔ داده‌شده فقط از یک جمله تشکیل شده است می‌توان آن را به صورت حاصل جمع دو کسر تفکیک کرد و در ادامه نیز با استفاده از قوانین تقسیم توان‌ها، هر کسر را ساده‌تر کرد.

$$\frac{۵^۷+۵^۳}{۵^۴}\overset{\text{تفکیک کسر}}{=}\frac{۵^۷}{۵^۴}+\frac{۵^۳}{۵^۴}\overset{\text{ساده کردن کسر}}{=}۵^۳+\frac{۱}{۵}=۱۲۵+\frac{۱}{۵}=۱۲۵\frac{۱}{۵}$$

راه‌حل دوم: فاکتورگیری بر اساس صورت کسر

همان‌طور که مشاهده می‌شود، همهٔ پایه‌ها پنج است بنابراین می‌توان با پایهٔ پنج و کمترین توان در دو جمله، یعنی از $۵^۳$ فاکتور گرفت و در انتها مانند راه‌حل اول، با استفاده از قوانین تقسیم توان‌ها محاسبه‌ها را پیش برد.

$$\frac{۵^۷+۵^۳}{۵^۴}\overset{\text{فاکتورگیری}}{=}\frac{۵^۳(۵^۴+۱)}{۵^۴}=\frac{۱}{۵}\times(۶۲۵+۱)=\frac{۱}{۵}\times۶۲۵+\frac{۱}{۵}\times۱$$

$$=۱۲۵+\frac{۱}{۵}=۱۲۵\frac{۱}{۵}$$

راه‌حل سوم: فاکتورگیری بر اساس مخرج کسر

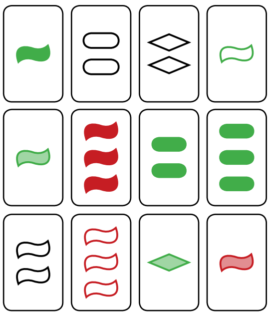
مانند راه‌حل دوم، ترفند ما فاکتورگیری است، با این تفاوت که بر اساس عدد مخرج، یعنی $۵^۴$، در صورت از $۵^۴$ فاکتور گرفته می‌شود. محاسبه‌های مرحله‌های بعدی نیز مانند راه‌حل‌های قبلی خواهد بود.

$$\frac{۵^۷+۵^۳}{۵^۴}\overset{\text{فاکتورگیری}}{=}\frac{۵^۴(۵^۳+۵^{-۱})}{۵^۴}=۱۲۵+\frac{۱}{۵}=۱۲۵\frac{۱}{۵}$$

کارت‌ها پیش‌بینی می‌کنند

چگونه هوش مصنوعی و یک بازی کارتی محبوب می‌توانند به مهندسان کمک کنند شکستی فاجعه‌بار را پیش‌بینی کنند؟

فاطمه قربانی



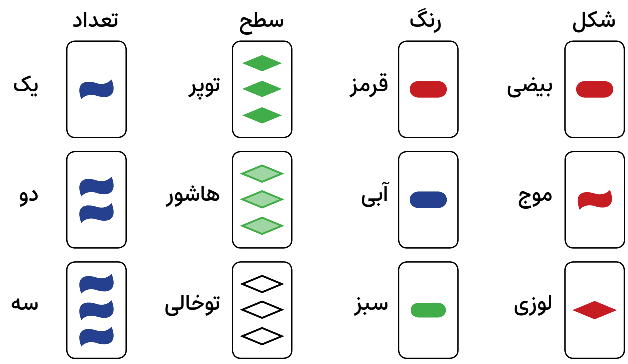
در دنیای امروز، با پیشـرفت‌های فـراوان در فناوری، یکی از ابزارهای قدرتمنـدی کـه به مـا کمک می‌کند آینـده را بهتـر پیش‌بینی کنیم، «هـوش مصنوعی» اسـت. تصـور کنید ما می‌خواهیـم بفهمیم چه زمانی و چگونه ممکن است یک سـامانهٔ (سیسـتم) بـزرگ، مانند اینترنت یا شـبکهٔ برق، دچار مشـکل شود یا شکست فاجعه‌باری رخ دهـد. در ایـن مطلب قصد داریم به زبانی سـاده و در قالب داسـتانی جـذاب، توضیـح دهیـم که چگونـه هـوش مصنوعی و بـازی کارتی محبـوب، می‌توانند مهندسـان را در مقابله با بحران‌هـا یاری کنند.

هوش مصنوعی چیست و چگونه کار می‌کند؟

هوش مصنوعی مجموعه‌ای از فناوری‌هاسـت که به رایانه‌ها امکان می‌دهد مثل انسـان فکر کنند، الگوشناسـایی کنند و تصمیم‌های هوشـمندانه بگیرنـد. بـرای مثال، تصـور کنید یک برنامـهٔ رایانه‌ای می‌توانـد بازی‌هـای کارتی را به‌خوبی یاد بگیرد و در مسـابقه با شـما برنـده شـود. این برنامه، بـا تمرین‌های زیاد و یادگیـری از مثال‌های متفـاوت، توانایی‌هایی پیـدا می‌کند که حتی انسـان‌ها هم ممکن اسـت در ابتدا چنین توانایی‌هایی نداشـته باشند.

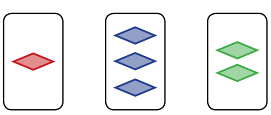
بازی‌های کارتی و روش یادگیری آن‌ها

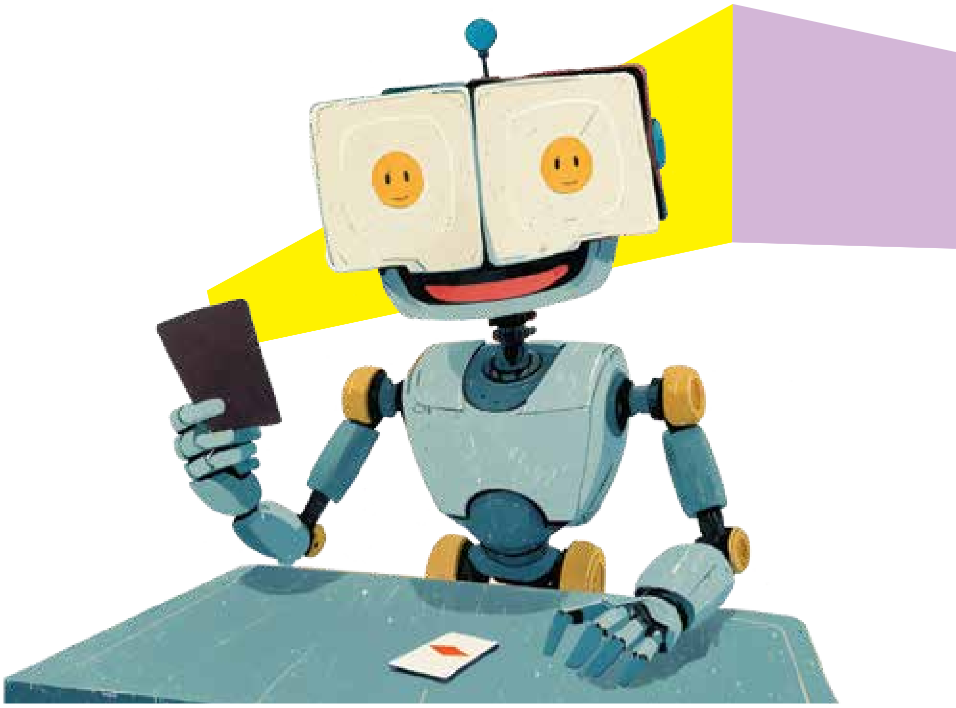
در داسـتان ما، بازی کارتی خاصی به نام «سِـت» داریم که طرفداران زیـادی هم دارد. این بازی شـامل کارت‌هایی بـا ویژگی‌های متفاوت اسـت: معمولاً در سـه تعداد (یک، دو یا سـه)، سـه رنگ (قرمز، سبز یا آبی)، سـه شـکل (بیضی، موج یا لوزی) و سـه سـطح (توپر، هاشور یـا توخالـی)، هر کارت مجموعه‌ای از این ویژگی‌ها را دارد و در مجموع ۸۱ کارت می‌شود.



در هر دور ۱۲ کارت روی میز قرار می‌گیرند و بازیکنان برای جست‌وجوی مجموعه‌هـا با یکدیگر رقابـت می‌کنند. آن‌ها باید یک مجموعهٔ سـه عضوی از ۱۲ کارت را طوری انتخاب کنند که هر ویژگی در هر کارت یکسان یا متفاوت باشـد؛ یعنی آن سـه کارت باید از نظر تعداد کاملاً شبیه هم یا کاملاً متفاوت باشـند. مثلاً یا هر سـه کارت از نظر تعداد شـامل دو شـکل باشند یا آن مجموعهٔ سه‌تایی، شامل کارت‌هایی به تعداد یک، دو و سـه باشـند. برای ویژگی‌های دیگر هم به همین صورت است.

بـرای مثـال، کارت‌هایی با یک لوزی قرمز هاشـورزده، دو لوزی سـبز هاشـورزده و سـه لوزی آبی هاشـورزده، یـک مجموعهٔ مـورد قبول را تشـکیل می‌دهنـد. زیـرا هـر سـه کارت در ویژگی‌هـای عددها (یک، دو و سـه) و رنگ (قرمز، سـبز و آبـی) متفـاوت، و در ویژگی‌هـای شکل (لوزی) و شیوهٔ رنگ (هاشور) یکسـان هستند.





معمولاً پیداکردن یک مجموعه مطابق با قوانین بازی امکان‌پذیر است، اما اگر هیچ یک از بازیکنان نتوانند مجموعه‌ای از ۱۲ کارت روی میز را پیدا کنند، آنگاه سه کارت دیگر را به آن‌ها اضافه می‌کنند تا یک مجموعهٔ دلخواه پیدا شود. بعد از آن باید همان تعداد ۱۲ تا باشند، مگر اینکه باز هم مجموعهٔ مد نظر پیدا نشود. گاهی ممکن است با وجود سه کارت اضافه‌شده مجموعه‌ای بین ۱۵ کارت پیدا نشود. در این صورت بازیکنان مجبور می‌شوند به اضافه‌کردن سه کارت ادامه دهند تا زمانی که یک نفر مجموعه‌ای را ببیند. فکر می‌کنید حداکثر تعداد کارت‌هایی که می‌توانید بدون تشکیل یک مجموعه بچینید چقدر است؟ **جوزپه پلگرینو** ریاضی‌دان، در سال ۱۹۷۱ نشان داد که بزرگ‌ترین مجموعه کارت‌های بدون مجموعه ۲۰ عدد است. اما اگر شما ۲۰ کارت را به طور تصادفی انتخاب کنید، «بدون مجموعه» تنها یک مورد در تریلیون بار اتفاق می‌افتد و یافتن این مجموعه‌های «بدون مجموعه» مشکلی است که حل آن بسیار دشوار است.

حالا تصور کنید، مهندسان به جای اینکه فقط بازی کنند، از این بازی برای آموزش رایانه‌های هوشمند استفاده می‌کنند. آن‌ها برنامه‌نویسی می‌کنند تا این رایانه‌ها بتوانند الگوهای بازی را کشف کنند و راهبردهای بهتری برای پیش‌بینی شکست‌ها بیابند.

پیش‌بینی شکست‌های بزرگ و فاجعه‌بار

حالا برسیم به یک نکتهٔ مهم؛ یعنی پیش‌بینی شکست‌های بزرگ در سامانه‌های پیچیده. تصور کنید یک کارساز (سرور) بزرگ که اینترنت تمام کشور روی آن است، خراب می‌شود. این اتفاق چه تعداد خرابی‌های کوچک نیاز دارد تا کل سامانه از کار بیفتد؟ یا در شبکه‌های ارتباطی، چه زمانی یک خط ارتباطی قطع و باعث تداخلی مهم می‌شود؟ اگر بتوانیم این رویدادهای بحرانی را قبل از وقوع ببینیم، می‌توانیم برنامه‌ریزی کنیم و مانع وقوع فاجعه شویم.

چطور هوش مصنوعی در این حوزه کمک می‌کند؟

دانشمندانی همانند **النبرگ**، با استفاده از یک هوش مصنوعی به نام «مدل‌های زبانی بزرگ»[۱]، نمونه‌هایی را تولید می‌کنند که هیچ الگویی ندارند؛ یعنی مجموعه‌هایی کاملاً تصادفی و بی‌نظم. اما هوش مصنوعی تلاش دارد که بزرگ‌ترین مجموعه‌هایی را پیدا کند که بدون هیچ الگویی هستند. چرا این موضوع اهمیت دارد؟ چون در واقع، این مجموعه‌ها نشان می‌دهند چه تعداد رویداد یا مشکل می‌تواند وجود داشته باشد که هنوز الگوهای آن‌ها قابل تشخیص نیستند یا دیده نشده‌اند.

اینجاست که بازی کارتی و هوش مصنوعی با هم وارد عمل می‌شوند. مهندسان به کمک این فناوری، می‌توانند سناریوهای متفاوتی را شبیه‌سازی کنند و بفهمند چه شرایطی ممکن است باعث شکست‌های فاجعه‌بار شوند. این اطلاعات به آن‌ها کمک می‌کند راه‌حل‌های بهتر و سریع‌تری برای نجات سامانه‌های حساس ارائه دهند.

جمع‌بندی و اهمیت آینده‌نگری

در آینده، هوش مصنوعی و بازی‌هایی مانند بازی کارتی، نه تنها در حوزهٔ فناوری، بلکه در مواردی مانند سلامت، حمل‌ونقل، انرژی و امنیت ملی هم کاربرد زیادی دارند. این روش‌ها به ما کمک می‌کنند خطرات بزرگ را بشناسیم، پیش‌بینی کنیم و مانع وقوع آن‌ها شویم.

با یادگیری و درک بهتر این فناوری‌ها، ما می‌توانیم آینده‌ای امن‌تر و بهتر بسازیم؛ جایی که فاجعه‌های کمتری رخ دهند و زندگی ما با خیال راحت‌تر ادامه یابد. پس آینده در دستان ما و فناوری‌هایی است که روزبه‌روز پیشرفته‌تر می‌شوند. بیایید با هم در این مسیر قدم برداریم و دنیایی بهتر بسازیم.

پی‌نوشت

۱. Large Language Model: مدل زبانی بزرگ (LLM) یک برنامهٔ هوش مصنوعی است که می‌تواند متن‌ها را درک و تولید کند و جواب‌های مشابه انسان بدهد. این مدل‌ها چون خیلی بزرگ هستند و میلیون‌ها مؤلفه دارند، قادر به فهمیدن الگوهای پیچیده در زبان هستند. آن‌ها با مطالعهٔ مقدار زیادی متن از اینترنت، آموزش می‌بینند و در کارهایی مانند ترجمه، خلاصه‌کردن مطالب یا پاسخ به سؤال‌ها می‌توان از آن‌ها استفاده کرد. این مدل‌ها معمولاً بر اساس ساختار ترنسفورمر ساخته شده‌اند و توانایی تولید متن طبیعی را دارند. البته باید مراقب باشند، چون ممکن است دچار اشتباه شوند یا محتوای نادرستی تولید کنند. پس باید با دقت از آن‌ها استفاده کرد.

زورگویی سایبری چیست؟

زورگویی سایبری به هرگونه تهدید، آزار، یا رفتار خشونت‌آمیز از طریق فضای مجازی گفته می‌شود که با استفاده از دستگاه‌های متصل به اینترنت، مانند تلفن همراه، رایانه و رایانک (تبلت)، انجام می‌گیرد. این رفتار می‌تواند به شکل‌های متفاوتی بروز کند، از جمله:

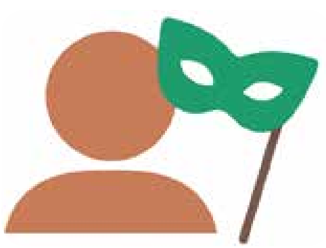
- ارسال پیام‌های تهدیدآمیز، توهین‌آمیز یا تحقیرکننده؛
- جعل هویت برای فریب کاربران و سوءاستفاده از اطلاعات شخصی آن‌ها؛
- انتشار محتوای خصوصی افراد بدون رضایتشان (مانند عکس‌ها یا پیام‌های شخصی)؛
- ایجاد نظرسنجی‌های توهین‌آمیز دربارهٔ یک فرد؛
- تهدید به افشای اطلاعات محرمانه.

تأثیر زورگویی سایبری بر قربانیان

قربانیان این نوع آزارها معمولاً احساس ترس، انزوا و شرمساری می‌کنند. در بسیاری از موارد، آن‌ها به دلیل ترس از قضاوت دیگران یا تهدیدهای بیشتر، از درخواست کمک خودداری می‌کنند. این موضوع می‌تواند به اضطراب و افسردگی قربانیان منجر شود.

آزار و اذیت سایبری می‌تواند در هر لحظه از شبانه‌روز اتفاق بیفتد.

زورگویان سایبری توانایی ناشناس ماندن در فضای برخط را دارند و ردیابی آن‌ها می‌تواند بسیار دشوار باشد.



اشاره

با گسترش ارتباطات برخط (آنلاین)، پدیدهٔ زورگویی سایبری یا قلدری اینترنتی نیز رو به افزایش است. این معضل می‌تواند تأثیرات مخربی بر روحیه و روان افراد بگذارد، اما حمایت والدین، معلمان و نهادهای مرتبط از آسیب‌های ناشی از آن می‌کاهد.

دغدغه‌های دنیای دیجیتال

زورگویی سایبری (قسمت سوم)

آریان خلیلی

زورگویان سایبری می‌توانند به سرعت تعداد زیادی از کاربران را در این عمل مجرمانه با خود همراه کنند.

راه‌های مقابله با زورگویی سایبری

برای کاهش آسیب‌های ناشی از این پدیده، اقدام‌های زیر توصیه می‌شوند:

۱. گزارش رفتارهای آزاردهنده

اگر قلدر از طریق یک شبکهٔ اجتماعی یا وبگاه عمومی به آزار اقدام کرده است، رفتار او را به سکوی (پلتفرم) مربوطه گزارش دهید تا حساب کاربری‌اش مسدود شود. در صورت تهدیدهای جدی، با پلیس فتا (پلیس فضای تولید و تبادل اطلاعات) تماس بگیرید.

۲. جمع‌آوری مدارک

از پیام‌ها، تصویرها و هرگونه مدرکی که نشان‌دهندهٔ زورگویی است، نماگرفت (اسکرین‌شات) بگیرید و آن‌ها را ذخیره کنید. این مدارک می‌توانند برای پیگیری قانونی مفید باشند.

۳. درخواست کمک از افراد مورد اعتماد

اگر مورد آزار قرار گرفته‌اید، این موضوع را بدون ترس و خجالت با خانواده، دوستان یا معلمان در میان بگذارید. حمایت عاطفی اطرافیان می‌تواند به شما کمک کند از این شرایط دشوار عبور کنید.

۴. پرهیز از پاسخ‌گویی یا انتقام

به قلدرها پاسخ ندهید و از مقابله به‌مثل بپرهیزید، زیرا این کار ممکن است آن‌ها را به ادامهٔ آزار تشویق کند.

فعالیت ۱. یک شبکهٔ اجتماعی ۱۰ میلیون کاربر دارد. فرض کنید از هر ۱۰۰ کاربر این شبکه، ۸ نفر به دلیل زورگویی سایبری، حساب خود را حذف می‌کنند. اگر هر کاربر برای سکوی این شبکه به طور میانگین ماهی ۵ هزار تومان درآمد تبلیغاتی داشته باشد:

الف) محاسبه کنید در هر ماه، سکو چه مقدار زیان مالی می‌بیند.

ب) نموداری خطی بسازید که این زیان را در ۶ ماه آینده نمایش دهد.

پ) اگر سکوی این شبکه سرمایه‌گذاری کند و با هزینهٔ مشخصی بتواند جلوی زورگویی را بگیرد، بررسی کنید آیا سود بیشتری خواهد کرد یا نه (تحلیل سود / زیان).

فعالیت ۲. تحقیقات نشان می‌دهند که فقط حدود ۳۰ درصد از قربانیان زورگویی سایبری، این موضوع را به یک بزرگسال (والدین یا معلم) گزارش می‌دهند.

الف) اگر در یک مدرسه ۵۰ دانش‌آموز مورد آزار سایبری قرار بگیرند، حدوداً چند نفر آن را گزارش می‌دهند؟

ب) اگر احتمال گزارش‌دهی به حدود ۵۰ درصد افزایش یابد، چند نفر از ۵۰ دانش‌آموز مشکل خود را مطرح می‌کنند؟

پ) اگر ۲۰۰ دانش‌آموز در یک نظرسنجی شرکت کنند و ۲۵ درصد آن‌ها تجربهٔ زورگویی سایبری داشته باشند، چند نفر واقعاً تحت تأثیر قرار گرفته‌اند؟

فعالیت ۳. پیام آزاردهنده‌ای به یک گروه شبکهٔ اجتماعی ارسال می‌شود. فرض کنید هر ۵ دقیقه، این پیام برای ۲ برابر افراد بیشتری مانند زیر ارسال می‌شود.

دقیقهٔ صفر: ۱ نفر

دقیقهٔ ۵: ۲ نفر

دقیقهٔ ۱۰: ۴ نفر

دقیقهٔ ۱۵: ۸ نفر

الف) این دنباله را کامل کنید (تا دقیقهٔ ۴۵).

ب) یک جدول یا نمودار رسم کنید.

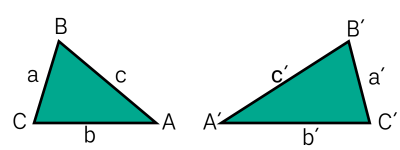
سه‌تایی مثلثی و غیرمثلثی

سید مالک جاودان‌نژاد

بخش قابل توجهی از قضیه‌ها و نتیجه‌های بیان‌شده در هندسهٔ اقلیدسی، از آغاز تاکنون ناظر بر مثلث است. به اعتقاد برخی از هندسه‌دانان، این موجود بی‌نظیر، هنوز این توانایی را دارد که با خودنمایی و بروز نتیجه‌ها، قابلیت‌ها و ویژگی‌های خود، میل کنجکاوی و پژوهشگری دوستداران هندسه را برآورد. در اینجا هدف این نیست که قضیه‌ها یا نتیجه‌هایی در باب خود مثلث بیان کنیم، بلکه می‌خواهیم با استفاده از مثلث‌های معلوم و برخی عمل‌ها و محاسبه‌های جبری و هندسی ساده، به تکثیر و ساخت مثلث‌های جدید بپردازیم.

«نامساوی مثلث» که به صورت: «در هر مثلث، مجموع اندازه‌های هر دو ضلع از اندازهٔ ضلع سوم بزرگ‌تر است» بیان می‌شود، یکی از مهم‌ترین و ابتدایی‌ترین ویژگی بیان شده دربارهٔ ضلع‌های مثلث است. عکس آن نیز درست و ابزار کلیدی ساخت مثلث است. بر این اساس، سه پاره‌خط با اندازه‌های معلوم x، y و z، با این شرط که «مجموع هر دو، از سومی بیشتر باشد»، یک مثلث می‌سازند. البته به‌راحتی می‌توان دید که کافی است مجموع دو عدد کوچک‌تر از سومی بیشتر باشد. در واقع سه پاره‌خط با طول‌های معلوم $x\le y\le z$ یک مثلث می‌سازند، هرگاه داشته باشیم: $x+y\ge z$.

فرض کنیم: $T=ABC$ و $T'=A'B'C'$ دو مثلث با ضلع‌های $a\le b\le c$ و $a'\le b'\le c'$ هستند.



شکل ۱

به‌وضوح می‌بینیم: $(a+a')+(b+b')>c+c'$ و $a+a'\le b+b'\le c+c'$.

از این رو مجموع‌های مذکور مثلث می‌سازند. این مثلث را مجموع دو مثلث T و T′ می‌نامیم و آن را با $T+T'=ABC+A'+B'+C'$ نمایش می‌دهیم. همچنین اگر r یک عدد حقیقی مثبت باشد، عددهای $ra\le rb\le rc$ نیز یک مثلث می‌سازند که آن را با rT نمایش می‌دهیم. بنابراین مجموع دو مثلث و مضرب مثبت هر مثلث، یک مثلث است.

اکنون به حاصل‌ضرب مرتب ضلع‌های دو مثلث می‌پردازیم:

داریم: $aa'\le bb'\le cc'$، آیا این عددها مثلث می‌سازند؟ پاسخ منفی است. برای نمونه، از حاصل‌ضرب مرتب مثلث‌هایی به ضلع‌های $3<4<5$ و $3<4<6$، سه عدد $9<16<30$ حاصل می‌شود که به‌وضوح مثلث نمی‌سازند. از طرف دیگر حاصل‌ضرب مرتب ضلع‌های یک مثلث در هر مثلث متساوی‌الاضلاع، در واقع یک مضرب مثبت آن مثلث و متشابه با آن است. در حالت کلی، حاصل‌ضرب مرتب ضلع‌های دو مثلث $T=ABC$ و $T'=A'B'C'$ در صورتی مثلث می‌سازند که نامساوی $aa'\le bb'\le cc'$ برقرار باشد. به‌ویژه حاصل‌ضرب مرتب ضلع‌های یک مثلث در خودش که آن را مجذور مثلث می‌گوییم، ممکن است مثلث باشد یا نباشد (مثال بزنید).

همان‌گونه که می‌دانید، مثلث $T=ABC$ با ضلع‌های $a\le b\le c$، به ترتیب دارای یک زاویهٔ تند، یک زاویهٔ قائمه و یک زاویهٔ باز است؛ اگر و تنها اگر a^2+b^2 نسبت به c^2 به ترتیب، کوچک‌تر، مساوی یا بزرگ‌تر باشد. بر این اساس، مربع مرتب یک مثلث تنها زمانی مثلث است که آن مثلث دارای زاویهٔ باز باشد.

تمرین: مثلثی به ضلع‌های $a\le b\le c$ مفروض است. بررسی کنید کدام یک از سه‌تایی‌های زیر مثلث می‌سازند.

۱. $\sqrt{a},\sqrt{b}$ و $\sqrt{c}$

۲. $\frac{1}{a},\frac{1}{b}$ و $\frac{1}{c}$

۳. $a+b, a+c$ و $b+c$

۴. $|a-b|, |a-c|$ و $|b-c|$

مجدداً فرض کنیم ABC مثلثی با ضلع‌های $a\le b\le c$ و محیط $a+b+c=2p$ باشد. در این صورت:

$$(*)\begin{cases} x=a+b-c=2p-2c \\ y=a-b+c=2p-2b \\ z=-a+b+c=2p-2a \end{cases}$$

به‌راحتی می‌توان دید که $0<x\le y\le z$.

آیا سه عدد اخیر مثلث می‌سازند؟ اگر این‌گونه است، مثلث XYZ چه ارتباطی با مثلث اولیهٔ ABC دارد؟ مثال‌های متعدد نشان می‌دهند که این سه عدد ممکن است تشکیل مثلث ندهند. برای مثلثی به ضلع‌های ۳، ۴ و ۵ داریم: x=۲، y=۴ و z=۶ و به‌وضوح معلوم است که مثلثی با این ضلع‌ها وجود ندارد. از طرف دیگر برای مثلثی به ضلع‌های ۵، ۶ و ۷ داریم: x=۴، y=۶ و z=۸ که به‌وضوح مثلث می‌سازند. با توجه به نامساوی $0<x\le y\le z$، شرط لازم برای اینکه سه عدد مذکور یک مثلث بسازند این است که: $x+y>z$. اثبات گزارهٔ زیر

بـه عنـوان تمرین بـه خواننده واگذار می‌شـود.

گـزاره: فرض کنیـم ABC مثلثی بـا ضلع‌های $a \le b \le c$ باشـد. در این صورت عددهای $x \le y \le z$ طول ضلع‌های یک مثلث‌انـد، هرگاه: $۳a > b + c$.

مثلـث XYZ با ضلع‌هـای $z \ge y \ge x > ۰$ را دوگان (جفت) مثلـث ABC می‌نامیـم. به‌راحتـی دیـده می‌شـود کـه: $x + y + z = ۲p$ ولـذا محیـط مثلـث بـا محیـط مثلث دوگانـش برابـر اسـت. در ادامـه بـه بیـان ویژگی‌هـا و رابطه‌هـای حاکـم بیـن دو مثلـث می‌پردازیـم.

گزاره: فرض کنیم XYZ مثلث دوگان مثلث ABC باشـد. موارد زیرهم‌ارزند:

۱. $ABC \cong XYZ$ ؛ دو مثلث متشابه‌اند.

۲. $ABC \sim XYZ$ ؛ دو مثلث هم‌نهشت‌اند.

۳. ABC متساوی‌الاضلاع است.

۴. XYZ متساوی‌الاضلاع است.

اثبات: اگر (۱) درسـت باشـد، آنگاه عـدد kای وجود دارد، بـه طـوری که: $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k$. امـا در این صـورت بنا بر ویژگی‌های نسبت و تناسب داریم: $k = \frac{x+y+z}{a+b+c} = \frac{۲p}{۲p} = ۱$ و در نتیجـه دو مثلـث هم‌نهشـت‌اند و (۲) برقـرار اسـت. در صـورت برقـراری (۲) داریـم: x=a، y=b و z=c. از تسـاوی‌های x=a و z=c به‌راحتـی تسـاوی‌های b=c و a=b نتیجـه می‌شـود. بنابرایـن a=b=c و (۳) برقـرار اسـت. از برقـراری (۳) به کمک رابطه‌هـای (*) به‌راحتی تسـاوی x=y=z و در نتیجه درسـتی (۴) حاصل می‌شود.

اثبـات اینکـه (۱) از (۴) نتیجـه می‌شـود، سـاده اسـت و بـه خواننـده واگـذار می‌شـود. بنابرایـن همـهٔ موارد هم‌ارزند.

اثبـات گزاره‌ای نیـز که در ادامه می‌آید بـه عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شـود.

گزاره: فرض کنید $T' = XYZ$ مثلث دوگان (جفت) مثلث $T = ABC$ باشد. در این صورت:

۱. T' حاده‌الزاویه (تیزگوشه) است اگر و تنها اگر:
$(a+b+c)^۲ < ۸bc$

۲. T' قائم‌الزاویه (راست‌گوشه) است اگر و تنها اگر:
$(a+b+c)^۲ = ۸bc$

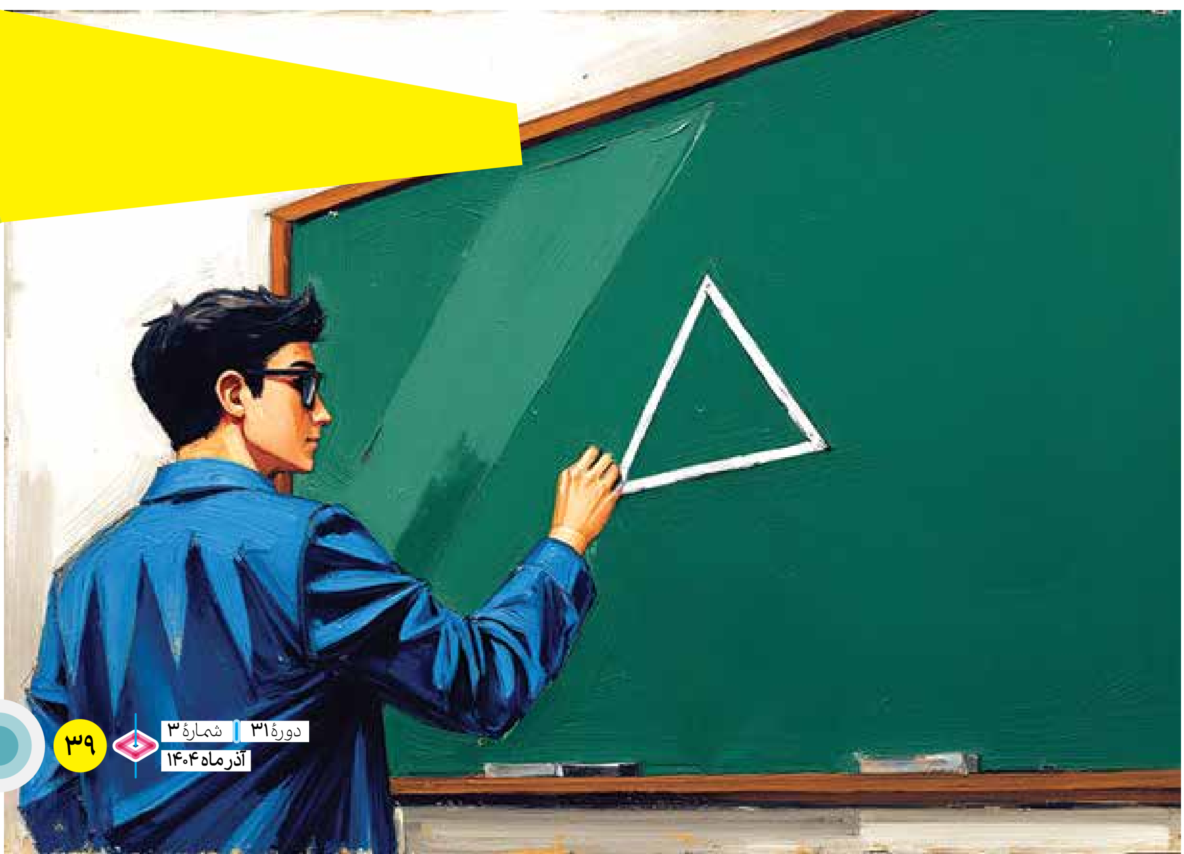
۳. T' منفرجه‌الزاویه (بازگوشه) است هرگاه:
$(a+b+c)^۲ > ۸bc$

این نوشته را با یک مثال و یک سؤال به پایان می‌بریم.

مثـال: در مثال زیر، تعدادی الگو از سـه‌تایی‌های عددی آمـده اسـت. در هـر الگـو، هر سـه‌تایی مرتـب در واقع ضلع‌های مثلـث دوگان مثلث (سـه‌تایی مرتب) ماقبل خود اسـت. در اولین جایی که سـه‌تایی مورد نظر مثلث نمی‌سـازد، علامت @ درج شده اسـت. چه مثلث‌هایی را می‌توانیـد مثال بزنید که الگوی مورد نظر آن نامتناهی بـار ادامـه یابد و هیچ وقـت مجبور بـه درج این علامت نباشیم.

۱. (۶,۸,۹),(۵,۷,۱۱),@

۲. (۲۰,۲۱,۲۲),(۱۹,۲۱,۲۳),(۱۷,۱۹,۲۵),(۱۱,۲۳,۲۷),@



اشتباه‌های محاسباتی

محیط و مساحت

افشین خاصه‌خان

دوسـتداران ریاضـی درود بـر شـما. از اینکـه بـا ما همراهـی می‌کنیـد و انگیـزهٔ مضاعفـی در مـا ایجاد می‌کنید از شـما سپاسگزاریم. این بار نیز یک اشتباه متداول را معرفی می‌کنیم. امیدواریم برای دوسـتان و علاقه‌منـدان مفید واقع شـود.

اشـتباه متداول: محاسبهٔ محیط و مساحت شکل‌های هندسی

یکی دیگر از اشـتباه‌های متداول دانش‌آموزان در محاسبهٔ محیـط و مسـاحت شـکل‌های منتظمـی ماننـد مربـع، مسـتطیل، مثلـث، لوزی، ذوزنقه و... اتفـاق می‌افتد. کم نیسـتند دانش‌آموزانـی کـه تصور درسـتی از محیط شـکل ندارند و در سؤال‌های مربوط به محاسبهٔ محیط شکل، فرمول مسـاحت آن را می‌نویسـند و مساحت را حسـاب می‌کنند.

تشخیص علت

به نظر می‌رسـد که این خطا به دو دلیل ممکن اسـت اتفاق بیفتد: اول نداشـتن فهم درست از مفهوم محیط یک شکل. به این معنی که وقتی از دانش‌آموز خواسـته می‌شود محیط شکل را نشان دهد، او به مساحت آن اشاره می‌کند. دوم «از دید دانش‌آموز»، نبودن رابطهٔ ریاضی (مشـابه رابطه‌های مساحت) برای محاسبهٔ محیط شکل‌های منتظم. بدین معنی که چون دانش‌آموز قادر است با یک فرمول ثابت، مسـاحت همهٔ مثلث‌ها را محاسـبه کند، به زعم او در محاسبهٔ محیط چنیـن رابطـه‌ای وجود نـدارد. یعنی گـزارهٔ «محیط مثلث برابر اسـت با مجموع سـه ضلع»، از نظر او رابطه یا فرمول محسـوب نمی‌شود؛ چون در محاسـبه‌ها او معمولاً به دنبال رابطه‌ای با نماد ریاضی اسـت.
او می‌اندیشـد برای محاسـبهٔ محیط مثلث متسـاوی‌الاضلاع رابطهٔ ریاضی وجود دارد: «یک ضلع ضرب در سه.» اما برای مثلثی با ضلع‌های متفاوت، رابطه‌ای وجود ندارد و در محاسبهٔ محیط چنین شکل‌هایی او به ناچار به رابطهٔ مسـاحت مراجعه می‌کند.

تجویز و درمان

برای درمان این نارسایی برای هر دو دسته می‌توان بـا طراحی یک فعالیت، مفهوم محیط و تمایز آن را با مساحت به دانش‌آموز تفهیم کرد.
بـرای اینکه خود دانش‌آمـوز در متن آموزش قرار گیـرد، از او می‌خواهیـم محیط و مسـاحت رویهٔ یـک میـز یا نیمکت یـا هر چیز مسـطحی را که در اطـراف وجود دارد، نشـان دهـد. در این مباحثه فـرق بیـن طول و سـطح (یک بعد و دو بعـد) را به او یـادآوری می‌کنیـم. حـال از او می‌پرسـیم: «با خط‌کـش مـدرج و بـدون اسـتفاده از رابطه‌های ریاضـی، کدام‌یـک را می‌توان اندازه‌گیـری کرد؟» به احتمـال زیاد بعد از آن بحث‌ها جواب او محیط خواهـد بود. از او می‌خواهیم محیـط رویهٔ میز را اندازه‌گیری کند و منتظر می‌مانیم تا جمع ضلع‌ها را خـودش انجـام دهد و مفهـوم واقعی مجموع ضلع‌ها را در محاسبهٔ محیط، حس کند. حال از او می‌خواهیم مثلث دلخواهی رسـم کند. از آنجا که ریشـهٔ بسیاری از کلمه‌های ریاضی معمولاً عربی اسـت، معنی لغت‌های محیط و مساحت را روی مثلث رسم‌شده، با او به بحث می‌گذاریم. در حین بحـث از او می‌خواهیم بـا خط‌کش مدرج محیط مثلث را نیز محاسبه کند. سپس از او می‌خواهیم یک چندضلعی نامنظم رسـم و محیـط آن را هم محاسـبه کند. اکنون به او یـادآوری می‌کنیم که محیط شـکل‌های هندسـی ممکن است مانند مسـاحت، رابطهٔ ریاضی نداشـته باشـد، اما «در همهٔ مـوارد طول ضلع‌ها با هم جمع می‌شـود». همین گزاره یک قانون کلی است، با اینکه معمولاً به شـکل رابطه نوشته نمی‌شود.

نسخهٔ تکمیلی

بهتر اسـت ایـن دانش‌آمـوزان فصل ششـم از کتاب‌های ریاضی چهارم و پنجم ابتدایی را عمیق یاد بگیرند. یعنی متن کتاب‌ها را با تأمل بخوانند، فعالیت‌ها را انجام دهند و مطالب یادگرفتهٔ خود را با مثال‌ها تطبیق دهند. سپس کار در کلاس‌ها و در پایان مسـئله‌های آخـر هر درس را حل کنند. در این صورت می‌توانند درک درستی از مفهوم‌های محیط و مساحت داشته باشند و ضعف‌هایشان در حل مسئله‌ها برطرف می‌شود.