

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی



رشد
بهره‌ان

رایج

www.roshdmag.ir

ماهنامه آموزشی و تربیتی برای دانش آموزان دوره اول متوسطه
۴۰ صفحه / مهر ماه ۱۴۰۴ / دوره سی و یکم / شماره بی دربی ۱۵۵
پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵۱۲ / ISSN: 1735-4943

کاشی کاری اینشتینی

۸

عددها وارد می شوند!

۲۰

در کوی هم هشتی

۳۸

کاشی زرین فام
ریاضی و هنر

کاشی هشت پر
با نقش ققنوس
و کتیبه قرآنی.

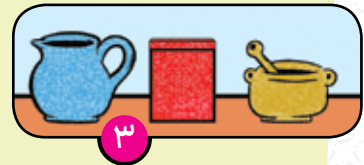
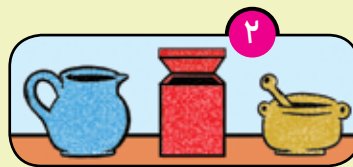
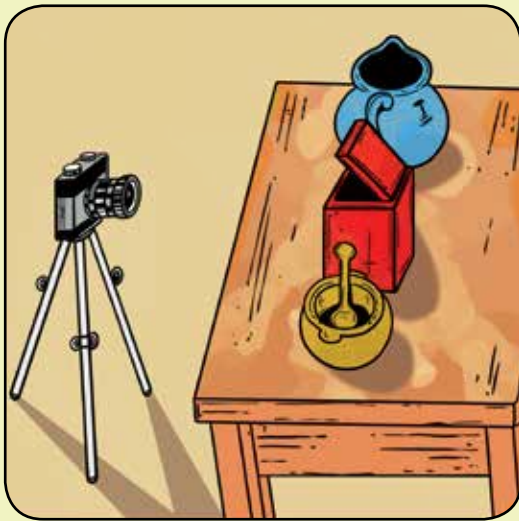
سفال بارنگ و لعاب براق.
ایران، دوره ایلخانی
قرن هفتم ه.ق

ابعاد: قطر: ۲۰/۵ سانتی متر / ارتفاع: ۱/۸ سانتی متر / وزن: ۶۰۰ گرم
موزه ویکتوریا و آلبرت / بازسازی تصویر: آتلیه مجلات رشد



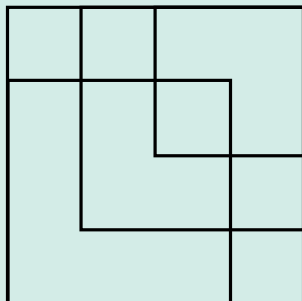
معمای تصویری

اگر بادوربین عکاسی از اشیای روی میز عکس گرفته شده باشد، کدام یک از تصویرهای زیر عکس درست را نشان می دهد؟



برای دیدن پاسخ
رمزینه را پویش
کنید.

در شکل روبه رو چند مربع می بینید؟ با دقت بشمارید
شاید باز هم باشد. از کدام راهبرد حل مسئله برای پیدا
کردن تمام مربع ها استفاده می کنید؟



بسم الله الرحمن الرحيم اللهم صل على محمد وآل محمد وعجل فرجهم

خانواده مجلات رشد همه تلاش خود را کرده است تا این مجله در دسترس عموم دانش آموزان قرار گیرد و همه کودکان و نوجوانان میهن عزیز اسلامی مان امکان تهیه آن را داشته باشند.
قیمت: ۳۰۰/۰۰۰ ریال

مدیر مسئول: سید سعید بدیعی

سر دبیر: حسین نامی ساعی / مدیر داخلی: پری حاجی خانی

هیئت تحریریه: محرم ایردموسی / روح الله خلیلی بروجنی / خسرو داودی /

محمود داورزنی / محمدرضا سید صالحی / آزاد به فرزان / رضا فلاح مقدم / محمود نصیری

ویراستار: بهروز راستانی

مدیر هنری: کوروش پارسا نژاد / طراح گرافیک: مجتبی زند

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی



رشد
برهان

www.roshdmag.ir

ماهنامه آموزشی و تربیتی برای دانش آموزان دوره اول متوسطه
۴۰ صفحه / مهر ماه ۱۴۰۴ / دوره سی و یکم / شماره بی دربی ۱۵۵
پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵۱۲ / ISSN: 1735-4943

سخن سردبیر

دانش؛ برترین سلاح / حسین نامی ساعی / ۲

هندسه

مفهوم های هندسی و حل مسئله / محمود نصیری / ۳

شکل های مجموع ثابت / محمدمهدی نسیمی / ۱۸

مثلث های همسایه / محرم ایردموسی / ۲۲

دانش

دنباله فیبوناچی با نگاهی متفاوت / رضا فلاح مقدم / ۶

در کوی هم نهشتی / سید مالک جاودان نژاد / ۳۸

کاربرد

کاشی کاری اینشتینی / رضا شوشیان / ۸

مدل سازی / آزاد به فرزان / ۲۶

منطق

درست یا غلط، کدام؟ / سامان فرحت / ۱۰

گفت و گو

درک جهان هستی بدون ریاضی؟! / گفت و گو با شارینا بخشی / محمد دشتی / ۱۲

علوم

نجوم ریاضیاتی / روح الله خلیلی بروجنی / ۱۴

اقتصاد

ریاضیات پول ساز / ژما جواهری پور / ۱۶

اولین ها

عددها وارد می شوند! / حبیب یوسف زاده / ۲۰

مدرس

آموزش ریاضی به روش گفت و گو / خسرو داودی و آرش رستگار / ۲۴

کلاس آقای رهنما / محمد تقی طاهری تنجانی / ۲۸

اشتباه های محاسباتی / افشین خاصه خان / ۴۰

مسئله

چیدمان صندلی ها / جعفر اسدی گرماروی / ۳۱

بزرگ ترین نیم دایره در یک مربع / محمود داورزنی / ۳۲

تاریخ

حکایت های علمی و خواندنی / جعفر ربانی / ۳۴

سواد دیجیتال

نگاهی به هویت برخط و دیجیتال / آریان خلیلی / ۳۶



نشانی کانال مجله رشد ریاضی برهان
متوسطه اول در پیام رسان شاد
@roshd_borhan1



با پویش رمزینه نظرات خود را با ما به
اشتراک بگذارید.
nazar.roshdmag.ir



برای مشاهده شرایط ارسال مطلب و
همکاری با ماهنامه رشد ریاضی برهان
متوسطه اول، رمزینه را پویش کنید.



فروش و اشتراک
مجلات رشد

در این ماه: مهر ۱۴۰۴:

- نهم: ولادت امام حسن عسکری (ع) / یازدهم:
- وفات حضرت معصومه (س) / پانزدهم: روز جهانی
- حماسه فلسطین، طوفان الاقصا / بیستم: روز
- بزرگداشت حافظ / بیست و دوم: روز جهانی
- استاندارد / بیست و سوم: روز جهانی نابینایان
- بیست و چهارم: روز ملی پارالمپیک
- بیست و ششم: روز تربیت بدنی و ورزش
- بیست و نهم: روز صادرات



حسین نامی ساعی



برتری بر حریف



سلام دوستان!

آغاز سال تحصیلی را به همه شما تبریک می‌گویم و سالی سرشار از موفقیت و آرامش برایتان آرزو دارم. متأسفانه در تاریخ ۲۳ خرداد ۱۴۰۴ شاهد حمله‌های تجاوزکارانه‌ای از سوی رژیم صهیونیستی و آمریکا به کشور عزیزمان ایران بودیم که در پی آن، تعدادی از هم‌وطنانمان، از جمله فرماندهان، نظامیان، دانشمندان و حتی غیرنظامیان، به شهادت رسیدند. این واقعه ما را به تفکر وامی‌دارد: چرا برخی کشورها نمی‌خواهند ایران قدرتمند وجود داشته باشد و چرا دست به چنین اقداماتی می‌زنند؟

پاسخ این پرسش را می‌توان چنین تحلیل کرد: در دنیای امروز، کشورهایی که از دانش، اتحاد و قدرت ملی برخوردار باشند، قادر خواهند بود مستقل عمل کنند، از ملت خود محافظت کنند و برای آینده‌ای بهتر گام بردارند. ایران یکی از همین کشورهاست؛ سرزمینی با تمدنی کهن، منابع طبیعی ارزشمند و جوانانی با استعداد. با این حال، کشورهایی مانند آمریکا و رژیم صهیونیستی از وجود ایران مقتدر نگران هستند. دلیل این نگرانی را می‌توان در چند محور یافت:

- آن‌ها نمی‌خواهند در منطقه‌ای که منافعشان در آن تأمین می‌شود، کشوری مستقل و تأثیرگذار حضور داشته باشد.
- پیشرفت‌های علمی ایران، به‌ویژه در حوزه‌های هسته‌ای، دفاعی و

فناوری، آن‌ها را به وحشت انداخته است. چنین کشورهایی تلاش می‌کنند ایران را تضعیف کنند تا بتوان حمایت از ملت خویش و همچنین یاری رساندن به مظلومان سایر نقاط جهان را نداشته باشد.

به همین دلیل در سال‌های اخیر بارها کوشیده‌اند با تحریم‌های ظالمانه، تهدیدهای جدی و حتی اقدامات نظامی، ایران را عقب‌نگه دارند. با این حال، واقعیت این است که تاکنون موفق نشده‌اند از عزم ملی و ایستادگی مردم ایران بکاهند. اما اکنون وظیفه ما چیست؟

ما که امروز به عنوان دانش‌آموز، مسیر یادگیری را طی می‌کنیم، سازنده فردای این سرزمین خواهیم بود. وظیفه ما در برابر چنین تهدیدهایی عبارت است از تلاش بی‌وقفه برای کسب علم، پیشرفت در فناوری و اعتلای فرهنگ، تقویت اتحاد ملی و آگاهی از رویدادها و مسئله‌های اطرافمان، تقویت روحیه ایران‌دوستی، همراه با پایداری به اخلاق و پذیرفتن مسئولیت در مسیر توسعه کشورمان. نباید فراموش کنیم که ملتی با نسل جوان، پرتلاش، مؤمن و آگاه هیچ‌گاه مغلوب نخواهد شد.

و اما در این شماره، همچون شماره‌های گذشته، هیئت تحریریه و نویسندگان مجله رشد ریاضی برهان متوسطه اول مطالب خواندنی و مفیدی را برای شما آماده کرده‌اند که توصیه می‌کنم حتماً با دقت و حوصله مطالعه کنید و بهره‌مند شوید.

سربلند و سلامت باشید

مفهوم‌های هندسی و حل مسئله

محمود نصیری

در سلسله مقاله‌های قبلی ساختاری از هندسه را در مورد خط‌ها و پاره‌خط‌ها، مفهومی مثلث‌ها، نامساوی‌های اولیه هندسه شامل از تبدیل‌های هندسی بررسی کردیم. می‌دانیم اساس ساختار هندسه پاره‌خط‌ها هستند که به کمک آن‌ها مثلث و کلاً چندضلعی را می‌سازیم. اما بعد از پاره‌خط‌ها، مهم‌ترین شکل در هندسه اقلیدسی دایره است. به زبان خیلی ساده، دو عنصر اساسی هندسه پاره‌خط و دایره هستند. در مورد بخش اول تا حدودی مطالبی را بیان کردیم. اکنون برای آنکه این ساختار هندسه گسترش بیشتری پیدا کند، باید بخش دوم آن، یعنی دایره‌ها را نیز بررسی کنیم.

درواقع شعاع در دایره به دو معنی به کار می‌رود:

۱. عدد حقیقی مثبت R ؛

۲. پاره‌خطی که یک سر آن روی مرکز دایره و سر دیگر آن نقطه‌ای از دایره است.

به این جمله‌ها خوب توجه کنید:

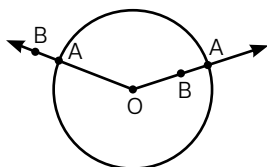
— وقتی می‌گوییم شعاع دایره منظور عدد R است.

— وقتی می‌گوییم یک شعاع دایره، منظور یک پاره‌خط است که تعریف کردیم.

پس برای هر نقطه روی دایره یک پاره‌خط در دایره می‌توان رسم کرد که دوسر آن، آن نقطه و مرکز دایره است و این پاره‌خط یک شعاع نظیر آن نقطه است، یا شعاع شامل آن نقطه است.

اگر نیم‌خط $\overrightarrow{OX}$ در صفحه دایره رسم شده باشد که O مرکز دایره ابتدای این نیم‌خط باشد، آنگاه نقطه‌ای مانند A روی نیم‌خط $\overrightarrow{OX}$ وجود دارد که $OA=R$. پس بنا بر تعریف دایره، نقطه A روی دایره واقع است. بنابراین اولین ویژگی چنین است: «هر نیم‌خط که ابتدای آن مرکز دایره باشد، دایره را در نقطه یکتایی می‌برد.»

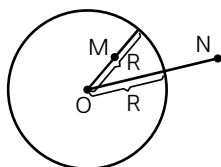
یعنی اگر B هر نقطه دلخواهی در صفحه دایره $C(O, R)$ به غیر از O مرکز دایره باشد، آنگاه نیم‌خط $\overrightarrow{OB}$ دایره را در نقطه‌ای یکتا مانند A می‌برد. در نتیجه اگر در صفحه بی‌شمار نقطه وجود داشته باشد، دایره بی‌شمار نقطه و همچنین بی‌شمار شعاع OA دارد.



شکل ۲

❖ درون و بیرون دایره

در شکل ۳ نقطه M درون و نقطه N بیرون دایره هستند. اگر بخواهیم آن‌ها را به زبان ریاضی تعریف کنیم، فکر می‌کنید چگونه باید تعریف کرد؟



شکل ۳

دایره یکی از مهم‌ترین شکل‌های هندسی است که بشر از ابتدا با آن آشنا بوده است. مشاهده قرص کامل ماه در آسمان و غروب آفتاب در کنار دریا، ذهن بشر را از زمان‌های دور مشغول کرده است. کاربردی‌ترین آن‌ها اختراع چرخ است که تاریخی بسیار دور دارد و احتمالاً بشر به تجربه با کاربرد آن آشنا شده است. از این‌ها که بگذریم، دایره نقش برجسته‌ای را در هندسه ایفا می‌کند. **اقلیدس** از همان ابتدا در ساختن هندسه پاره‌خط‌ها و دایره‌ها را به کار برده است. حتی قضیه‌هایی در مورد دایره و زاویه‌هایی در دایره وجود دارند که اولین بار قبل از اقلیدس، توسط **تالس** مطرح و اثبات شده‌اند. تفاوتی که در ساختار هندسه بین خط‌ها و دایره‌ها وجود دارد این است که خط از مفهوم‌های اولیه‌تر و از جمله تعریف نشده‌هاست. اما دایره را تعریف می‌کنیم. در این بخش به دایره و ویژگی‌های آن می‌پردازیم. ابتدا دایره را و سپس سه پاره‌خط شعاع، قطر و وتر را در دایره تعریف می‌کنیم. پس از تعریف درون و بیرون دایره، مفهومی مهم به نام مماس بر دایره را شرح می‌دهیم و ویژگی‌های آن را بیان خواهیم کرد.

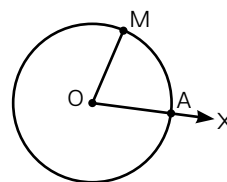
تعریف: نقطه O در صفحه P و عدد حقیقی R مفروض‌اند. مجموعه همه نقطه‌هایی مانند M که از صفحه P و از نقطه O به فاصله R باشند، شکلی را به وجود می‌آورند که آن را دایره می‌نامیم.

نقطه O را مرکز دایره و عدد حقیقی مثبت R را شعاع دایره می‌نامند. دایره به مرکز O و شعاع R را به صورت $C(O, R)$ نشان می‌دهیم و می‌خوانیم دایره C به مرکز O و شعاع R .

چون فاصله OM از O برابر R است پس می‌نویسیم: $OM=R$. دایره را به زبان نمادها و مجموعه‌ها به صورت زیر نیز می‌توانیم در صفحه P تعریف کنیم:

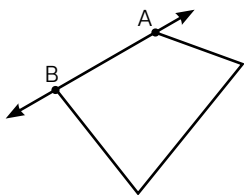
$$C(O, R) = \{M \in P \mid OM = R\}$$

برای هر نقطه M روی دایره به مرکز O ، OM را که یک پاره‌خط است و نه یک عدد، یک شعاع دایره می‌نامیم. و $OM=R$ را که یک عدد حقیقی است اندازه شعاع دایره می‌نامیم.



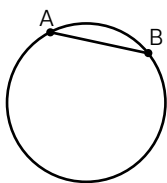
شکل ۱

اگر حداقل یک نقطه روی پاره خط $\overline{AB}$ وجود داشته باشد که متعلق به S نباشد، آنگاه S محدب نیست. خود نقطه، پاره خط، نیم خط و خط مجموعه‌هایی محدب‌اند؛ چرا؟ مثلث محدب نیست، اما مجموعه درون مثلث و خود مثلث محدب است. مجموعه محدب را با چند ضلعی محدب نباید اشتباه کنیم. در اساس این یک نام‌گذاری مناسب نیست، اما در هر صورت آن را بیان می‌کنیم. خود چند ضلعی محدب مجموعه محدب نیست. بیان کردیم که در چند ضلعی محدب، همه نقطه‌های چند ضلعی به جز نقطه‌های روی هر ضلع، در یک طرف خط شامل آن ضلع واقع‌اند. این را فقط برای یادآوری بیان کردیم.

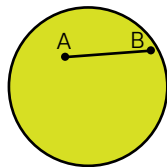


شکل ۶

اما به بحث دایره برمی‌گردیم. آیا دایره مجموعه‌ای محدب است؟ آیا درون دایره مجموعه‌ای محدب است؟ پاسخ به این دو پرسش به طور شهودی دشوار نیست. واضح است که خود دایره مجموعه‌ای محدب نیست. دو نقطه دایره را به هم وصل کنیم، به جز این دو نقطه، هیچ نقطه دیگر پاره خط $\overline{AB}$ به دایره تعلق ندارد. اما مجموعه نقطه‌های درون و حتی مجموعه نقطه‌های درون و روی دایره یعنی همان ناحیه دایره‌ای مجموعه‌ای محدب است.



محدب نیست



محدب است

شکل ۷



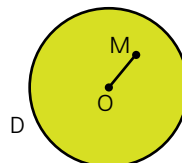
اکنون می‌خواهیم با توجه به آنچه در مقاله‌های قبلی نشان داده‌ایم و تعریف دایره، مسئله‌هایی را حل کنیم. مسئله‌ای که هدف اصلی

محسوب می‌شود، مسئله‌ای است که با پویش رمزینه می‌توانید آن را بخوانید. [لینک](#)

چه رابطه‌ای بین فاصله نقطه تا مرکز دایره R و شعاع دایره وجود دارد؟

مسئله را بخواهید گفت: $OM < R$ و $ON > R$. بنابراین، اگر دایره $C(O, R)$ در صفحه P مفروض باشد، هر نقطه M که فاصله‌اش تا O کمتر از R باشد، درون دایره و هر نقطه N که فاصله‌اش تا O بیشتر از R باشد، بیرون دایره است. مجموعه همه نقطه‌های درون و روی دایره برای ما اهمیت دارند، به همین دلیل آن را یک دیسک یا ناحیه دایره‌ای می‌نامند. پس بهتر است آن را با نمادهای زیر تعریف کنیم:

تعریف: مجموعه همه نقطه‌های درون و روی یک دایره را یک دیسک بسته می‌نامیم و با D نشان می‌دهیم (شکل ۴).



دیسک

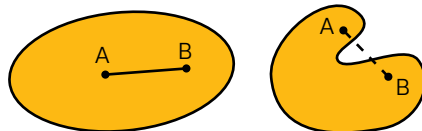
شکل ۴

پس دیسک بسته D مجموعه نقطه‌هایی از صفحه P شامل دایره $C(O, R)$ است که فاصله آن‌ها تا مرکز دایره کوچک‌تر یا برابر R باشد:

$$D = \{M \in P \mid OM \leq R\}$$

مجموعه نقطه‌های درون و روی دایره را ناحیه دایره‌ای نیز می‌نامند.

قبلاً مجموعه محدب و همچنین چند ضلعی محدب را تعریف کرده‌ایم. مجموعه S را محدب گوییم هرگاه برای هر دو نقطه دلخواه A و B متعلق به آن، همه نقطه‌های پاره خط $\overline{AB}$ نیز متعلق به آن باشند. هر مجموعه را که محدب نباشد، غیر محدب یا مقعر می‌نامند.



شکل ۵. مجموعه غیر محدب یا مقعر مجموعه محدب



دنباله فیبوناچی بانگاه متفاوت

رضا فلاح مقدم
استاد یار دانشگاه
فرهنگیان تهران



تصویر ۲. الگوی فیبوناچی برای رشد جمعیت خرگوش‌ها



تصویر ۳. کاربرد عددهای فیبوناچی در طبیعت

لئوناردو فیبوناچی نخستین ریاضی‌دان بزرگ اروپا بود که در قرن سیزدهم میلادی می‌زیست. بیشتر کارهای وی برگرفته از آثار ریاضی‌دانان مسلمان مثل **خوارزمی، کرجی و ابوکامل** است.

او به کشورهای اسلامی بسیاری مثل مصر و سوریه سفر کرد. او که به برتری روش‌های محاسبه مسلمانان پی برده بود، پس از بازگشت به زادگاه خود در سال ۱۲۰۲ میلادی حاصل آموخته‌هایش را با نوشتن «لیبر آباکی» به معنای «کتاب حساب» به رشته تحریر درآورد. این کتاب به طور انحصاری بر پایه الگوریتم‌های خوارزمی است.

مجدداً به بحث خودمان برگردیم. فیبوناچی الگوی عددهای خود را براساس الگوی رشد جمعیت خرگوش‌ها ساخت. بعدها مشخص شد این الگوی به ظاهر ساده دارای کاربردهای فراوانی در مهندسی، معماری، اقتصاد و... است. با توجه به اینکه در این باب مقاله‌های زیادی نوشته شده است، خوانندگان محترم را به مطالعه آن‌ها توصیه می‌کنیم.

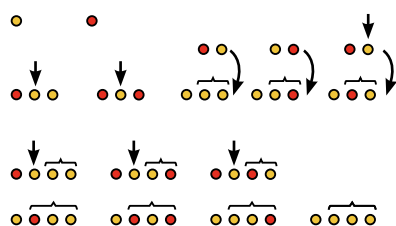
در ریاضیات الگوی عددی به معنای نظم تکرار شونده است. هرگاه چند عدد براساس نظم مشخصی کنار هم قرار گیرند، تشکیل یک مجموعه را می‌دهند. به نظمی که بین اعضای مجموعه وجود دارد، الگوی آن مجموعه گفته می‌شود. مثلاً $۰, ۲, ۴, ۶, \dots$ یک الگوی عددی برای نمایش عددهای زوج است. یا $۱, ۲, ۴, ۸, ۱۶, ۳۲, \dots$ یک الگوی عددی برای نمایش توان‌های عدد ۲ است. یکی از زیباترین الگوهای عددی، الگوی عددهای فیبوناچی است. عددهای فیبوناچی عبارت‌اند از: $۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, \dots$

کمی فکر کنید، آیا می‌توانید کشف کنید که عدد بعدی چه عددی است؟ بله درست است، عدد بعدی این الگو عدد ۲۱ است. در حقیقت هر عدد بعدی در این الگو، از جمع دو عدد قبلی ساخته می‌شود. به زبان ریاضی در الگوی عددهای فیبوناچی که $F_0 = 1$ و $F_1 = 1$ و F_n بیانگر عدد n -ام در الگوی فیبوناچی است.

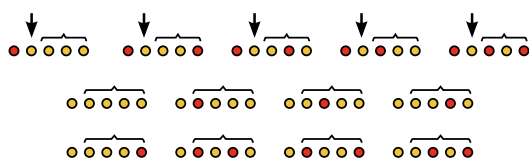
F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}	F_{17}	F_{18}	F_{19}	F_{20}
۰	۱	۱	۲	۳	۵	۸	۱۳	۲۱	۳۴	۵۵	۸۹	۱۴۴	۲۳۳	۳۷۷	۶۱۰	۹۸۷	۱۵۹۷	۲۵۸۴	۴۱۸۱	۶۷۶۵

تصویر ۱. عددهای فیبوناچی

راهبرد مفهومی جدیدی است که از طریق آن تعداد ترکیبات بدون مخلوط کردن این عدد با تعداد شمارنده‌ها اضافه می‌شود (تصویر ۶).



تصویر ۶. کاهش به تعداد کمترین شمارنده



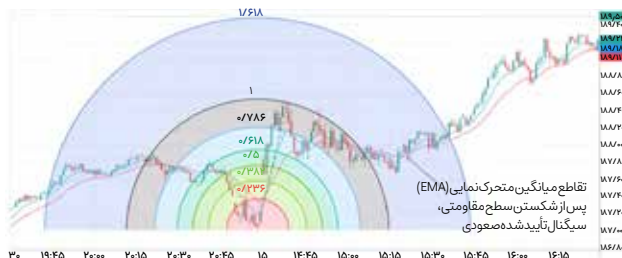
تصویر ۷. مورد پنج شمارنده از طریق روش کاهش

همان‌طور که در تصویر ۶ نشان داده شده است، هنگامی که یک ترکیب از شمارنده‌ها با یک رنگ قرمز شروع می‌شود، بعدی باید زرد باشد و این بایک پیکانه (فلش) بالای آن مشخص شده است. در مورد دو شمارنده، یک چنین ترکیبی وجود دارد. در مورد سه شمارنده، دو ترکیب از این قبیل وجود دارد. در مورد چهار شمارنده، سه ترکیب از این قبیل وجود دارد. یک آکولاد بالای دو / سه شمارنده نشان‌دهنده استفاده از ترکیبات با دو / سه شمارنده در توسعه ترکیبات سه / چهار شمارنده است.

ایده جدید چیدمان شمارنده‌ها در تصویر ۶ برای پنج شمارنده نشان داده شده است. هنگامی که یک ترکیب با یک شمارنده قرمز شروع می‌شود، شمارنده بعدی باید زرد باشد و بنابراین، پنج ترکیب از این قبیل در ردیف سوم تصویر ۵ نشان داده شده است. هنگامی که یک ترکیب با شمارنده زرد شروع می‌شود، چهار شمارنده بعدی را می‌توان به هشت روش نشان داده شده در ردیف‌های چهارم و پنجم تصویر ۶ چید. بنابراین پنج شمارنده را می‌توان به $5 + 8 = 13$ روش قرار داد. به‌طور کلی اگر F_n تعداد حالت‌های فرزندان خانواده دارای n فرزند باشد، می‌توان بسته به رنگ شمارنده اول، n شمارنده را به دو گروه تقسیم کرد. هنگامی که شمارنده اول قرمز است، شمارنده دوم باید زرد باشد. بنابراین محدودیتی برای شمارنده بعدی وجود ندارد. یعنی $n-2$ شمارنده باقی‌مانده را می‌توان به F_{n-2} حالت قرار داد. هنگامی که شمارنده اول زرد است هیچ محدودیتی برای شمارنده بعدی وجود ندارد، بنابراین $n-1$ شمارنده باقی‌مانده را می‌توان به F_{n-1} روش چید؛ یعنی: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

منبع

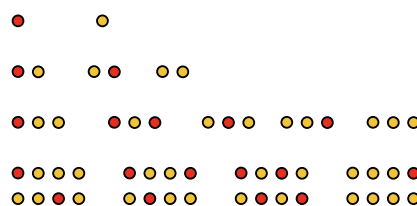
آبراموویچ، سرگی و کانل، مایکل ال.؛ (۲۰۲۱). توسعه دانش عمیق در ریاضی دوره متوسطه. کتابی برای تدریس در عصر فناوری. اشپیرینگر. مترجم: رضا فلاح مقدم.



تصویر ۴. کاربردهای نسبت‌های فیبوناچی در اقتصاد

حال این مسئله را در نظر بگیرید: تعداد حالت‌های ممکن برای فرزندان یک خانواده که هیچ‌گاه در آن خانواده دودختر متوالی به دنیا نیایند، چند تاست؟

F_n را تعداد حالت‌های ممکن می‌گیریم. زمانی که خانواده دارای یک فرزند باشد دو حالت ممکن است، پس داریم: $F_1 = 2$. حال اگر این خانواده دو فرزند داشته باشد، تعداد حالت‌های ممکن سه حالت خواهد شد. زمانی که سه فرزند داشته باشد، تعداد حالت‌های ممکن پنج حالت می‌شود. درحالتی که این خانواده چهار فرزند داشته باشد، تعداد حالت‌های ممکن هشت حالت خواهد شد. برای سهولت کار رنگ قرمز برای یک دختر در خانواده و رنگ زرد را برای یک پسر در خانواده در نظر می‌گیریم (تصویر ۵).



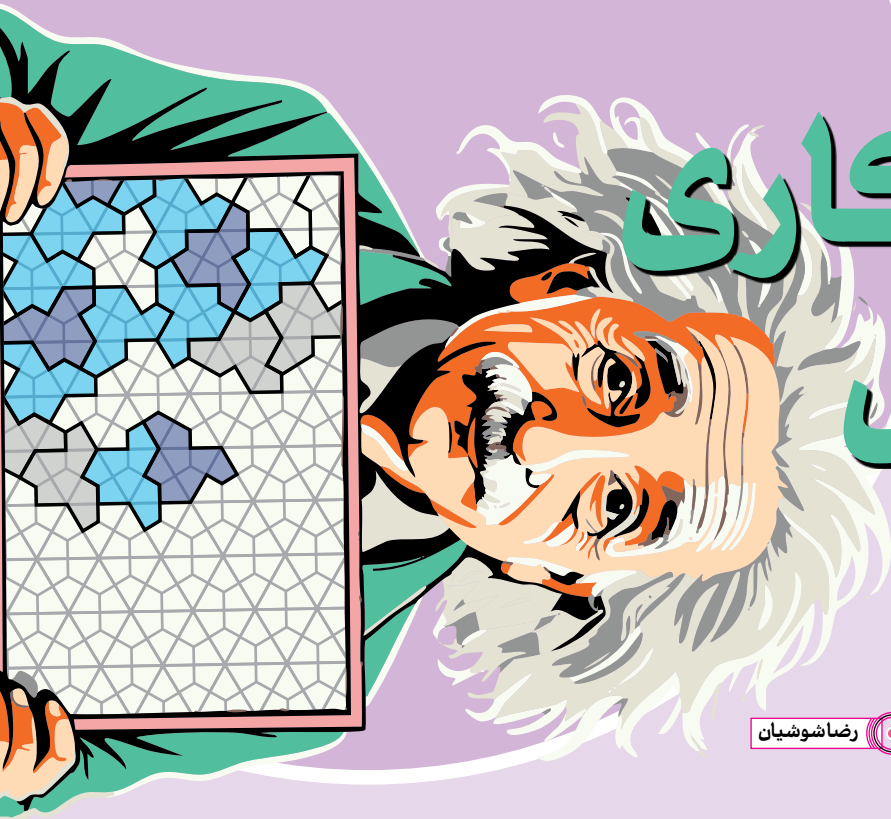
تصویر ۵. تعداد حالت‌های ممکن برای فرزندان خانواده در حالت‌های یک، دو، سه و چهار فرزندی

ممکن است دانش آموزی متوجه شود که اگر تعداد شمارنده‌ها و تعداد ترکیبات متفاوت رنگ قرمز و رنگ زرد را با هم مقایسه کنیم، از آزمایش دوم به بعد هر تعداد ترکیب برابر است با مجموع تعداد شمارنده‌ها و تعداد ترکیبات آزمایش قبلی با همان تعداد شمارنده. به عبارت دیگر با استفاده از شهود تجربی، او نتیجه می‌گیرد که برای پنج شمارنده پنج حالت چیدمان متفاوت وجود دارد. همان‌طور که مشاهده می‌کنید در این مثال دانش‌آموزان با استفاده از مشاهده‌ها و استدلال استقرایی به نتیجه‌ای رسیده‌اند، اما باید توجه داشت که استقرای تجربی همیشه تضمین نمی‌کند که الگوی مشاهده شده برای همه حالت‌ها برقرار باشد. برای اثبات قطعی یک فرمول کلی به دقت بیشتری نیاز است.

به همین دلیل روش دیگری برای نشان دادن اینکه عدد ۱۲ به درستی حدس زده نشده، سازمان‌دهی مجدد شمارنده‌ها با استفاده از



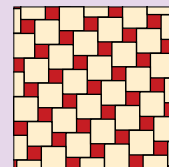
کاشی‌کاری اینشتینی



رضا شوشیان

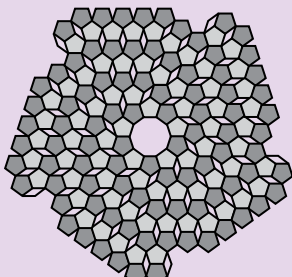


با تعریف کاشی‌کاری شروع می‌کنیم: به پوشاندن یک سطح با استفاده از یک یا چند نوع کاشی (منتظم یا غیرمنتظم) به طوری که روی یکدیگر قرار نگیرند و همچنین فضای خالی بین آن‌ها باقی نماند، کاشی‌کاری گویند. شاید برایتان این سؤال پیش بیاید که چه کسی اولین بار این مفهوم ساده و در عین حال پیچیده را در دنیای ریاضیات مطرح کرد؟ ریاضی‌دان مطرح ۶۰۰ سال پیش از میلاد مسیح، فیثاغورس، با استفاده از دو مربع (شکل ۱) انجام داد و تحولی در دنیای ریاضیات را باعث شد.

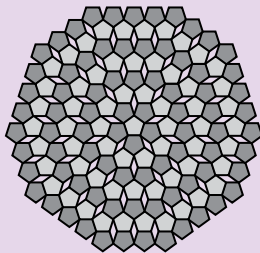


شکل ۱. قسمتی از
کاشی‌کاری فیثاغورسی

مثال دوم: کاشی‌کاری با استفاده از سه نوع شکل با استفاده از شکل‌های پنج‌ضلعی منتظم، ۱۰ ضلعی منتظم و لوزی می‌توان مشابه شکل‌های ۳ و ۴ کاشی‌کاری انجام داد. شکل ۳ برگرفته از ابتکارات آقای آلبرت دوور، ریاضی‌دان قرن پانزدهم و شانزدهم میلادی است که با استفاده از شروع از یک کاشی و انتقال آن به جهت‌های متفاوت و با استفاده از سه نوع شکل توانست این کاشی‌کاری را به سرانجام برساند.



شکل ۴. چینش مارپیچ

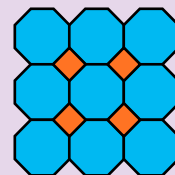


شکل ۳. چینش شعاعی

شکل ۴ به مارپیچ معروف است که با استفاده از یک ده‌ضلعی منتظم دقیقاً در مرکز آن انجام می‌شود.

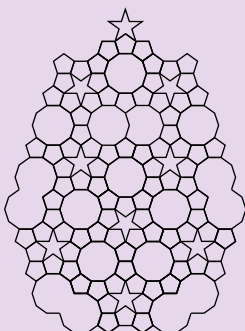
مثال‌هایی از کاشی‌کاری در ریاضیات

مثال اول: کاشی‌کاری با استفاده از دو نوع شکل، شکل ۲ با استفاده از لوزی و هشت‌ضلعی منتظم ساخته شده است.



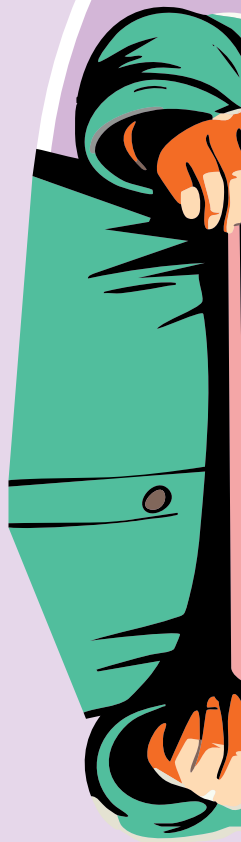
شکل ۲. کاشی‌کاری با
دو نوع کاشی

مثال سوم: شکل ۵ در واقع همان کاشی‌کاری آلبرت دوور (شکل ۳) است که با کوچک‌تر کردن شکل‌های تشکیل‌دهنده توسط آقای یوهان کوپر، ستاره‌شناس و ریاضی‌دان برجسته، مطرح شده است.



شکل ۵. مدل A۱

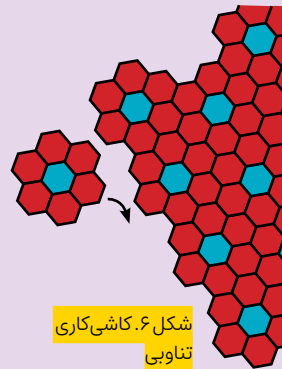




خب، فکر می‌کنم تا اینجا متوجه مفهوم کاشی‌کاری در ریاضیات شدید. حال دو نوع رایج کاشی‌کاری را بررسی می‌کنیم:

نوع اول: کاشی‌کاری تناوبی

کاشی‌کاری تناوبی یا همان کاشی‌کاری با الگوهای تکراری، با استفاده از مشخص کردن یک یا چند نوع کاشی مشخص انجام می‌شود. به این صورت که کل صفحه را با استفاده از روگرفت‌هایی (کپی‌هایی) از کاشی‌های موجود می‌پوشانیم. یا به عبارت دیگر می‌توان با بریدن قسمتی از سطح کاشی‌کاری شده، شکل اول را در نمونه‌ای کوچک‌تر شبیه‌سازی کرد. به شکل ۶ دقت کنید. این شکل نمونه‌ای از کاشی‌کاری تناوبی است.

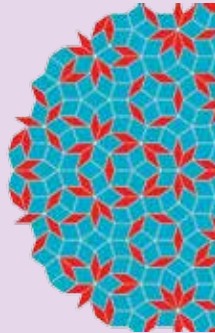


به قسمت بریده‌شده از کاشی‌کاری اصلی دقت کنید که در واقع نمونه‌ای کوچک‌تر با همان الگوی شکل کاشی‌کاری اصلی است!

نوع دوم: کاشی‌کاری غیرتناوبی

در کاشی‌کاری غیرتناوبی یا همان کاشی‌کاری بدون الگوهای تکراری نمی‌توان با برش قسمتی از سطح کاشی‌کاری شده به یک نمای کوچک‌تر از شکل اصلی دست یافت. کاشی‌کاری نمایش داده‌شده در شکل ۷ نمونه‌ای از کاشی‌کاری غیرمتناوب با استفاده از دو کاشی است که به نام راجر پنروز (فیزیک‌دان) نام‌گذاری شده است. توجه کنید در این شکل، فارغ از اینکه از

چه قسمتی می‌خواهید شکل را برش دهید، نمی‌توانید به یک الگوی تکراری دست پیدا کنید. این واقعاً اعجاب‌انگیز نیست؟!



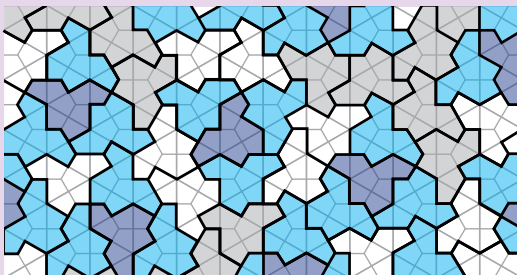
شکل ۷. کاشی‌کاری غیرتناوبی

حال به نقطه‌ای اوج مطلب کاشی‌کاری می‌رسیم؛ کاری که هیچ‌کس تا سال ۲۰۲۲ میلادی نتوانسته بود از عهده‌آن بر بیاید و به «مسئله اینشتین» معروف است.

به این سؤال فکر کنید: آیا می‌توان با استفاده از یک نوع کاشی، کاشی‌کاری غیرتناوبی انجام داد؟

این سؤال مدت‌های زیادی بود که ذهن دانشمندان ریاضی جهان را به خود مشغول کرده بود تا اینکه چندی پیش در سال ۲۰۲۲ ریاضی‌دان انگلیسی، دیوید اسمیت^۱، به آن پاسخ داد.

محققان مؤسسه «امپا»^۲ در کمال شگفتی توانستند شکلی را مشابه آنچه مسئله اینشتین نامیده می‌شود، در ساختار بلوریک مولکول خاص یافتند. زمانی که این مولکول خاص روی سطح نقره بلورینه شد، به جای یک ساختار منتظم قابل انتظار، به ساختاری نامنظم که هیچ الگوی تکرارشونده‌ای ندارد تبدیل شد! (شکل ۸). محققان ابتدا باور نمی‌کردند، ولی با انجام آزمایش‌های تخصصی توانستند مسئله ذکرشده را اثبات کنند و این‌گونه بود که زیبایی ریاضیات بار دیگر به جهانیان ثابت شد. مولکول مورد نظر «تریس»^۳ بود که می‌توانست شکل خودش را تغییر دهد.



شکل ۸. کاشی‌کاری غیرتناوبی با استفاده از یک نوع کاشی

وامادر پایان به این سؤال جواب بدهید: ریاضی در زندگی کاربرد دارد یا نه؟!

پی‌نوشت‌ها

1. David Smith
2. EMPA
3. Tris(hydroxymethyl)(aminomethane)



تصویرگر: نسیم میثم موسوی

درست یا غلط؟ کدام؟

عبارت	آیا گزاره است؟	ارزش درستی
$4=2+2$	بله	درست
علی از رضا بلندتر است.	بله	بستگی دارد.
در را ببند!	خیر	دستور است.
این جمله غلط است.	خیر	تناقض است!

منطق به ما کمک می‌کند بتوانیم چیزی را پیدا کنیم که بتوانیم به آن اتکا کنیم و به ما می‌آموزد که وقتی چیزی نمی‌دانیم، بتوانیم استدلال کنیم. بیایید کمی خودمان را گرم کنیم.

فرض کنید کسی به شما می‌گوید «آسمان سبز است». شما به آسمان نگاه می‌کنید و می‌بینید که آبی است. شما می‌دانید آبی است. در مورد جمله‌ای که شنیده‌اید چه می‌توان گفت؟ خب **غلط** است. در منطق به جمله‌ای مانند جمله فوق **گزاره** می‌گوییم. گزاره عبارتی است که می‌تواند درست یا غلط باشد. به تعدادی مثال توجه کنید:

❖ خوب فکر کنید

فرض کنید علی و رضا پیشانی گلی داشته باشند و پیشانی احمد تمیز باشد. احمد از ابتدا می بیند که پیشانی علی و رضا گلی است. برای همین فکر می کند که: «شاید پیشانی من گلی نیست و فقط این دو نفر پیشانی گلی دارند.»

برای همین نمی تواند مطمئن بگوید که خودش پیشانی گلی دارد. به دلیل اینکه **اطمینان** ندارد، در جواب بار اول سؤال فریاد می زند: «نه!»

علی از ابتدا می بیند که پیشانی رضا گلی است و پیشانی احمد تمیز است. برای همین فکر می کند که: «اگر من پیشانی گلی نداشته باشم، در آن صورت رضا می بیند که من و احمد پیشانی تمیز داریم. بنابراین از آنجا که اعلام شده است که حداقل یک نفر پیشانی گلی دارد، تشخیص می دهد که خودش پیشانی گلی دارد و در نتیجه او باید فریاد بزند: «بله!»

ولی رضا فریاد می زند: «نه!»

برای همین است که علی بعد از شنیدن جواب بار اول سؤال، از طرف رضا با خود فکر می کند که: «فهمیدم... اگر رضا نتوانسته این را بفهمد، حتماً روی پیشانی من گل دیده است.»

پس به فرض بالا (علی و رضا پیشانی گلی داشته باشند و پیشانی احمد تمیز باشد)، باید در جواب بار دوم سؤال، از علی و رضا جواب بله بشنویم. ولی گفته شده است که در جواب سؤال دوم همه می گویند: «نه!» پس فرض بالا غلط است.

با استدلال مشابه می توان فرض علی و احمد گلی، رضا تمیز و همچنین فرض رضا و احمد گلی و علی تمیز را نیز رد کرد. فرض کنیم فقط یک نفر پیشانی گلی داشته باشد. چون آن شخص پیشانی دو نفر دیگر را می بیند که تمیز است و مادرش اعلام کرده است که حداقل یک نفر پیشانی گلی دارد، می فهمد که خودش پیشانی گلی دارد و در پاسخ به همان بار اول سؤال باید بگوید: «بله!» ولی این چیزی نیست که در داستان شرح داده شده است. در نتیجه فرض وجود یک پیشانی گلی هم از میان می رود.

تنها داستان قابل تصور این است که هر سه پیشانی گلی داشته باشند. تمرین خوبی است که در این حالت فکر کنید چه در ذهن هر کدام پیش می آید که در پاسخ به دو بار تکرار سؤال، هر سه فریاد می زنند: «نه!» و در پاسخ به بار سوم سؤال همه می گویند: «بله!» آیا این مسئله را به تعداد بیشتری بچه می توانید تعمیم دهید؟ اگر تعداد چهار بچه در حال بازی باشند، همه پیشانی گلی داشته باشند و مادرشان اعلام کند که حداقل یک پیشانی گلی وجود دارد، و سپس سؤال قبل را به صورت متوالی بپرسد که: «هر کدامتان بگوید ببینم آیا مطمئن است که خودش پیشانی گلی دارد؟» چند بار مادر باید سؤال را تکرار کند تا از همه «بله!» بشنود؟

❖ معما

فرض کنید در وضعیت زیر قرار گرفته اید و به شما گفته اند بین **سامان**، **سینا** و **سپهر** فقط یک نفر دروغ می گوید. آن یک نفر کیست؟

سامان می گوید: «سینا دروغ می گوید.»

سینا می گوید: «سپهر کیک را دزدیده است.»

سپهر می گوید: «من کیک را ندزیده ام.»

برای جواب دادن به معمای بالا باید حالت های متفاوت را امتحان کنیم. بگذارید سه حالت متفاوت را امتحان کنیم. می دانیم فقط یک نفر دروغ گفته است. ابتدا فرض کنیم سامان آدم دروغ گویی است، سپس سینا و بعد سپهر. کدام یک از فرض ها به تناقض می انجامند؟ منطق به طور کلی به امتحان این موضوع می پردازد که چه چیزی می تواند درست باشد، و همواره در پی آن است که هر چه را که نمی تواند درست باشد، حذف کند. مثالی که در ادامه می آید، بین منطق دانان بسیار محبوب است. در عین حال که به نظر ساده می آید، اما مسئله عمیقی است:

مثال: فرض کنید سه بچه به نام های **علی**، **رضا** و **احمد**، در حیاط مشغول بازی هستند. بدون آنکه به هم توجه کنند و یکدیگر را ببینند، پیشانی تعدادی از آن ها گلی می شود.

هر بچه ای می تواند پیشانی بقیه را ببیند، ولی به هیچ طریقی نمی تواند پیشانی خود را ببیند.

مادر آن ها به طور ناگهانی و در حالی که حواس بچه ها فقط به بازی شان است و به پیشانی هم هیچ نگاهی نکرده اند، به همه و بلند اعلام می کند: «حداقل یک نفر از شما پیشانی گلی دارد.»

سپس بلند می پرسد: «هر کدامتان بگوید ببینم آیا مطمئن است که خودش پیشانی گلی دارد؟»

هر سه هم زمان می گویند: «نه!»

سپس مادر همان پرسش را تکرار می کند: «هر کدامتان بگوید ببینم آیا مطمئن است که خودش پیشانی گلی دارد؟»

دوباره هر سه هم زمان می گویند: «نه!»

بعد از این مادر برای بار سوم همان پرسش را تکرار می کند، هر سه بچه فریاد می زنند: «بله!» چه اتفاقی افتاده است؟



تحلیل و جست و جو بودند. به همین دلیل علوم پایه برایم جذاب ترین زمینه تحصیلی محسوب می شدند. این علاقه امروز هم در من زنده است و موتور محرکه ای است تا بتوانم مصمم تر برای رسیدن به هدف هایم تلاش کنم.

از سال هفتم از طریق معلم عزیزم، خانم علیخانی با دانشگاه و تحصیلات تکمیلی آشنا شدم و در مسابقه های گوناگون در «خانه علم» شرکت کردم. در سال نهم بود که با مسابقات «کتر» آشنا شدم و به همراهی دوستم، کوثر مرادی، در آن شرکت کردیم. خوش بختانه به لطف خداوند، سخت کوشی خودمان و راهنمایی معلمان عزیز موفق شدیم مقام نخست کشوری را در این مسابقه ها کسب کنیم.

در ادامه متن گفت و گو با این دختر سخت کوش و موفق ایرانی را می خوانید.

با توجه به اینکه مخاطبان مجله در آغاز با شما کمی آشنا شدند، برایمان بگویید از چه زمانی به موضوع و درس ریاضی علاقه مند شدید؟ در خصوص موضوع ها و دلیل های این علاقه مندی و همچنین موقعیت و یا کسانی (پدر، مادر، هم کلاسی ها، معلمان و...) که در این علاقه مندی مؤثر بوده اند، برایمان بگویید.

من از دوران ابتدایی به حل مسئله ها و به چالش کشیدن خودم، با پیدا کردن الگو یا روش برای پدیده ها و اتفاق های اطرافم و کاوش، علاقه مند بودم و همین علاقه سبب شد که از اواسط دوران ابتدایی از درس شیرین ریاضی خوشم بیاید. به لطف خدا، با ورود به دوران راهنمایی و آشنایی با خانم علیخانی، به طور کامل وارد دنیای ریاضی شدم و با حمایت همه جانبه خانواده، علاقه ام به ریاضی روز به روز بیشتر شد. این مطلب را هم باید اضافه کنم که درس علوم تجربی را هم بسیار دوست دارم، زیرا این

جهان هستی بدون ریاضی؟

گفت و گو با شارینا بخشی، دانش آموز دبیرستان فرزنانگان زنجان و برگزیده مسابقه های «کتر»

محمد دشتی

به دوستان و خوانندگان مجله رشد ریاضی برهان این گونه معرفی می کند: شارینا بخشی هستم، متولد پنجم آذر ۱۳۸۷ در استان آذربایجان غربی، اما بزرگ شده شهر زیبای زنجان. دوران ابتدایی را در «مدرسه شاهد ریحانه» گذراندم و اکنون دانش آموز پایه نهم «دبیرستان فرزنانگان» زنجان هستم. از همان دوران کودکی علاقه شدیدی به حل مسئله، کاوش و تفکر عمیق در من وجود داشت و معمولاً جذب موضوع هایی می شدم که نیازمند

بررسی ها نشان می دهند کسانی که برای موفقیت در زمینه هایی مثل علوم پایه و ریاضیات می کوشند، چنانچه از هوش های دیگر و از جمله هوش هیجانی برخوردار باشند، افراد موفق تری خواهند بود. موضوعی که می توان مصداق آن را در برخی دانش آموزان و از جمله شارینا بخشی به روشنی دید. او که در حال حاضر در شهر زیبای زنجان تحصیل می کند، با مجله خودش، یعنی «رشد ریاضی برهان»، به گفت و گو نشسته است. شارینا خودش را

علوم علاوه بر تغییر نگرش انسان نسبت به زندگی و محیط اطراف، کمک می‌کند که به درک بهتری از پدیده‌ها، وجود خودمان و شناخت از هستی برسیم.

به نظر شما جذابیت‌های خاص ریاضی به طور کلی و درس ریاضی به طور خاص چیست؟

انجام محاسبه‌ها، حل مسئله، رسیدن به نگرش و دید عددی، و به طور کلی پایه بودن جهان هستی، و توضیح بی‌نهایت‌ها و نهایت‌ها به کمک عددها از جمله جذابیت‌های علم ریاضی است. به طور کلی وقتی من در حل مسئله‌های سخت و پیچیده به جواب صحیح می‌رسم و یا روش جدیدی برای حل مسئله‌های یابم، بالاترین لذت‌های ریاضی را تجربه می‌کنم.

روش شما برای یادگیری ریاضی چه بوده است؟ آیا این روش را به دیگران هم توصیه می‌کنید؟

ریاضی تماماً حل مسئله است و تا به درک کاملی از این موضوع نرسیم نمی‌توانیم مسئله‌ها را حل کنیم. به این منظور بهترین روش برای یادگیری ریاضی، اول اثبات مفهوم‌ها و روش‌ها به خودمان است. یعنی روش‌ها را بی‌چون و چرانی پذیریم و تا آن‌ها را به طور کامل متوجه نشده‌ایم، دست از اثبات موضوع برای خودمان برنداریم. دوم به چالش کشیدن خودمان با گستره‌ای وسیع از سؤال‌های گوناگون با روش‌های حل متفاوت است. این امر به ما کمک می‌کند که به هر مسئله از چند جنبه مختلف نگاه کنیم و با خلاقیت سؤال‌ها را حل کنیم و به پاسخ درست برسیم.

آیا به جز کتاب درسی کتاب‌های دیگری هم مطالعه می‌کنید؟

بله من کتاب‌های غیردرسی را از ۸ سالگی در اوقات فراغتم مطالعه می‌کنم و به این

موضوع بسیار علاقه دارم. از جمله کتاب‌هایی که خوانده‌ام می‌توانم به آثاری مانند جنایات و مکافات، طاعون، بادبادک‌باز، و همچنین آثار آگاتا کریستی، مانند ده پچه زنگی، قطار سریع‌السیر و... و آثار جنایی دیگر اشاره کنم.

در چه دوره‌ای از تحصیل در مسابقه‌های ریاضی، المپیادها و... برگزیده یا تشویق شده‌اید؟

در برخی از مسابقه‌ها، از جمله کتر، متر، المپیاد و... شرکت کرده‌ام و خانواده مهم‌ترین حامی من در این راه بوده است. این مسابقه‌ها باعث به چالش کشیده شدنم در علوم و داشته‌های خودم شده‌اند.

می‌گویند ریاضی پرکاربردترین دانش و مادر تمام علوم است. شما چه نظری دارید و اگر این گفته را قبول دارید، دلایلتان چیست؟

بله، تمام علوم در خود نظم و الگویی خاص دارند و تمامی الگوها بر پایه عددها و محاسبه‌ها قرار دارند. ضمن اینکه در حالت کلی ریاضی علم بررسی پدیده‌ها، حالت‌ها و احتمال‌های مختلف جهان است و بدون ریاضی امکان درک تمام این‌ها ناممکن می‌شد.

چه خاطره‌های خوبی در دوره تحصیلی خود در زمینه ارتباط با درس و معلمان ریاضی دارید؟

در دوران راهنمایی تمامی زنگ‌های ریاضی به لطف خانم علیخانی برایمان جذاب بود و هر جلسه از این کلاس، علاوه بر تدریس ریاضی، تدریس زندگی هم بود. در تمامی این زنگ‌ها ما خلاقیت در ریاضی را با یکدیگر آموختیم.

دوست دارید در مجله رشد ریاضی برهان بیشتر چه مطالبی چاپ شوند؟

یکی از مشکلات افراد با ریاضی ندانستن کاربرد آن در زندگی روزمره و اتفاقات پیرامون

ماست. به نظر من اگر کاربردهای ریاضی در مجله چاپ شوند، می‌تواند علاقه از دست رفته بعضی از دانش‌آموزان را به ریاضی بازگرداند.

به جز کتاب‌های درسی چه کتاب‌هایی مطالعه می‌کنید؟ آیا کتاب‌های غیردرسی با موضوع ریاضی هم خوانده‌اید؟

برای مسابقه کتر من کتاب «چگونه مسئله را حل کنیم»، اثر جرج پولیاریا مطالعه کردم که کتابی بسیار خوب اما کمی سنگین بود. مطالعه این کتاب را به کسانی که واقعاً به چالش‌های ریاضی علاقه‌مندند پیشنهاد می‌کنم.

نظر خانواده شما در مورد ریاضی چیست؟ آیا در این زمینه مشوق شما بوده‌اند؟ آیا خودشان هم به ریاضی علاقه‌مند هستند؟

خانواده همیشه تشویق‌کننده من در این راه بوده است؛ ضمن اینکه پدرم خودشان یکی از علاقه‌مندان به ریاضی هستند و در این رشته تحصیل کرده‌اند. رشته‌های دانشگاهی ایشان نیز بر پایه ریاضی و حل مسئله است.

در زندگی شخصی خودتان از ریاضی چه بهره‌ای برده‌اید؟

ریاضی باعث تغییر دید من به دنیا شد و کمک کرد همیشه دنبال راه‌های متفاوت برای حل مسئله‌های زندگی بگردم.

از اندیشمندان و صاحب‌نظران معاصر ریاضی چه کسانی را می‌شناسید و چگونه با آن‌ها آشنا شده‌اید؟

من با بانوی ریاضی ایران، خانم مریم میرزاخانی، به وسیله معلم ریاضی‌ام آشنا شدم و همچنین به واسطه مطالعاتم درباره نظریه‌های زمان، با آقای ریتن هاوس نیز آشنا هستم.

قسمت اول: فضا چیست؟

نجوم ریاضیاتی

روح الله خلیلی بروجنی

❖ اشاره

به طور معمول بیشتر دانش آموزان در سنین نوجوانی (دوره اول متوسطه) به دنبال کشف جهان پیرامون خود هستند. به همین دلیل مبحث نجوم به عنوان علمی که به فضا، ستارگان و اسرار کیهان می پردازد، برای این قبیل نوجوانان جذاب و اسرارآمیز است. از سوی دیگر، مبحث های گوناگون نجوم، مانند سیاه چاله ها، حیات فرازمینی، انفجارهای ستاره ای و سفرهای فضایی، امکان تخیل پردازی درباره جهان های ناشناخته و آینده بشر در فضا را فراهم می کند. به همین دلیل در هشت شماره متوالی «مجله رشد ریاضی برهان» در سال تحصیلی ۱۴۰۵-۱۴۰۴ به موضوع های جذابی در خصوص مبحث نجوم ریاضیاتی خواهیم پرداخت. نجوم ریاضیاتی شاخه ای از علم است که

به کاربرد ریاضیات برای توصیف، تحلیل و پیش بینی پدیده های نجومی می پردازد. این علم نقش کلیدی در درک ساختار کیهان، حرکت سیارات، تحول ستارگان و دینامیک کهکشان ها دارد و پایه ای اساسی برای پیشرفت های نوین در کیهان شناسی و اخترفیزیک محسوب می شود.

❖ مقدمه

در شب های بدون ابر، وقتی به آسمان تاریک نگاه می کنید، می توانید فضا را ببینید. فضا بسیار فراتر از آن است که چشم می تواند ببیند. تنها بخش کوچکی از فضا شامل ماه، خورشید، تمام سیاره ها، و همچنین زمین و ستارگان است. فضا همچنین شامل چیزهای زیادی است که ما هنوز یا آن ها را کشف نکرده ایم و یا به قدر کافی درباره آن ها اطلاعات نداریم.

❖ فضا را چگونه کاوش کنیم؟

○ تلسکوپ

تلسکوپ ها به ما کمک می کنند اعماق فضا را ببینیم. آن ها تصویرهایی از ستاره ها و کهکشان هایی را به ما نشان می دهند که برای سفر ما به آن ها، بسیار دور هستند.

○ روبات

روبات ها می توانند از مکان هایی در فضا بازدید کنند که انسان ها هنوز نمی توانند به آن ها دسترسی پیدا کنند. آن ها به مادر شناخت بهتر این مکان ها کمک می کنند.

○ انسان در فضا

انسان برای نخستین بار در سال ۱۹۶۱ به فضا سفر کرد. افرادی که تاکنون به فضا سفر کرده اند، در طول سفرشان آزمایش های فراوانی انجام داده اند.



فعالیت ۲ / مقایسه سن خوشه ستاره‌ای

با رویدادهای زمینی

هدف: درک مفهوم زمان در مقیاس نجومی و مقایسه آن با رویدادهای تاریخی یا زمینی

روش اجرا:

۱. با توجه به اینکه سن «خوشه وسترلاند ۲» حدود ۲ تا ۳ میلیون سال تخمین زده شده است این عدد را با رویدادهای مهم زمینی مقایسه کنید. برای مثال:

— اگر تمدن انسان حدود ۱۰,۰۰۰ سال قدمت داشته باشد، خوشه وسترلاند ۲ چند برابر قدیمی‌تر است؟

— اگر دایناسورها ۶۵ میلیون سال پیش منقرض شده باشند، این خوشه چند درصد از آن زمان را پوشش می‌دهد؟

۲. با رسم نمودارهای میله‌ای یا دایره‌ای، این مقایسه‌ها را نمایش دهید.

فعالیت ۳ / محاسبه تراکم ستارگان

در خوشه

هدف: درک تراکم ستارگان در یک خوشه و مقایسه با فاصله‌های ستارگان نزدیک به زمین

روش اجرا

«خوشه وسترلاند ۲» حدود ۳۰۰۰ ستاره دارد. اگر قطر تقریبی آن ۱۰ سال نوری باشد:

— حجم خوشه را (با فرض شکل کروی) محاسبه کنید.

— میانگین فاصله بین ستارگان را تخمین بزنید (با تقسیم حجم بر تعداد ستارگان).

— این عدد را با فاصله نزدیک‌ترین ستاره به زمین (پروکسیما قنطورس: ۴٫۲ سال نوری) مقایسه کنید.

— با توجه به اینکه ستارگان این خوشه خیلی نزدیک به هم هستند چراچنین محیطی برای ستارگان جوان داغ مناسب است؟

واژه‌نامه

خوشه ستاره‌ای غول پیکر: Giant star cluster

کهکشان راه شیری: Milky Way galaxy

وسترلاند: Westerlund

پروورشگاه ستاره‌ای: Stellar nursery

خوشه ستاره‌ای غول پیکر

این خوشه غول پیکر با حدود ۳۰۰۰ ستاره، شبیه یک آتش‌بازی به نظر می‌رسد. این خوشه **وسترلاند ۲** نام دارد و در کهکشان راه شیری واقع شده است. خوشه وسترلاند ۲ شامل برخی از داغ‌ترین، درخشان‌ترین و عظیم‌ترین ستاره‌های شناخته شده است. این خوشه جوان محسوب می‌شود و سن تقریبی آن یک تا دو میلیون سال برآورد شده است.

ستاره‌های نوزاد

بسیاری از ستاره‌های تازه تشکیل شده (نوزاد) در این منطقه زندگی می‌کنند. به این منطقه «**پروورشگاه ستاره‌ای**» نیز می‌گویند. از دوران ماقبل تاریخ، انسان‌ها از موقعیت ستارگان برای جهت‌یابی استفاده می‌کردند.

پرسش‌های کوتاه

۱. «پروورشگاه ستاره‌ای» چیست؟
۲. چه مدت است که انسان‌ها به فضا می‌روند؟
۳. آیا زمین در فضا قرار دارد؟

فعالیت ۱ / محاسبه تعداد ستارگان قابل

مشاهده با روش نمونه برداری

هدف: برآورد تعداد ستارگان قابل مشاهده در آسمان با استفاده از روش‌های ریاضی

روش اجرا:

۱. در یک شب صاف و به دور از آلودگی‌های نوری، بخش کوچکی از آسمان (برای مثال به اندازه یک مربع ۱۵ در ۱۵ سانتی‌متری روی کاغذ شطرنجی) را انتخاب کنید و ستارگان آن قسمت را بشمارید.
 ۲. با محاسبه مساحت کل آسمان (به کمک زاویه دید و هندسه کروی)، تعداد تقریبی ستارگان قابل مشاهده در کل آسمان را تخمین بزنید.
 ۳. درباره دقت این روش و خطاهای احتمالی آن بحث کنید.
- با انجام این فعالیت، علاوه بر تقویت مهارت‌های ریاضی (مقیاس، تخمین و هندسه)، دانش نجومی شما نیز افزایش می‌یابد.



پول ریاضیات



زمانه جوانی پور

هوشمندانه
کلید پس انداز

آیاتا به حال فکر کرده اید که عددها می توانند دوست صمیمی کیف پول شما باشند؟ شاید در نگاه اول، ریاضیات و پول دو دنیای جدا از هم به نظر برسند، اما حقیقت این است که مفاهیم های ساده ریاضی قدرتی شگفت انگیز در مدیریت مالی شخصی ما دارند. به ویژه برای نوجوانان که در ابتدای مسیر استقلال مالی قرار دارند، یادگیری نحوه بودجه بندی هوشمندانه و پس انداز کردن می تواند آینده ای روشن تر و پر از فرصت را رقم بزند.



تصویرگر: نسیم مینم موسوی

در این مقاله ما به سفری هیجان انگیز در دنیای عددها خواهیم رفت و خواهیم دید که چگونه با استفاده از محاسبه های پایه، درصدها، نسبت ها و حتی نمودارهای ساده، می توانیم کنترل امور مالی خود را به دست بگیریم. ما نه تنها یاد می گیریم که چگونه درآمد و هزینه های خود را بشناسیم، بلکه راهکارهای عملی برای تعیین هدف های پس انداز، پیگیری دقیق مخارج و انتخاب بهترین روش های پس انداز کردن را نیز کشف خواهیم کرد.

بیا یاد بگیریم که چگونه ریاضیات می تواند به ما کمک کند نه تنها نیازهای امروزمان را برآورده کنیم، بلکه برای آرزوهای هدف های بزرگ آینده مان نیز پس انداز کنیم. با مدیریت مالی هوشمندانه از همین حالا، شما می توانید برای ثروتمند شدن در آینده زمینه لازم را فراهم آورید. آماده اید تا قدرت پول ساز ریاضیات را تجربه کنید؟

مثال ۱. رؤیای گوشی جدید

فرض کنید شما می خواهید یک گوشی تلفن همراه جدید بخرید که قیمتش ۵۰۰۰۰۰۰ تومان است. اگر شما هر هفته ۲۵۰۰۰۰ تومان پول توجیبی بگیرید و تصمیم بگیرید نصف آن را پس انداز کنید، یعنی هر هفته چقدر پس انداز می کنید؟ حالا حساب کنید چند هفته طول می کشد تا پول کافی را برای خرید گوشی جمع کنید؟

$$\text{پس انداز هفتگی: } \frac{1}{2} \times 250000 = 125000 \text{ تومان}$$

$$\text{تعداد هفته های لازم: } \frac{500000}{125000} = 40 \text{ هفته}$$

می بینید؟ بایک حساب و کتاب ساده متوجه شدید که برای رسیدن به گوشی رؤیایی تان به ۴۰ هفته پس انداز نیاز دارید.

حالا اگر بتوانید کمی بیشتر پس انداز کنید، زودتر به آن خواهید رسید!

مثال ۲. مقایسه هزینه ها به درصد

شما و دوستان هر کدام ۳۰۰ هزار تومان پول دارید. شما ۱۰۰ هزار تومان برای خرید خوراکی خرج می کنید و دوستان ۱۵۰ هزار تومان. چه کسی درصد بیشتری از پولش را خرج کرده است؟ درصد خرج شده توسط شما:

$$\frac{100000}{300000} \times 100\% = 33\frac{1}{3}\%$$

درصد خرج شده توسط شما:

$$\frac{150000}{300000} \times 100\% = 50\%$$

دوستان مبلغ بیشتری خرج کرده و درصد بالاتری از کل پولش را به خوراکی اختصاص داده است. این نشان می دهد که نگاه کردن به درصدها می تواند به ما درک بهتر نحوه خرج کردن پولمان کمک کند.

مثال ۳. تقسیم بودجه برای تفریح و پس انداز

فرض کنید این ماه ۸۰۰ هزار تومان پول توجیبی گرفته اید. می خواهید ۶۰ درصد آن را برای تفریح با دوستان کنار بگذارید و بقیه را پس انداز کنید. چقدر پول برای تفریح دارید و چقدر برای پس انداز؟

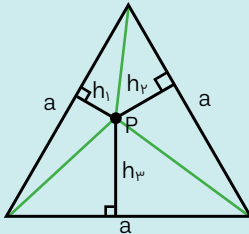
$$\text{مبلغ تفریح: } \frac{60}{100} \times 800000 = 480000 \text{ تومان}$$

$$\text{مبلغ پس انداز: } 800000 - 480000 = 320000 \text{ تومان}$$

$$\text{یا (تومان)} \left(\frac{40}{100} \times 800000 = 320000 \right)$$

به این ترتیب، شما یاد می گیرید که چگونه می توانید بودجه خود را بین خواسته های متفاوت تقسیم کنید و در عین حال برای آینده پس انداز هم داشته باشید. با به کارگیری بودجه بندی هوشمندانه و پس انداز منظم، نه تنها می توانید نیازهای فعلی خود را مدیریت کنند، بلکه پایه های یک آینده مالی امن و موفق را نیز بنا بگذارید. ریاضیات نه تنها یک موضوع درسی، بلکه ابزاری کاربردی و ضروری برای ساختن زندگی مالی بهتر است.

دلخواه را بی نهایت نزدیک یکی از رأس ها در نظر بگیرید و فرایند را تکرار کنید. این حاصل جمع دقیقاً برابر ارتفاع مثلث متساوی الاضلاع است! (شکل ۱).



شکل ۱

مشاهده: مجموع فاصله هر نقطه ای داخل مثلث متساوی الاضلاع از سه ضلع آن عدد ثابتی است. **برهان:**

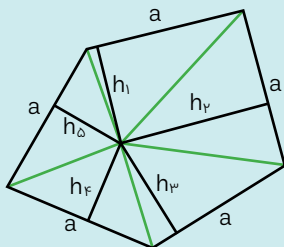
$$ah_1 + ah_2 + ah_3 = 2 \times \text{مساحت مثلث}$$

$$a(h_1 + h_2 + h_3) = 2 \times \text{مساحت مثلث}$$

$$h_1 + h_2 + h_3 = \frac{2 \times \text{مساحت مثلث}}{a}$$

با این مشاهده پرسشی ایجاد می شود: «چه شکل های دیگری هم این ویژگی را دارند؟»

مثلاً به روشنی در هر n ضلعی منتظم این ویژگی برقرار است. اما فقط شکل های منتظم نیستند که چنین اند. می دانیم که در مثلث ها «برابری سه ضلع» معادل است با «برابری سه زاویه» و معادل است با «منتظم بودن». اما در شکل های دارای تعداد ضلع های بیشتر این سه عبارت با یکدیگر معادل نیستند. پس شاید شرطی ضعیف تر از «منتظم بودن» کافی باشد. بادقت کردن به مرحله های اثبات می بینیم که کافی است خط اول اثبات برای شکلی برقرار باشد و اگر شکل ما محدب و طول ضلع های آن برابر باشند، خط اول برقرار است.



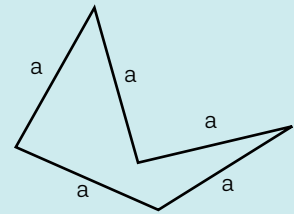
شکل ۲

$$ah_1 + ah_2 + ah_3 + ah_4 + ah_5 + ah_6 = 2 \times \text{مساحت شکل}$$

شکل های مجموع ثابت

روی کاغذ و یا به کمک نرم افزار یک مثلث متساوی الاضلاع بکشید. از یک نقطه دلخواه داخل این مثلث، سه پاره خط عمود بر ضلع ها رسم کنید. طول این پاره خط ها را اندازه بگیرید و این سه عدد را با هم جمع بزنید. نتیجه را در جایی بنویسید. حالا نقطه دیگری را در نظر بگیرید و همین کار را تکرار کنید. چه مشاهده می کنید؟ نقطه

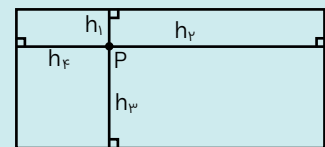
بررسی کنید که آیا برای شکل های مقعری که طول اضلاعشان برابر است نیز حکم برقرار است؟ (شکل ۳).



شکل ۳

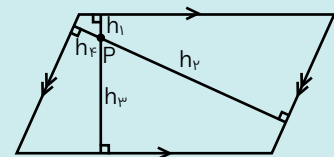
از این به بعد این ویژگی را «مجموع ثابت» می نامیم.

دیدیم که شکل های محدب با طول ضلع های برابر مجموع ثابت هستند. اما هنوز هم شکل های مجموع ثابت دیگری وجود دارند! مستطیل یکی از این شکل هاست (شکل ۴).



شکل ۴

اما پاسخ پرسش برای چهارضلعی ها چه می شود؟ یعنی چهارضلعی های مجموع ثابت کدام چهارضلعی ها هستند؟ **ادعا:** متوازی الاضلاع مجموع ثابت است و برعکس. یعنی اگر یک چهارضلعی مجموع ثابت باشد، متوازی الاضلاع است (شکل ۵).



شکل ۵

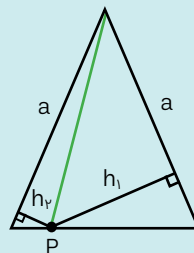
این را که «متوازی الاضلاع مجموع ثابت است» شما بررسی کنید. اثبات قسمت دیگر ادعا دشوارتر است ولی از آنجایی که

گام های روشنگری دارد آن را به دقت اثبات خواهیم کرد. اما پیش از آن به دو گزاره و دو سؤال زیر توجه کنید.

گزاره اول: در هر مثلث متساوی الساقین، مجموع فاصله هر نقطه روی قاعده از دو ساق، عدد ثابتی است. چون:

$$ah_1 + ah_2 = 2 \times \text{مساحت مثلث}$$

برهان دقیقاً مشابه اثباتی است که پیش تر دیدیم.



شکل ۶

گزاره دوم: برعکس گزاره اول نیز درست است. یعنی اگر بدانیم مجموع فاصله هر نقطه روی ضلع مثلثی از دو ضلع دیگر، عدد ثابتی است، مثلث متساوی الساقین و نقطه روی قاعده آن است. چرا؟

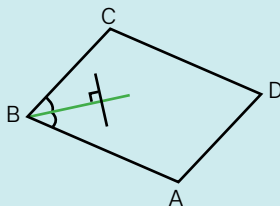
با توجه به دو گزاره اخیر، توجه کنید که برای یک زاویه داده شده، **نقاط روی پاره خطی عمود بر نیمساز، مجموع ثابت هستند**، زیرا دو خط زاویه و پاره خط عمود، یک مثلث متساوی الساقین تشکیل می دهند.

سؤال اول: روی کاغذ دو خط متقاطع را رسم کنید. همه نقطه هایی را بیابید که مجموع فاصله شان از این دو خط، یک سانتی متر باشد.

سؤال دوم: دو خط موازی داده شده اند. همه نقطه هایی را بیابید که مجموع فاصله شان از این دو خط مقدار ثابتی باشد. این مقدار ثابت را با عددهای متفاوتی امتحان کنید.

حالا دو خط متقاطع را در نظر بگیرید. با چرخاندن یکی از این دو خط، آن ها را به دو خط موازی تبدیل کنید. در این حرکت، توجه کنید که شکل نقطه هایی که مجموع فاصله شان از دو خط عدد ثابتی است، چگونه تغییر می کند. به این عمل **دگردیسی** می گویند.

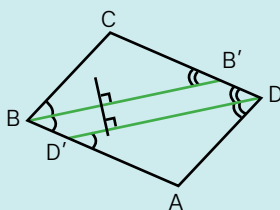
حالا امکانات لازم را برای اثبات ادعا داریم. چهارضلعی مجموع ثابت ABCD را در نظر بگیرید. زاویه ABC و نیمساز آن را نیز در نظر بگیرید. طبق گزاره اول، مجموع فاصله نقاط روی پاره خط عمود بر این نیمساز از ضلع های AB و BC عدد ثابتی است.



شکل ۷

پس چون کل چهارضلعی مجموع ثابت است، مجموع فاصله این نقطه ها از ضلع های AD و CD نیز عدد ثابتی است. پس طبق گزاره دوم، پاره خط بر نیمساز زاویه CDA عمود است. بنابراین این پاره خط بر هر دو نیمساز عمود است و در نتیجه این دو نیمساز موازی هستند. (در چه حالتی دو نیمساز بر هم منطبق می شوند؟) در یک چهارضلعی نیمسازها موازی هستند، تنها اگر متوازی الاضلاع باشد. بررسی کنید.

راهنمایی: به مثلث های ADD' و CBB' در شکل ۸ توجه کنید.



شکل ۸

خب! پس یک چهارضلعی مجموع ثابت است، اگر و تنها اگر متوازی الاضلاع باشد. تا شماره بعدی، که به شکل های با تعداد ضلع های بیشتر حمله می کنیم، درباره شکل های مجموع ثابت سه بعدی فکر کنید. به جای مثلث متساوی الساقین، شکل های محدب با طول ضلع برابر، مستطیل، متوازی الاضلاع و پاره خط عمود بر زاویه، چه معادل هایی را قرار می دهید؟



عدددها وارد می‌شوند!

«چوب‌خط» را اختراع کردند. با خروج هر گوسفند یا گاو، روی چوب یک خط صاف می‌کشیدند. موقع بازگشت آن‌ها هم روی هر خط صاف، یک خط مورب می‌کشیدند.



تصویرگر: فزار برزادگان

انسان‌های نخستین تا وقتی چیزی برای شمردن نداشتند، خیالشان راحت بود. روزها می‌رفتند شکار و شب‌ها جلوی غار، دور آتش کم می‌دادند و بساط کباب و خالی‌بندی راه می‌انداختند و شجاعت خودشان را به رخ یکدیگر می‌کشیدند. وقتی هم که شب‌ها خوابشان نمی‌برد، روی دیوار غارها شروع می‌کردند به نقاشی.



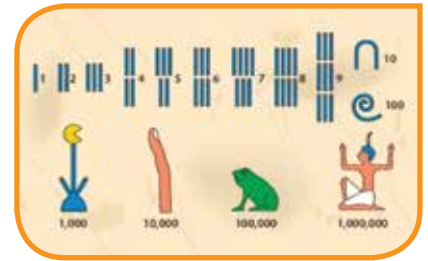
نمونه نقاشی انسان‌های نخستین در غار آلتامیرا در اسپانیا

اجداد بیش فعال ما هنگامی که گوسفندهایشان را به صحرا می‌بردند، اگر گرگی، شیری یا پلنگی مخفیانه به آن‌ها دستبرد می‌زد، شک می‌کردند، اما متوجه نمی‌شدند چه تعدادی کم شده است. تا اینکه تصمیم گرفتند از مغزشان بیشتر کار بکشند.

برای همین آن‌ها داخل یک کاسه سفالی به تعداد دام‌هایشان سنگ‌ریزه جمع می‌کردند. صبح‌ها هر گاو یا گوسفندی که راهی صحرا می‌شد، یکی از سنگ‌ریزه‌ها را از کاسه بیرون می‌آوردند تا اینکه بارفتن آخرین گوسفند، کاسه هم خالی می‌شد. عصرها هم وقتی دام‌ها برمی‌گشتند، به افتخار ورود هر کدام، یکی از همان سنگ‌ریزه‌ها را داخل کاسه می‌انداختند. این‌طوری با ورود آخرین حیوان زبان بسته، اگر هنوز سنگ‌ریزه‌هایی بیرون کاسه مانده بود، می‌فهمیدند یک جای کار می‌لنگد و تعدادی از آن‌ها گم و گور شده‌اند. در این میان، بعضی‌ها که مخشان بهتر کار می‌کرد،

مصری‌های باستان از این نشانه‌ها برای نشان دادن عددها و محاسبه‌های مربوط به ساخت اهرام و معبد‌های خدایان استفاده می‌کردند.

❖ عددهای مصری



البته پیدایش تمدن‌ها در ساحل رودها بی‌دلیل نیست. از قدیم گفته‌اند هر جا آب هست، آبادانی هم هست. سومری‌ها موفق شدند خط میخی را اختراع کنند و مثل مصری‌ها برای رساندن منظور خود مجبور نبودند از نقاشی (خط هیروگلیف) استفاده کنند. اما اختراع مهم‌تر سومری‌ها نوعی روش عددنویسی بود که یکان و دهگان و صدگان و... داشت. برای همین می‌توانستند عددهای بزرگ را هم به راحتی بنویسند.

❖ عددهای سومری

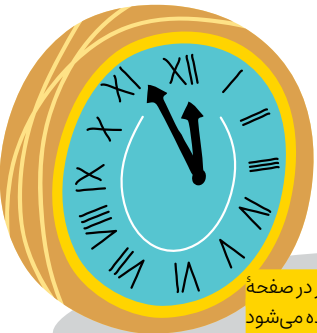
۱	۱۱	۲۱	۳۱
۲	۱۲	۲۲	۳۲
۳	۱۳	۲۳	۳۳
۴	۱۴	۲۴	۳۴
۵	۱۵	۲۵	۳۵
۶	۱۶	۲۶	۳۶
۷	۱۷	۲۷	۳۷
۸	۱۸	۲۸	۳۸
۹	۱۹	۲۹	۳۹
۱۰	۲۰	۳۰	۴۰

اما موقع نوشتن عددهای بزرگ به زحمت می‌افتادند. مثلاً برای نوشتن ۵۷۰ هزار باید پنج تا قورباغه و هفت تا انگشت می‌کشیدند! ناحیه بین درود دجله و فرات که به «میان‌رودان» (بین‌النهرین) معروف است موجب پدید آمدن تمدن درخشان «سومری‌ها» شده است. دجله و فرات در انتهای مسیر خود، بارود کارون ما متحد می‌شوند و سه تایی باهم، اروندرود را به وجود می‌آورند. اروندرود هم در نهایت به خلیج فارس می‌ریزد و خلاص!

ما روش عددنویسی ده‌دهی را احتمالاً از تعداد انگشتان دست‌هایمان الهام گرفته ایم. اما مبنای عددنویسی سومری‌ها مثل ماده‌تا ده‌تا نبود، بلکه شصت تا شصت تا بود. اثر این ابتکار سومری‌ها هنوز هم در زندگی

ما دیده می‌شود. مثلاً یک ساعت شصت دقیقه است و یک دایره به ۳۶۰ درجه تقسیم می‌شود که مضرب از عدد شصت است.

به این ترتیب عددنویسی در طول تاریخ تکامل پیدا کرد و ملت‌های مختلف از روش‌های گوناگونی استفاده کردند. مثلاً روش رومی‌های به این شکل بود:

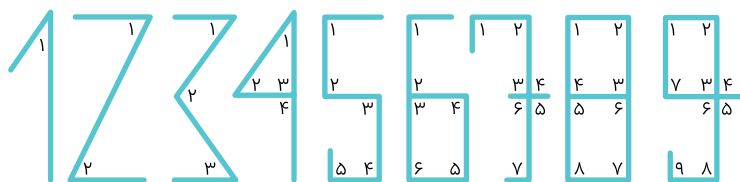


از عددهای رومی هنوز در صفحه ساعت استفاده می‌شود

در زبان پهلوی ایران قدیم هم عددهای ۱ تا ۹ (از راست به چپ) این طور نوشته می‌شدند:

۱	۲	۳	۴	۵
۶	۷	۸	۹	

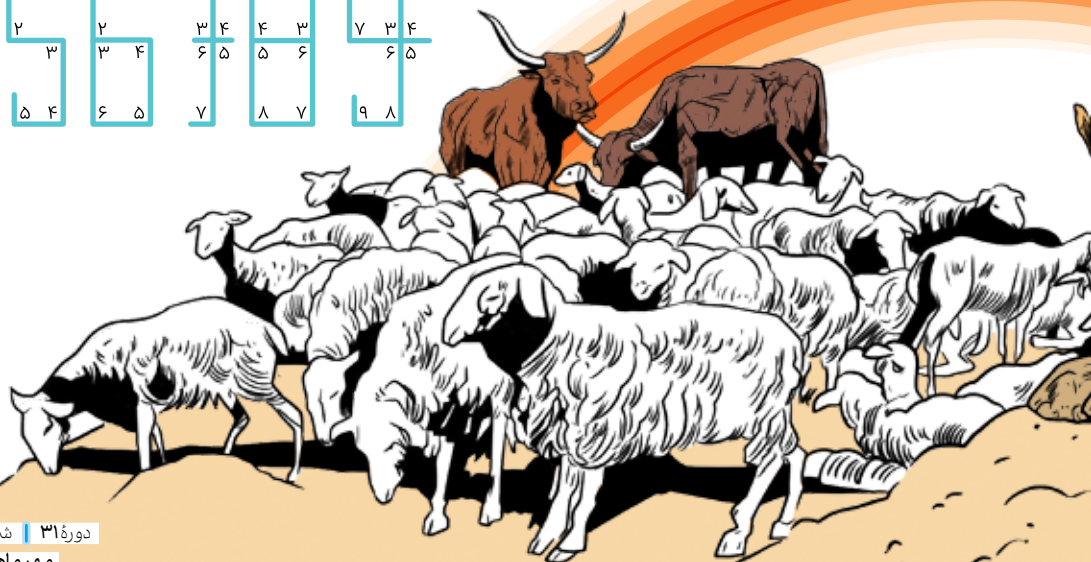
جالب است بدانید عددنویسی انگلیسی امروز در واقع محصول مشترک هندی‌ها و عرب‌هاست که بعدها از طریق اسپانیا - که در قلمرو حکومت اسلامی بود - به اروپا راه پیدا کرد. در این نوع عددنویسی، مقدار هر عدد با تعداد گوشه‌های درون آن‌ها مشخص می‌شود.



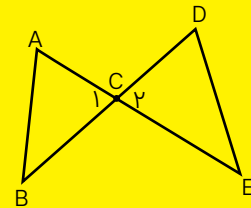
منابع

۱. دوفصلنامه زبان‌شناخت، سال هشتم، شماره دوم، پاییز و زمستان ۱۳۹۶.

2. The story of mathematics, Anne Rooney, Arcturus Publishing, London. 2008.



۱. در شکل ۱ دو مثلث ABC و CDE در رأس C مشترک اند و زاویه های C_1 و C_2 متقابل به رأس هستند. از شش زاویه این دو مثلث، اندازه چند زاویه را به شما بدهند می توانید اندازه بقیه زاویه ها را به دست آورید؟



شکل ۱

قبل از مراجعه به راه حل، خودتان کمی فکر کنید.

راه حل: می دانیم مجموع زاویه های هر مثلث برابر 180° است، پس:

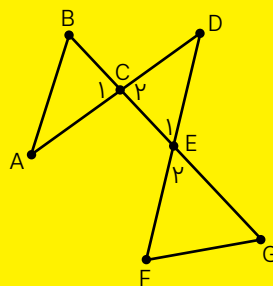
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}_1 = 180$$

$$\hat{C}_2 + \hat{D} + \hat{E} = 180$$

همچنین: $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$. پس سه رابطه بین زاویه ها وجود دارد: اگر سه زاویه از شش زاویه به طور مناسب انتخاب شوند و مقدار آن ها داده شود، می توان اندازه بقیه زاویه ها را پیدا کرد. برای مثال اگر اندازه زاویه های $\hat{A}$ ، $\hat{B}$ و $\hat{D}$ معلوم باشد می توان اندازه بقیه زاویه ها را پیدا کرد. (چگونه؟)

تمرین ۱. سه زاویه ابتدایی کدام ها باشند تا بتوان اندازه بقیه زاویه ها را معلوم کرد؟
تمرین ۲. همه انتخاب های مطلوب از سه زاویه معلوم اولیه را مشخص کنید.

۲. در شکل ۲ سه مثلث می بینید. مثلث ABC و CDE در رأس C مشترک هستند؛ مانند مثال قبل. مثلث های CDE و EFG در رأس E مشترک هستند. دقت کنید که زاویه های C_1 و C_2 و همچنین زاویه های E_1 و E_2 متقابل به رأس هستند. از زاویه این سه مثلث،



شکل ۲

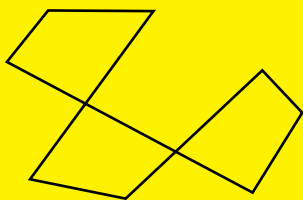
اندازه چند زاویه را به شما بدهند تا بتوانید اندازه بقیه زاویه ها را به دست آورید؟

قبل از آنکه راه حل را بخوانید سعی کنید خودتان راه حل مسئله را پیدا کنید.

راه حل: بین زاویه های هر مثلث یک رابطه (مجموع $= 180^\circ$) وجود دارد. از طرف دیگر C_1 و C_2 و E_1 و E_2 مساوی هستند. پس در مجموع پنج رابطه بین زاویه ها وجود دارد. هر رابطه کمک می کند تا بتوانیم اندازه یک زاویه را از روی اندازه بقیه زاویه ها محاسبه کنیم. برای مثال اگر زاویه های $\hat{A}$ ، $\hat{B}$ ، $\hat{D}$ و $\hat{F}$ را داشته باشیم، می توانیم اندازه بقیه زاویه ها را پیدا کنیم. (چگونه؟) مجموع زاویه های

۵. سعی کنید شکل‌های دیگر از مثلث‌های همسایه بکشید و خودتان مسئله‌های جالبی روی آن‌ها طراحی کنید.

۶. اگر به جای مثلث‌های همسایه، چهارضلعی‌های همسایه داشته باشیم (مانند شکل ۶)، آنگاه پرسش‌ها و پاسخ‌های بخش اول چگونه خواهند شد؟ خودتان پرسش‌های بخش ۱ را درباره شکل ۶ مطرح و حل کنید. یادآوری می‌کنم که مجموع زاویه‌های هر چهارضلعی برابر است با 360° درجه.



شکل ۶

۷. اطمینان دارم که ذهن خلاق شما به سراغ شکل‌هایی با تعداد چهارضلعی‌های بیشتر خواهد رفت. می‌توانید دو نمونه شبیه بخش ۴ از چهارضلعی‌ها مثال بزنید و بعد بر اساس آن‌ها مسئله طرح کنید.

۸. اگر چهارضلعی‌های خاص، مانند مربع، مستطیل، متوازی‌الاضلاع و دوزنقه، به کار گرفته شوند، طعم مسئله‌ها کمی تندتر خواهد شد. امتحان کنید.

۹. دسته آخر از شکل‌های همسایه را یواشکی می‌گوییم که خودتان آزمایش کنید و مسئله‌های جالبی با آن‌ها طرح کنید. هم از مثلث‌ها استفاده کنید و هم از چهارضلعی‌ها؛ مانند شکل ۷.



شکل ۷

اندازه زاویه‌های $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z$ به صورت زیر داده شده باشند:

$$\hat{A} = x, \hat{B} = 2x, \hat{F} = 3x,$$

$$\hat{G} = x, \hat{M} = 2x, \hat{N} = x$$

اندازه همه زاویه‌ها را پیدا کنید. قبل از خواندن راه حل، سعی کنید خودتان مسئله را حل کنید.

راه حل:

$$\hat{C}_p = \hat{C}_q = 180 - \hat{A} - \hat{B} = 180 - 3x$$

$$\hat{D}_p = \hat{D}_q = 180 - \hat{F} - \hat{G} = 180 - 4x$$

$$\hat{E}_p = \hat{E}_q = 180 - \hat{M} - \hat{N} = 180 - 3x$$

در نتیجه چون C_p, D_p, E_p مجموعشان برابر 180° است، پس:

$$180 - 3x + 180 - 4x + 180 - 3x = 180$$

$$\Rightarrow 10x = 360 \Rightarrow x = 36$$

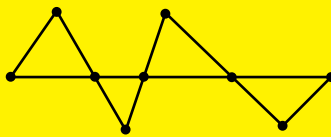
بنابراین:

$$\hat{N} = \hat{A} = \hat{G} = 36^\circ, \hat{B} = \hat{M} = 72^\circ, \hat{F} = 108^\circ$$

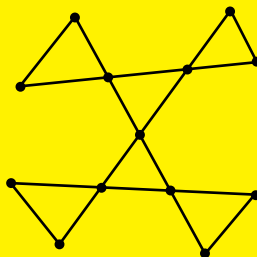
تمرین ۸. حالا که تمرین ۷ را حل کردیم، سعی کنید راه حل دیگری برای تمرین ۷ پیدا کنید.

تمرین ۹. با توجه به اندازه زاویه‌های شکل ۳، شکل دقیق را رسم کنید.

۴. آیا می‌توانید روندی را که در سه بخش قبل طی کردیم، روی شکل‌های ۴ و ۵ پیاده کنید. اگر بتوانید، نشانه خوبی از توانایی شما در حل مسئله خواهد بود.



شکل ۴



شکل ۵

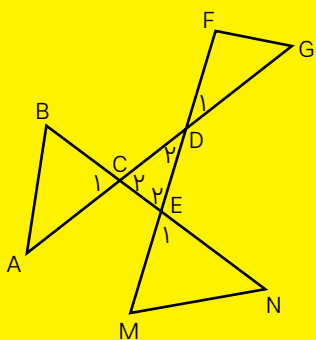
A, B, C برابر 180° درجه است، پس: $\hat{C}_1 = 180 - \hat{A} - \hat{B}$. از روی C_1 ، اندازه C_p به دست می‌آید و از روی C_p و D می‌توانیم اندازه $\hat{E}_p$ را پیدا کنیم. (چگونه؟) اندازه E_1 با اندازه زاویه E_p برابر است. در پایان از روی F و E_p می‌توانیم اندازه زاویه $\hat{G}$ را پیدا کنیم.

تمرین ۳. چهار زاویه ابتدایی کدام‌ها باشند تا بتوانیم اندازه زاویه‌های دیگر را محاسبه کنیم؟

تمرین ۴. همه انتخاب‌های مطلوب از چهار زاویه معلوم اولیه را مشخص کنید.

تمرین ۵. اگر اندازه زاویه‌های B, A, D معلوم باشد، آیا می‌توان اندازه زاویه‌های F و G را پیدا کرد؟

۳. در شکل ۳ چهار مثلث می‌بینید که مثلث وسط با سه مثلث دیگر در یک رأس مشترک است و زاویه‌ها در این سه رأس متقابل به رأس هستند.



شکل ۳

تمرین ۶. تمام مسئله‌هایی را که در بخش ۱ و ۲ مطرح شدند، اینجا هم مطرح و خودتان پاسخ را پیدا کنید.

تمرین ۷. فرض کنید در شکل ۳



آقای اندیشه که معلم ریاضیات است همیشه سعی می‌کند ریاضیات را با زندگی روزمره پیوند بدهد. او درس ریاضی را این طور شروع کرد:

آقای اندیشه: اگرچه مفهوم مجموعه یک مفهوم ریاضی است و اعضای آن باید موجودات ریاضی باشند، اما اصل آن از مفهوم گردایه‌ای از اشیاء آمده است. ماعددهای طبیعی را از عددهای کوچک که از نوزادی در مغز ما از قبل کاشته شده‌اند، به کمک استعاره گردایه می‌سازیم. استعاره گردایه می‌گوید: عددها مانند گردایه رفتار می‌کنند. مثلاً شکلات‌های یک ظرف را می‌توان روی شکلات‌های یک ظرف دیگر ریخت و این مانند جمع عددها رفتار می‌کند. یا قسمتی از شکلات‌های یک ظرف را می‌توان در یک ظرف خالی ریخت و این مانند عمل تفریق رفتار می‌کند. بعدها مفهوم عدد شمارشی و مفهوم گردایه در ریاضیات تعمیم پیدا می‌کنند.



آموزش ریاضی به روش گفت و گو

خسرو داوود  آرش رستگار

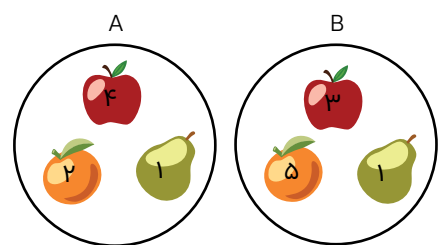
مجموعه‌های وزن دار

مفهوم مجموعه از مجردسازی مفهوم گردایه به دست می‌آید. می‌خواهم کمی از این استعاره کمک بگیرم تا مفهوم مجموعه را تعمیم دهم. مثلاً فرض کنید یک ظرف میوه داریم که در آن تعدادی سیب، پرتقال، گلابی و میوه‌های دیگر هست. من می‌توانم به جای اینکه تعداد همه میوه‌ها را بشمارم و مجموعه همه میوه‌ها را در نظر بگیرم، بگویم در این مجموعه چند سیب، چند میوه و چند گلابی هست. اگر این مفهوم را ریاضی کنیم، مانند آن است که برای اعضای یک مجموعه تکرر در نظر بگیریم؛ یعنی اجازه دهیم اعضای مجموعه تکرار شوند.

برای بیان چنین مفهومی از مجموعه، باید نمادی معرفی کنیم. مثلاً مجموعه سه عدد طبیعی $\{1, 2, 5\}$ اگر عددی تکرار شده باشد مثلاً چهار بار و عدد دو تکرار نشده باشد و همان یک بار در نظر گرفته شود و عدد پنج دو بار آمده باشد، به جای اینکه بنویسیم: $\{1, 1, 1, 2, 5, 5\}$ ، به طور خلاصه می‌نویسیم: $\{1, 2, 5\}$. اندیس پایین سمت راست به معنی تعداد تکرار آن عضو مجموعه خواهد بود. تعداد اعضای این مجموعه هم طبیعتاً $2 + 1 + 4$ خواهد بود. حالا تکلیف شما این است که اجتماع و اشتراک را برای چنین مجموعه‌هایی تعریف و خصوصیات آن‌ها را بررسی کنید. مفهوم‌های اجتماع و اشتراکی که تعریف می‌کنید باید توسعه مفهوم‌های اجتماع و اشتراک معمولی مجموعه‌ها باشند. چون اگر در مجموعه‌های با تکرر، هر عضو فقط یک بار بیاید، همان مفهوم مجموعه معمولی به دست می‌آید.

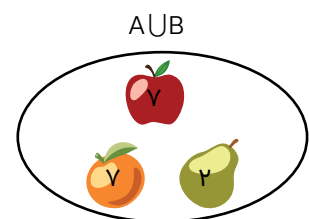
محمود، حامد و احمد در یک گروه به هم‌فکری برای حل مسئله پرداختند. محمود ذهنی بسیار و اگر او خلاق دارد و حامد بسیار دقیق و منطقی است. احمد هم به جنبه‌های فلسفی مسئله‌ها علاقه دارد. این است که این سه نفر همیشه با هم به مسئله‌ها فکر می‌کنند؛ چون

شخصیت علمی یکدیگر را کامل می کنند. **محمود:** من اگر بخواهم اجتماع دو ظرف میوه را تعریف کنم، معلوم است که چه کار باید بکنم. آن ها را در یک ظرف بزرگ تر روی هم می ریزم. تعداد سیب ها، پرتقال ها، گلابی ها یا هر میوه دیگری با هم جمع می شوند. یعنی تکرار اشیاء در یک مجموعه به تکرار همان شیء در مجموعه دیگر اضافه می شود. می توانم از همان نمودار ون معروف استفاده کنم.



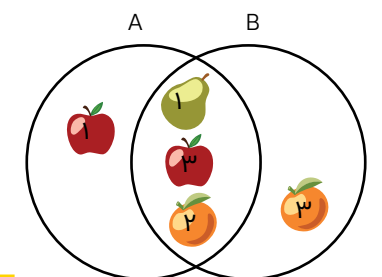
شکل ۱

حامد: صبر کن! صبر کن! این طوری که شما نمودار را کشیدی درست است که اجتماع مفهوم سازی شده، اما اشتراک درست رسم نشده است. برای اجتماع مجموعه های A و B می توانیم شکل ۲ را رسم کنیم.



شکل ۲

اما برای اشتراک آن ها شکل می توانست به صورت شکل ۳ باشد.



شکل ۳

به این روش تعداد سیب، پرتقال و گلابی در مجموعه های A و B همان قبلی است، اما تعداد کل میوه ها کمتر شده است. در روش محمود A ∪ B دارای ۱۶ میوه بود، اما در روش من A ∪ B فقط ۱۰ عضو دارد. در روش محمود A ∩ B تهی بود، اما در روش من A ∩ B دارای شش عضو است. من که گیج شده ام. بر سر دوراهی مانده ام که کدام روش را انتخاب کنم.

حامد: اینجا فلسفه باید کمک کند. باید دید چه انتظاراتی از یک نظریه اجتماع و اشتراک داریم. یک انتظار مثلاً می تواند رابطه زیر باشد (# یعنی تعداد عضوهای یک مجموعه):

$$\#(A \cup B) + \#(A \cap B) = \#A + \#B$$

محمود: کمی فکر کنید! خواهید دید که هر دو مدل در فرمول بالا صدق می کنند. در روش اول پس از جای گذاری خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} 16 + 0 &= 7 + 9 \\ \#(A \cup B) &= 16 \\ \#(A \cap B) &= 0 \\ \#(A) &= 7 \\ \#(B) &= 9 \end{aligned}$$

در روش دوم داریم:

$$\begin{aligned} 10 + 6 &= 7 + 9 \\ \#(A \cup B) &= 10 \\ \#(A \cap B) &= 6 \\ \#(A) &= 7 \\ \#(B) &= 9 \end{aligned}$$

که در آن:

پس حرف آخر را رابطه دیگری باید بزند.

حامد: شاید فکر فلسفی دیگری راهگشا باشد. اگر از محمود بپرسم آیا در هر دو ظرف میوه شما سیب هست؟ چه جوابی می دهد؟

محمود: می گویم البته که هست.

حامد: پس حتماً باید تعدادی سیب در اشتراک باشد. به همین روش تعدادی پرتقال و تعدادی گلابی؛ چون در هر دو ظرف پرتقال و گلابی هم داریم.

محمود: پس تکلیف اشتراک می شود اینکه حداکثر سه سیب در A ∩ B می توان داشت. بگوییم دقیقاً سه سیب، یعنی: min{۳, ۴}. یعنی کمینه تعداد سیب ها در A و تعداد سیب ها در B. خود همین را برای اجتماع و تعداد سیب ها در A ∪ B می توان گفت. بیشینه تعداد سیب ها در A و تعداد سیب ها در B یعنی: max{۳, ۴}. احتمالاً این نظریه خوبی باشد چون برای هر دو عدد طبیعی a و b داریم:

$$\max\{a, b\} + \min\{a, b\} = a + b$$

اما خیلی وقت ها تکرار یک شیء در مجموعه ای صفر و در مجموعه دیگری غیر صفر است. البته هنوز فرمول بالا درست است. حتی برای a و b در عددهای صحیح هم درست است. آیا می توان برای اشیاء تکرار منفی هم قرار داد؟ به نظر که خوب کار می کند.

احمد: به نظر من هم وزن های دلخواه مثبت یا صفر یا منفی قابل قبول هستند؛ به شرطی که قیمتی را بپردازیم. اینکه تعداد سیب ها منفی باشد می تواند تعبیری داشته باشد. مثلاً بگوییم A سه سیب و B پنج سیب بدهکار است و A ∪ B می شود:

$$\max\{-3, -5\} = -3$$

سه سیب بدهکار! پس اگر تکرار منفی را هم قبول کنیم و تعبیرش را این بگیریم که مجموعه ای چه تعدادی از چه اشیایی بدهکار است، باز یک نظریه اجتماع و اشتراک مقبول داریم. مثلاً رابطه های زیر هم درست هستند:

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

محمود: حالا که وزن ها را عددهای صحیح گرفتید، خوب یک دفعه عددهای گویا یا حقیقی را هم بگیرید دیگر!

آقای اندیشه: آفرین بر شما! به این می گویند بازسازی، بازفرمول بندی و بازنمایش. حالا بفرمایید اجتماع و اشتراک در این حالت کلی چگونه تعریف می شوند؟



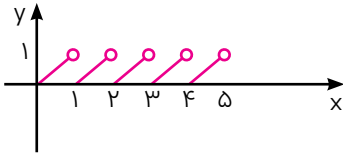
برای دیدن
پاسخ رمزینه
را پویش
کنید.



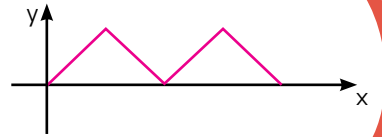
آزاد به فرزاد

سلام بچه‌ها.
فکر می‌کنم دیگر همه ما با داستان هوش
مصنوعی و «چت جی‌پی‌تی» آشنا هستیم و خیلی هم
از این آشنایی هیجان زده‌ایم. اما می‌دانید داستان هوش
مصنوعی از کجا شروع شده؟ البته که از خیلی جاها شروع شده
است، اما الان می‌خواهیم از جایی صحبت کنیم که به موضوع
مجله ما، یعنی ریاضی، مربوط می‌شود؛ از «مدل سازی ریاضی»^۱.
وقتی می‌خواهیم یک مسئله واقعی را حل کنیم، می‌کوشیم
مسئله را به کمک زبان ریاضی مطرح کنیم. به این ترتیب اولین
قدم را به سمت ساختن مدل ریاضی یک مسئله واقعی
برداشته‌ایم. مثال‌های صفحه بعد نمونه‌هایی برای
بیان مطلب بالا هستند؛ تبدیل یک مسئله
واقعی به یک مدل ریاضی!

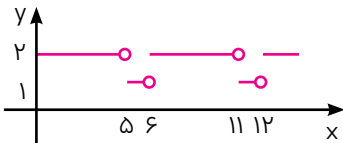
هر کدام از تصویرهای زیر را به نمودار ریاضی مرتبط با آن مفهوم متصل کنید:



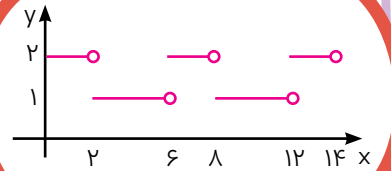
چراغ راهنمایی که یک ثانیه قرمز و یک ثانیه زرد می‌شود.



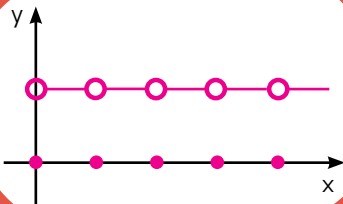
پرنده‌ای که رأس هر ساعت، از ساعت دیواری بیرون می‌آید.



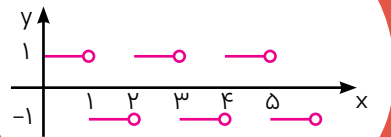
ساعت شنی‌ای که در هر ساعت به طور کامل خالی می‌شود.



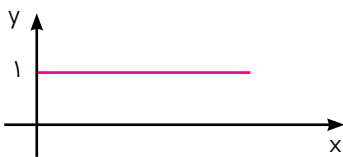
دمای آکواریوم همواره ثابت است.



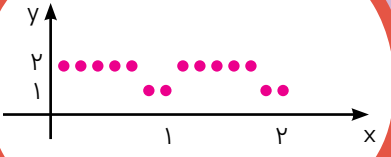
فاصله زمین تا کسی که در یک طرف الاکلنگ نشسته است.



میزان رطوبت در هشت ساعت ۴۰ درصد و در شانزده ساعت ۵۰ درصد است.



هر شیشه در ۵ ثانیه پر می‌شود و یک ثانیه بعد پرکن قطع می‌شود.



مدرسه از شنبه تا چهارشنبه باز و در روز آخر هفته تعطیل است.

پی‌نوشت‌ها

1. ChatGPT
2. Mathematical modeling

و حالا می‌توانیم بگوییم که به دنیای

«مدل‌سازی ریاضی» خوش آمدید! 🎉

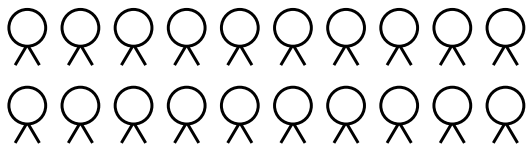
راستی! اگر نمونه‌های دیگری در اطرافتان دیدید، حتماً برای ما بفرستید تا به نام خودتان در مجله چاپ کنیم! 📄



- نقاشان، طراحان لباس و مُد، معماران، طنزپردازان و... فکرهای خود را با تصویر، طرح، و نقاشی قابل مشاهده می کنند. در ریاضیات هم می توان از این ایده بهره برد و از رسم شکل و تصویر برای حل مسئله استفاده کرد. آقای رهنما همان طور که چهره بچه ها را از نظر می گذرانند ادامه داد: «در ضرب المثل داریم شنیدن کی بود مانند دیدن! و یایک تصویر با ارزش تر از هزاران کلمه است! این ها اهمیت تصویرگری را نشان می دهند. اجازه دهید با یک مثال در ریاضیات مطلب را بیشتر توضیح بدهم. **در یک مزرعه تعدادی گوسفند و مرغ نگهداری می شود. اگر روی هم ۲۰ گوسفند و مرغ باشند و تعداد پاهای آن ها ۵۲ تا باشد و هیچ حیوانی نقص عضوی نداشته باشد، در این مزرعه چند مرغ و چند گوسفند وجود دارد؟ سعی کنید با رسم شکل مسئله را حل کنید.**»

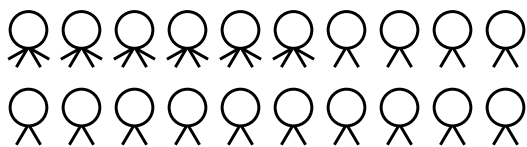
بچه ها مشغول کار شدند.

حسینی: آقا فرض کنیم همه حیوانات مرغ باشند. پس من ۲۰ دایره می کشم و روی هر کدام دو پاره خط به عنوان پا در نظر می گیرم (شکل ۱).



شکل ۱

حالا اگر تعداد پاها را بشماریم، $20 \times 2 = 40$ پا وجود دارد و ۱۲ تا کم داریم. پس باید ۶ تا از شکل ها را با ۴ پا در نظر بگیریم (شکل ۲).



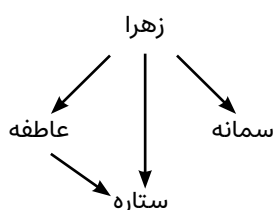
شکل ۲

را به برد رسم شکل

محمدتقی طاهری تنجانی

کلاس آقای رهنما

مسئله را رسم کنید و توضیح دهید.
محمودی: رابطه بین دو بازیکن را با یک پیکان مشخص می‌کنیم. پیکان از فردی شروع می‌شود که مهارت بیشتری دارد و بازیکن ضعیف‌تر در انتهای پیکان قرار می‌گیرد. اگر بین دو بازیکن پیکانی نباشد، به این معنی است که رابطه بین آن دو مشخص نیست. زهرا رتبه اول و ستاره رتبه آخر را دارد، ولی رتبه نفر دوم و سوم مشخص نیست؛ چون در شکل ۶ پیکانی بین عاطفه و سمانه وجود ندارد.



شکل ۶

آقای رهنما: آفرین! کاملاً درست است. گاهی شکل می‌تواند به وجود نداشتن جواب برای مسئله هم کمک کند. تحقیقات نشان می‌دهد که مسئله حل‌کن‌های قهار تقریباً برای حل هر مسئله یک شکل رسم می‌کنند؛ اگرچه ممکن است این کار را ذهنی انجام دهند.

حالا به این مسئله توجه کنید:

عده‌ای از دانش‌آموزان مدرسه در سه تیم فوتبال، والیبال و بسکتبال مدرسه شرکت کرده‌اند. اگر بدانیم ۳ نفر در هر سه تیم، ۷ نفر هم عضو تیم فوتبال و هم عضو تیم والیبال، ۸ نفر هم عضو تیم فوتبال و هم عضو تیم بسکتبال، ۱۱ نفر هم عضو تیم فوتبال و هم عضو تیم بسکتبال، ۲۰ نفر فقط در تیم فوتبال، ۳۶ نفر فقط در تیم والیبال و ۹ نفر فقط در تیم بسکتبال شرکت دارند، تعداد کل دانش‌آموزانی که در این تیم‌ها شرکت دارند چند نفر است؟

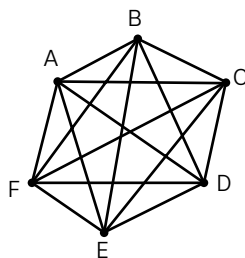
مصطفوی: آقا من هر تیم را به صورت یک دایره در نظر گرفتم و چون تیم‌ها اعضای

حالا مجموع مسافت‌ها چقدر می‌شود؟
مصطفوی: متر $44 = (2+2) + (4+4) + (8+8) + 16$
آقای رهنما: آفرین! حالا به یک مسئله دیگر توجه کنید:

اگر شش نفر در یک جلسه با یکدیگر ملاقات کنند و دو به دو با هم دست بدهند، عمل دست دادن چند بار تکرار می‌شود؟

هر فرد را متناظر یک نقطه در نظر بگیرید و عمل دست دادن را با یک پاره خط بین دو نقطه نشان دهید.

ایمانی: آقا ما شش نقطه را در صفحه در نظر گرفتیم و نقطه‌ها را به هم وصل کردیم. ۱۵ پاره خط به دست می‌آید. پس عمل دست دادن ۱۵ بار انجام شده است (شکل ۵).



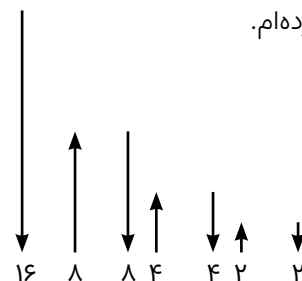
شکل ۵

احمدی: آقا شش نفر که باشند و هر نفر با پنج نفر دست بدهد می‌شود $5 \times 6 = 30$ بار عمل دست دادن. ولی اینجا ۱۵ بار به دست آمده است.

آقای رهنما: توجه کنید هر پاره خط بین دو نقطه است؛ یعنی A با B و B با A دست می‌دهد. آقای احمدی شما هم باید عدد ۳۰ را بر ۲ تقسیم کنید تا به جواب صحیح برسید. حالا به یک سؤال دیگر توجه کنید.
زهرا، عاطفه، ستاره و سمانه چهار نفر اول دسته تنیس روی میز مدرسه هستند. مهارت سمانه از ستاره بیشتر و زهرا از همه برتر است. عاطفه بالاتر از ستاره قرار دارد. آیا با این اطلاعات می‌توانیم رتبه اعضای تیم تنیس روی میز مدرسه را تعیین کنیم؟
محمودی: آقا اجازه با شکلی که من رسم کرده‌ام مرتبه همه را نمی‌شود مشخص کرد!
آقای رهنما: بفرمایید پای تابلو و شکل

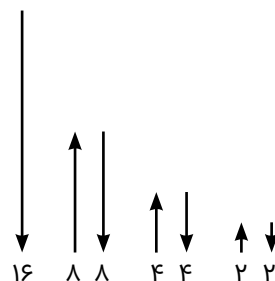
پاسخ مسئله ۶ گوسفند و ۱۴ مرغ است.
آقای رهنما: بسیار جالب و کاملاً درست. همان‌طور که مشاهده کردید به کمک رسم شکل مسئله حل شد.
احمدی: آقا اجازه! حتماً باید برای حل مسئله شکل رسم کرد و راه دیگری وجود ندارد؟
آقای رهنما: معلوم است که تنها راه رسم شکل نیست. ما در این جلسه می‌خواهیم روش استفاده از شکل را تمرین کنیم. به روش‌های دیگر که بعداً با آن‌ها آشنا می‌شویم هم می‌توان مسئله را حل کرد. فعلاً خودتان را به راهبرد رسم شکل محدود کنید. حالا بیایید یک مسئله دیگر را بررسی کنیم.

تویی را در نظر بگیرید که از هر ارتفاعی آن را پرتاب کنیم، نصف مسیر رفته را به طرف بالا برگردد. اگر این توپ را از ارتفاع ۱۶ متری پرتاب کنیم کل مسافتی که این توپ از لحظه پرتاب تا لحظه چهارمین برخورد با زمین طی می‌کند چند متر است؟
مصطفوی: آقا من برای حل مسئله شکل ۳ را رسم کرده‌ام.



شکل ۳

آقای رهنما: شکل مسئله کاملاً درست است، ولی برای ساده‌تر شدن می‌شود آن را به صورت شکل ۴ رسم کرد:

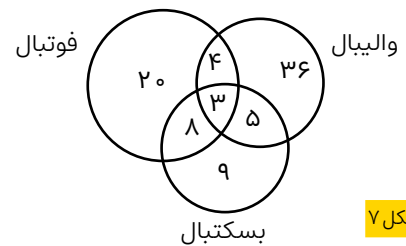


شکل ۴

مشترک دارند، پس هر سه دایره با هم متقاطع اند.

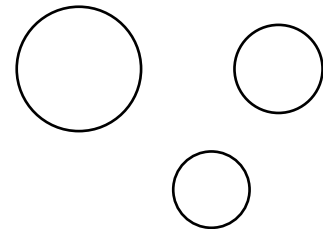
حالا تعداد عضوهای مشترک سه تیم که ۳ نفرند را در محل مشترک سه تیم قرار می دهیم. چون تعداد اعضای مشترک فوتبال و والیبال ۷ نفرند، پس ۴ نفر در قسمت مشترک والیبال و فوتبال قرار می گیرند. حالا بقیه اطلاعات مسئله را روی شکل پیاده می کنیم. با توجه به شکل ۷ تعداد دانش آموزان عضو این تیم ها برابر است با:

$$۲۰ + ۴ + ۳ + ۸ + ۵ + ۳۶ + ۹ = ۸۵ \text{ نفر}$$



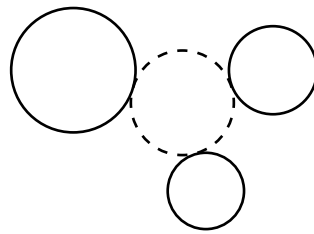
شکل ۷

آقای رهنما: بسیار عالی! همان طور که می بینید اطلاعات زیاد مسئله را می توان به صورت مختصر در یک شکل نشان داد. حالا به عنوان آخرین سؤال، مسئله مشهوری که از زمان یونان باستان مطرح بوده را حل کنید. **سه دایره داریم که با یکدیگر هیچ گونه فصل مشترکی ندارند. چند دایره متفاوت وجود دارند که بر هر سه دایره مماس شوند؟** فرض کنید سه دایره به صورت شکل ۸ باشند. البته توجه دارید دو دایره وقتی بر هم مماس اند که در یک نقطه مشترک باشند.



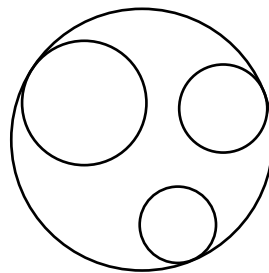
شکل ۸

مصطفوی: آقای یک دایره می شود بین سه دایره رسم کرد که بر هر سه مماس باشد (شکل ۹).



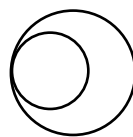
شکل ۹

آقای رهنما: آفرین، حالا حالت های دیگر را بررسی کنید. **محمودی:** آقای یک دایره هم می توانیم محیط بر سه دایره رسم کنیم که بر هر سه مماس است.



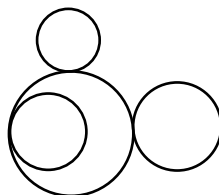
شکل ۱۰

آقای رهنما: آفرین! این شد دو حالت. آیا حالت های دیگری وجود ندارند؟ توجه کنید یک دایره می تواند داخل یک دایره دیگر و بر آن مماس باشد؛ مثل شکل ۱۱.



شکل ۱۱

مصطفوی: با توجه به این نکته برای هر کدام از دایره ها می توان یک دایره رسم کرد که بر دو دایره دیگر از بیرون مماس باشد و دایره سوم مماس در داخل باشد؛ مثل شکل ۱۲.



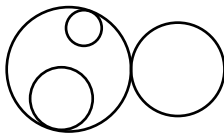
شکل ۱۲

آقای رهنما: آفرین! پس این حالت سه صورت متفاوت دارد. حتماً متوجه هستید که چرا؟

احمدی: چون سه دایره هستند و دایره مماس داخل می تواند هریک از این سه دایره باشد.

آقای رهنما: آفرین! حالا یک حالت دیگر داریم؛ چه حالتی؟

مصطفوی: آقا دو تا دایره از داخل مماس باشند و یکی از بیرون مثل شکل ۱۳.



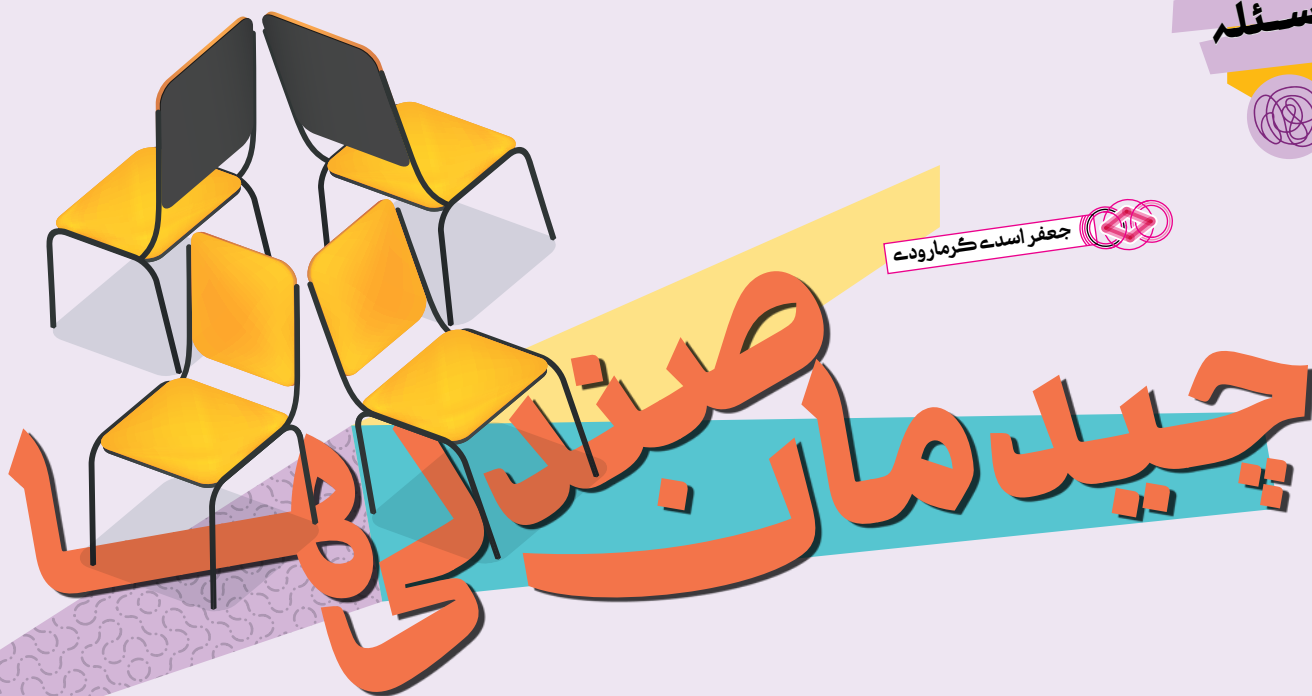
شکل ۱۳

آقای رهنما: آفرین، برای این حالت هم سه شکل می شود رسم کرد. حالا جواب مسئله می شود چند شکل؟ **بچه ها:** ۸ شکل!

آقای رهنما: آفرین، در هندسه رسم کردن شکل اصل کار است. حالا چون فرصتمان به پایان رسیده است، تعدادی مسئله در نظر گرفته ام که برای جلسه بعد با راهبرد رسم شکل رویشان فکر کنید. مبصر کلاس برگه های سؤال ها را توزیع کنید. 



با پوشش رمزینه
تمرین ها را ببینید.



$\Rightarrow 6 = 3 \times 2 =$ تعداد صندلی های میزهای ابتدا و انتها
 $26 = 32 - 6 =$ تعداد صندلی های باقی مانده
 میزهایی که بین ابتدا و انتها قرار دارند، هر کدام دو صندلی را به خود اختصاص می دهند؛ بنابراین:

$\frac{26}{2} = 13 =$ تعداد میزها بدون دو میز اول و انتها
 که با توجه به دو میز ابتدا و انتها خواهیم داشت:
 $15 = 13 + 2 =$ تعداد میزها

راه حل سوم: الگویابی

به کمک الگویابی سعی می کنیم رابطه ای بین تعداد میز و صندلی ها پیدا کنیم (شکل ۲).

تعداد میزها	۱	۲	۳	۴
تعداد صندلی	۴	۶	۸	۱۰

شکل ۲

بنابراین الگوی زیر به دست خواهد آمد:

۱ ۲ ۳ ۴ ... n

۴, ۶, ۸, ۱۰, ..., ۳۲

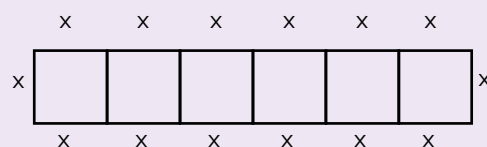
همان طور که می دانید رابطه الگوی بالا به صورت $2n + 2$ خواهد بود، بنابراین با حل معادله $2n + 2 = 32$ ، می توان n یا همان تعداد صندلی ها را به دست آورد:

$$2n + 2 = 32 \rightarrow 2n = 30 \rightarrow n = 15$$

مسئله: دور یک میز مربع شکل، چهار صندلی قرار می گیرد. دانش آموزان برای جشن شب یلدا، تعدادی از این میزها را در کنار هم در یک ردیف چیده اند و یک میز مستطیل شکل ساخته اند که دور آن ۳۲ صندلی قرار گرفته است. دانش آموزان از چند میز استفاده کرده اند؟

راه حل اول: کشیدن شکل و بررسی چیدمان

ابتدا با کشیدن شکلی نمونه؛ مانند شکل ۱، به چیدمان قرارگیری صندلی ها دقت می کنیم (علامت $\times$ جای صندلی ها را مشخص می کند). همان طور که مشاهده می شود، اگر دو صندلی ابتدا و انتها را در نظر نگیریم، به ازای هر میز دو صندلی خواهیم داشت. بنابراین دو صندلی ابتدا و انتها را از تعداد کل صندلی ها کم می کنیم.



شکل ۱

$30 = 32 - 2 =$ تعداد صندلی بدون صندلی ابتدا و انتها
 اکنون با تقسیم بر ۲، تعداد میزها به دست خواهد آمد:
 $15 =$ تعداد میز $\Rightarrow \frac{30}{2} = 15$ تعداد میز

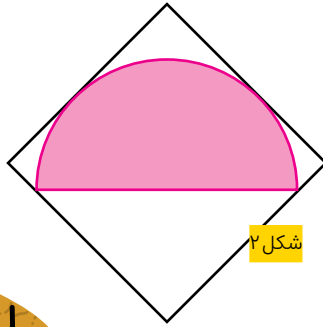
راه حل دوم: کشیدن شکل و بررسی چیدمانی دیگر

با توجه به شکل ۱، می توان دو میز ابتدا و انتها را به همراه صندلی های آن در نظر نگرفت.

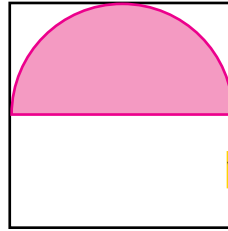
اگر مربعی در اختیار ما باشد، بہ سادگی می توانیم نیم دایرہ ای در آن رسم کنیم (شکل ۱). مرکز این نیم دایرہ محل برخورد قطرہای مربع و شعاع این نیم دایرہ، برابر با نصف طول ضلع مربع است. پس نسبت قطر نیم دایرہ بہ طول ضلع مربع برابر ۱ است. مسئلہ ای کہ می خواهیم مطرح کنیم این است کہ: «آیا می توانیم نیم دایرہ بزرگ تری داخل مربع رسم کنیم و در صورت امکان، نسبت طول قطر نیم دایرہ بہ طول ضلع مربع، حداکثر چہ عددی خواهد بود؟»

با چرخاندن نیم دایرہ ای کہ در شکل ۱ رسم شدہ است، می توانیم نیم دایرہ را کمی بزرگ تر کنیم (شکل ۲). بنابراین پاسخ سؤال اول مثبت است، ولی برای پاسخ بہ سؤال دوم، یعنی محاسبۂ نسبت طول قطر نیم دایرہ بہ طول ضلع مربع، باید کمی بیشتر بیندیشیم.

محمود داورزنی



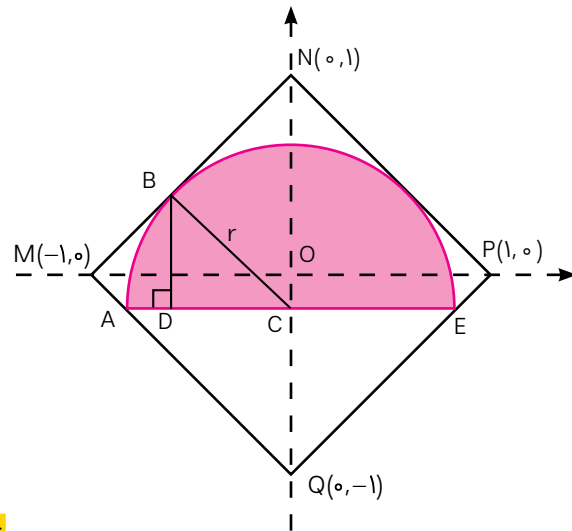
شکل ۱



شکل ۲

نیم دایرہ
در یک مربع

شکل ۲ را کمی بزرگ تر رسم می کنیم و توضیحات لازم را در شکل ۳ ارائه می دهیم.



شکل ۳

برای راحتی کار، رأس های مربع را روی نقطه های $(0,1)$ ، $(0,-1)$ ، $(1,0)$ ، $(-1,0)$ در دستگاه مختصات قرار می دهیم و مرکز این دایره را C می نامیم. هدف ما محاسبه طول شعاع نیم دایره، یعنی r است. اگر از C به ضلع MN عمودی رسم کنیم، نیم دایره را در نقطه B قطع می کند. از B نیز به قطر AE عمودی رسم می کنیم تا قطر دایره را در D قطع کند. با توجه به اینکه $CQ=r$ و $OQ=1$ پس $OC=1-r$. دقت کنید که در شکل رسم شده، $r < 1$ است. بنابراین عرض نقطه A ، $(r-1)$ است و طول آن نیز قرینه شعاع دایره، یعنی $(-r)$ است. پس مختصات نقطه A از این قرار است: $(-r, r-1)$.

از طرف دیگر: $BC=r$ و چون $BD=DC$ و مثلث BDC قائم الزاویه است، داریم:

$$BD^2 + DC^2 = BC^2 \Rightarrow BD^2 + BD^2 = r^2$$

$$\Rightarrow 2BD^2 = r^2 \Rightarrow BD^2 = \frac{r^2}{2}$$

پس: $BD = \frac{r}{\sqrt{2}}$. طول پاره خط CD نیز برابر $\frac{r}{\sqrt{2}}$ است و طول نقطه B با توجه به شکل ۳، $\frac{-r}{\sqrt{2}}$ خواهد بود.

اکنون معادله خطی را می نویسیم که نقطه های M و N را به هم وصل می کند. با توجه به اینکه داریم: $M(-1,0)$ و $N(0,1)$ ، شیب این خط برابر $m = \frac{1-0}{0-(-1)} = 1$ و بنابراین معادله این خط به شکل

$y=x+c$ است. با قرار دادن مختصات نقطه N ، یعنی $(0,1)$ در این معادله داریم:

$$1=0+c \Rightarrow c=1$$

پس معادله این خط به شکل $y=x+1$ است. با توجه به عبور این خط از نقطه B ، می توانیم برای یافتن عرض نقطه B ، طول نقطه B را در این معادله قرار دهیم:

$$x = \frac{-r}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = \frac{-r}{\sqrt{2}} + 1$$

اکنون می توانیم گام نهایی را برداریم و r را محاسبه کنیم. با توجه به شکل، اندازه پاره خط BD برابر است با: B مختص y نقطه $(1-r)$

و چون اندازه پاره خط BD برابر $\frac{r}{\sqrt{2}}$ و مختص y نقطه برابر با $1 - \frac{r}{\sqrt{2}}$ است، بنابراین:

$$\frac{r}{\sqrt{2}} = (1 - \frac{r}{\sqrt{2}}) + (1-r)$$

اکنون متغیرها را به سمت چپ معادله می بریم و با ساده کردن معادله، r را به دست می آوریم:

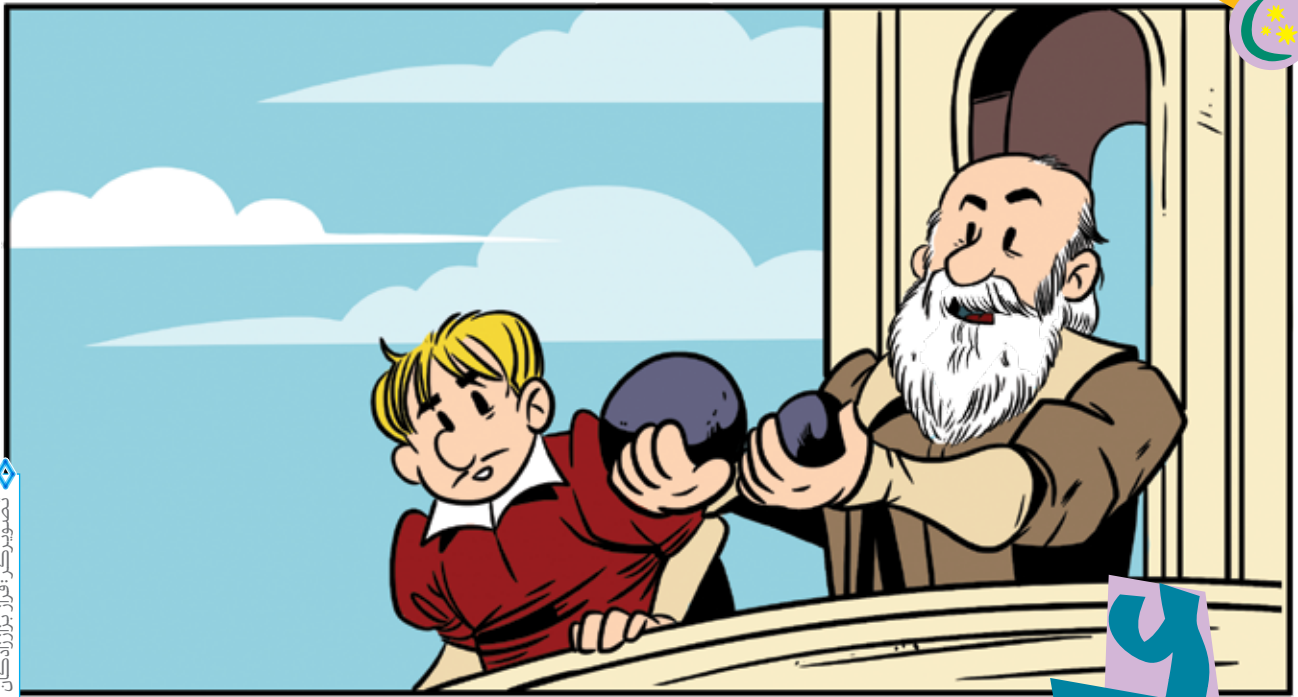
$$\begin{aligned} \frac{r}{\sqrt{2}} + \frac{r}{\sqrt{2}} + r &= 2 \Rightarrow \frac{r+r+r\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2 \Rightarrow \frac{2r+r\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2 \\ \Rightarrow \frac{r(2+\sqrt{2})}{\sqrt{2}} &= 2 \Rightarrow r(2+\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

پس: $r = \frac{2\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$. در پایه دهم، می توانید مقدار $\frac{2\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ را گویا کنید و به مقدار $r = 2\sqrt{2} - 2$ برسید.

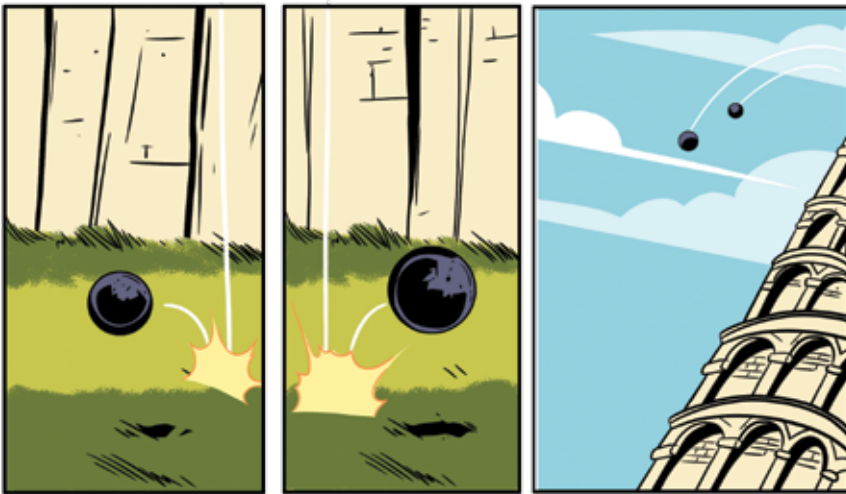
با توجه به مقدار حاصل شده برای r ، طول قطر نیم دایره عبارت است از: $2r = 4\sqrt{2} - 4$. بنابراین نسبت طول قطر نیم دایره به طول ضلع مربع برابر است با:

$$\frac{4\sqrt{2}-4}{\sqrt{2}} = 4 - \frac{4}{\sqrt{2}} = 4 - \frac{4\sqrt{2}}{2} = 4 - 2\sqrt{2} = 1/\sqrt{2}$$

پس جواب سؤال دوم نیز مشخص شد. یعنی نسبت طول قطر نیم دایره به طول ضلع مربع می تواند حداکثر $1/\sqrt{2}$ باشد. 



تصویر برگرفته از بازار نادگان



عکس و عکاسی

جعفر ریائی

دانش آموزان عزیز و معلمان گرامی، در این دوره از مجله نوشته‌هایی برای شما داریم که بیشتر صورت حکایت و داستان دارند، ولی در حقیقت مطالب علمی هستند که فهم آن‌ها به ریاضیات بستگی دارد؛ مسئله‌هایی مثل نور، آونگ (پاندول)، خسوف و کسوف، رادار، ترمز وسایل نقلیه، جاذبه و...

نخستین مطلب ما درباره گالیله است؛ کسی که عقیده داشت «ریاضی زبان علم است». پس از او بود که علوم، به ویژه فیزیک، رو به رشد سریع گذاشت. حدود دو هزار و پانصد سال پیش، **دموکریٹ**، فیلسوف یونانی، عقیده داشت که همه جسم‌ها در خلأ با سرعت یکسان سقوط می‌کنند و هم‌زمان به زمین می‌رسند. او حرف درستی می‌زد ولی در آن زمان وسیله‌ای وجود نداشت که بتوان با ایجاد خلأ نظر دموکریٹ را پذیرفت. خلاف نظر دموکریٹ، **ارسطو**، دیگر فیلسوف بزرگ یونان، عقیده داشت که هرچه

جسم سنگین‌تر باشد، زودتر سقوط می‌کند. ارسطو هم‌راهی برای اثبات حرف خود نداشت، اما چون مرد بزرگی بود بیشتر دانشمندان نظر او را پذیرفتند تا حدود دو هزار سال بعد که **گالیله** نظر ارسطو را رد کرد و نظر دموکریت را با آزمایش ثابت کرد. حالا می‌خواهیم شما را با گالیله آشنا کنیم و ببینیم او چگونه نظر ارسطو را رد کرد. **گالیلئو گالیله** در سال ۱۵۶۴ در شهر پیزا، در ایتالیا، متولد شد. در نوجوانی پدرش او را به کلیسای «والومبروسا» فرستاد تا کشیش شود، اما آنجا مورد علاقه گالیله واقع نشد و احساس کرد به هندسه و ریاضیات بیشتر علاقه دارد. پس کلیسا را رها کرد و به «دانشگاه پیزا» رفت تا در رشته مورد علاقه‌اش که فیزیک، ریاضیات و نجوم بود ادامه تحصیل دهد. از آنجا که گالیله به آزمایش کردن مسئله‌های علمی علاقه داشت، در دانشگاه پیزا تصمیم گرفت نظریه سقوط اجسام را آزمایش کند تا ببیند دموکریت و ارسطو، کدام یک، درست گفته‌اند.

در شهر پیزا، برج بلندی بود. هنوز هم هست. که به برج کج پیزا مشهور بود، زیرا هر سال اندکی کج می‌شد و دانشمندان پیش‌بینی می‌کردند که به زودی سقوط خواهد کرد. البته آن برج هیچ‌گاه سقوط نکرد و در زمان ما، یعنی در سال ۱۹۹۳، مهندسان توانستند از کج شدن آن جلوگیری کنند و اکنون دیگر کج نمی‌شود.

خلاصه اینکه گالیله از این برج برای تحقیق درباره سقوط اجسام استفاده کرد. او به بالای برج رفت و در یک لحظه دو جسم را که یکی از آن‌ها کمی سنگین‌تر از دیگری بود به پایین انداخت. همه دیدند که دو جسم در یک لحظه به زمین رسیدند و این نشان داد که نظر ارسطو صحیح نبوده و نظر دموکریت صحیح است. فراموش نکنیم که هم‌زمان رسیدن اشیایی که به زمین سقوط می‌کنند مشروط به نبودن مقاومت هوا یعنی خلأ است.

باید بدانیم که تا زمان گالیله رسم نبود کسی حرف دانشمند بزرگی مثل ارسطو را با آزمایش باطل کند. از این‌رو کاری که گالیله انجام داد موجب حیرت دیگر دانشمندانی شد که تا آن روز حرف ارسطو را باور داشتند. گالیله عقیده داشت دانشمند واقعی باید صحت نظرات علمی‌اش را به وسیله آزمایش و تجربه اثبات کند، نه اینکه فقط در دانشگاه بنشیند و سخنرانی کند و نظر بدهد. او باید کاری هم انجام دهد و نتایج کار خود را در عمل نشان دهد؛ و در این صورت است که علم رشد خواهد کرد.

در زمان گالیله دانشمندان همچنین عقیده داشتند

که زمین ساکن است و خورشید و دیگر سیاره‌های منظومه شمسی به دور آن می‌گردند. این نظر را هم **بطلمیوس**، دیگر دانشمند یونانی، قرن‌ها قبل ابراز داشته بود و مشاهده‌های عادی نیز آن را تأیید می‌کردند. از این‌رو در نظر مردم جهان آن روز، زمین مرکز جهان به شمار می‌رفت. گالیله سرانجام این نظر را هم به چالش کشید. پیش از گالیله، دانشمندی لهستانی به نام **نیکلا کپرنیک** (۱۴۷۳-۱۵۴۳) زندگی می‌کرد. کپرنیک که اخترشناس بزرگی بود به این نتیجه رسیده بود که خلاف نظر بطلمیوس، زمین مرکز منظومه شمسی نیست، بلکه خودش به دور خورشید می‌گردد. او نظرات و عقایدش را در کتابی مفصل به نام «درباره گردش اجرام آسمانی» نوشت، ولی عمرش کفاف نداد که چاپ کتابش را ببیند. البته خودش هم می‌ترسید کسی حرفش را نپذیرد و لذا بر چاپ کتاب خود اصرار نداشت. حدود ۲۰ سال بعد از مرگ کپرنیک، گالیله متولد شد و بعدها که خود دانشمندی شد و توانست کتاب کپرنیک را بخواند، دریافت که نظر او درست است. از این‌رو اعلام کرد که خلاف نظر بطلمیوس، خورشید ثابت است و زمین و دیگر سیاره‌های منظومه شمسی به دور آن می‌گردند. این نظر دانشمندان را که پیرو کلیسا بودند و نظر بطلمیوس را مقدس می‌دانستند، برآشفته و حکم به محاکمه گالیله دادند. کار به جایی رسید که گالیله به ناچار اعلام کرد که اشتباه کرده است و دیگر سخن نگفت؛ درحالی‌که در دلش همچنان معتقد به گردش زمین به دور خورشید بود.

خوب است بدانیم که گالیله در اصل استاد ریاضیات در «دانشگاه پادوا» بود. وی می‌گفت خداوند قوانین طبیعت را به زبان ریاضی نوشته است و هر کس می‌خواهد علم بیاموزد، اول باید ریاضی بداند. کار دیگر گالیله اختراع تلسکوپ یا دوربین نجومی بود. او توانست به وسیله تلسکوپ

بلندی‌های ماه را ببیند و تعدادی از ستارگان ناشناخته را نیز کشف کند. گالیله همواره خدا را شاکر بود که وی را به مشاهده شگفتی‌های آسمان موفق گردانده است. گالیله در سن ۷۳ سالگی بینایی خود را از دست داد و دیگر نتوانست با دوربین خود به مشاهده آسمان بپردازد و پنج سال بعد هم درگذشت. اما در همان سال در انگلستان کودکی پا به جهان گذاشت که بعدها خود یکی از بزرگ دانشمندان ریاضی و فیزیک تاریخ شد. او **سیر اسحاق نیوتون** بود که ماجراهایش شنیدنی است.

❖ سؤال

۱. گالیله هم‌زمان با کدام پادشاه ایران زندگی می‌کرد؟
☐ شاه عباس
☐ فتح‌علی‌شاه
☐ ناصرالدین‌شاه
۲. اگر یک قطعه آهن، یک قطعه چوب و یک بسته پنبه را هم‌زمان از ارتفاع ۳۰ متری رها کنیم کدام یک دیرتر به زمین می‌رسد.
☐ بسته پنبه
☐ قطعه آهن
☐ قطعه چوب
۳. در کره ماه کدام یک از سه قطعه بالا زودتر در سطح ماه سقوط می‌کنند؟
☐ بسته پنبه
☐ قطعه آهن
☐ قطعه چوب
☐ هر سه قطعه با هم سقوط می‌کنند.



دغدغه‌های دنیای دیجیتال برای نوجوانان

نگاهی به هویت برخاط

آریان خلیله

❖ اشاره

هرچند گروه سنی نوجوانان در معرض گسترده‌ترین استفاده از فضای مجازی قرار دارند، اما اغلب آن‌ها برای مدیریت چالش‌های این فضا آگاهی و مهارت کافی ندارند. در مجموعه مقاله‌هایی که برای هشت شماره پیاپی «مجله رشد ریاضی برهان» در سال تحصیلی ۱۴۰۵-۱۴۰۴ تدارک خواهیم دید، شما را با **چالش‌ها و دغدغه‌های دنیای دیجیتال آشنا خواهیم کرد** و راهکارهای مؤثر مواجهه با آن‌ها را شرح خواهیم دید.

معمولاً آنچه ما به عنوان «خود» تصور می‌کنیم، با آنچه در دنیای برخاط (آنلاین) نشان می‌دهیم، یا از دیگران می‌بینیم، متفاوت است. همیشه «خود»های زیادی درون هر فرد وجود دارند که اینترنت می‌تواند آن‌ها را بر ملا و آشکار کند.

❖ هویت دیجیتال و برخاط

عناصر زیادی برای معرفی و شناخت هویت یک فرد وجود دارند: خود در خانه، خود در مدرسه یا خود در محل کار، خود به عنوان پسر یا دختر، یا خودهای فراوان دیگر. این «خود»ها مبناهایی هستند برای اینکه نشان دهند هر فرد چگونه زندگی خود را سروسامان می‌دهد، با چه کسانی ارتباط دارد و چگونه این ارتباط را برقرار می‌کند. همه این خودها برای عزت نفس و آسایش روانی فرد بسیار اهمیت دارند. شاید هنوز برای برخی تعجب‌آور باشد که این عوامل وارد دنیای مجازی هم شده‌اند.

❖ هویت دیجیتال چیست؟

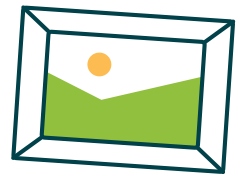
هویت دیجیتال مجموعه‌ای از شناسه‌هایی است که سازمان‌ها، بانک‌ها و شرکت‌ها، برای احراز هویت ما، از آن‌ها استفاده می‌کنند تا بتوانیم به خدمات آن‌ها دسترسی پیدا کنیم.

❖ هویت برخاط چیست؟

هویت برخاط نشانه‌ای است که ما با آن خود را در دنیای برخاط معرفی می‌کنیم. این هویت همان شخصیتی است که ما می‌سازیم، پرورش می‌دهیم و در ارتباط‌های دیجیتالی خود مطرح می‌کنیم.

❖ هویت‌های اولیه برخاط

اینترنت به کاربران امکان می‌دهد، نوع و میزان اطلاعاتی را که می‌خواهند از خود با دیگران به اشتراک بگذارند، مدیریت کنند. این امر به ویژه در سال‌های اولیه برقراری ارتباطات برخاط (دوره‌ای که ارسال عکس، صدا و ویدئو زمان زیادی طول می‌کشد) صادق بود. در نتیجه، کاربران می‌توانستند هویت برخاط خود را پنهان کنند. با تکامل تدریجی اینترنت، به ویژه با ظهور رسانه‌های اجتماعی، تغییرات به سمت پنهان‌سازی کم‌تر و آشکارسازی بیشتر هویت خود افزایش یافت.



(قسمت اول)

❖ هویت‌های برخط گوناگون

این روزها افراد برای انجام بسیاری از فعالیت‌ها از اینترنت استفاده می‌کنند. اکثر افراد نمایه‌ای شخصی از خود در رسانه‌های اجتماعی دارند که در آن صمیمی به نظر می‌رسند. همین افراد در وبگاه‌ها و شبکه‌های اجتماعی اشتغال محور، نمایه‌ای از خود به نمایش می‌گذارند که در آن رسمی، جدی و سخت‌کوش به نظر می‌آیند.

❖ شخصیت شهروند دیجیتال

شهروند خوب در وضعیت برخط، بسیار شبیه به شهروندی خوب در وضعیت برون خط (آفلاین) است. تمرکز بر رفتار محترمانه در هر دو وضعیت اشاره شده، سرمایه فردی و اجتماعی محسوب می‌شود.

❖ شهروندان دیجیتال

امروزه بیشتر ارتباط‌ها با دیگران، چه برای کار و چه برای سرگرمی و گذراندن اوقات فراغت، به صورت برخط انجام می‌شود. رفتار شهروند برخط خوب به طور کامل مربوط به آگاهی وی از قوانین، مقررات، و آداب و رسوم دنیای نت‌وند دیجیتال (نتیکت) و پیروی از آن‌هاست. شهروند برخط خوب بودن به ایجاد هویت و شهرت برخط کمک می‌کند. هویت برخط و شهرت خوب می‌تواند توسط رفتارهای برخط ناخوشایند، توهین‌آمیز یا خطرناک تضعیف شود و برای سال‌ها باقی بماند.

فعالیت / محاسبه زمان حضور در فضای مجازی

- هدف: آگاهی از میزان زمان صرف‌شده در سکوها (پلتفرم‌های) متفاوت
- روش اجرا:
۱. زمان روزانه حضور خود را در هر برنامه (شاد، آپارات، رشد، بازی‌ها و...) یادداشت کنید.
 ۲. برای هر برنامه یک رنگ انتخاب کنید.
 ۳. روی نمودار دایره‌ای سهم هر برنامه از کل زمان را رنگ‌آمیزی کنید. درصد هر بخش را محاسبه کنید.
 ۴. کدام برنامه بیشترین زمان را می‌گیرد؟ آیا این تقسیم‌بندی منطقی است؟



❖ چند نمایه‌ای (رنگ‌های) (پروفایل‌های) متعدد

یکی از بزرگ‌ترین کارهایی که اینترنت برای هویت دیجیتال انجام داده این است که هر فرد می‌تواند خودهای متفاوتی داشته باشد. در دنیای فناورانه امروز، هر فرد می‌تواند در یک لحظه بین نمایه‌های متفاوت خود جابه‌جا شود. برای مثال، خبری را در یک رسانه اجتماعی ببیند و با پسندیدن (لایک کردن) به آن واکنش نشان دهد، و هم‌زمان رایانامه‌ای (ایمیلی) را پاسخ دهد.





مقدمه

همیشه از نوشتن درباره آنچه برای همه یا حتی برخی خوانندگان معلوم باشد، پرهیز کرده‌ام. با این وجود گاهی گفتن و نوشتن از برخی دانسته‌ها نیز خالی از لطف نیست. در این نوشته مطالبی درباره هم‌نهشتی چند ضلعی‌ها را که به نظر از جاذبه و زیبایی ویژه خود برخوردارند با هم مرور می‌کنیم.

هم‌نهشتی چند ضلعی‌ها

بنا بر آنچه در کتاب درسی آموخته‌اید (ریاضی پایه هشتم)، دو چند ضلعی با تعداد ضلع‌های برابر، هم‌نهشت‌اند اگر بتوانیم هر کدام را با یک یا چند تبدیل هندسی (تقارن، دوران و انتقال) طوری بر دیگری منطبق کنیم که کاملاً یکدیگر را بپوشانند. این یعنی هر دو چند ضلعی که دارای دنباله یکسانی از اندازه ضلع‌ها و زاویه‌ها باشند، در واقع دو چند ضلعی هم‌نهشت‌اند هرگاه بتوان بر حسب (نام) رأس‌های یکی را با دیگری به گونه‌ای جابه‌جا کرد که اندازه ضلع‌ها با نام‌گذاری جدید سازگار باشد. این امر یعنی مثلاً ضلعی که در هر دو شکل دارای طولی برابر باشد، بین رأس‌های متناظری باشد.

در مباحث هم‌نهشتی، هم‌نهشتی مثلث‌ها اهمیت ویژه‌ای دارد و از بدو نگارش متن‌های هندسی مورد توجه بوده است. به خاطر دارید که برای هم‌نهشتی مثلث‌ها شرایطی وجود دارد که در صورت برقراری آن‌ها، دو مثلث هم‌نهشت خواهند بود. این شرایط (حالت‌ها) را با نام‌های رایج ض‌ض‌ض، ض‌ز‌ز و ض‌ز‌ض می‌شناسیم. توجه به این نکته که در تمامی حالت‌های ذکر شده و دیگر حالت‌های ذکر نشده برای هم‌نهشتی مثلث‌ها در حالت کلی (و نه حالت‌های خاص، مانند مثلث قائم‌الزاویه)، برابری و انطباق سه جزء این مثلث‌ها مورد نیاز است.

تمرین: مثلث‌های دلخواه ABC و $A'B'C'$ دارای مجموعه ۱۷ عضوی از اجزا و اندازه‌های وابسته

$$\{A, B, C, a, b, c, \angle P, S, m_a, m_b, m_c, h_a, h_b, h_c, d_a, d_b, d_c\}$$

و:

$$\{A', B', C', a', b', c', \angle P', S', m_a, m_b, m_c, h_a, h_b, h_c, d_a, d_b, d_c\}$$

هستند. حالت ض‌ض‌ض هم‌نهشتی مثلث‌ها به صورت یک شرط تساوی سه‌گانه به صورت زیر بیان می‌شود:

$$ABC \cong A'B'C' \Leftrightarrow a=a', b=b', c=c'$$

یا به اختصار:

$$ABC \cong A'B'C' \Leftrightarrow abc=a'b'c'$$

همه تساوی‌های سه‌گانه از این دست را مشخص کنید که در صورت برقراری آن‌ها دو مثلث هم‌نهشت هستند. **تمرین:** به طور ویژه سعی کنید علت هم‌نهشتی دو مثلث را در حالت تساوی سه ارتفاع بیابید.

$$ABC \cong A'B'C' \Leftrightarrow h_a=h_a', h_b=h_b', h_c=h_c'$$

اکنون این سؤال مطرح می‌شود که آیا تساوی دو جزء مشخص و متناظر از دو مثلث، هم‌نهشتی آن‌ها را تضمین می‌کند؟ با کنکاش و آزمون و ارائه مثال سعی کنید مسئله را بررسی کنید. در واقع، مانند آنچه در تمرین بعد خواسته شده است، بررسی کنید که آیا تساوی دو جزء متناظر از مجموعه‌های فوق، هم‌نهشتی دو مثلث را نتیجه می‌دهد یا خیر؟

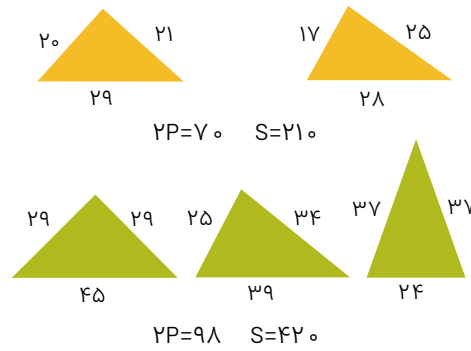
تمرین: برای هر کدام از حالت‌های زیر، دو مثلث ABC و $A'B'C'$ مثال بزنید که هم‌نهشت نباشند، اما تساوی مورد نظر برقرار باشد.

$$\text{الف) } m_a=m_a' \text{ و } a=a'$$

$$\text{ب) } h_b=h_b' \text{ و } m_a=m_a'$$

در ادامه کار توجه خود را به مثلث‌های با محیط یکسان و مساحت یکسان معطوف می‌کنیم. آیا دو مثلث با محیط و مساحت یکسان هم‌نهشت‌اند؟ گرچه مساحت و محیط مثلث به اندازه همه ضلع‌ها و همه زاویه‌های مثلث وابسته است، با وجود این، دو مثلث حتی با داشتن محیط یکسان و مساحت یکسان نیز می‌توانند غیر هم‌نهشت باشند. برای این کار کافی است توجه کنید دو مثلث غیر هم‌نهشت با ضلع‌های ۲۱، ۲۰ و ۲۹، و ۲۸، ۲۵ و ۲۹، ۳۴، ۲۵ و ۳۷، ۲۴ دارای محیط‌های هستند. همچنین سه مثلث با ضلع‌های مشخص ۲۹، ۲۹، ۴۰ و ۲۹، ۲۹ و ۳۴، ۲۵ و ۳۷، ۲۴ دارای محیط‌های برابر و مساحت‌های برابرند، اما هم‌نهشت نیستند.

منحنی روی



شکل ۱

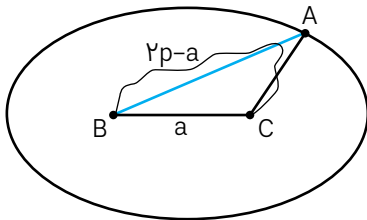
واقعیت امر این است که بی‌شمار مثال از این دست وجود دارد. سعی کنید راهی برای ارائه مثال‌های دیگر بیابید. از اثبات گزاره بعد الهام بگیرید. این گزاره بیان می‌کند که دو مثلث اگر علاوه بر شرایط تساوی محیط‌ها و تساوی مساحت‌ها، دارای دو ضلع برابر نیز باشند، آنگاه دو مثلث هم‌نهشت‌اند. محیط و مساحت مثلث را به ترتیب با $2P$ و S نمایش می‌دهیم.

گزاره: اگر دو مثلث دارای محیط‌های برابر، مساحت‌های برابر و یک ضلع برابر باشند آن‌گاه دو مثلث هم‌نهشت‌اند.

اثبات: کافی است ثابت کنیم با معلوم بودن محیط، مساحت و اندازه یک ضلع، تنها یک مثلث می‌توان رسم کرد و این یعنی هر دو مثلث با داشتن این ویژگی‌ها هم‌نهشت‌اند. برای اثبات روش‌های متفاوتی وجود دارد.

یک روش استفاده از رابطه موسوم به **هرون** است که مساحت مثلث را با معلوم بودن اندازه ضلع‌های آن، مشخص می‌کند. اگر با معادله‌های درجه دوم و این رابطه آشنایی قبلی دارید با **پویش رمزینه در آخر مقاله**، اثبات مورد نظر را می‌توانید مطالعه کنید. در اینجا اثباتی عملی و شهودی برای گزاره ارائه می‌دهیم. پس فرض کنیم که a ، S و $2P$ از مثلث ABC معلوم باشد. پاره خط $BC=a$ را در صفحه رسم کنید. نخ به طول $2P-a$ را به دوسر این پاره خط سنجاق کنید. بانوک مداد نخ را در حالت کاملاً کشیده نگه دارید

و در همین حالت یک دور کامل روی صفحه بزنید. یک منحنی بسته روی صفحه رسم می‌شود. آیا نام آن را می‌دانید؟ اگر A یک نقطه دلخواه روی این منحنی باشد آنگاه به وضوح $AB+AC=2P-a$ و لذا محیط مثلث ABC برابر است با $2P$.



شکل ۲

بنابراین همه مثلث‌های ABC که رأس A روی منحنی مورد نظر قرار دارد، محیطی یکسان و برابر $2P$ دارند. اکنون خطی به فاصله $h_a = \frac{2S}{a}$ از پاره خط BC رسم می‌کنیم. چون مثلث وجود دارد، این خط منحنی قبل را در نقطه‌ای قطع می‌کند. این نقطه را نام‌گذاری کنید. مثلث ABC دارای محیط $2P$ ، مساحت S و یک ضلع معلوم a است.

تذکر: توجه کنید که در صورت اجرای فرایند فوق، در واقع چهار نقطه به عنوان نقطه A مشخص شده و در نتیجه چهار مثلث در صفحه با ویژگی مورد نظر رسم می‌شود. اما با استفاده از مفاهیم تقارن به راحتی می‌توان دید که هر چهار مثلث با هم هم‌نهشت‌اند. توجه داریم که مساحت و یک ضلع مثلث مشخص است، اگر و تنها اگر مساحت و یک ارتفاع آن مشخص باشد. بنابراین نتیجه زیر درست است.

نتیجه: اگر دو مثلث دارای محیط یکسان، مساحت یکسان و یک ارتفاع یکسان باشند، آنگاه دو مثلث هم‌نهشت‌اند.

برای آشنایی با هم‌نهشتی چهارضلعی‌ها و همچنین اثبات قضیه هرون رمزینه را پویش کنید.





تجویز و درمان

برای درمان این نارسایی در دانش آموزی که فرق بین عددهای صحیح و حقیقی را نمی‌داند، بهتر است از او بخواهیم اعضای مجموعه $\mathbb{Z}$ را بنویسد. سپس عمل مشابه را در مجموعه $\mathbb{R}$ انجام دهد. اگر با عددی شروع کند، در نوشتن عدد بعدی با مشکل مواجه خواهد شد. اما اگر عدد دوم را بنویسد، به عددی بین آن دو اشاره می‌کنیم که او جا انداخته است و... حال بهترین زمان برای اشاره کردن به تفاوت دو مجموعه است و اینکه ما نمی‌توانیم اعضای مجموعه عددهای حقیقی را همانند اعضای مجموعه عددهای صحیح به ترتیب و بدون جا انداختن عددی بنویسیم.

اما برای حل مشکل دانش آموزی که در دسته دوم قرار می‌گیرد، از او می‌خواهیم مجموعه $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$ را تفسیر کند. مطمئناً او می‌تواند بگوید عددهای حقیقی بزرگ‌تر از ۱. سپس چند نمونه عدد از او می‌خواهیم. اگر همه مثال‌های او عددهای بزرگ‌تر یا مساوی ۲ باشند، می‌پرسیم: $1/7$ می‌تواند عضو این مجموعه باشد یا نه؟ می‌توان حدس زد که پاسخ او مثبت باشد و این همان لحظه‌ای است که او متوجه اشتباه خود می‌شود.

نسخه تکمیلی

بهتر است این دانش آموزان فصل اول از کتاب ریاضی هشتم (عددهای صحیح و گویا) و فصل دوم از کتاب ریاضی نهم (تعددهای حقیقی) را عمیق یاد بگیرند. یعنی متن کتاب‌ها را با تأمل بخوانند، فعالیت‌های آن‌ها را انجام دهند و مطالب یاد گرفته خود را با مثال‌ها تطبیق دهند. سپس کار در کلاس‌ها را انجام دهند و در پایان مسئله‌های آخر هر درس را حل کنند. در این صورت می‌توانند درک درستی از مجموعه‌های صحیح، گویا و حقیقی داشته باشند و نارسایی‌هایشان در حل مسئله‌های مربوط به نمایش مجموعه‌ها برطرف می‌شود.

اشتباه‌های رایج

در دو تهنیت خدمت دانش آموزان عزیز و همکاران گرامی. از اینکه مطالب ما را ارج می‌نهدید و تعقیب می‌کنید بسیار سپاسگزاریم و از شما انرژی می‌گیریم. در سال تحصیلی ۱۴۰۵-۱۴۰۴ نیز طبق روال سال قبل به معرفی اشتباه‌های متداول می‌پردازیم. امیدواریم برای عزیزان و علاقه‌مندان مفید واقع شود.

اشتباه متداول: تشخیص ندادن درست مجموعه عددها در نوشتن اعضای مجموعه

یکی از اشتباه‌های متداول دانش آموزان در نوشتن اعضای یک مجموعه اتفاق می‌افتد. معمولاً این دانش آموزان در نمایش عددهای حقیقی روی محور مرتکب اشتباه زیر می‌شوند:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$$



تشخیص علت

دانش آموزانی که این خطا را انجام می‌دهند دو دسته‌اند: دسته اول ممکن است درک ناقصی از مفهوم عددهای حقیقی و تفاوت آن با عددهای صحیح داشته باشند. دسته دوم دانش آموزانی هستند که فرق بین عددهای حقیقی و صحیح را تشخیص می‌دهند و مثلاً می‌دانند $1/2$ یک عدد حقیقی و بزرگ‌تر از ۱ و لذا عضو مجموعه A است، اما در عمل عددهای حقیقی بزرگ‌تر یا مساوی ۲ را روی محور مشخص می‌کنند. آن‌ها فقط زمانی این خطا را مرتکب می‌شوند که مجموعه از یک عدد صحیح بزرگ‌تر یا کوچک‌تر باشد. در این مثال چون $x > 1$ نوشته شده است، این دانش آموزان به تصور اینکه عدد آغازین باید صحیح و عضو مجموعه باشد، از عدد ۲ شروع می‌کنند.

افشین خاصه‌خان

حتماً تا کنون برایتان پیش آمده که بخواهید وسیله یا شیء کوچکی را به جایی حمل کنید و یا هدیه ای به کسی بدهید و نیاز باشد آن را بسته بندی کنید. در این بخش می خواهیم بدون استفاده از چسب و فقط با چند حرکت ساده و دقیق، یک ساک زیبا و کاربردی درست کنیم. این فعالیت با یک قطعه کاغذ و کمی روبان یا کاموا قابل اجراست. با تغییر اندازه کاغذ می توانید اندازه ساک را هم تغییر دهید. همچنین می توانید با ماژیک، مداد، کاغذ رنگی و یا چاپ دستی، ساک کادو را تزئین کنید.

ندانه



ساک کادو



برای دیدن مراحل
ساخت رمزینه را
پویش کنید.

مسابقه عکاسی

آزاد به فرزنان



از امروز هر جا تصویری می‌بینی
که بیانگر یک مفهوم ریاضی است، از آن یک
عکس بگیر و بایک توضیح مختصر برای ما بفرست.
ما عکس‌های خوبتان را انتخاب و با نام شما در مجله
چاپ می‌کنیم!

در ضمن هر ماه به سه تا از بهترین عکس‌ها جایزه می‌دهیم!
پس همین الان گوشی‌ات را بردار و بگرد دنبال تصویری که یک
مفهوم ریاضی را بیان می‌کند.
فقط یادت باشد که همراه آن عکس، یک خود عکس (عکس سلفی)
هم بگیر. هر دو تا عکس را به نشانی رایانامه مجله بفرست!

منتظر عکس‌های خلاق و زیبای شما هستیم. راستی
برای اینکه بهتر متوجه منظورمان بشوید، چند
نمونه عکس برایتان گذاشته‌ایم.



پاره خط‌های موازی / در
باقیمانده باروی شهر



مستطیل‌ها در قاب
پنجره / بوشهر



دایره / در چشم‌ها



تقارن / دارالفنون -
میدان امام خمینی (ره)،
تهران



پاره خط عمود بر یک
سطح / شهر لک‌ها،
مریوان، دریاچه زریوار



مثلث، دوزنقه و خط‌های
موازی / ساحل عسلویه

