

مجله چندرسانه‌ای
شیداری دیداری



۱۳۰



وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی



فصلنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی

برای دانش‌آموزان دوره دوم متوسطه | همیار دبیران ریاضی

شماره پیاپی ۱۳۰ | تابستان ۱۴۰۳ | دوره سی و سوم | ۴۸ صفحه

www.roshdmag.ir



تقدیر از شهید جمهور

مربع جادویی

عضو فداکار

ضرب سریع در عدد ۱۱



دَمَتِ گِرم و دِلَتِ خوش باد ای عشق
زَنَمِ از دِستِ تو فَریاد ای عشق

در این دنیا اگرچه سر به زیرم
سرافراز از خُمِ عید غدیرم

خُمی لبریز از آب گوارا
بده جامی به ما پروردگارا

شکفته گل کنار برکه آب
شده هفت آسمان پرورده آب

همین آبی که اکسیر حیات است
دلیل رنگ سبز هر نبات است

همین آبی که تفسیرش امام است
که با او نعمتش بر ما تمام است

همین آبی که باید تشنه اش شد
به روز مرگ باید زنده اش شد

چه روز روشنی دارم من امروز
عجب پیراهنی دارم من امروز

معطر از گلاب ناب باشد
چنین پیراهنی نایاب باشد

مگر جشن و چراغانی عید است
بلی عید است؛ این عیدی سعید است

همه خوش حال و خندان و عزیزند
همه با کینه و غم در ستیزند

تبسم بر لب است و چهره مسرور
جهان یکسر شده نور علی نور

به زیر ابر پر بارش رسیدیم
کنار او به آرامش رسیدیم

چه شب‌هایی که او محو خدا بود
به راه آسمان‌ها آشنا بود

علی معنا و مفهوم نماز است
علی دلبسته راز و نیاز است

علی چشم و چراغ کردگار است
علی پرورده پروردگار است

درون سینه‌ها مشک و عبیر است
گمانم باز هم عید غدیر است

مهدی برگ
دبیر ریاضی





وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی

فصلنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
برای دانش آموزان دوره دوم متوسطه
همیار دبیران ریاضی
دوره سی و سوم ۱۴۰۳ / تابستان ۱۴۰۳
صفحه ۴۸۱
www.rosdmdag.ir

مدیر مسئول: محمد صالح مذنبی
سر دبیر: مجید حکمت
مدیر هنری: کوروش یارسانزاد
مدیر داخلی: الهام الیکایی
ویراستار ادبی: بهروز راستانی
طراح گرافیک: روح الله محمودیان

پهنام آبتی پور | محرم ایردموسی | رحیم خیرالله زاده
آرش رستگار | محمد هاشم رستمی
محمد رضا سید صالحی | محمد تقی طاهری تنجانی
حسین نامی ساعی | محمود نصیری
سید محمد رضا هاشمی موسوی | احسان یار محمدی

وبگاه
www.rosdmdag.ir
رایانامه
borhanmotevaseteh2@rosdmdag.ir
صفحه خرید مجلات
www.rosdmdag.ir/ul2sg

نشانی دفتر مجله
تهران، ایران شهر شمالی، پلاک ۳۷۰
تلفن دفتر مجله
۰۲۱-۸۸۸۳۱۱۶۱-۹
نمابر مجله
۰۲۱-۸۸۸۴۹۰۳۱۶

صندوق پستی دفتر مجله
۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
صندوق پستی امور مشترکین
۱۵۸۷۵/۳۳۳۱
تلفن امور مشترکین
۰۲۱-۷۷۶۳۳۲۰۸

خواننده مجلات رشد همه
تلاش خود را کرده است
تا این مجله در دسترس عموم
دانش آموزان قرار گیرد و همه کودکان
و نوجوانان میهن عزیز اسلامی مان
امکان تهیه آن را داشته باشند.



کتاب شاد



وب نوشت
نظرسنجی
مجلات رشد



برگه اشتراک
مجلات رشد
قیمت: ۱۱۰۰۰۰ ریال

- سخن سر دبیر تقدیر از شهید جمهور امجد حکمت ۲۱
- مربع جادویی امجد تقی طاهری تنجانی ۳۱
- عضو فداکار (قسمت اول) | محرم ایردموسی ۸۱
- جور دیگر باید دید - تمرین های متفاوت ریاضی (قسمت چهارم) ۱
- خسرو دودی، آرش رستگار ۱۱
- تابع وارون (قسمت دوم) | امجد نصیری ۱۶۱
- ضرب سریع در عدد ۱۱ | امجد رضا شمس الدینی آگری ۲۱
- لطایف الحساب قطب الدین لاهیجی (قسمت هشتم) | احسان الیکایی ۲۱
- جعفر زیدی ۲۴۱
- چند جمله ای ها و عددهای مختلف (قسمت چهارم) | آرش رستگار ۲۶۱
- لغت و لو با برزنگان مسابقه بتا | برهان یزوهان ۳۴۱
- داستان های شیرین ریاضی امشاحی (قسمت چهارم) ۱
- سید امجد رضا هاشمی موسوی ۳۷۱
- پیشرو | نمونه سؤال های امتحان خنایی بار و دیگر مفهومی ۱
- جواد شوهانی، علی یعقوبی ۴۲۱
- چشم انداز | نمونه سؤال های آزمون سراسری بار و دیگر مفهومی | احسن عجازی ۴۵۱
- مسائل مسابقه ای و جایزه دار (قسمت هفتم) ۱
- سید امجد رضا هاشمی موسوی ۴۸۱

مجله رشد برهان ریاضی متوسطه ۲، از همه دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در این زمینه ها دعوت به همکاری می کند:

- تکثیر مقاله های کمک درسی (شرح و رفع مشکلات)
- مسابقه ای به همراه حل آن ها برای دانش آموزان
- طرح مسائل ریاضی
- تاریخ ریاضیات، زندگی نامه علمی و اجتماعی ریاضی دانان، دانشان ها و خاطرات ریاضی، نکته های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما و...
- مجله در حکم، اصلاح، حذف و افزودن به مقاله ها آزاد است.

مسئولیت هر مقاله با نویسنده آن است و مقالات ارسال بر گشت داده نمی شوند.

استفاده از مطالب مجله در کتاب ها یا مجله های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد.

مقالات خود را از طریق آدرس زیر ارسال کنید:

www.rosdmdag.ir/ul3ao

در انتهای مقاله های ارسال شده به پیوند، پستی و رایانامه (ایمیل) خود را حتما درج کنید و در ابتدای مقاله نام و نام خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمایید.

شعبه خبر جمهوری

تقدیر از

سلام همراهان عزیز

... ولی اکنون دست به ویرایش می‌زنم و با اندوه فراوان و چشمانی اشکبار ...!

خیلی جایشان خالی است ...

... از پیشگاه خداوند مهربان برای آن «سید شهیدان خدمت» که دغدغه‌های مردم را می‌دید و خالصانه و خستگی ناپذیر برای رفع مشکلات مردم تلاش می‌کرد، رحمت و مغفرت بی‌انتهای الهی را خواستاریم. و حالا از روح مطهر ایشان طلب دعای خیر می‌کنیم.

امیدواریم این روحیه خدمت و توجه به مشکلات مردم در دولتمردان آینده نیز ادامه‌دار باشد تا نوجوانان و جوانان پر تلاش ما با آرامش بیشتری مسیر رشد و پیروزی خود و ایران اسلامی را طی کنند.

روحشان شاد

اللهم صل علی محمد و آل محمد و عجل فرجه

مجید حکمت

راه‌های ارتباط

- borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir
- www.roshdmag.ir/u/3ao

اگر به خاطر داشته باشید، در فصلنامه تابستان سال گذشته، در قالب سرمقاله مجله، به سطح غیراستاندارد سؤال‌های ریاضی آزمون سراسری ۱۴۰۲ پرداختیم و انتقادهای دبیران، دانش‌آموزان و خانواده آن‌ها را مطرح کردیم. در نهایت هم از شخص محترم رئیس‌جمهور خواستیم به‌طور مستقیم در این موضوع ورود فرمایند. ایشان صدای مردم را شنیدند و «سازمان سنجش» را که چند دهه زیر نظر وزارت تحقیقات، علوم و فناوری محسوب می‌شد، تحت نظارت نهاد ریاست جمهوری قرار دادند. اکنون «سازمان ملی سنجش و ارزشیابی نظام آموزش کشور» یک سازمان مستقل محسوب می‌شود.

نخستین ثمره مستقل شدن این سازمان را امسال در نوبت اول آزمون سراسری در اردیبهشت‌ماه مشاهده کردیم؛ سؤال‌هایی استاندارد، طرح شده بر اساس منابع درسی آموزش و پرورش، از حیطه‌های شناختی متفاوت که بیشتر آن‌ها در سطح متوسط و شامل درصد قابل قبولی از سؤال‌های سخت و آسان تنظیم شده بود. به همین دلیل هم موجبات آرامش خاطر داوطلبان فراهم آمد.

پس از این آزمون بود که شروع به نوشتن کردم. با شرف فراوان مراتب تقدیر و سپاس صمیمانه خود را خدمت ریاست محترم‌جمهور، جناب آقای دکتر رئیسی به واسطه این تدبیر عالمانه ایشان می‌نگاشتم، ولی...



۲

شماره ۱۳۰ | تابستان ۱۴۰۱

مرکز گشتایی مربع جادویی

محمد تقی طاهری تنجانی

پژوهشگر ریاضی و مؤلف کتاب‌های درسی

الف) مجموع عنصرها در هر سطر یا هر ستون یا هر قطر آن (عدد جادویی) ۱۵ است.

ب) عدد مرکز مربع ۵ است.

اثبات رابطه الف ساده است. مجموع عددهای همه خانه‌های جدول برابر ۴۵ است که اگر بر سه (سطر) آن تقسیم کنیم، به عدد ۱۵ می‌رسیم. برای اثبات رابطه پ در شکل ۲ داریم:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

شکل ۲

$$a + e + i = 15$$

$$b + e + h = 15$$

$$c + e + g = 15$$

$$d + e + f = 15$$

حال اگر دو طرف تساوی‌های اخیر را با هم جمع کنیم، داریم:

$$(a + b + c + d + e + f + g + h + i) + 3e = 60$$

۴۵

$$3e = 15$$

$$e = 5$$

مربع‌های جادویی که در بعضی منابع از آن به مربع وقتی یاد می‌شود، به مربعی شامل n^2 خانه گفته می‌شود که در آن n^2 عدد طبیعی اولیه به نحوی قرار گرفته‌اند که مجموع عددهای واقع در هر سطر یا هر ستون و همچنین در هریک از قطرهای آن مقدار ثابتی باشد. البته اگر تنها مجموع عددهای واقع در هر سطر و در هر ستون آن مقداری ثابت باشد، مربع را **نیم جادویی** (نیم‌وقتی) می‌گویند.

در شکل ۱ مربع جادویی معروف به «مربع دورر» آمده است که به نام ریاضی‌دان و نقاش قرن شانزدهم نامیده می‌شود. او این جدول را در پرده نقاشی مشهور «مالیخولیا» نقش کرده است. دو عدد وسط در سطر پایین این مربع عدد ۱۵۱۴ را نشان می‌دهند که تاریخ به‌وجود آمدن پرده نقاش است.

۱۶	۳	۲	۱۳
۵	۱۰	۱۱	۸
۹	۶	۷	۱۲
۴	۱۵	۱۴	۱

شکل ۱

به ساده‌ترین نوع مربع وقتی که یک مربع 3×3 است می‌پردازیم. در این مربع، عددهای ۱ تا ۹ در خانه‌های آن قرار گرفته‌اند. ابتدا دو نکته اساسی را درباره آن ثابت می‌کنیم.



۳

شماره ۱۳۰ | تابستان ۱۴۰۱



بنابراین باید عدد ۵ در خانهٔ مرکزی مربع قرار گیرد.
 عددهای ۱ تا ۹ را در جدول شکل ۲ می‌توان به هشت طریق
 طوری نوشت که مجموع آن‌ها ۱۵ شود.

$$\begin{aligned} 15 &= 1+5+9 = 1+6+8 = 2+4+9 \\ &= 2+5+8 = 2+6+7 = 3+4+8 \\ &= 3+5+7 = 4+5+6 \end{aligned}$$

می‌بینیم که هریک از عددهای ۱، ۳، ۷ و ۹ دو بار و هریک از
 عددهای ۲، ۴، ۶ و ۸ سه بار و تنها عدد ۵ چهار بار در این مجموع‌ها
 آمده است.

از طرف دیگر، از هشت ردیف خانه‌های سه‌تایی، سه ردیف افقی،
 سه ردیف عمودی و دو ردیف قطری هستند؛ پس عددهای ۲، ۴،
 ۶ و ۸ در خانه‌های گوشه‌ای و عددهای ۱، ۳، ۷ و ۹ در بقیهٔ خانه‌ها
 قرار می‌گیرند.

چون عددهای ۲، ۴، ۶ و ۸ را تنها به هشت طریق می‌توان در
 خانه‌های گوشه‌ای مربع طوری قرار داد که مجموع هریک از قطرهای
 مساوی ۱۵ شود، وضع این عددها کاملاً وضع عددهای ۱، ۳، ۷ و ۹
 را مشخص می‌کند. می‌توان نتیجه گرفت که تنها هشت نوع مربع
 جادویی 3×3 وجود دارد.

دو مربع از این مربع‌ها که نسبت به هم قرینه‌اند، در شکل ۳
 آمده‌اند. شش مربع بقیه را می‌توان از این دو مربع با دوران آن دور
 مرکز به اندازهٔ 90° ، 180° و 270° به دست آورد.

۲	۷	۶
۹	۵	۱
۴	۳	۸

۶	۷	۲
۱	۵	۹
۸	۳	۴

شکل ۳

با زیاد کردن ابعاد مربع وفقی، به‌سرعت به تعداد انواع آن افزوده

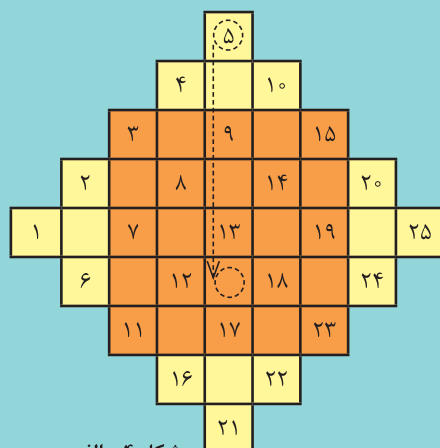
می‌شود. اگرچه هنوز رابطه‌ای برای مشخص کردن تعداد انواع
 مربع وفقی $n \times n$ مشخص نشده است (لااقل نگارنده هنوز رابطه‌ای
 ندیده است. می‌توان آن را به‌عنوان یک مسئله مطرح کرد که:
 تعداد مربع‌های وفقی $n \times n$ به‌طور کلی چه رابطه‌ای با n دارد؟)
 ولی معلوم شده است که به ازای $n=7$ تعداد این‌گونه مربع‌ها به
 صدها میلیون نوع می‌رسد.

حال روش عملی ساخت مربع‌های وفقی در حالت کلی چیست؟
 برای تشکیل مربع‌های وفقی وقتی n فرد باشد، طبقه‌های متفاوتی
 وجود دارند که به افراد متعدد نسبت دارند. یکی از زیباترین این
 روش‌ها به روش تراس مشهور است که به پاش منتسب است:



۴

شماره ۱۳۰ | تابستان ۱۴۰۵



شکل ۴ - الف

n^2 عدد را پشت سر هم، در n ردیف، موازی با یکی از قطرهای مربع می‌نویسیم؛ بدین ترتیب و به‌طور خودکار حد وسط (میانه عددها) در مرکز مربع قرار می‌گیرد؛ حالا اگر قسمت‌های اضافی مربع اصلی (مربع 5×5 نارنجی) را به دورترین خانه خالی مقابل خود در مربع اصلی انتقال دهیم، مربع وقتی به‌دست می‌آید. با استفاده از قرینه مربع وقتی ای که به دست می‌آید و دوران آن‌ها به اندازه 90° ، 180° و 270° می‌توان از «مربع پاش» هفت مربع وقتی دیگر به دست آورد.

در شکل‌های ۴ (الف و ب) مراحل فوق برای $n=5$ نشان داده شده‌اند.



۵

شماره ۱۳۰ | تابستان ۱۴۰۱

حال در شکل ۵ عددهای ۱ تا ۱۶ را از راست به چپ و از پایین به بالا در خانه‌های تیره می‌نویسیم. عددهای مربوط به خانه‌های سفید را در نظر نمی‌گیریم (شکل ۶). حالا یک مربع 4×4 خواهیم داشت.

۱	۲	۳	۴
۵	۶	۷	۸
۹	۱۰	۱۱	۱۲
۱۳	۱۴	۱۵	۱۶

شکل ۵

۱۶	۲	۳	۱۳
۵	۱۱	۱۰	۸
۹	۷	۶	۱۲
۴	۱۴	۱۵	۱

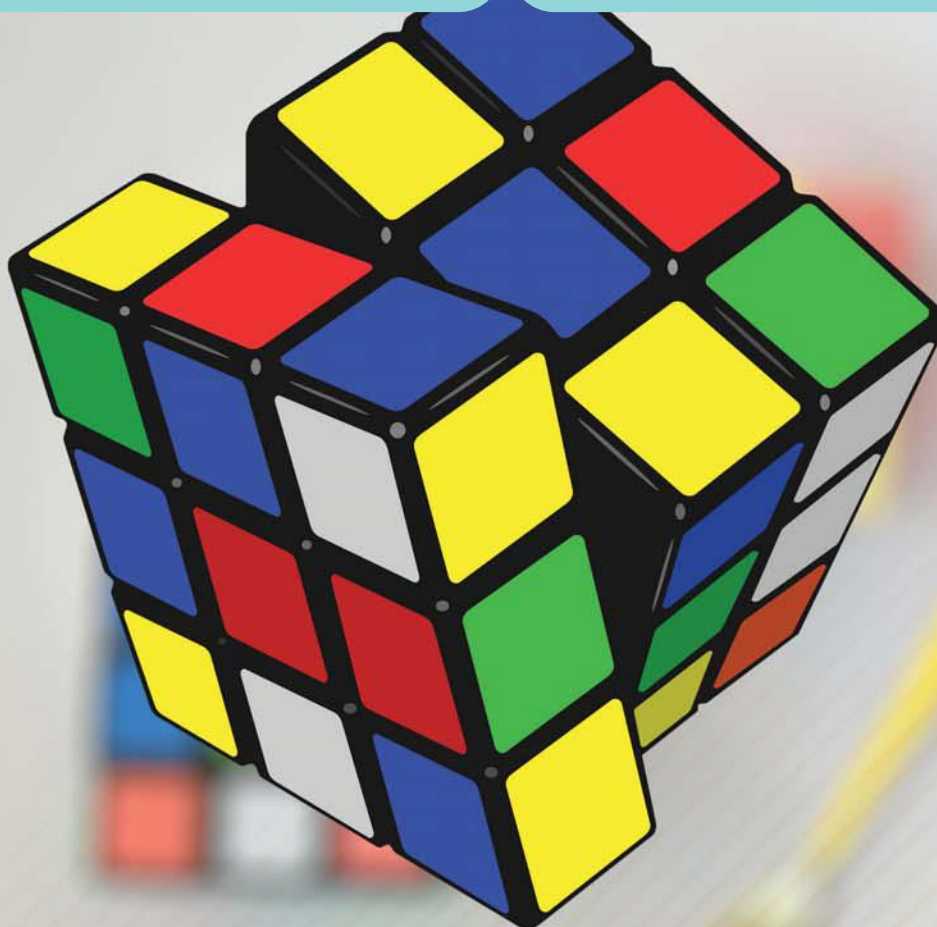
شکل ۶

۳	۱۶	۹	۲۲	۱۵
۲۰	۸	۲۱	۱۴	۲
۷	۲۵	۱۳	۱	۱۹
۲۴	۱۲	۵	۱۸	۶
۱۱	۴	۱۷	۱۰	۲۳

شکل ۴-ب

برای ساختن مربع‌های جادویی $n \times n$ در حالتی که n زوج باشد، روش‌هایی در منابع آمده‌اند که به‌سادگی حالت n فرد نیست. در ادامه چند حالت خاص n را بررسی می‌کنیم:

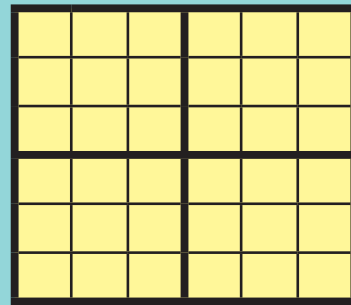
مربع 4×4 وفقی. ابتدا در مربع اولیه عددهای ۱ تا ۱۶ را قرار می‌دهیم. به سادگی ثابت می‌شود عدد جادویی در این مربع ۳۴ است.



۶

شماره ۱۳۰ | تابستان ۱۴۰۳

برای ساختن مربع وقفی 6×6 مطابق شکل (۷) یک جدول 6×6 را به چهار قسمت 3×3 تقسیم می‌کنیم. در مربع جادویی 6×6 مجموع هر سطر، هر ستون و هر قطر باید برابر ۱۱۱ باشد (چرا؟). حال در هر یک از چهار قسمت مربع 6×6 یک مربع جادویی می‌سازیم.



شکل ۷

– در قسمت بالا و سمت چپ با عددهای ۱ تا ۹
– در قسمت پایین سمت راست با عددهای ۱۰ تا ۱۸
– در قسمت بالا سمت راست با عددهای ۱۹ تا ۲۷
– در قسمت پایین سمت چپ با عددهای ۲۸ تا ۳۶
همهٔ ستون‌ها در شکل ۸ برابر ۱۱۱ است، ولی مجموع سطرهای اول، دوم و سوم برابر ۸۴ و مجموع سطرهای چهارم، پنجم و ششم برابر ۱۳۸ است.

۸۴	۸	۱	۶	۲۶	۱۹	۲۴
۸۴	۳	۵	۷	۲۱	۲۳	۲۵
۸۴	۴	۹	۲	۲۲	۲۷	۲۰
۱۳۸	۳۵	۲۸	۳۳	۱۷	۱۰	۱۵
۱۳۸	۳۰	۳۲	۳۴	۱۲	۱۴	۱۶
۱۳۸	۳۱	۳۶	۲۹	۱۳	۱۸	۱۱

شکل ۸

چون $111 - 27 = 84$ و $111 + 27 = 138$ است، پس با چند جابه‌جایی که در شکل (۹) مشخص شده است می‌توان جدول شکل ۸ را به یک مربع جادویی 6×6 تبدیل کرد (شکل ۹).

۳۵	۱	۶	۲۶	۱۹	۲۴
۳	۳۲	۷	۲۱	۲۳	۲۵
۳۱	۹	۲	۲۲	۲۷	۲۰
۸	۲۸	۳۳	۱۷	۱۰	۱۵
۳۰	۵	۳۴	۱۲	۱۴	۱۶
۴	۳۶	۲۹	۱۳	۱۸	۱۱

شکل ۹

غالباً ساخت مربع جادویی روش‌های خلاقانه‌ای دارد. شما نیز می‌توانید با تمرین و تلاش روش‌های خلاقانه‌ای برای حالت‌های دیگر مربع وقفی $n \times n$ در حالت n زوج به دست آورید.

تمرین

۱. با استفاده از روشی که در مقاله برای حالت 6×6 ذکر شد، مربع جادویی $(4n+2) \times (4n+2)$ یعنی 10×10 و 14×14 و... را بسازید.

۲. آیا با افزودن یک مقدار ثابت d به عنصرهای یک مربع جادویی، باز هم مربع جادویی خواهیم داشت؟ چرا؟

۳. با توجه به شکل، برای ساخت مربع وقفی 8×8 روشی به دست آورید.

۱	۶۳	۶۲	۴	۵	۵۹	۵۸	۸
۵۶	۱۰	۱۱	۵۳	۵	۲	۱۵	۴۹
۴۸	۱۸	۱۹	۴۵	۴۴	۲۲	۲۳	۴۱
۲۵	۳۹	۳۸	۲۸	۲۹	۳۵	۳۴	۳۲
۳۳	۳۱	۳۰	۳۵	۳۷	۲۷	۲۶	۴۰
۲۴	۴۲	۴۳	۲۱	۲۰	۴۶	۴۷	۱۷
۱۶	۵۰	۵۱	۱۳	۱۲	۵۴	۵۵	۹
۵۷	۷	۶	۶۰	۶۱	۳	۲	۶۴



۷

شماره ۱۳۰ | تابستان ۱۴۰۱

منابع

۱. الکساندر پتروویچ دوموریاد. در قلمرو ریاضیات. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات امیرکبیر، چاپ دوم. ۱۳۶۳.

2. www.takmili.com

این جهان کهنه را برهان نو شمارش در گراف ها عضو فراانار

محرم ایردموسی

عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی

همچنین تأکید کرد که اعضای مجموعه دوم یعنی E، خود زیرمجموعه‌هایی دوتایی از مجموعه اول یعنی V هستند. بعد از تعریف، خانم مهریار به سراغ کاربردهای گراف رفت و با مثال‌های متنوع نشان داد که از گراف‌ها می‌توان در مدل‌سازی مسئله‌های واقعی کمک گرفت. مانند نقشه شهرها، خطوط ارتباطی بین شهرها، شبکه‌های مخابرات، مدار چاپی الکترونیکی، شبکه‌های اجتماعی، ...

خانم مهریار بعد از ارائه کاربردهای گوناگون، به سراغ مثال‌های درسی رفت و اولین مثالی که زد این بود:

مثال ۱. چند گراف از مرتبه ۵ (مرتبه گراف $|V|$ وجود دارد؟ خانم مهریار تأکید کرد که مجموعه رأس‌ها را $V = \{v_1, v_2, \dots, v_5\}$ در نظر بگیرید و اضافه کرد که این نوع گرافی که مدنظر ماست گراف ساده می‌نامند چرا که در تعریف اصلی گراف، می‌توان یال‌های تک‌عضوی (طوقه یا حلقه) و یال‌های تکراری نیز داشت. بنابراین در شمارش، ما به دنبال گراف‌های ساده مرتبه ۵ هستیم.

اینجا بود که گوش‌های من تیز شد و در کسری از ثانیه دستم ناخودآگاه بالا رفت. راستش را بخواهید هنوز مسئله را حل نکرده بودم و دستم به‌صورت خودجوش بالا رفت. اما نگران نبودم. مغز علت این نافرمانی دستم را می‌دانست و خودش با پالس‌هایی که می‌فرستاد بانی این پیش‌دستی دستم بود. تا چیه‌ها به خودشان بیایند جواب را هم پیدا کردم. خانم مهریار گفت: «بفرمایید بانوی

من علاقه عجیبی به شمارش دارم و بچه‌ها در مدرسه به من لقب بانوی شمارش را داده‌اند. پربیراه هم نیست. از کودکی این عادت (و به قول برادر من این مرض) را داشتم که همه چیز را می‌شمرم: تیغ‌های مجری برنامه‌های تلویزیونی، درخت‌های هر کوچه، ماشین‌های پشت چراغ قرمز و حتی تعداد دانه‌های برنج هر قاشق موقع غذا خوردن!

روی همین حساب، به موضوع شمارش در کتاب‌های ریاضی که رسیدیم، سر از پا نمی‌شناختم و در واقع می‌خواستم هنرم را (تنها هنرم را) به رخ هم‌کلاسی‌هایم بکشم. اما همان‌طور که همه شما تجربه کرده‌اید حتماً تأیید می‌کنید که لحظات خوش همیشه زود تمام می‌شوند! سال یازدهم تنها سالی بود که من در تنها درس (ریاضی) و تنها در یک فصل از کتاب درخشان فوق‌العاده‌ای داشتم! بگذریم.

سال آخر دبیرستان بودیم و خانم مهریار مشغول تدریس موضوع گراف‌ها از کتاب ریاضیات گسسته بود. گراف یک موجود ریاضی بود که تا قبل از این، اسمش را نشنیده بودم. یک مجموعه با نام مجموعه رأس‌ها به همراه یک مجموعه از زیرمجموعه‌های دوعضوی مجموعه اول با نام مجموعه یال‌ها. مجموعه رأس‌ها را با V و مجموعه دوم را با E نمایش می‌دهیم. خانم مهریار وقتی تعریف گراف را گفت این را هم اضافه کرد که هر گراف مانند G را با زوج مرتب (V, E) شامل این دو مجموعه نمایش می‌دهیم. او تأکید کرد که مجموعه رئوس ناتهی است اما مجموعه یال‌ها می‌تواند تهی هم باشد.



شماره ۱۳۰ | تابستان ۱۴۰۳

شمارش. جواب چقدر است؟» گفتیم: «خانم فکر کنم ۲۵ یعنی ۳۲. خانم مهریار اخمی کرد و گفت: «نه خیر دخترم، عجله کردی» شوکه شدم! اولین اشتباه فاحشی بود که در عمرم داشتم. حتی در صورت بچه‌ها هم آثار تعجب نمایان بود. به خودم گفتیم: «خودت را جمع و جور کن» و مانند رابین هود تیر دوم را در چله کمان گذاشتم و گفتیم: «خانم، جواب ۲۱۰ است.» خانم مهریار پرسید: «چرا؟» گفتیم: «مجموعه ۵ عضوی V ، $10 = \binom{5}{2}$ زیرمجموعه دو عضوی دارد، حالا ما یک زیرمجموعه از این ۱۰ عضو را می‌خواهیم به عنوان مجموعه E . پس تعداد انتخاب‌های E می‌شود ۲۱۰ یعنی ۱۰۲۴» خانم مهریار گفت: «درسته کاملاً. بچه‌ها اینکه با ۵ رأس شما حدود ۱۰۰۰ گراف می‌توانید بسازید نشان می‌دهد تعداد گراف‌ها رشدشان برحسب تعداد رأس‌ها چقدر سریع افزایش می‌یابد.»

بعد ادامه داد: «حالا بگویید در چند تا از این گراف‌ها، درجه ۷ برابر ۲ است؟» درجه هر رأس تعداد یال‌هایی است که به آن رأس وصل است. این یکی، یک دقیقه‌ای وقتم را گرفت تا به جواب برسم. دستم را بالا بردم. خانم مهریار گفت: «چند دقیقه صبر کن تا بقیه هم به جواب برسند.» آن چند دقیقه انگار چند ساعت بود که گذشت و چون کسی دستش بالا نرفت، خانم مهریار به من اشاره کرد تا جواب را بگویم. گفتیم: «خانم من رأس ۷ را فعلاً کنار می‌گذارم. با چهار رأس باقی‌مانده می‌توان $\binom{4}{2}$ یعنی ۲۶ گراف ساخت. حالا دو



۹

شماره ۱۳۰ | تابستان ۱۴۰۱



نماند مشکلی نیست.» این دوست شما در اینجا ایثار کرده است. حالا برگردیم به مسئله خودمان. گفتیم که 2^{10} گراف از مرتبه ۵ می توان ساخت.

اینجا ما گرافهایی را می خواهیم که در آن ها درجه رأس 7_1 زوج باشد. رأس 7_2 و یال $\{7_1, 7_2\}$ را در نظر بگیرید. این یال همان یال ایثارگر است. با بقیه یال ها یعنی 9 یال دیگر یک گراف بسازید که می شود 2^9 گراف. حالا به درجه 7_1 نگاه کنید.

اگر درجه 7_1 زوج بود، دیگر نیازی به یال $\{7_1, 7_2\}$ ندارید و اگر درجه 7_1 فرد بود با اضافه کردن یال ایثارگر، به درجه 7_1 یک واحد اضافه می شود و در نتیجه زوج خواهد شد. در نتیجه برای یال $\{7_1, 7_2\}$ در هر حالت ۱ انتخاب و جود دارد. این یال انتخاب هایش را محدود و در واقع ایثار کرد در حالی که یال های دیگر هر کدام آزادانه ۲ انتخاب داشتند!

عجیب ایده ای بود. من که بانوی شمارش بودم، تا به حال این ایده عضو ایثارگر را نشنیده بودم. به این فکر می کردم که همیشه می توان چیزهای جدید یاد گرفت و هیچ وقت برای آموزش دیر نیست. خانم مهریار مجدد پای تخته رفت و مسئله زیر را پای تخته نوشت:

مسئله. چند گراف از مرتبه ۵ وجود دارد که درجه همه رئوس زوج باشد؟ بعد ادامه داد: «بچه ها این مسئله را به عهده خودتان می گذارم تا جلسه بعد روی آن فکر کنید. اینجا شرایط مسئله بیشتر از مثال قبلی است. می خواهیم درجه همه رئوس ها عددی زوج باشد. به ظاهر از مثال قبلی سخت تر است اما با همان ایده ای که گفتیم می توانید این مسئله را حل کنید.»

دقایق پایانی کلاس بود. من در افکار خودم غرق بودم. به این فکر می کردم که در مثال قبلی برای اینکه درجه رأس 7_1 زوج باشد یک یال ایثارگر داشتیم و اینجا شاید نیاز به یال های ایثارگر داشته باشیم تا همه رئوس درجه ای زوج داشته باشند و خوش حال باشند! خانم مهریار انگار که یاد چیزی افتاده باشد، گفت: «بچه ها یادم رفت نکته ای را بگویم که در حل مسئله به آن احتیاج دارید. می دانیم که در هر گراف مجموع درجات رئوس برابر با دو برابر تعداد یال هاست و در نتیجه زوج است. می توان از این قضیه نتیجه گرفت که تعداد رأس های با درجه فرد در هر گراف عددی زوج است. پیدا کردن اثبات این نتیجه را هم به عهده خودتان می گذارم تا جلسه بعد.»

یال های گرافی که در ذهنم ساخته بودم روشن و خاموش می شدند و در این میان صورت رأس های با درجه فرد بین دو وضعیت و نوسان می کردند.

اما زوج بودن تعداد رأس های ناراحت ناگهان جرقه ای را در ذهنم روشن کرد. رأس ایثارگر. ما برای حل مشکل به رأس ایثارگر نیاز داشتیم! رأسی که همه یال های مجاورش را در صورت نیاز ایثار کند!

تا از رأس های آن را انتخاب می کنم به $\binom{4}{2} = 6$ طریق و به 7_1 وصل می کنم. پس جواب می شود $2^6 \times \binom{4}{2}$ یعنی $6 \times 6 \times 4 = 384$

گراف. خانم مهریار جواب را تأیید کرد و به سمت تخته رفت تا مثال بعدی را بنویسد. مثالی که نوشت این بود:

مثال ۲. چند گراف از مرتبه ۵ وجود دارد که در آن درجه رأس 7_1 زوج باشد؟ بعد از نوشتن مثال، خانم مهریار رو به من کرد و گفت: «حالا اینو چی می گی؟» بچه ها خندیدند. انگار مرا به مبارزه طلبیده بود و من چاره ای نداشتم تا تمام داشته هایم را به کار بندم تا هم خودم و هم کلاس سربلند از این مبارزه بیایم!

قبلاً مشابه این مسئله را حل کرده بودم. اینکه یک مجموعه n عضوی چند زیرمجموعه با تعداد زوج عضو دارد. می دانستم که هر زیرمجموعه n عضوی، 2^{n-1} زیرمجموعه دارد که تعداد عضوهایش زوج است. بنابراین سعی کردم اینجا هم روش مشابهی را برای حل در پیش بگیرم. باید از ۴ یالی که به 7_1 می توانند وصل باشند، تعداد زوجی را انتخاب کنم و بقیه این یال ها را حذف کنم. بنابراین پاسخ را در دو مرحله پیدا کردم. گفتم: «خانم جواب برابر است با

$2^3 \times \binom{4}{2}$ یعنی 2^9 ». خانم مهریار آفرینی گفت و خواست که پای تخته بروم و راه حل را بنویسم.

پای تخته رفتم و نوشتم: «رأس 7_1 را فعلاً کنار می گذاریم. با بقیه می توان $\binom{4}{2}$ یعنی 2^6 گراف ساخت. حالا از ۴ یالی که 7_1 را به بقیه وصل می کند باید تعداد زوجی را انتخاب کنیم که برابر است

با $8 = \binom{4}{0} + \binom{4}{2} + \binom{4}{4}$ یا همان 2^3 . در نتیجه جواب برابر است با $2^3 \times 2^6 = 2^9$ »

خانم مهریار راه حل را تأیید کرد و گفت: «بچه ها یک راه حل دیگر برای این مثال هست که من نام آن را **عضو ایثارگر** می نامم. فرض کنید می خواهید تعدادی کتاب را به دوستانتان هدیه بدهید اما تعداد کتاب ها از تعداد دوستانتان یکی کم تر است. در اینجا یکی از دوستانتان پا پیش می گذارد و می گوید: «اول کتاب ها را بین بقیه تقسیم کن. اگر کتابی ماند در آخر هدیه مرا هم بده. اگر هم

قسمت چهارم

چون دیگر باید دید تمرین‌های متفاوت ریاضی

خسرو داودی
آرش رستگار

و به تعداد یال‌ها زاویه بین وجوه از جنس $\langle \overline{OAB}, \overline{ABC} \rangle$ و دوازده زاویه بین وجه و یال از جنس $\langle \overline{ABC}, \overline{OA} \rangle$. همه این‌ها را باید بتوان از اطلاعات اولیه‌ای که شکل را به طور یگانه مشخص می‌کنند، محاسبه کرد.

الف) قضیه فیثاغورس برای یک چهاروجهی با کنج قائمه بدین قرار است:

$$V_{ABC}^2 = V_{OAB}^2 + V_{OAC}^2 + V_{OBC}^2$$

سعی کنید این قضیه را ثابت کنید.

ب) برای اینکه با تقریب تشابه چهاروجهی را مشخص کنید، باید یک یال یا یک سطح را به طول یا مساحت واحد بگیریم. اگر طول OA را یک بگیریم، زاویه‌های $\hat{A}_{OC}, \hat{A}_{OB}$ و وجه $\overline{OAB}, \overline{OAC}$ را مشخص می‌کنند و این همه شکل را به طور یگانه به دست می‌دهد. همه اجزای بالا را برحسب نسبت‌های مثلثاتی این دو زاویه محاسبه کنید.

ج) مساحت V_{ABC} را یک بگیرید. با داشتن دو زاویه $\langle \overline{OAB}, \overline{ABC} \rangle$ و $\langle \overline{OAC}, \overline{ABC} \rangle$ شکل به طور یگانه مشخص می‌شود. همه اجزای بالا را برحسب نسبت‌های مثلثاتی این دو زاویه محاسبه کنید.

د) بین زاویه $\langle \overline{OAB}, \overline{ABC} \rangle$ و زاویه $\langle \overline{ABC}, \overline{OA} \rangle$ چه رابطه‌ای برقرار است؟

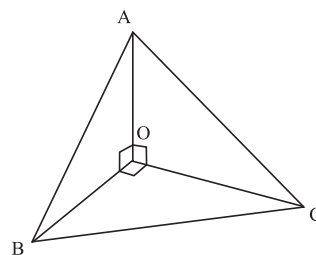
ه) آیا می‌توانید حدس بزنید قضیه فیثاغورس در ابعاد بالا چگونه فرمول‌بندی می‌شود؟ مثلاً برای یک کنج قائمه در چهار بعد، قضیه فیثاغورس را فرمول‌بندی کنید.

مسئله ۲. مثلی کروی را در نظر بگیرید (شکل ۲) که اضلاع آن کمان‌های BC ، AC و AB باشند که زاویه‌های رأس‌های آن قائمه‌اند.

مسئله‌های کتاب یازدهم

فصل چهارم: مثلثات

مسئله ۱. می‌خواهیم در کنج شکل ۱، مثلثات سه‌بعدی پایه‌ریزی کنیم. برای این کار به قضیه فیثاغورس نیاز داریم. ابتدا اجزا را نام‌گذاری می‌کنیم. رأس‌ها را O, A, B, C می‌نامیم که O همان کنج قائمه است. زاویه‌هایی را که از رأس A خارج می‌شوند، $\hat{A}_{OC}, \hat{A}_{OB}, \hat{A}_{BC}$ می‌نامیم. همین نام‌گذاری را برای سایر رأس‌ها به کار می‌بریم. وجه‌ها را $\overline{OAC}, \overline{OBC}, \overline{OAB}, \overline{ABC}$ می‌نامیم.



شکل ۱

زاویه‌های بین وجه‌ها را با $\langle \overline{OAB}, \overline{ABC} \rangle$ و مانند آن نمایش می‌دهیم. زاویه‌های بین وجه و یال را با $\langle \overline{ABC}, \overline{OA} \rangle$ نشان می‌دهیم. اجزای چهاروجهی با کنج قائمه بالا عبارت‌اند از چهار رأس، چهار وجه و چهار مساحت وجوه که با V_{ABC} و مانند آن نمایش می‌دهیم، شش طول یال و دوازده زاویه از جنس $\hat{A}_{BC}$



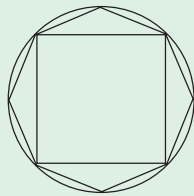
۱۱

شماره ۱۳ | تابستان ۱۴۰۱

مسئله‌های کتاب یازدهم

فصل پنجم: حد و پیوستگی

مسئله ۱. در یک دایره 2^n ضلعی‌های منتظم را محاط می‌کنیم. در هر مرحله یک مثلث متساوی‌الساقین روی یک ضلع 2^n ضلعی منتظم بنا می‌کنیم و یک 2^{n+1} ضلعی منتظم درست می‌شود. می‌توان همین کار را با 2^n ضلعی‌های منتظم کرد و در هر مرحله یک دوزنقه روی یک ضلع 2^n ضلعی منتظم بنا کرد و یک 2^{n+1} ضلعی منتظم درست کرد (شکل ۳). چه دلیل فلسفی می‌توانید ارائه کنید که 2^n ضلعی‌های منتظم در حد به همان چیزی میل می‌کنند که 2^{n+1} ضلعی‌های منتظم میل می‌کنند.



شکل ۳

(به‌طور موقت، موجودی به نام دایره را فراموش کنید و یک بی‌نهایت ضلعی ایدئال‌سازی شده را در نظر آورید.)

مسئله ۲- الف) خانواده‌ای از دایره‌ها بسازید که در حد به یک خط میل کنند.

(ب) خانواده‌ای از خط‌ها بسازید که در حد به یک خط میل کنند و این میل کردن را به زبان عددی ترجمه کنید. آیا می‌توانید این خانواده از خط‌ها را چنان انتخاب کنید که در نقطه خاصی مشترک نباشند؟ به خط‌های مماس بر یک منحنی فکر کنید.

(ج) خانواده‌ای از کرات در فضا بسازید که در حد به یک صفحه میل کنند.

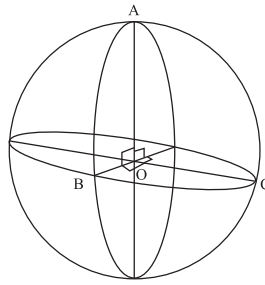
(د) خانواده‌ای از صفحات در فضا بسازید که در حد به یک صفحه میل کنند.

(ه) خانواده‌ای از چندوجهی‌های محدب با منتهای وجه بسازید که در حد، به سمت یک کره میل کنند.

مسئله ۳- الف) دو نقطه روی محیط یک دایره در نظر بگیرید و یکی را ثابت نگه دارید و دیگری را به نقطه ثابت میل دهید. وتر واصل بین دو نقطه به چه چیزی میل می‌کند؟ خط گذرنده از دو نقطه به چه چیزی میل می‌کند؟ آیا می‌توانید این موجود حدی را بدون استفاده از نقطه متغیر بسازید؟

(ب) دو نقطه روی محیط یک بیضی در نظر بگیرید و یکی را ثابت نگه دارید و به همان سؤال‌های قسمت (الف) پاسخ دهید.

(ج) بیضی مکان هندسی نقاطی است که مجموع فاصله‌های آن‌ها از دو نقطه به نام کانون ثابت است. از نقطه ثابت بالا به دو کانون بیضی وصل کنید. آیا می‌توانید خط حدی را برحسب این دو باره‌خط بیان کنید؟



شکل ۲

الف) زاویه هر رأس یک مثلث کروی را که اضلاع آن کمان‌هایی از دایره عظیمه کره هستند، چگونه تعریف می‌کنید؟
ب) چرا در سطح کره فقط یک مثلث وجود دارد که سه رأس آن قائمه باشند؟

(ج) از مرکز کره به رأس‌های A، B و C از یک مثلث با تمام زاویه‌های قائمه وصل کنید و ببینید مشابه روابط برقرار در یک چهاروجهی اقلیدسی چه می‌توان گفت؟

(د) حال فرض کنید زاویه‌های $\hat{O}_{AC}$ ، $\hat{O}_{BC}$ ، $\hat{O}_{AB}$ قائمه نباشند. با داشتن این زاویه‌ها چهاروجهی کروی ما به طول یگانه مشخص می‌شود. شعاع کره را واحد فرض کنید. حال تمام اجزای این چهاروجهی را که مشابه اجزای چهاروجهی اقلیدسی هستند، به کمک روش‌های مثلثاتی محاسبه کنید.

(ه) برای یک مثلث دلخواه روی سطح کره به کمک روش‌های مثلثاتی زاویه‌های $\hat{O}_{AC}$ ، $\hat{O}_{BC}$ ، $\hat{O}_{AB}$ را محاسبه کنید.

(و) برای یک مثلث دلخواه روی سطح کره مشابه قضیه سینوس‌ها و قضیه کسینوس‌ها را ثابت کنید.

مسئله ۳. فرمول‌های سینوس و کسینوس مجموع زاویه‌ها در مثلثات کروی را با جست‌وجو در اینترنت به دست آورید. فرمول‌های مثلثات هذلولوی را نیز در اینترنت جست‌وجو کنید. بعد بین اتحادهای مثلثاتی در مثلثات کروی و مثلثات هذلولوی و مثلثات اقلیدسی تناظر برقرار سازید.

پی‌نوشت

۱. دقت کنید که این هم یک روش نام‌گذاری زاویه‌ها با مرکزیت رأس زاویه می‌باشد.



۱۲

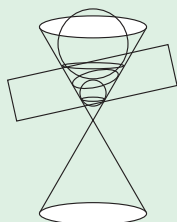
شماره ۱۳۰ | تابستان ۱۴۰۱



شکل ۴

به کمک مقطع‌های یک مخروط دوار نشان دهید سهمی حد تعدادی هذلولی نیز هست.

ز) ثابت کنید مقطع‌های یک مخروط دوار، سهمی، هذلولی، بیضی یا دو خط متقاطع یا دو یا یک خط دوپل یا یک تک‌نقطه هستند. از شکل ۵ برای اثبات در حالت بیضی کمک بگیرید و همین ایده را برای سایر حالت‌ها به کار ببرید.



شکل ۵

د) سهمی مکان هندسی نقطه‌هایی است که فاصله آن‌ها از یک خط داده شده با فاصله آن‌ها از یک نقطه ثابت به نام کانون سهمی بیرون آن خط برابر است. نقطه‌ای روی سهمی ثابت بگیرید و به سؤال‌های بالا پاسخ دهید. آیا می‌توانید خط حدی را برحسب کانون سهمی و خط محور تقارن سهمی مشخص کنید؟

راهنمایی: سهمی در واقع یک بیضی است که یک کانون آن به سوی بی‌نهایت میل کرده است.

ه) به کمک مقطع‌های یک مخروط دوار نشان دهید سهمی حد تعدادی بیضی است.

و) هذلولی مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحه است که تفاضل فاصله‌های آن‌ها از دو نقطه ثابت به نام کانون هذلولی برابر عددی ثابت است. نقطه‌ای روی هذلولی ثابت بگیرید و به سؤال‌های بالا پاسخ دهید. آیا می‌توانید خط حدی را برحسب دو پاره‌خط که نقطه ثابت‌شده را به کانون‌ها وصل می‌کنند بیان کنید (شکل ۴)؟

➤ پاسخ
تمرین‌های
پایه یازدهم



➤ نکات تکمیلی
برای دبیران
پایه یازدهم



۱۳

شماره ۱۳ | تابستان ۱۴۰۱

ج) آیا بدون دانستن صورت گسسته قضیه اساسی حسابان،

صورت پیوسته آن را درست می‌فهمیدید؟

د) صورت گسسته قضیه اساسی حسابان حکمی بدیهی است.

آیا بدون دانستن مشابَهت صورت پیوسته و گسسته قضیه اساسی

حسابان، اهمیت صورت گسسته آن را درمی‌یافتید؟

مسئله ۲. در عهد باستان خط مماس بر دایره را با عمودکردن

بر شعاع واصل به مرکز می‌شناختند. همین ایده را می‌توان برای

صفحه مماس بر یک نقطه روی سطح کره به کار برد. در عهد

باستان خط مماس بر بیضی را با عمودکردن بر نیمساز پاره‌خط‌های

واصل از نقطه مرزی به دو کانون بیضی می‌شناختند. همین ایده را

می‌توان برای صفحه مماس بر یک نقطه روی بیضی گون دوار به کار

برد. جزئیات تعریف را کامل کنید. در اینجا از تعریف مکان هندسی

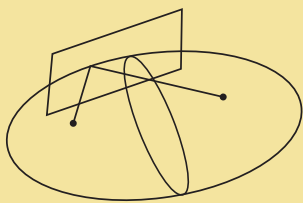
بیضی گون دوار استفاده شده است. تلاش کنید برای بیضی گون

غیردوار که مقطع‌های آن بیضی هستند یک تعریف مکان هندسی

ارائه دهید و صفحه مماس بر بیضی گون غیردوار را بر اساس این

تعریف بسازید. توجه داشته باشید که در این تلاش پای از ریاضیات

کلاسیک بیرون گذاشته‌اید.



شکل ۷

مسئله ۳. نمودار تابع $y = \frac{1}{x}$ را در نظر بگیرید. این نمودار یک

هذلولی است.

الف) نقطه‌ای را روی نمودار به سمت بی‌نهایت میل دهید. خط

مماس بر نمودار در این نقطه به چه خطی میل می‌کند؟

ب) حال نقطه را به شاخه دیگر هذلولی میل دهید، به طوری که

مختصات طول نقطه به سمت صفر میل کند. خط مماس بر نمودار

در این نقطه به چه خطی میل می‌کند؟

ج) به کمک قسمت‌های قبل تعریفی از خط مجانب برای یک

نمودار ارائه و بررسی کنید آیا برای مجانب‌های کج این تعریف کار

می‌کند یا خیر.

د) آیا این تعریف به شما کمک می‌کند بگویید چرا نمودار $y = x^2$

مجانبی درجه دوم برای تابع $y = \frac{1}{x} + x^2$ است؟

مسئله ۴. به جای بهترین خط تقریب‌زننده یک نمودار می‌توان

بهترین دایره تقریب‌زننده یک نمودار را رسم کرد. اگر شعاع این

دایره r باشد، به عدد $\frac{1}{r}$ خمیدگی نمودار می‌گویند. به نظر شما

چرا به خود r خمیدگی نمی‌گویند؟ مگر $\frac{1}{r}$ چه خاصیتی دارد که

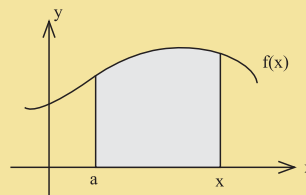
r نداشته است؟

مسئله‌های کتاب دوازدهم

فصل چهارم: مشتق

مسئله ۱. برای تابع پیوسته و مشتق‌پذیر $f(x)$ مساحت زیر

منحنی از نقطه a تا نقطه x را مطابق شکل ۶ در نظر بگیرید.



شکل ۶

این مساحت تابعی از x است و آن را با نماد $F_f(x)$ نمایش دهید.

حال شیب خط مماس بر منحنی نمودار f را نیز در نظر بگیرید که

تابعی از x خواهد بود و آن را با $f'(x)$ نمایش دهید. قضیه اساسی

حساب دیفرانسیل و انتگرال به ما دو تساوی زیر را می‌گوید:

$$F_f'(x) = f(x) \quad (*)$$

$$F_f(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (**)$$

حال می‌خواهیم مشابَهی گسسته برای قضیه اساسی حساب

دیفرانسیل و انتگرال معرفی کنیم. دنباله $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ را در نظر

گیرید. به آن دو دنباله $\{F(n)\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{\Delta f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ را نسبت

می‌دهیم. تعریف کنید: $F(n) := \sum_{k=a}^n f(k)$ که در آن a عددی

صحیح است. همچنین قرار دهید:

$$\Delta f(n) := f(n) - f(n-1)$$

الف) تحلیل کنید که چرا $\Delta f(n)$ مشابَه گسسته $f'(x)$ و

$F(n)$ مشابَه گسسته $F(x)$ است.

ب) مشابَه فرمول‌های $(*)$ و $(**)$ را در حالت گسسته تحقیق

کنید.



۱۴

شماره ۱۳۵ | تابستان ۱۴۰۵

خودتان نمودار تابع زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید:

$$\begin{aligned} ax^2, bx \\ ax^2 + bx \\ ax^2 + bx + c \\ P(x) = ax^2 + bx + c &\Rightarrow P(0) = c \\ P'(x) = 2ax + b &\Rightarrow P'(0) = b \\ P''(x) = 2a &\Rightarrow P''(0) = 2a \end{aligned}$$

(ه) قرار دهید: $x = 0$ و نتیجه بگیرید:

$$\begin{aligned} P(h) &= P(0) + \frac{h}{1!} P'(0) + \frac{h^2}{2!} P''(0) \\ P(h) &= c + bh + ah^2 = ah^2 + bh + c \end{aligned}$$

آیا این محاسبه قابل تعمیم است؟

(و) همین کار را برای یک تابع چندجمله‌ای درجه سوم انجام دهید:

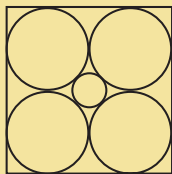
$$ax^3, bx^3, ax^3 + bx^3, cx, ax^3 + bx^3 + cx, ax^3 + bx^3 + cx + d$$

را با ضرایب‌های ثابت به انتخاب خودتان در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

(ز) بسط ماکلورن را که حالت $x = 0$ در بسط تیلور است به استقرا ثابت کنید.

$$P(h) = P(0) + \frac{h}{1!} P'(0) + \dots + \frac{h^n}{n!} P^{(n)}(0)$$

مسئله ۳. در یک مربع واحد چهار دایره مطابق شکل محاط کنید (شکل ۸) و دایره‌ای داخل آن‌ها به شعاع c_p بر هر چهار دایره مماس کنید. در بعد سوم می‌توان هشت کره داخل یک مکعب محاط کرد. شعاع کره مرکزی که بر هر هشت کره مماس می‌شود را c_p بنامید.



شکل ۸

نشان دهید که شعاع c_n همواره رشد می‌کند. کره ۹ بعدی در مرکز مکعب ۹ بعدی بر وجود مکعب مماس می‌شود و برای $n \geq 1$ کره مرکزی از مکعب بیرون می‌زند! سپس این نکات را به زبان بیشینه فرمول‌بندی کنید.



پاسخ
نمونه‌های
پایه دوازدهم



نکات تکمیلی
برای دبیران
پایه دوازدهم



مسئله‌های کتاب دوازدهم

فصل پنجم: کاربردهای مشتق

مسئله ۱. نشان دهید اگر خم بسته‌ای چنان باشد که مساحت محصور در آن بیشینه باشد، آنگاه:

(الف) قسمت محصور شده حتماً محدب است. یعنی خط واصل بین هر دو نقطه کاملاً در آن ناحیه قرار می‌گیرد.

(ب) هر خط منصف محیط یک خط منصف مساحت است.

(ج) هر پاره‌خط منصف محیط از هر نقطه روی خم با یک زاویه قائمه دیده می‌شود.

(د) نتیجه بگیرید که مساحت محصور حتماً یک دایره است.

(ه) حال بررسی کنید کدام یک از مراحل استدلال بالا برای بُعد بالاتر جواب می‌دهد. نشان دهید هر رویه به شکل کروی که سوراخ نداشته باشد ولی کج و معوج باشد، اگر حجم محصور در آن بیشینه باشد، آنگاه کره است!

(و) نشان دهید بین همه مستطیل‌های دارای محیط یکسان، مربع بیشترین مساحت را دارد. می‌توانید از مشتق کمک بگیرید.

(ز) نشان دهید بین همه مستطیل‌های محاط در یک دایره ثابت، مربع بیشترین مساحت را دارد.

(ح) نشان دهید بین همه چهارضلعی‌های محاط در یک دایره ثابت، مربع بیشترین مساحت را دارد.

(ط) آیا این حکم برای n ضلعی‌های محاط در یک دایره ثابت برقرار است؟ آیا n ضلعی منتظم بیشترین مساحت را دارد؟

(ی) آیا بین n ضلعی‌های با محیط ثابت، n ضلعی منتظم بیشترین مساحت را دارد؟

(ک) آیا حکم‌های بالا را می‌توان به شکل‌های دارای مساحت ثابت با کمترین محیط ترجمه کرد؟

مسئله ۲. به طور فرمال، مشتق یک چندجمله‌ای را به صورت زیر تعریف کنید:

$$\text{اگر: } P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

$$P'(x) = na_n x^{n-1} + \dots + a_1$$

بدون اینکه به حد و خط مماس مراجعه کنید، حکم‌های زیر را برای مشتق چندجمله‌ای‌ها ثابت کنید:

$$(aP(x) + bQ(x))' = aP'(x) + bQ'(x) \quad (\text{الف})$$

$$(P(x)Q(x))' = P'(x)Q(x) + P(x)Q'(x) \quad (\text{ب})$$

(ج) اگر $P(x)$ یک چندجمله‌ای درجه n باشد:

$$P(x+h) = P(x) + \frac{h}{1!} P'(x) + \dots + \frac{h^n}{n!} P^{(n)}(x)$$

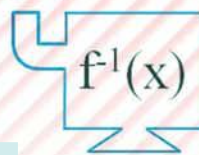
راهنمایی: می‌توانید از استقرا ریاضی کمک بگیرید.

(د) برای یک چندجمله‌ای درجه دوم با ضرایب‌های ثابت، به انتخاب



۱۵

شماره ۱۳۰ | تابستان ۱۴۰۱



تابع وارون

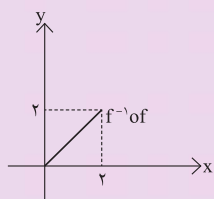
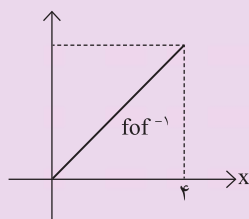
محمود نصیری

مدرس ریاضی و مؤلف کتب درسی

به ازای هر $y \in D_f$ داریم، $f(f^{-1}(y)) = y$ بنابراین، ترکیب هر تابع و تابع وارون یا ترکیب تابع وارون و خود تابع یک تابع همانی است. اما در حالت کلی این دو تابع همانی متفاوت هستند. $f^{-1} \circ f$ یک تابع همانی در دامنه f و $f \circ f^{-1}$ یک تابع همانی در دامنه f^{-1} یا همان برد f است. مثلاً اگر $f(x) = x^2$ و $0 \leq x \leq 2$ آن گاه $0 \leq y \leq 4$ و $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ و $0 \leq x \leq 4$ متغیر مستقل در هر دو تابع و تابع وارون یکی است.

$$f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x, \quad 0 \leq x \leq 4$$

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2) = \sqrt{x^2} = |x| = x, \quad 0 \leq x \leq 2$$



مشاهده می کنیم که این دو تابع همانی مساوی نیستند.

مسئله ۳. در چه صورت دو تابع $f^{-1} \circ f$ و $f \circ f^{-1}$ مساوی اند؟ در تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 2x$ در بازه $[2, 5]$ وارون آن را محاسبه کنید، سپس تابع های $f^{-1} \circ f$ و $f \circ f^{-1}$ را با دامنه آنها مشخص کنید.

در شماره قبلی مفهوم تابع وارون، و هر آنچه را برای فهم بهتر تابع وارون لازم است بررسی کردیم و روش عملی پیدا کردن تابع وارون را به طور دقیق با بیان مثال هایی توضیح دادیم. اکنون در این بخش درباره ویژگی هایی از تابع وارون بحث و بررسی می کنیم.

ویژگی هایی از تابع وارون

۱. روشی عملی برای رسم دقیق نمودار تابع وارون

روشی را که در تعریف تابع وارون به کمک نقش متغیرهای مستقل وابسته بیان کردیم، زمینه ای را برای رسم دقیق نمودار تابع وارون ارائه می دهد که یک روش عملی محسوب می شود. نموداری از یک تابع یک به یک یا وارون پذیر f را روی دستگاه محورهای مختصات استاندارد رسم کنید، استاندارد به این معنی که محور متغیر مستقل افقی و محور وابسته قائم باشد.

برای رسم مداد یا خودکار را فشار دهید تا اثر نمودار از پشت صفحه مشخص باشد. سپس جای دو محور x ها و y ها را عوض کنید به طوری که محور افقی $Y'Y$ و محور قائم $X'X$ شود. اکنون صفحه کاغذ را از پشت مقابل نور قرار داده و به آن نگاه کنید، یا نمودار را از پشت صفحه پر رنگ کنید. نمودار f^{-1} را در موقعیت طبیعی محورها یا همان موقعیت استاندارد و به طور دقیق مشاهده خواهید کرد. درست مانند آن است که قرینه نمودار f را نسبت به خط $y = x$ پیدا کرده باشید.

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

یعنی وارون، وارون هر تابع خود آن تابع است.

۳. ترکیب تابع و تابع وارون

در تعریف تابع وارون مشاهده کردیم که اگر f تابعی از D_f به R_f باشد آن گاه؛

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad x \in D_f \quad \text{داریم؛}$$



۱۶

شماره ۱۳۰ | تابستان ۱۴۰۵

۴. ترکیب وارون‌ها

اگر تابع‌های f و g وارون‌پذیر باشند. آن‌گاه تابع‌های $f \circ g$ و $f \circ g$ نیز در صورتی که تعریف شوند وارون‌پذیرند و $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.
و این برای هر تعداد متناهی از تابع‌های وارون‌پذیر درست است.
 $(f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) = f \circ (g \circ g^{-1}) \circ f^{-1} = f \circ I_1 \circ f^{-1} = f \circ f^{-1} = I_1$
و I_1 و I_2 تابع‌های همانی هستند.

از این ویژگی و ویژگی وارون عمل‌های جبری دیگر، می‌توانیم با انجام معکوس عمل‌ها روشی را برای پیدا کردن وارون تابع‌ها به کار ببریم.

به‌طور مثال تابع با ضابطه $f(x) = 7 - x^3$ را در نظر بگیرید.
ابتدا عملیاتی را که روی x انجام شده تا به $f(x)$ رسیده‌ایم، در سمت چپ و سپس عملیاتی برعکس، که روی x انجام می‌دهیم تا از x به $f^{-1}(x)$ برسیم را در سمت راست مشاهده می‌کنیم.

$$x \quad \sqrt[3]{7-x} = f^{-1}(x)$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow \text{ریشه سوم} & \longleftrightarrow & \downarrow \text{توان ۳ رساندن} \\ x^3 & & 7-x \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow \text{تقسیم بر ۱-} & \longleftrightarrow & \downarrow \text{ضرب در ۱-} \\ x-7 & & -x^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow \text{منها با ۷} & \longleftrightarrow & \downarrow \text{جمع با عدد ۷} \\ x & & f(x) = -x^3 + 7 \end{array}$$

در واقع منها، جمع را و تقسیم، ضرب را و ریشه سوم، توان ۳ را خنثامی‌کنند.

می‌دانیم تابع‌های لگاریتمی و نمایی وارون هم هستند، یکدیگر را خنثامی‌کنند.

$$f(x) = y = \log_3 x \Leftrightarrow x = 3^y \Leftrightarrow f^{-1}(x) = 3^x$$

همچنین ریشه و توان نیز وارون یکدیگر هستند.

$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} \Leftrightarrow x = y^n \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$$

برای n زوج نیز درست است، اما دو حالت داریم.
با استفاده از این ویژگی‌ها، مشابه مثال قبل نشان دهید اگر

$$f^{-1}(x) = \sqrt[5]{1 + \log_3 2^x} \quad \text{آن‌گاه} \quad f(x) = \sqrt[5]{1 + \log_3 2^{x^3}}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow \text{ریشه پنجم} & \longleftrightarrow & \downarrow \text{توان ۵} \\ 1 + \log_3 2^{x^3} & & x \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow \text{منهای ۱} & \longleftrightarrow & \downarrow \text{جمع با ۱} \\ x^5 - 1 & & \log_3 2^{x^3} \end{array}$$

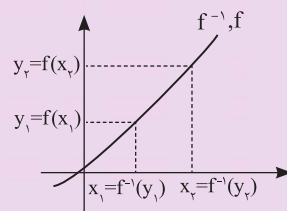
$$\begin{array}{ccc} \downarrow \text{لگاریتم در مبنای ۲} & \longleftrightarrow & \downarrow \text{تابع نمایی با پایه ۲} \\ 2^{\log_3 2^{x^3}} & & 2^{x^5 - 1} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow \text{تابع نمایی با پایه ۳} & \longleftrightarrow & \downarrow \text{لگاریتم در مبنای ۳} \\ 3^{2^{\log_3 2^{x^3}}} & & 3^{2^{x^5 - 1}} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow \text{توان سوم} & \longleftrightarrow & \downarrow \text{ریشه سوم} \\ x & & f(x) = \sqrt[3]{\log_3 2^{x^5 - 1}} \end{array}$$

۵. تغییرات تابع و تابع وارون

یکی از مزیت‌های تعریف تابع وارون در حالتی که معادله‌ها یکی هستند و فقط نقش متغیر مستقل و وابسته عوض می‌شود این است که بعضی از ویژگی‌های تابع وارون نیاز به اثبات ندارند و حتی به‌طور شهودی قابل مشاهده هستند. در شکل، f صعودی اکید است، f^{-1} نیز صعودی اکید است، به محورهای متغیر مستقل در f و f^{-1} توجه کنید با محاسبه نیز می‌توان نشان داد وقتی f تابعی صعودی اکید است، f^{-1} نیز صعودی اکید است. برای f از $x_1 < x_2$ نتیجه می‌شود $y_1 < y_2$ اکنون y_1 و y_2 ورودی‌ها برای f^{-1} هستند پس از $y_1 < y_2$ نتیجه می‌شود $x_1 < x_2$ ، یعنی $x_1 = f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) = x_2$.



زیرا اگر $x_1 \geq x_2$ آن‌گاه از صعودی اکید بودن f داریم،
 $f(x_1) \geq f(x_2)$ یعنی $y_1 \geq y_2$ که متناقض فرض $y_1 < y_2$ است.
به همین ترتیب برای حالت نزولی اکید برقرار است. یعنی قضیه زیر را داریم؛

قضیه: اگر f از D_f به R_f تابعی صعودی اکید (نزولی اکید) باشد آن‌گاه f^{-1} وارون آن از $D_{f^{-1}} = R_f$ به $R_{f^{-1}} = D_f$ صعودی اکید (نزولی اکید) است.



۱۷

شماره ۱۳۰ | تابستان ۱۴۰۱

بدون محاسبه ضابطه تابع وارون توانستیم دامنه f^{-1} و تغییرات آن را مشخص کنیم. محاسبه وارون این تابع خیلی هم سر راست نیست، زیرا شامل نماد جزء صحیح است.

یک روش آن است که آن را به تابع چند ضابطه تبدیل کنیم که اگر تعداد بازه‌ها زیاد باشد، مسلماً مشکل است. اما به طور مستقیم کمی به تفکر بیشتر نیاز دارد. اگر $y = x + [x]$ را بخواهیم x را بر حسب y پیدا کنیم باید بتوانیم $[x]$ را نیز بر حسب y محاسبه کنیم، اگر از دو طرف معادله جزء صحیح بگیریم، این کار امکان پذیر است. $[y] = [x + [x]]$ ، اما $[x] = [y]$ چرا؟ در نتیجه

$$[x] = \frac{1}{2}[y]$$

بنابراین از $y = x + [x]$ داریم، $y = x + \frac{1}{2}[y]$ در نتیجه $x = y - \frac{1}{2}[y]$ اکنون x را به y و y را به x تبدیل می‌کنیم. $y = x - \frac{1}{2}[x]$ در نتیجه $f^{-1}(x) = x - \frac{1}{2}[x]$

مسئله ۴. وارون تابع با ضابطه $y = x + [x]$ را به همین روش محاسبه کنید. ابتدا دو طرف معادله را در ۳ ضرب کنید و نشان دهید $[3x] = 3[y]$ و سپس نشان دهید $f^{-1}(x) = x - \frac{1}{3}[3x]$

۶. تقاطع تابع و تابع وارون

تابع با ضابطه $y = f(x)$ مفروض است، هرگاه نقطه به طول c در دامنه تابع وجود داشته باشد به طوری که $f(c) = c$ ، آن‌گاه نقطه (c, c) را نقطه ثابت تابع f می‌نامیم. در واقع نقطه ثابت یک تابع در صورت وجود، نقطه تلاقی نمودار تابع با خط $y = x$ است.

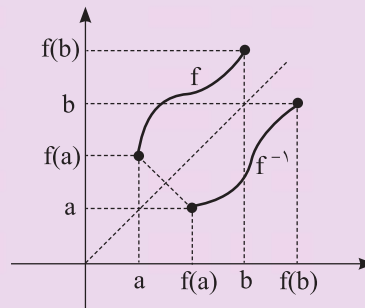
مثلاً، هر تابع با ضابطه $f(x) = ax + b$ با شرط $a \neq 1$ همواره خط $y = x$ را قطع می‌کند.

از معادله $f(c) = c$ داریم، $c = \frac{b}{1-a}$. پس $(\frac{b}{1-a}, \frac{b}{1-a})$ نقطه ثابت هر تابع خطی $y = ax + b$ با شرط $a \neq 1$ است.

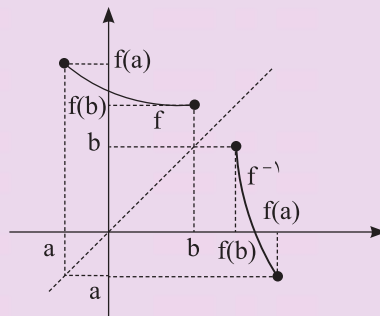
این نقطه ثابت، در تابع وارون اهمیت دارد، زیرا اگر f تابعی وارون پذیر و $f(c) = c$ ، آن‌گاه $f^{-1}(c) = c$. پس، نقطه (c, c) در تمام نقطه‌هایی است که در تابع و تابع وارون مشترک هستند. بنابراین تعریف تابع وارون، اگر $(a, b) \in f$ ، آن‌گاه $(b, a) \in f^{-1}$ ، پس اگر $(a, b) \in f$ و $(b, a) \in f^{-1}$ ، یعنی نقطه‌های (a, b) و (b, a) روی هر دوی f و f^{-1} واقع‌اند و در واقع نقطه‌های مشترک یا تلاقی دو تابع f و f^{-1} در صورت وجود می‌باشند.

به‌طور مثال، وارون تابع با ضابطه $y = f(x) = -x^3$ با ضابطه $y = f^{-1}(x) = -\sqrt[3]{x}$ است. مشاهده می‌کنیم که $(1, -1)$ و $(-1, 1)$ روی هر دوی f و f^{-1} واقع‌اند، البته $(0, 0)$ نیز

f از $[a, b]$ به روی $[f(a), f(b)]$ صعودی اکید است، پس f^{-1} از $[f(a), f(b)]$ به روی $[a, b]$ صعودی اکید است.



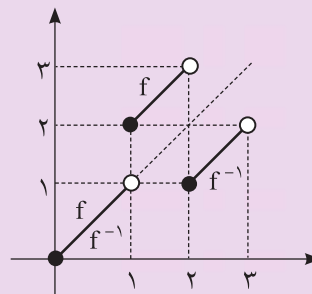
اگر f از $[a, b]$ به روی $[f(b), f(a)]$ نزولی اکید باشد، f^{-1} از $[f(b), f(a)]$ به روی $[a, b]$ نزولی اکید است.



مثال: تابع f با ضابطه $f(x) = x + [x]$ در بازه $[0, 2]$ مفروض است. ثابت کنید f وارون پذیر و تغییرات f^{-1} را در دامنه‌اش که تعیین می‌کنید مشخص کنید.

پاسخ: $y = x$ صعودی اکید و $y = [x]$ صعودی است، حتی روی R . چرا؟ بنابراین، مجموع آن‌ها $f(x) = x + [x]$ روی R در نتیجه روی $[0, 2]$ صعودی اکید است. آن را به طور مستقیم چگونه ثابت می‌کنید؟

اگر $0 \leq x < 1$ ، آن‌گاه $0 \leq f(x) < 1$ چرا؟ اگر $1 \leq x < 2$ ، آن‌گاه $1 \leq f(x) < 2$ چرا؟ بنابراین $R_f = [0, 1) \cup [1, 2)$ پس f^{-1} بنابر قضیه قبل، از $[0, 1) \cup [1, 2)$ به روی $[0, 2]$ صعودی اکید است.

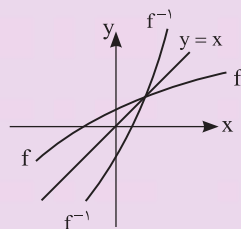


۱۸

شماره ۱۳۰ | تابستان ۱۴۰۵

می‌دانیم هر تابع وارون‌پذیر یکنوای اکید است، صعودی اکید یا نزولی اکید است.

اگر f تابعی صعودی اکید باشد، با رسم شکل‌های مختلف مشاهده خواهید کرد که هر جا نمودار f خط $y = x$ یا همان نیم‌ساز ناحیه اول و سوم را قطع کند، نمودار f^{-1} نیز در همان نقطه آن را قطع می‌کند. یعنی جواب‌های معادله $f(x) = x$ همان جواب‌های معادله $f(x) = f^{-1}(x)$ یا معادل آن جواب‌های معادله $f(f(x)) = x$ است.



ابتدا قضیه زیر را ثابت می‌کنیم.

قضیه: اگر f تابعی صعودی اکید باشد، آن‌گاه نقطه‌های مشترک یا تقاطع f و f^{-1} در صورت وجود روی خط $y = x$ واقع‌اند.

اثبات: فرض کنیم $A(a, b)$ نقطه‌ای باشد که روی هر دو نمودار f و f^{-1} باشد، یعنی $f(a) = b$ و $f^{-1}(a) = b$ بنابراین $f(a) = f^{-1}(a)$ سه حالت امکان دارد، $a > b$ ، $a = b$ و $a < b$ نشان می‌دهیم دو حالت آخری امکان ندارند.

اگر $a < b$ چون $b = f^{-1}(a)$ پس $a < f^{-1}(a)$ چون f صعودی اکید است، $f(a) < f(f^{-1}(a)) = a$ در نتیجه $b < a$ که یک تناقض است. به همین ترتیب اگر $a > b$ به تناقض می‌رسیم، بنابراین، $a = b$ یعنی نقطه A ، روی خط $y = x$ است. $f(a) = a$ و $f^{-1}(a) = a$

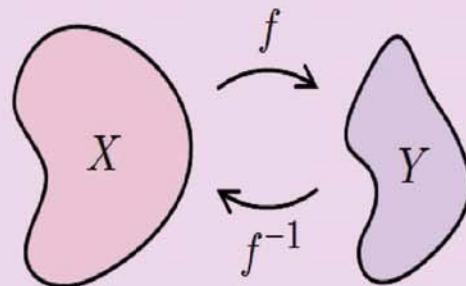
بنابراین، وقتی تابع f صعودی اکید باشد، (در نتیجه یک به یک است) وارون‌پذیر است. نقطه‌های مشترک f و f^{-1} روی خط $y = x$ واقع‌اند و برای تعیین مختصات این نقطه یا نقطه‌ها در صورت وجود، باید معادله $f(x) = x$ را حل کنیم.

بنابراین اگر f تابعی صعودی اکید باشد، جواب‌های معادله $f(x) = f^{-1}(x)$ و $f(x) = x$ یکی هستند. از $f(x) = f^{-1}(x)$ نتیجه می‌شود $f(f(x)) = x$ بنابراین، قضیه زیر را داریم؛

قضیه: اگر f تابعی صعودی اکید باشد، دو معادله $f(x) = x$ و $f(f(x)) = x$ معادل هستند، به این معنی که، هر جواب یکی در صورت وجود، جواب دیگری است.

اثبات: اثبات آن ساده است، اگر a هر عددی باشد که به ازای آن $f(f(a)) = a$ ، آن‌گاه فقط $f(a) = a$ امکان دارد. زیرا اگر $f(a) > a$ آن‌گاه چون f صعودی اکید است. $f(f(a)) > f(a)$ پس $a > f(a)$ یک تناقض است.

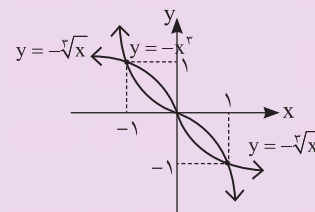
به همین ترتیب اگر $f(a) < a$ مانند قبلی و با توجه به این که $f(f(a)) = a$ به تناقض می‌رسیم. در نتیجه فقط $f(a) = a$ امکان دارد.



در هر دو مشترک است.

این نقطه‌های تلاقی از حل معادله $f(x) = f^{-1}(x)$ ، یعنی $-x^3 = -\sqrt[3]{x}$ به دست می‌آیند.

$$x^3 = \sqrt[3]{x} \Leftrightarrow x^9 = x \Leftrightarrow x = 0 \text{ یا } x = 1 \text{ یا } x = -1$$



به‌طور کلی، روشی را که برای تعیین نقطه‌های مشترک دو تابع به کار می‌بریم، می‌توانیم برای تابع و تابع وارون نیز به کار ببریم، یعنی نقطه‌های تلاقی یا مشترک دو تابع و تابع وارون آن در صورت وجود، جواب‌های معادله $f(x) = f^{-1}(x)$ می‌باشند.

اما این معادله، هم‌ارز معادله $f(f(x)) = x$ است. واضح است که اگر به ازای هر x از دامنه $f(f(x)) = x$ آن‌گاه $f^{-1}(x) = f(x)$ و دو تابع f و f^{-1} برهم منطبق‌اند، یعنی وارون تابع، خود همان تابع است.

به‌طور مثال، در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ به ازای هر x که $x \neq 1$ ، $f(f(x)) = x$ ، پس $f^{-1}(x) = f(x)$ و نمودارهای تابع و تابع وارون بر هم منطبق‌اند. کلاً می‌توانید به سادگی ثابت کنید، وارون تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ وقتی $d = -a$ بر خودش منطبق است، $f^{-1}(x) = f(x)$ را تشکیل داده از تساوی $f^{-1}(x) = f(x)$ استفاده کنید، ثابت می‌شود.





بنابراین نتیجه زیر را داریم:

$$f(f(x)) = x \text{ را مشاهده می کنید.}$$

قضیه: اگر g تابعی وارون پذیر باشد، آن گاه هر تابع با ضابطه $f(x) = g^{-1}(-g(x))$ ، جواب معادله تابعی $f(x) = x$ است. همه ترکیبها باید تعریف شده باشند.

نتیجه

اگر f تابعی صعودی اکید باشد، آن گاه نقطه‌های مشترک نمودارهای f و f^{-1} در صورت وجود جواب‌های معادله $f(x) = x$ هستند، یعنی روی خط $y = x$ واقع‌اند. وقتی f صعودی اکید است، f^{-1} نیز صعودی اکید است. چرا؟ پس می‌توانیم به جای معادله $f(x) = x$ ، معادله $f^{-1}(x) = x$ را حل کنیم. هر کدام که ساده‌تر باشد.

لازم است به این موضوع اشاره کنیم که همواره امکان حل این معادله‌ها ممکن است به سادگی امکان پذیر نباشد یا معادله قابل حل نباشد.

مثال: تابع با ضابطه $y = x + \sin x$ صعودی اکید است، چرا؟ قبلاً بررسی کردیم و نشان دادیم وارون پذیر است.

پاسخ: از حل معادله $x + \sin x = x$ داریم $x = k\pi$ یعنی تمام نقطه‌های $(k\pi, k\pi)$ ، نقطه‌های تلاقی نمودارهای f و f^{-1} هستند، محاسبه ضابطه وارون این تابع به سادگی امکان پذیر نمی‌باشد، پس حل معادله $f^{-1}(x) = x$ نیز ساده نخواهد بود. اما مشاهده می‌کنیم که حل معادله $x + \sin x = x$ ساده است. برای محاسبه وارون، $y = x + \log_2(x-1)$ به مشکل برمی‌خوریم اما چون جمع دو تابع صعودی اکید است، در نتیجه روی $(1, +\infty)$ صعودی اکید است و تلاقی f و f^{-1} از حل معادله $x = x + \log_2(x-1)$ ، به دست می‌آید.

اما اگر f تابعی نزولی اکید باشد، تلاقی f و f^{-1} چگونه‌اند؟ وقتی f تابعی نزولی اکید باشد، جواب‌های معادله $f^{-1}(x) = f(x)$ یا $f(f(x)) = x$ فقط برابر جواب‌های معادله $f(x) = x$ نمی‌باشد و ممکن است جواب‌های دیگری نیز وجود داشته باشد. اگر $f(x) = y = -x^3$ را مشاهده کردید. بنابراین، اگر f تابعی نزولی اکید باشد برای تعیین نقطه یا نقطه‌های تلاقی f و f^{-1} در صورت وجود باید معادله $f(x) = f^{-1}(x)$ یا $f(f(x)) = x$ حل شود. در واقع حل مسئله منجر به تعیین جواب‌های معادله تابعی $f(f(x)) = x$ می‌شود.

$f(x) = a - x$ تابعی نزولی اکید است. در این صورت $f(f(x)) = a - (a - x) = x$ مشاهده می‌کنیم که $f(x) = a - x$ در آن صدق می‌کند.

نشان دهید $f(x) = \frac{-x}{2x+1}$ نیز جواب معادله تابعی $f(f(x)) = x$ است. آن را آزمایش کنید. اکنون در قضیه زیر روش ساختن جواب‌های معادله تابعی

اثبات:

$$f(f(x)) = f(g^{-1}o(-g(x))) = g^{-1}o(-g)og^{-1}o(-g)(x) = g^{-1}o(-(-g(x))) = (g^{-1}og)(x) = x$$

بنابراین، اگر f تابعی نزولی اکید باشد، برای تعیین تمام نقطه‌های مشترک نمودارهای f و f^{-1} باید جواب‌های معادله $f(x) = f^{-1}(x)$ را پیدا کنیم. معادله $f(x) = f(x)$ ممکن است همه جواب‌ها را مشخص نکند.

با توجه به ویژگی تابع وارون که اگر در تابعی وارون پذیر، $f(a) = b$ و $f(b) = a$ ، آن گاه تمام نقطه‌های مشترک f و f^{-1} در صورت وجود روی خط $y = -x$ یا روی خط‌هایی موازی $y = -x$ یعنی خط‌های $y = -x + a$ واقع‌اند.

جمع‌بندی

در حالت کلی پیدا کردن نقطه یا نقطه‌های مشترک یک تابع و وارون آن جواب‌های معادله $f(x) = f^{-1}(x)$ هستند. ممکن است معادله قابل حل نباشد یا نباشد. اما اگر f تابعی صعودی اکید باشد جواب‌های این معادله، معادل جواب‌های معادله $f(x) = x$ است. پس کافی است این معادله حل شود. اما اگر f نزولی اکید باشد، حتماً باید جواب‌های $f(x) = f^{-1}(x)$ در صورت وجود محاسبه شوند، تا از تعداد نقطه‌های مشترک اطمینان پیدا کنیم.

منابع

۱. کتاب‌های درسی حسابان ۱ و حسابان ۲، دفتر تألیف و برنامه‌ریزی درسی، ۱۴۰۲.
۲. آموزش مفهومی حسابان ۱، محمود نصیری.
3. precalculus David Cohen. Theodore B. Lee. David Sklar Seventh Edition Brooks/cole
4. The mathematics That every Secondary School math teacher to Know second Edition Alan Sultan Alice F. Artzt Taylor and Francis Group
5. Precalculus David Cohen. Theodore B. Lee. David Sklar Seventh Edition Brooks/ Cole
6. Mathematical Monthly Volume 97 Number 2 February 1990
7. College Algebra and Calculus. Ron Larson, Anne Hodgkins BROOKS / COLE 2013



۲۰

شماره ۱۳۰ | تابستان ۱۴۰۳

ضرب سریع در عدد ۱۱

پشت پرده

محمد رضا شمس الدینی آبدری
کارشناس ارشد و دبیر ریاضی بردسیر کرمان

چکیده

در این نوشته قصد داریم شما دانش آموزان را با ضرب سریع در عدد ۱۱ و دلیل و چرایی این کار و پشت پرده این ضرب سریع آشنا کنیم. برای رسیدن به این هدف، نخست مرحله‌های ضرب سریع در عدد ۱۱ را می‌گوییم و سپس به کمک گسترده عددها، اثبات‌ها و دلایل ارائه می‌شوند.

کلیدواژه‌ها: ضرب سریع، گسترده عددها، اثبات

شما دانش آموزان اگر به کتاب‌هایی با موضوع محاسبه‌های سریع ریاضی نگاهی بیندازید یا در مورد فن‌ها (تکنیک‌ها) و روش‌های سریع محاسبه‌های ریاضی جست‌وجویی در اینترنت انجام دهید، خواهید دید که از بین عمل‌های چهارگانه ریاضی (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم) به عمل ضرب توجه بیشتری کرده‌اند و روش‌هایی متنوعی برای ضرب سریع در عددهای متفاوت گفته‌اند. قبل از اینکه وارد بحث شویم، باید در مورد گسترده عددها با شما صحبت مختصری داشته باشیم.

عدد ۵۶ را می‌توان به صورت $۵۰+۶$ یا $۵ \times ۱۰+۶$ نشان داد. هر عدد دورقمی دیگر را می‌توان به این شکل گسترده نوشت. در حالت کلی برای عدد دورقمی دلخواه از نماد ab استفاده می‌کنیم. بنابراین گسترده یک عدد دورقمی به صورت زیر است:

$$\overline{ab} = ۱۰a + b$$

که a رقم دهگان و b رقم یکان عدد دورقمی $\overline{ab}$ است. برای عدد سه رقمی دلخواه می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\overline{abc} = ۱۰۰a + ۱۰b + c = ۱۰^2a + ۱۰b + c$$

که در اینجا a رقم صدگان، b رقم دهگان و c رقم یکان است. این کار را می‌توان برای عددهای n رقمی، ۵ رقمی و ... ادامه داد. در حالت کلی اگر یک عدد $n+۱$ رقمی را به صورت $a_na_{n-1}...a_1a_0$ در نظر بگیریم، گسترده آن به شکل زیر است:

$$\overline{a_na_{n-1}...a_1a_0} = ۱۰^n a_n + ۱۰^{n-1} a_{n-1} + ... + ۱۰a_1 + a_0$$

ضرب سریع اعداد دورقمی در عدد ۱۱

برای به دست آوردن ضرب یک عدد دورقمی در عدد ۱۱ مرحله‌های زیر را باید انجام داد:

مرحله اول: دو رقم را با فاصله بنویسید و بین آن‌ها جای یک رقم را خالی بگذارید.

مرحله دوم: دو رقم را با هم جمع کنید و حاصل را در جای خالی بین دو رقم قرار دهید.

نکته: اگر در مرحله دوم حاصل جمع، یک عدد دورقمی شد، باید یکان آن را در جای خالی بگذاریم و رقم دهگان را با سمت چپ جمع کنیم.



۲۱

شماره ۱۳۰ | تابستان ۱۴۰۰

$$\overline{ab} \times 11 = (10a + b)(10 + 1)$$

با ضرب کردن دو پرانتز $(10a + b)$ و $(10 + 1)$ در هم و ساده کردن عبارت‌ها، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\overline{ab} \times 11 &= 100a + 10a + 10b + b \\ &= 100a + 10(a + b) + b = a(a + b)b\end{aligned}$$

بنابراین ما به دو عبارت $\overline{ab} \times 11 = a(a + b)b$ رسیدیم. این عبارت به ما می‌گوید که برای ضرب هر عدد دورقمی در عدد ۱۱ باید دو رقم یکان و دهگان را با فاصله بنویسیم و سپس دو رقم را جمع کنیم و بین آن‌ها قرار دهیم. به همین راحتی توانستیم دلیل منطقی و ریاضی برای روش ضرب سریع در ۱۱ بیابیم و پرده از آن برداریم.

ضرب سریع عددهای بیش از دو رقم در عدد ۱۱

مرحله اول: ببینید عددی که در ۱۱ ضرب می‌شود چند رقمی است، آن را به خاطر بسپارید. رقم یکان و آخرین رقم سمت چپ عدد را با فاصله از یکدیگر بنویسید و بین آن‌ها به تعداد یکی کمتر از رقم‌های اولیه جای خالی بگذارید.

مرحله دوم: برای پر کردن جاهای خالی از سمت راست شروع کنید. هر رقم را با رقم سمت چپی خود جمع کنید تا به جواب نهایی برسید.

نکته: هر جا حاصل جمع دورقمی شد، یکان را می‌نویسیم و دهگان را با سمت چپ جمع می‌کنیم.

مثال ۱. $11 \times 53 = ?$

مرحله اول: دو رقم عدد ۵۳ یعنی ۳ و ۵ را با فاصله می‌نویسیم و بین آن‌ها جای یک رقم را خالی می‌گذاریم.

$$53 \rightarrow 5 \quad 3$$

مرحله دوم: دو رقم را با هم جمع می‌کنیم $(5+3=8)$ و حاصل جمع، یعنی عدد ۸ را در جای خالی قرار می‌دهیم.

$$5 + 3 = 8 \rightarrow 11 \times 53 = 583$$

همان‌طور که دیدید، با این روش به راحتی به جواب می‌رسیم و سرعتمان در محاسبه‌ها خیلی بالا می‌رود.

پشت پرده ضرب سریع عددهای دورقمی در عدد ۱۱

اگر می‌خواهید بدانید که این ضرب سریع از کجا پیدا شده و دلیل آن چیست، ادامه مطلب را بخوانید. عدد دورقمی دلخواه $\overline{ab}$ را در نظر می‌گیریم. این عدد را در ۱۱ ضرب می‌کنیم و عدد $\overline{ab}$ و عدد ۱۱ را به صورت گسترده می‌نویسیم.



۲۲

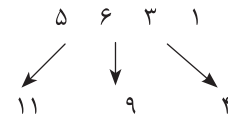
شماره ۱۳۰ | تابستان ۱۴۰۱

مثال ۲. $۵۶۳۱ \times ۱۱ = ؟$

مرحله اول: عدد ۵۶۳۱ یک عدد ۴ رقمی است، پس سه جای خالی بین ۱ و ۵ قرار می‌دهیم.

$$۵۶۳۱ \times ۱۱ \rightarrow ۵ \text{ --- } ۱$$

مرحله دوم: برای پر کردن جاهای خالی از سمت راست شروع می‌کنیم و هر رقم را با رقم سمت چپی خود جمع می‌کنیم.



حالا عددهای به دست آمده را در جای خالی قرار می‌دهیم.

$$۵ \quad ۱۱ \quad ۹ \quad ۴ \quad ۱$$

چون در یک جای خالی عدد دورقمی ۱۱ قرار گرفته پس یکان آن را می‌نویسیم و دهگان یعنی ۱ را با عدد سمت چپ یعنی ۵ جمع می‌کنیم و تمام.

$$۵۶۳۱ \times ۱۱ = ۶۱۹۴۱$$

پشت پرده ضرب سریع عددهای بیش از دو رقم در عدد ۱۱

از ایده اثبات برای ضرب عدد دورقمی در ۱۱ استفاده می‌کنیم. فقط در اینجا محاسبه‌ها بیشتر و پیچیده‌تر هستند و باید دقت زیادتری داشته باشیم.

عدد $n+1$ رقمی $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ را در نظر می‌گیریم. آن را در عدد ۱۱ ضرب می‌کنیم و مشابه با ضرب سریع دورقمی در عدد ۱۱، پرانتزها را در هم ضرب می‌کنیم و سپس ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 \times ۱۱ \\ &= (10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \dots + 10 a_1 + a_0) \times (10 + 1) \\ &= 10^{n+1} a_n + 10^n a_n + 10^n a_{n-1} + 10^{n-1} a_{n-1} \\ &+ \dots + 10^2 a_1 + 10 a_1 + 10 a_0 + a_0 \\ &= a_n (a_n + a_{n-1}) (a_{n-1} + a_{n-2}) \dots (a_2 + a_1) (a_1 + a_0) a_0 \end{aligned}$$

در نهایت به عبارت

$$a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 \times ۱۱ = a_n (a_n + a_{n-1}) (a_{n-1} + a_{n-2}) \dots (a_2 + a_1) (a_1 + a_0) a_0$$

می‌رسیم که نشان‌دهنده همان ضرب سریع عددها به صورت ریاضی است.

خب بچه‌ها، ما توانستیم دلیل و علت ضرب سریع در عدد ۱۱ را با استفاده از گسترده عددها توضیح دهیم. به پشت پرده آن نگاهی بیندازیم و به این نکته پی ببریم که چقدر خوب است که در کنار روش‌ها و فرمول‌هایی که یاد می‌گیریم، با چرایی و اثبات آن‌ها

هم آشنا شویم. با این کار زیبایی و شیرینی ریاضی را بیشتر و بهتر درک می‌کنیم.

برای اینکه فعالیتی انجام دهید و خودتان را ورزیده کنید، دست به قلم شوید و برای ۳ تمرین زیر مرحله‌ها و اثبات‌ها را مشابه عدد ۱۱ بنویسید:

تمرین ۱. ضرب سریع عددی دلخواه در عددهای ۲۲، ۳۳ و ... (مضرب‌های عدد ۱۱).

تمرین ۲. ضرب سریع عددی دلخواه در عدد ۱۰۱

تمرین ۳. ضرب سریع دو عدد دورقمی در هم

منبع

باقری، مصطفی (۱۴۰۰). تکنیک‌های محاسبات سریع ریاضی. انتشارات مهر و ماه نو. تهران. چاپ بیست‌وششم.



۲۳

شماره ۱۳۰ | تابستان ۱۴۰۱

حساب انگشتی

لطایف الحساب قطب الدین لاهیجی (قسمت هشتم - آخر)

جعفر زیدی

کارشناسی ارشد تاریخ علم و دبیر ریاضی

اسامی تألیفات دیگر قطب الدین لاهیجی جهت اطلاع در ذیل آمده است:

- محبوب القلوب، مهم ترین و مشهورترین اثر قطب الدین در تاریخ فلسفه

- رساله مثالیه، اثری در فلسفه و کلام

- تفسیر شریف لاهیجی، تفسیر قرآن کریم

- ثمره الفؤاد، در بیان اسرار احکام و حقایق اعمال

- خیرالرجال، در علم رجال

- شرح صحیفه سجاده

- ریاض العابدین، در ادعیه

- لطایف الحساب (رساله ای درباره سرگرمی های ریاضی) به

کوشش محمد باقری، مرکز پژوهشی میراث مکتوب

- قربانی ابوالقاسم، (۱۲۹۰)، زندگی نامه ریاضی دانان دوره اسلامی،

انتشارات مرکز نشر دانشگاهی

- نسخه خطی لطایف الحساب، کتابخانه آستان قدس، به شماره

عمومی ۵۶۰۹

در ذکر اعمال متنوعه و لطایف متفرقه که اکثر منوط^۱ و متعلق به علم حساب باشد و یا حساب را به قدر در آن دخلی^۲.

بخشی از خاتمه شامل معماهایی است، اغلب به شعر، که با استفاده از قراردادهایی درباره حروف الفبا و به ویژه حساب ابجد حل می شوند. قطب الدین لاهیجی سپس به تشریح حساب انگشتی یا علم عقود اصابع^۳ می پردازد و صورت های نوزده گانه آن را بیان می کند.

حساب انگشتی: در حساب انگشتی اعداد یک تا نه را با سه انگشت کوچک تا میانی دست راست، و ده تا نود را با انگشت شصت و سبابه^۴ دست راست نشان می دادند و صورت های مشابه این ها برای نمایش صد تا نهصد و هزار تا نه هزار روی دست چپ به کار می رفت. برای نمایش ده هزار، نوک انگشتان شصت و سبابه یک دست را نزدیک هم می گذاشتند. حساب انگشتی در آغاز برای نمایش بصری اعداد و سپس برای رساندن اعداد به طرف مقابل به صورت رمز به کار می رفت. مشهور است که وقتی فردوسی از سلطان محمود غزنوی آزرده و مأیوس شد، قصیده ای در هجو^۵ او ساخت که در آن آمده:

کف دست محمود و البتار

نُه اندر نُه آمد، سه اندر چهار

نُه ضربدر نُه می شود هشتاد و یک که به علاوه سه ضربدر چهار یعنی دوازده می شود نود و سه، و نمایش عدد نود و سه در دست راست به صورت مشت بسته است که کنایه از خسیسی به شمار می آید.

قطب الدین لاهیجی پس از بحث حساب انگشتی، درباره ریشه معما صحبت کرده که مصدر آن تعمیه است، یعنی پوشیده بودن منظور گوینده برای شنونده. سپس تعدادی معما به فارسی و عربی می آورد. وی در این معماها نکاتی از ریاضیات، نجوم، اندام شناسی، موسیقی، فقه، صرف و نحو و دارو شناسی به کار رفته است. درک بسیاری از مطالب و معماهای این اثر نیازمند دانستن مقادیر عددی حروف الفبای عربی (حساب ابجد) است که مطابق جدول مقابل است.

حرف	ا	ب	ج	د	ه	و
عدد	۱	۲	۳	۴	۵	۶
حرف	س	ع	ف	س	ق	ر
عدد	۶۰	۷۰	۸۰	۹۰	۱۰۰	۲۰۰

هزار و پانصد و چهل هزار و چوبار و حاصل جمع اعداد و صد است
لطف چهل و دوم در بیان آنکه ما هشتاد و نوزده و شش را که
 و عشر راه بر میگردد پس بعد از نوزده و شش بیست است که
 نوجوین که نوزده و شش ضرب کنند و حاصل ضرب را بر
 تقاضا ما بین آنکه نوزده و شش ضرب کنند خارج شصت و یک
 نوزده بود و شصت و یک در موضع از دنیا بهی و اربعه و یک
 روزی شش راه قطع میکند و روز دیگر عشر راه جمع میشود
 میخوانیم بر اینم که چهل و نوزده و شش را که شصت و یک
 در خارج عشر که ده است ضرب کردیم و شصت و یک حاصل آن
 بر تفاوت ما بین شش و عشر که دو نیست کردیم چهل و شش
 پس گوئیم که ایام وصول میوه نوزده و شصت و یک است
 در بیان پیدا کردن هر گزنی هر عددی حرکتی را که خوانند
 بر وجه سهولت پیش است که عدد مطلوب را بخوانند
 کرده از جانب بین عدد اولین را که مطلوب بگوید و آن
 که خط و خطی کشیده باشند در زیر ای قلم علامت مجموع عدد



پی نوشت ها

۱. مربوط
۲. ارتباط داشتن
۳. حساب عقود انامل. هر یک از بندهای (عقود) انگشتان دست را به شماره ای اختصاص داده بودند، و برای همه مردمان به هر زبان قابل فهم است.
۴. انگشت نشانه یا اشاره
۵. برشمردن معایب کسی

ن	م	ل	ک	ی	ط	ح	ز	
۵۰	۴۰	۳۰	۲۰	۱۰	۹	۸	۷	
غ	ض	ظ	ذ	خ	ث	ت	ش	
۱۰۰۰	۹۰۰	۸۰۰	۷۰۰	۶۰۰	۵۰۰	۴۰۰	۳۰۰	



۲۵

شماره ۱۳۰ | تابستان ۱۴۰۱

چندجمله‌ای‌ها و اعداد مختلط

چندجمله‌ای‌های یک متغیره با ضرایب حقیقی

قسمت چهارم

آرش رستگار

عضو هیئت علمی دانشگاه صنعتی شریف

در این سلسله مقاله‌ها ابتدا با مفهوم عدد مختلط آشنا شدیم و آن را در فهم بهتر چندجمله‌ای‌های درجه دوم به کار بردیم. سپس چندجمله‌ای‌های یک متغیره از درجه دلخواه با ضرایب مختلط را بررسی کردیم. آنگاه مفهوم‌های چندجمله‌ای‌های یک متغیره را به چندجمله‌ای‌های چندمتغیره توسعه دادیم. در اینجا پس از فراهم کردن این توشه به مسئله حل معادله‌های چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی باز می‌گردیم.

حال فرض کنید $n = 2m+1$ و $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ چندجمله‌ای زیر را در نظر بگیرید:

$$P_m(x) = \binom{2m+1}{1} x^m - \binom{2m+1}{3} x^{m-1} + \binom{2m+1}{5} x^{m-2} - \dots$$

توجه کنید که داریم:

$$\sin(2m+1)\theta = \sin^{2m+1}\theta \cdot P_m(\cot^2\theta)$$

پس شرط لازم و کافی برای آنکه $P_m(\cot^2\theta) = 0$ ، آن است که: $(2m+1)\theta = k\pi$. پس قرار می‌دهیم $x_k = \cot^2 \frac{k\pi}{2m+1}$. با دقت بیشتر می‌توان دید $x_1, \dots, x_m$ همه ریشه‌های $P_m(x) = 0$ هستند. پس داریم:

$$\sum_{k=1}^m x_k = \sum_{k=1}^m \cot^2 \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{\binom{2m+1}{3}}{\binom{2m+1}{1}} = \frac{m(2m-1)}{3}$$

حال از آنجا که برای $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ داریم: $\sin\theta < \theta < \tan\theta$ و از آنجا: $\theta < \cot^2\theta < 1 + \cot^2\theta$ پس با توجه به $\theta = \frac{k\pi}{2m+1}$ برای $1 \leq k \leq m$ داریم:

$$\sum_{k=1}^m \cot^2 \frac{k\pi}{2m+1} < \frac{(2m+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} < m + \sum_{k=1}^m \cot^2 \frac{\pi}{2m+1}$$

اما این مجموع را پیش از این حساب کردیم. لذا داریم:

$$\frac{m(2m-1)}{3} \pi^2 < \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} < \frac{2m(m+1)}{3(2m+1)^2} \pi^2$$

مقدمه

منظور از ریشه یک چندجمله‌ای $P(x)$ ، یک جواب معادله $P(x) = 0$ است. دو معادله $P(x) = 0$ و $Q(x) = 0$ را معادل می‌نامند، هرگاه ریشه‌های مختلط آن‌ها یکسان و دارای تکرار برابر در هر دو طرف باشند. با یک کاربرد غیرمنظره از ریشه‌های چندجمله‌ای‌ها کار را آغاز می‌کنیم. می‌خواهیم نشان دهیم:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{k^2} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

که به «دستور اولیر» معروف است. ابتدا به کمک چندجمله‌ای‌ها ثابت می‌کنیم:

$$\sum_{k=1}^m \cot^2 \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{m(2m-1)}{3}$$

بنا بر قضیه دموآور و بسط دوجمله‌ای نیوتن داریم:

$$\begin{aligned} \cos n\theta + i \sin n\theta &= (\cos\theta + i \sin\theta)^n = \sin^n\theta (\cot\theta + i)^n \\ &= \sin^n\theta \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k \cot^{n-k}\theta \end{aligned}$$

حال قسمت موهومی تساوی بالا را در نظر بگیرید. اجزای موهومی در دو طرف دوم به ازای مقادیر فرد k حاصل می‌شوند. پس:

$$\sin n\theta = \sin^n\theta \left\{ \binom{n}{1} \cot^{n-1}\theta - \binom{n}{3} \cot^{n-3}\theta + \binom{n}{5} \cot^{n-5}\theta - \dots \right\}$$



۲۶

شماره ۱۳۰ تابستان ۱۴۰۵

با میل دادن $m \rightarrow \infty$ دو عبارت طرفین به $\frac{\pi^2}{6}$ میل می کنند و تساوی اوایلر به دست می آید که: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

۱. مسئله تبدیل معادله‌ها

مسئله معروف به تبدیل معادله‌ها این است: فرض کنید $P(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد و عددهای $c_1, \dots, c_n$ ریشه‌های آن باشند. فرض کنید $\frac{S(x)}{T(x)}$ تابعی گویا باشد که عددهای $c_1, \dots, c_n$ هیچ کدام ریشه‌های مخرج $T(x)$ نباشند. مطلوب است ساختن یک چندجمله‌ای جدید که ریشه‌های آن $d_i = \frac{S(c_i)}{T(c_i)}$ باشند. واضح است که معادله مطلوب، صرف‌نظر از یک ضرب عددی، عبارت است از:

$Q(y) = (y - d_1) \dots (y - d_n) = 0$
اصطلاحاً این معادله را تبدیل شده معادله $P(x) = 0$ با کسر گویای $\frac{S(x)}{T(x)}$ می خوانند.

یک حالت خاص تبدیل هموگرافیک است که در آن داریم:

$$y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0) \quad (*)$$

به راحتی می توان دید معادله‌ای که ریشه‌هایش عددهای $d_i = \frac{\alpha c_i + \beta}{\gamma c_i + \delta}$ هستند، عبارت است از معادله زیر که از حذف x بین دو معادله $P(x) = 0$ و معادله $*$ حاصل می شود:

$$(\alpha - \gamma y)^n P\left(\frac{\delta y - \beta}{\alpha - \gamma y}\right) = 0$$

بسیاری از حالت‌های خاص جالب از معادله تبدیل شده توسط تابع هموگرافیک نتیجه می شوند:

(الف) ضرب ریشه‌ها در یک عدد: معادله درجه n که ریشه‌هایش αc_i باشند، معادله $P\left(\frac{x}{\alpha}\right) = 0$ است که با قرار دادن $\beta = \delta = 0$ و $\alpha = 1$ به دست می آید. به حالت $\alpha = -1$ توجه فرمایید.

(ب) معادله با ریشه‌های متقابل: معادله درجه n ای که ریشه‌هایش $-c_i$ باشند، عبارت است از: $P(-x) = 0$.

(ج) انتقال ریشه‌ها: معادله درجه n ای که ریشه‌هایش $c_i + \beta$ باشند، عبارت است از: $P(x - \beta) = 0$.

(د) معادله‌ای با معکوس ریشه‌ها: اگر ریشه‌های c_i غیر صفر باشند، معادله درجه n ای که ریشه‌هایش $\frac{1}{c_i}$ باشند، عبارت است از: $x^n P\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ که با قرار دادن $\alpha = \delta = 0$ و $\beta = \gamma = 1$ به دست می آید.

حال به حل مسئله‌ای پیچیده تر خواهیم پرداخت. می خواهیم معادله‌ای پیدا کنیم که ریشه‌هایش مربع ریشه‌های $P(x) = 0$ باشند. چندجمله‌ای $P(x)$ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$P(x) = P_1(x^2) + xP_2(x^2) \\ \text{که در آن } P_1(x) \text{ چندجمله‌ای هستند.} \\ \text{با توجه به تساوی:} \\ P(x) = P_1(x^2) + xP_2(x^2) = a_0(x - c_1) \dots (x - c_n) \\ \text{با تبدیل } x \text{ به } -x \text{ داریم:}$$

$$P(-x) = P_1(x^2) - xP_2(x^2) = (-1)^n a_0(x + c_1) \dots (x + c_n) \\ \text{با ضرب دو معادله داریم:}$$

$$P(x)P(-x) = P_1^2(x^2) - x^2 P_2^2(x^2) \\ = (-1)^n a_0^2 (x^2 - c_1^2) \dots (x^2 - c_n^2)$$

پس معادله مطلوب عبارت است از $P_1^2(y) - yP_2^2(y) = 0$. برای مکعب ریشه‌ها قرار دهید:

$$P(x) = P_1(x^2) + xP_2(x^2) + x^2P_3(x^2) \\ \text{و حاصل ضرب } P(x)P(\zeta x)P(\zeta^2 x) \text{ را تشکیل دهید که در آن: } \zeta^3 = 1.$$

یک مسئله ساده دیگر که در حالت $n=3$ مطرح می شود، از این قرار است: فرض کنید α, β, γ ریشه‌های معادله زیر باشند:

$$x^3 + px + q = 0 \\ \text{مطلوب است پیدا کردن معادله‌ای که ریشه‌های آن مربع تفاضلات ریشه‌های معادله درجه سوم بالا باشند. از آنجا که می دانیم:} \\ (\alpha - \beta)^2 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - \gamma^2 - \frac{2\alpha\beta\gamma}{\gamma} \\ = -2p - \gamma^2 + \frac{2q}{\gamma}$$

زیرا

$$0 = (\alpha + \beta + \gamma) \\ = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2p$$

پس اگر در رابطه

$$y = -2p - x^2 + \frac{2q}{x} \quad (***)$$

به جای x به ترتیب α, β, γ و بگذاریم، مقدارهای حاصل برای



۲۷

شماره ۱۳۰ تابستان ۱۴۰۱



۷ ریشه‌های معادله مطلوب خواهند بود. پس کافی است
مبدل معادله درجه سوم را نسبت به تبدیل $(**)$ به دست بیاوریم.
بنابر رابطه $(**)$ ، با ضرب کردن دو طرف در x خواهیم داشت:

$$x^3 + (y + 2p)x - 2q = 0$$

معادله درجه سوم $x^3 + px + q = 0$ آن‌ها را از هم کم می‌کنیم

$$\text{و به دست می‌آوریم: } x = \frac{3q}{(y+p)}$$

جایگزین می‌کنیم تا معادله درجه سوم زیر به دست بیاید:

$$y^3 + 6py^2 + 9p^2y + 4p^3 + 27q^2 = 0$$

از اینجا معلوم می‌شود که شرط لازم و کافی برای آنکه معادله درجه سوم اصلی ریشه مکرر داشته باشد، این است که معادله بالا بر حسب y دارای ریشه صفر باشد که معادل است با: $4p^3 + 27q^2 = 0$.

این مسئله را با عبارت‌های متقارن که در قسمت قبلی این سلسله مقاله‌ها مطرح کردیم نیز می‌توان حل کرد. اما این روش که در اینجا ارائه شد، کم‌زحمت‌تر و کوتاه‌تر است.

۲. ریشه‌های حقیقی معادله‌های دارای ضریب‌های حقیقی

در اینجا روی حل معادله‌های چندجمله‌ای با ضریب‌های حقیقی تمرکز می‌کنیم. هر جا می‌گوییم c بین α و β است که در آن $\alpha < \beta$ ، منظور ما «بینیت اکید» است؛ یعنی $\alpha < c < \beta$.

در چندجمله‌ای $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = y + P(x)$ حد تابع $y = P(x)$ در $\pm\infty$ را با $P(\pm\infty)$ نمایش می‌دهیم که مساوی یکی از $+\infty$ و $-\infty$ است. به عبارت دقیق‌تر، اگر: $\eta = \operatorname{sgn} a_n$ داریم:

$$P(+\infty) = \eta \cdot (+\infty) \quad P(-\infty) = (-1)^n \eta \cdot (+\infty)$$

از قضیه مقدار میانی می‌دانیم که هرگاه: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ، $\alpha < \beta$ و $P(\alpha)P(\beta) < 0$ آنگاه چندجمله‌ای $P(x)$ حداقل یک ریشه بین α و β دارد. می‌توانیم از نمادگذاری جدیدمان استفاده و ادعا کنیم،

برای $+\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$ ، اگر: $P(\alpha)P(\beta) < 0$ آنگاه $P(x)$ حداقل یک ریشه حقیقی بین α و β دارد. بنابراین هر معادله درجه فرد حداقل یک ریشه حقیقی دارد. زیرا: $P(+\infty)P(-\infty) = -1$.

همین‌طور هر معادله درجه زوج که ضریب پیش رو و جمله ثابت آن مختلف‌العلامه باشند، حداقل یک ریشه مثبت و حداقل یک ریشه منفی دارد. زیرا $P(0)P(+\infty)$ ، $P(0)P(-\infty)$ هر دو منفی هستند.

حال نکته‌ای دقیق‌تر مطرح می‌کنیم.

قضیه: فرض کنیم $+\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$ و $P(\alpha)P(\beta) \neq 0$ و v عدد ریشه‌های حقیقی $P(x)$ بین α و β باشد که هر ریشه به تعداد تکرار آن شمرده شده است.

I: اگر $P(\alpha)P(\beta) < 0$ آنگاه v فرد است و برعکس.

II: اگر $P(\alpha)P(\beta) > 0$ آنگاه v زوج است (احیاناً $v=0$ هم ممکن است) و برعکس.

اثبات: اگر $c_1, \dots, c_v$ همه ریشه‌ها بین α و β باشند و C_M

کوچک‌ترین و C_M بزرگ‌ترین آن‌ها باشد، عددهای حقیقی α_1 و β_1 موجودند که: $\alpha < \alpha_1 < c_m \leq C_M < \beta_1 < \beta$. علامت $P(\alpha_1)$ و $P(\beta_1)$ هم همان علامت $P(\alpha)$ و $P(\beta)$ است. پس می‌توان فرض کرد α و β حقیقی هستند و می‌توان نوشت: $P(x) = (x - c_1) \dots (x - c_v) Q(x)$ که $Q(\alpha) \neq 0$ ، $Q(\beta) \neq 0$ و $Q(x)$ ریشه‌ای بین α و β ندارد. پس: $Q(\alpha)Q(\beta) > 0$. حال توجه کنید که علامت $P(\alpha)P(\beta)$ برابر با $(-1)^v$ خواهد بود. ■

ریشه‌های α و β از چندجمله‌ای $P(x)$ را دو ریشه متوالی می‌نامیم، در صورتی که $P(x)$ ریشه‌ای بین α و β نداشته باشد. قضیه زیر در حسابان مطرح می‌شود و حالت کلی آن به نام قضیه رول^۱ معروف است. اما رول تنها در حالت چندجمله‌ای‌ها قضیه‌اش را ثابت کرده بود:

قضیه رول (در حالت چندجمله‌ای‌ها)

فرض کنید $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$ و $P(x)$ یک چندجمله‌ای با ضریب حقیقی باشد. در این صورت اگر: $P(\alpha) = P(\beta)$ آنگاه $P'(x)$ حداقل یک ریشه حقیقی بین α و β خواهد داشت. **راهنمایی:** فرض کنید: $P(x) = (x - \alpha)^h (x - \beta)^k S(x)$ که: $S(\alpha) \neq 0$ و $S(\beta) \neq 0$. داریم: $S(\alpha)S(\beta) > 0$. حال $P'(x) = (x - \alpha)^{h-1} (x - \beta)^{k-1} T(x)$ که در آن:

$$T(x) = h(x - \beta)S(x) + k(x - \alpha)S(x) + (x - \alpha)(x - \beta)S'(x)$$

$$\text{پس: } T(\alpha) = h(\alpha - \beta)S(\alpha) \quad \text{و} \quad T(\beta) = k(\beta - \alpha)S(\beta)$$

لذا: $T(\alpha)T(\beta) < 0$. ■

قضیه مقدار متوسط (برای چندجمله‌ای‌ها)

به ازای هر دو عدد حقیقی α و β عدد حقیقی δ بین آن‌ها وجود دارد که: $P(\beta) - P(\alpha) = (\beta - \alpha)P'(\delta)$. **راهنمایی:** قضیه رول را برای چندجمله‌ای زیر به کار ببرید:

$$Q(x) = P(x) - P(\beta) + \frac{P(\beta) - P(\alpha)}{\beta - \alpha} (x - \beta)$$

و ملاحظه کنید که:

$$Q'(x) = P'(x) - \frac{P(\beta) - P(\alpha)}{\beta - \alpha} \quad \blacksquare$$

قضیه: اگر $\alpha < \beta$ دو ریشه متوالی $P(x) = 0$ باشند، عدد ریشه‌های $P'(x)$ بین α و β عددی فرد است.

راهنمایی: عددهای α_1 و β_1 را چنان پیدا کنید که $\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta$ و بین α_1 و β_1 ریشه‌ای نداشته باشیم. حال قضیه مقدار متوسط را در بازه‌های (α, α_1) و (β_1, β) بنویسید. ■

قضیه: اگر $\alpha < \beta$ دو ریشه متوالی معادله $P'(x) = 0$ باشند: I: اگر $P(\alpha)P(\beta) < 0$ آنگاه $P(x) = 0$ تنها یک ریشه بدون تکرار بین α و β دارد.

II. اگر $P(\alpha)P(\beta) > 0$ آنگاه $P(x) = 0$ ریشه‌ای بین α و β ندارد.

III. اگر $P(\alpha)$ یا $P(\beta)$ برابر صفر باشد، دیگری ناصفر خواهد بود.

قضیه: معادله $P(x) = 0$ تنها یک ریشه حقیقی بزرگ‌تر از بزرگ‌ترین ریشه $P'(x) = 0$ دارد و تنها یک ریشه حقیقی کوچک‌تر از کوچک‌ترین ریشه حقیقی این معادله دارد.

۳. تعداد ریشه‌های حقیقی

از آنجا که عددهای ریشه‌های منفی معادله $P(x) = 0$ با عددهای مثبت معادله $P(-x) = 0$ برابر است، کافی است که تعداد ریشه‌های مثبت معادله‌های چندجمله‌ای را بررسی کنیم. قضیه‌ای از استورم^۲، ریاضی‌دان فرانسوی هست که به وسیله آن می‌توان تعداد ریشه‌های مثبت یک معادله را دقیقاً تعیین کرد. اما اثبات آن طولانی است و مقدمات بسیاری دارد. اما قاعده علامت‌های دکارت هم هست که اگرچه اطلاعاتی تقریبی می‌دهد، هم برهان آن مقدماتی است و هم استفاده از آن آسان است. برای مطرح کردن این قاعده نیازمند مفهوم «گشتگاه» رشته‌های عددی حقیقی هستیم.

فرض کنید $\{a_i\}_{i=0}^n$ دنباله‌ای از عددهای حقیقی باشد. a_m را یک گشتگاه این دنباله می‌نامیم اگر a_m با اولین جمله ناصفر پیش از آن مثلاً a_{m-k} مختلف‌العلامه باشد. مثلاً اگر ترتیب اعضای دنباله را برعکس کنیم، عددهای گشت‌های آن عوض نمی‌شود و یا اگر دنباله را در عددهای مثبت ضرب کنیم همین‌طور. یا اگر جمله‌های طرفین دنباله ناصفر باشند، برحسب اینکه هم علامت (یا با علامت مختلف) باشند، عددهای گشت‌های آن دنباله زوج (یا فرد) خواهد بود.

حال گشتگاه‌های ضریب‌های حقیقی چندجمله‌ای $P(x) = 0$ را در نظر بگیرید. در صورتی چندجمله‌ای را کامل می‌گوییم که همه ضریب‌های ناصفر باشند. و اگر تفاضل درجات در جمله با ضریب ناصفر بزرگ‌تر از یک باشد، می‌گوییم $P(x)$ بین آن دو جمله خلأ دارد. برای مثال عدد گشت‌های چندجمله‌ای‌های $P(x) = a_0 x^n + \dots + a_{n-m} x^m$ و $Q(x) = a_0 x^{n-m} + a_{n-m}$ هر یک در مقایسه با چندجمله‌ای‌های $P(-x)$ و $Q(-x)$ یکسان‌اند. پس در حساب عددهای گشت‌ها می‌توان جمله ثابت را ناصفر فرض کرد.

لم اول: عددهای ریشه‌های مثبت یک معادله و عددهای گشت‌های آن از حیث زوجیت یکسان هستند.

اثبات: کافی است توجه کنید که در چندجمله‌ای $P(x)$ که در آن $a_n \neq 0$ داریم: $\operatorname{sgn} P(+\infty) = \operatorname{sgn} a_n$ و $\operatorname{sgn} P(0) = \operatorname{sgn} a_0$. اما می‌دانیم برحسب اینکه a_n و a_0 متحدالعلامه یا مختلف‌العلامه باشند، عددهای گشت‌ها زوج یا فرد است. از صفر به سمت بی‌نهایت حرکت و بررسی کنید زوج بار یا فرد بار محور x را قطع می‌کنید. توجه کنید که می‌توان فرض کرد ریشه‌ها تکراری‌ها نیستند. ■

لم دوم: فرض کنید:

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-m} x^m \quad \text{که } m \geq 0$$

$a_{n-m} \neq 0$. اگر v و v' به ترتیب گشت‌های $P(x)$ و $P(-x)$ باشند، آنگاه $v + v' = (n-m) - 2k$ که در آن k عددی صحیح و نامنفی است.

اثبات: اگر $P(x)$ کامل باشد، نشان می‌دهیم $v + v' = n$. اگر a_i نماینده ضریب‌های $P(x)$ باشد، $a_i^{(1)} (-1)^i$ ضریب‌های $P(-x)$ را مشخص می‌کنند. کافی است توجه کنید که هر گشت $P(x)$ یک ناگشت $P(-x)$ است.

حال اگر $P(x)$ ناقص باشد، ضریب‌های صفر را به دلخواه ناصفر کنید. اگر زوج ax^k و bx^j که $k > j > L$ یک خلأ در $P(x)$ را تشکیل دهند و ضریب x^L که $k < j < L$ را به λx^L تبدیل کنیم که $\lambda \neq 0$ ، برحسب اینکه a و b مختلف‌العلامه یا متحدالعلامه باشند، عددهای گشت‌های $P(x)$ یا تغییر نمی‌کند یا عددی زوج بر آن اضافه می‌شود. اگر پس از کامل کردن $P(x)$ چندجمله‌ای $P_1(x)$ به دست بیاید، v_1 عدد گشت‌های $P_1(x)$ باشد و v'_1 عددهای گشت‌های $P_1(-x)$ ، آنگاه: $v_1 = v + 2k_1$ و $v'_1 = v' + 2k'_1$. اما اگر $v_1 + v'_1 = n$ و اگر قرار دهیم: $k_1 + k'_1 = k$ آنگاه: $n = v + v' + 2k$ که همان است که می‌خواستیم. ■

لم سوم (لم سگنر^۳): برای $P(x) = a_0 x^n + \dots + a_{n-m} x^m$ و $c > 0$ ، افزایش عددهای گشت‌های $P(x)(x-c)$ بر عددهای گشت‌های $P(x)$ عددی فرد است.

اثبات: می‌دانیم عددهای گشت‌های $P(x)$ با عددهای گشت‌های $P(cx)$ یکسان است. در لم بعد نشان می‌دهیم این عدد یک واحد از عددهای گشت‌های

$a_0 c^n, a_1 c^{n-1} - a_0 c^n, \dots, a_{n-m} c^m - a_{n-m-1} c^{m+1}, -a_{n-m} c^m$ کمتر است و بعد این عددهای گشت‌ها با عددهای گشت‌های $a_0 c^n, a_1 c^{n-1} - a_0 c^n, \dots, a_{n-m} c^m - a_{n-m-1} c^{m+1}, -a_{n-m} c^m$ مساوی است. ■

لم چهارم: اگر همه جمله‌های یک دنباله a_i صفر نباشند و v عدد گشت‌های آن باشد، عددهای گشت‌های دنباله تفاضلی $a_0, a_1 - a_0, a_2 - a_1, \dots, a_n - a_{n-1}, -a_n$ حداقل $v+1$ است.

راهنمایی: ابتدا توجه کنید که اگر $a_{j+1}, a_{k+1}, \dots, a_{n-1}$ دو گشتگاه متوالی باشند، آنگاه عدد گشت‌های

$a_{j+1} - a_j, a_{j+2} - a_{j+1}, \dots, a_k - a_{k-1}, a_{k+1} - a_k$ عددی فرد است. بعد فرض کنید: $k_1 + 1, \dots, k_v + 1$ که در آن $0 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_v \leq n-1$ باشند و نکته بالا را به کار ببرید. ■

قضیه (قاعده علامت‌های دکارت): فرض کنید P عددهای ریشه‌های مثبت معادله درجه n ام $P(x) = a_0 x^n + \dots + a_n = 0$ باشد که در آن تکرر ریشه‌ها لحاظ نشده و v عدد گشت‌های $P(x)$ است. در این صورت داریم: $P \leq V$ و $2 \mid V - P$.



۲۹

شماره ۱۳۰ تابستان ۱۴۰۱



۳۰

شماره ۱۳۰ | تابستان ۱۴۰۲

روش دسته‌بندی

جمله‌های $P(x)$ را دسته‌بندی می‌کنیم، به‌طوری که هر دسته دارای یک گشت باشد و نخستین ضریب هر دسته نیز مثبت باشد. سپس در هر دسته مقداری مثبت برای x تعیین می‌کنیم که به ازای آن مقدار، آن دسته مثبت باشد. ماکزیمم این مقادیر را که تعیین کردیم، یک کران بالا برای ریشه‌های مثبت خواهد بود.

روش ماکلورن

قضیه: فرض کنید معادله $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ که در آن $a_0 > 0$ دارای ضریب‌های منفی باشد و N ماکزیمم قدرمطلق‌های این ضریب‌های منفی باشد. در این صورت $1 + \left(\frac{N}{a_0}\right)$ یک کران بالا برای ریشه‌های مثبت $P(x)$ است.

اثبات: روشن است که همواره: $a_i + N \geq 0$. اگر $x \geq 1 + \left(\frac{N}{a_0}\right)$ آنگاه:

$$\begin{aligned} P(x) &= \left\{ a_0 x^n - N \left(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1 \right) \right. \\ &\quad \left. + \left\{ (a_1 + N)x^{n-1} + (a_2 + N)x^{n-2} + \dots + (a_n + N) \right\} \right\} \\ &\geq a_0 x^n - N \frac{x^n - 1}{x - 1} = \left(a_0 - \frac{N}{x - 1} \right) x^n + \frac{N}{x - 1} \\ &> \left(a_0 - \frac{N}{x - 1} \right) x^n \geq 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

روش لاگرانژ

در معادله $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ فرض کنید $n - r$ نخستین جمله با ضریب منفی باشد و N همان عدد بالا باشد. در این صورت $1 + \left(\frac{N}{a_0}\right)^{\frac{1}{r}}$ یک کران بالا برای ریشه‌های مثبت $P(x)$ است. زیرا اگر: $x \geq 1 + \left(\frac{N}{a_0}\right)^{\frac{1}{r}}$ داریم:

$$\begin{aligned} P(x) &= \left\{ a_0 x^n - N \left(x^{n-r} + x^{n-r-1} + \dots + 1 \right) \right. \\ &\quad \left. + \left\{ a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{r-1} x^{n-r+1} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ (a_r + N)x^{n-r} + (a_{r+1} + N)x^{n-r-1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \dots + (a_n + N) \right\} \right\} \\ &\geq a_0 x^n - N \frac{x^{n-r+1} - 1}{x - 1} + \frac{N}{x - 1} \\ &> a_0 x^n - N \frac{x^{n-r+1}}{x - 1} \geq 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

روش نیوتن

لم: فرض کنید $P(x)$ چندجمله‌ای درجه n باشد و α عددی حقیقی. در این صورت اگر مقدار چندجمله‌ای‌های

$$P(x), P'(x), \dots, P^{(n)}(x)$$

به ازای $x = \alpha$ مثبت باشد، آنگاه به ازای هر $x > \alpha$ نیز مثبت است.

اثبات: اگر $c_p, \dots, c_1$ همه ریشه‌های مثبت $P(x)$ باشند، $Q(x) = (x - c_1) \dots (x - c_p) Q(x)$ که معادله $Q(x) = 0$ ریشه مثبت ندارد. پس اگر v_1 عدد گشت‌های چندجمله‌ای $Q(x)$ باشد، داریم: $v_1 = 2\ell$. حال کافی است از لم سگنر استفاده کنید و نشان دهید عده گشت‌های $P(x)$ برابر $2k + p$ است. ■

نکته: توجه کنید که اگر همه ریشه‌های $P(x)$ حقیقی باشند، عده گشت‌های $P(x)$ و $P(-x)$ با عده ریشه‌های مثبت آن‌ها برابر است.

۴. کران برای ریشه‌های حقیقی معادلات جبری

یک کران بالای Λ برای ریشه‌های حقیقی معادله $P(x) = 0$ عددی است که از همه ریشه‌های $P(x)$ بزرگ‌تر باشد. کران پایین به‌طور مشابه تعریف می‌شود. فرض کنید Λ کران بالایی برای ریشه‌های مثبت $P(x)$ باشد و $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_r$ کران‌های بالایی برای ریشه‌های مثبت به ترتیب $x^n P\left(\frac{1}{x}\right), P(-x), x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$ باشند. آنگاه c ریشه $P(x)$ ، $\frac{1}{c}$ ریشه $x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$ و $-c$ ریشه $P(-x)$ و $\frac{-1}{c}$ ریشه $x^n P\left(\frac{-1}{x}\right)$ خواهد بود. لذا: $\frac{1}{c} < \Lambda_1$ و $-c < \Lambda_2$ و $\frac{-1}{c} < \Lambda_r$. بنابراین به ازای هر ریشه مثبت c از معادله $P(x) = 0$ داریم: $\frac{-1}{\Lambda_1} < c < \frac{-1}{\Lambda_r}$ و به ازای هر ریشه منفی آن مانند d داریم: $-\Lambda_r < d < -\Lambda_1$. پس با این اوصاف کافی است کران بالایی برای ریشه‌های مثبت $P(x)$ را به دست دهیم.

قضیه: فرض کنید $P(x)$ یک چندجمله‌ای با ضریب پیش‌رو مثبت a باشد و فقط دارای یک گشت باشد و $a > 0$. در این صورت، اگر $P(a) > 0$ آنگاه برای هر $x > a$ داریم $P(x) > 0$.

اثبات: می‌توان نوشت:

$$P(x) = (ax^n + \dots + gx^q) - (hx^r + \dots + lx^s)$$

که همه ضریب‌های $a, h, g, \dots, l$ و ... مثبت هستند. قرار دهید

$$B(x) = \frac{h}{x^{q-r}} + \dots + \frac{1}{x^{q-s}} \quad \text{و} \quad A(x) = ax^{n-q} + \dots + g$$

$$A(x) = x^q (A(x) - B(x)).$$

اگر $x > a$ ، آنگاه $B(x) < B(a), A(x) > A(a)$ بنابراین

$$P(a) > 0 \quad \text{و} \quad a > 0 \quad \text{اما چون} \quad A(x) - B(x) > A(a) - B(a)$$

خواسته ما برآورده است.

اثبات: از تساوی تیلور داریم:

$$P(\alpha + h) = P(\alpha) + \frac{h}{1!} P'(\alpha) + \dots + \frac{h^n}{n!} P^{(n)}(\alpha)$$

اگر با بسط تیلور برای چند جمله‌ای‌ها آشنا نیستید می‌توانید تساوی بالا را به استقراء روی درجه $P(x)$ اثبات کنید. حکم از تساوی تیلور نتیجه می‌شود.

روش نیوتن مبتنی بر لم فوق است. می‌دانیم: $P^{(n)}(x) = n! a_n > 0$

و چند جمله‌ای $P^{(n-1)}(x)$ درجه اول است. پس می‌توان عددی مثبت مانند α_1 یافت که: $P^{(n-1)}(\alpha_1) > 0$. فرض کنید:

$$P^{(n-r)}(\alpha_1) < 0, \dots, P^{(n-r+1)}(\alpha_1) > 0, \dots, P^{(n-r)}(\alpha_1) > 0$$

در این صورت به جای α_1 عددی بزرگ‌تر مانند α_r انتخاب

می‌کنیم که: $P^{(n-r)}(\alpha_r) > 0$. بنابر لم بالا $P^{(n-r)}(x)$ و همه

مشتقات آن تا با $P^{(n-r)}(x)$ به ازای $x > \alpha_r$ مثبت خواهند بود.

پس α_r را در مشتقات پیش از $P^{(n-r)}(x)$ به جای x می‌گذاریم

و اگر به مشتقی برخوردیم که مقدارش منفی از آب درآمد، مانند سابق عمل می‌کنیم. با همین روش به α_k می‌رسیم که $P(\alpha_k)$ و همه مشتقات آن در α_k مثبت هستند و این α_k کران بالایی است که می‌خواستیم. ■

۵. حل تقریبی معادله‌های عددی

در اینجا به جای حل معادله‌های جبری به روش جبری به محاسبه مقدارهای تقریبی جواب‌های یک معادله عددی توجه داریم. حتی اگر حل معادله به روش جبری ممکن باشد، در مورد جواب‌های غیرگویا، محاسبه جواب‌ها و به دست آوردن بسط اعشاری آن‌ها کاری بسیار دشوار است. لذا باید به مقدار تقریبی این جواب‌ها اکتفا کرد. روش‌های زیر به جز روش هورنر عمدتاً برای معادله‌های غیرجبری نیز کارآمد هستند. فرض کنید تابع f در بازه $[\alpha, \beta]$ پیوسته با مشتقات پیوسته باشد و معادله $f(x) = 0$ فقط یک ریشه بدون تکرار ξ در بازه (α, β) داشته باشد و: $f(\alpha)f(\beta) < 0$. هدف ما محاسبه این ریشه است.

روش اول: می‌توان عددی دلخواه از (α, β) را امتحان کرد. اگر به دو عدد α_1 و β_1 برسیم که: $\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta$ و $f(\alpha_1)f(\beta_1) < 0$ ، آنگاه: $\alpha_1 < \xi < \beta_1$. به همین روش می‌توان بازه تقریب را تنگ‌تر کرد.

روش دوم (روش اجزای متناسب): فرض کنید در $[\alpha, \beta]$ مشتق

f صفر نشود و مشتق دوم علامت ثابتی داشته باشد. در این صورت انحنا منحنی نمودار تابع $y = f(x)$ بین نقاط $A = (\alpha, f(\alpha))$ و $B = (\beta, f(\beta))$ یکسان است. اگر C نقطه تقاطع وتر AB با محور طول‌ها باشد و γ طول آن باشد، داریم:

$$\gamma = \alpha + \frac{(\alpha - \beta)f(\alpha)}{f(\beta) - f(\alpha)} = \frac{\alpha f(\beta) - \beta f(\alpha)}{f(\beta) - f(\alpha)}$$

و بنابر مفروضات: $\alpha < \gamma < \beta$. بر حسب اینکه y'' با $f(\alpha)$ یا با $f(\beta)$ مختلف‌العلامه باشد، ξ بین β و γ یا بین α و γ قرار دارد. بدین گونه ξ در یکی از بازه‌های (α, γ) و (γ, β) است که تنگ‌تر شده است.

روش سوم (روش نیوتن): با فرضیات بالا از یکی از دو نقطه A و B که در آنجا f' و f'' متحدالعلامه هستند، مماسی بر منحنی نمودار $y = f(x)$ می‌کشیم. فرض کنید D محل تلاقی مماس با محور طول‌ها و δ طول این نقطه باشد. از معادله مماس داریم:

$$\delta = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \quad (f(\alpha)f''(\alpha) > 0)$$

$$\delta = \beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)} \quad (f(\beta)f''(\beta) > 0)$$

در حالت اول ξ بین δ و β است و در حالت دوم بین α و δ است. پس بازه را کوچک‌تر کرده‌ایم.

روش چهارم: با فرضیات بالا، از آنچه گذشت معلوم است که اگر (α, β) بازه اولیه باشد که شامل ξ است، همواره روش اجزای متناسب را می‌توان بر یکی از α و β اعمال کرد. در این صورت، روش نیوتن بر دیگری قابل اعمال است. اگر این کار را به دفعات تکرار کنیم، بازه تقریب را می‌توان به دلخواه کوتاه کرد.

روش پنجم (روش هورنر): این روش مخصوص معادله‌های چندجمله‌ای است. اساس این روش کاستن متوالی عددی معینی از ریشه مطلوب است. به مثال زیر توجه کنید:

معادله $0 = x^3 - x - 9 = P(x)$ یک ریشه بین ۲ و ۳ دارد. زیرا: $P(2) = -3$, $P(3) = 15$. پس این ریشه به شکل $2 \dots$ است. برای تعیین مقداری دقیق‌تر معادله‌ای می‌سازیم که ریشه‌هایش دو واحد از ریشه‌های $P(x)$ کم‌ترند. به روش هورنر معادله به این صورت درمی‌آید:

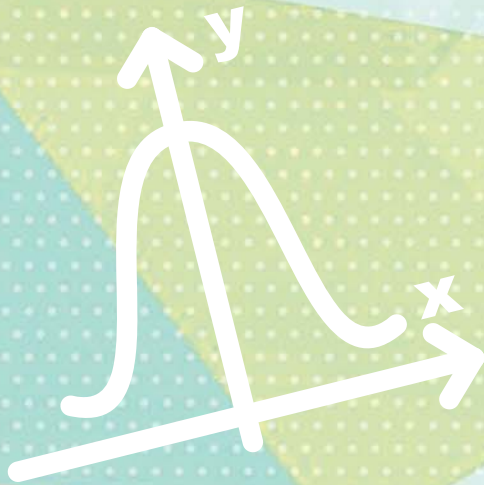
$$P_1(x) = x^3 + 6x^2 + 11x - 3 = 0$$

که دارای ریشه‌ای بین صفر و یک است. چون این ریشه مثبت و در بازه $(0, 1)$ است، در تقریب اول از $6x^2$, x^3 چشم می‌پوشیم. از اینجا معادله $0 = 11x - 3$ به دست می‌آید و تقریب $x = \frac{3}{11} = 0.2727 \dots$ برای ریشه مذکور به دست می‌آید. به روش هورنر معلوم می‌شود که: $P_1(0.2) = -0.552$ و چون $P_1(1) > 0$ ، پس ریشه در $(0.2, 1)$ زندگی می‌کند. حال معادله‌ای می‌سازیم که



۴

شماره ۱۳۰ | تابستان ۱۴۰۱



روش کاردان برای حل معادله‌های درجه سوم:

ابتدا معادله درجه سوم را به معادله‌ای به شکل زیر تبدیل می‌کنیم:
 $x^3 + px + q = 0$

که در آن p و q عددهای مختلط هستند. اگر ξ یکی از سه ریشه باشد، می‌نویسیم: $\xi = \alpha + \beta$ که یکی از α و β را می‌توان به دلخواه اختیار کرد. از آنجا که $\xi^3 + p\xi + q = 0$ خواهیم داشت:
 $\alpha^3 + \beta^3 + (3\alpha\beta + p)(\alpha + \beta) + q = 0$

حال α و β را چنان اختیار می‌کنیم که: $\alpha\beta = -\frac{p}{3}$. در این صورت:

$$\alpha^3 + \beta^3 = -q, \quad \alpha^3\beta^3 = -\frac{p^3}{27}$$

پس α^3 و β^3 ریشه‌های معادله درجه دوم $z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0$ هستند. در نتیجه:

$$\alpha^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \quad \beta^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

یادمان باشد که نقش α و β متقارن است و رادیکال به معنی

یکی از جذرهای $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ است. بنابراین:

$$\xi = \alpha + \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

این دستور معروف کاردان است. چون سه ریشه سوم داریم و به ازای هر مقدار α فقط یکی از مقدارهای β قابل قبول است، فرمول بالا سه ریشه به دست می‌دهد. پس می‌توان با توجه به $\alpha\beta = -\frac{p}{3}$ دستور کاردان را به شکل زیر نوشت:

$$\xi = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \frac{p}{\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}}$$

ریشه‌هایش $\frac{1}{2}$ از ریشه‌های $P_1(x)$ کمترند.

$$P_2(x) = x^3 + \frac{6}{13}x^2 + \frac{13}{52}x - \frac{552}{13} = 0$$

که ریشه در $(\frac{9}{8}, \frac{9}{8})$ دارد. در تقریب اول مقدار

$$x = \frac{552}{13 \cdot 52} = \frac{9}{4}$$

پس در این مرحله: $P_2(\frac{9}{4}) = -\frac{500576}{13}$. این عمل را تا هر جا بخواهیم می‌توانیم ادامه دهیم. چشم‌پوشیدن از جمله‌های مرتبه بالا فقط وقتی ممکن است که با انتقال بتوانیم خود را در بازه $(0, 1)$ محدود کنیم تا بتوان از توان‌های بالا صرف نظر کرد. برای این کار لازم است ریشه را بین دو عدد متوالی محدود کنیم.

۶. حل جبری معادله‌ها

فرض کنید $P(x) = \sum_{r=0}^n a_r x^{n-r} = 0$ یک معادله جبری با ضرایب‌های حریفی مستقل از یکدیگر باشد. به عبارت دیگر $a_0, \dots, a_n$ متغیرهایی مستقل از هم باشند. مقصود از عبارت جبری بر حسب ضرایب‌های $P(x)$ ، یعنی عددی با متناهی عمل جبری از روی $a_0, \dots, a_n$ تولید کنیم. مقصود از حل جبری معادله‌های جبری این است که به کمک رادیکال‌ها عبارتی جبری بسازیم که حاصل آن جواب معادله بالا باشد. اگر چنین کاری ممکن نباشد، می‌گوییم حل جبری معادله مورد بحث ممتنع است؛ یعنی امکان‌پذیر نیست.

برای مثال، در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ عبارت

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مختلط $b^2 - 4ac$ است، جواب معادله محسوب می‌شود. خواهیم دید حل جبری معادله‌های درجه سوم و چهارم هم ممکن است. در طول قرن‌های متمادی، ریاضی‌دانان در حل جبری معادله درجه پنجم و معادله‌های درجه‌های بالاتر کوشیدند. به‌خصوص پس از آن که فراری به حل معادله درجه چهارم با تبدیل آن به معادله درجه سوم موفق شد، اوایل و سپس لاگرانژ کوشیدند حل معادله درجه پنجم را به حل معادله درجه چهارم برگردانند. موفق نشدن چنین مردان بزرگی این فکر را به وجود آورد که شاید چنین تحویلی امکان‌پذیر نباشد.

نخستین ریاضی‌دانی که درصدد اثبات امتناع حل جبری معادله درجه پنجم برآمد **روفینی** (۱۸۰۵-۱۸۰۳) بود. اما نخستین بار **آبل** (۱۸۲۹-۱۸۰۲) بود که امتناع حل معادله‌های کلی درجه پنجم را به اثبات رساند (۱۸۲۶). مسئله دیگر تعیین همه معادله‌های قابل حل به روش جبری است. این مسئله را **گالوا** (۱۸۳۲-۱۸۱۱) حل کرد. **ارمیت** در سال ۱۸۵۸ معادله کلی درجه پنجم را به طریقه‌ای غیرجبری، به وسیله توابع متعالی معروف به «توابع هنگی بیضوی» حل کرد.



۳۲

شماره ۱۳۰ | تابستان ۱۴۰۵

$$\mu v = a_1 a_v - a_0 a_v + 2a_1 \lambda$$

۷. ریشه‌های گویای چندجمله‌ای‌های باضریب‌های عدد صحیح

فرض کنید همه ضریب‌های $P(x) = a_0 x^n + \dots + a_n$ عددهای صحیح باشند و $x = \frac{r}{s}$ عددی گویا و ریشه معادله $P(x) = 0$ باشد. فرض کنید r, s عددهای صحیح هستند که $(r, s) = 0$ داریم:

$$a_0 \left(\frac{r}{s}\right)^n + \dots + a_{n-1} \left(\frac{r}{s}\right) + a_n = 0$$

بنابراین با ضرب کردن در s^n خواهیم داشت:

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} s + \dots + a_{n-1} r s^{n-1} + a_n s^n = 0$$

بنابراین اگر $P|s$ مقسوم‌علیه اولی از s باشد، چون s در تمام جمله‌ها حاضر است به‌جز جمله اول، بنابراین: $P|a_0 r^n$. اما $(r, s) = 1$ نتیجه می‌دهد: $P|a_0$.

همچنین اگر $q|r$ مقسوم‌علیه اولی از r باشد، چون r در تمام جمله‌ها حاضر است به‌جز جمله آخر، بنابراین: $q|a_n s^n$. اما $(r, s) = 1$ نتیجه می‌دهد: $q|a_n$. پس عددهای اول صورت عدد گویای $x = \frac{r}{s}$ که ریشه معادله است در تجزیه a_n به عوامل اول یافت می‌شود و عددهای اول مخرج در تجزیه a_0 به عوامل اول یافت می‌شود. مثلاً اگر: $a_0 = 1$ ، آنگاه همه ریشه‌های گویا باید عدد صحیح باشند. اگر x عددی صحیح باشد که در معادله زیر صدق کند:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

حتماً باید داشته باشیم: $x|a_n$. چرا که x در تمام جمله‌های دیگر ظاهر می‌شود. پس کافی است مقسوم‌علیه‌های a_n را بررسی کنیم و ببینیم آیا ریشه معادله بالا هستند یا خیر و با آزمون و خطا و تقسیم کردن متوالی می‌توان همه ریشه‌های گویای معادله $P(x) = 0$ را پیدا کرد.

در حالت کلی معادله درجه سوم $P(x) = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$ با تغییر متغیر $x = X - \frac{a_1}{3a_0}$ به شکل $X^3 + pX + q = 0$ در می‌آید که در آن:

$$p = \frac{a_2}{a_0} - \frac{a_1^2}{3a_0^2}, \quad q = \frac{2a_1^3}{27a_0^3} - \frac{a_1 a_2}{3a_0^2} + \frac{a_3}{a_0}$$

در حالت کلی، در یک معادله درجه n ام با ضریب پیشروی a_0 و ریشه‌های $x_1, \dots, x_n$ داریم: $D = a_0^{n-1} \prod_{i < j} (x_i - x_j)^2$ برای مثال در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ داریم:

$$D = a^2 (x_1 - x_2)^2 = a^2 ((x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2) = b^2 - 4ac$$

شرط لازم و کافی برای آنکه هر معادله ریشه مکرر داشته باشد این است که: $D = 0$.

می‌توان نشان داد، در معادله $X^3 + pX + q = 0$ داریم: $D = -(4p^3 + 27q^2)$

در حالت حقیقی بودن p و q ، اگر همه ریشه‌ها حقیقی باشند $D > 0$ و اگر $D < 0$ معادله حداقل یک ریشه غیر حقیقی دارد.

روش فراری برای حل معادله‌های درجه چهارم با تحویل به درجه سوم:

فرض کنید

$$P(x) = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4 = 0$$

$P(x)$ را به صورت تفاضل مربع یک چندجمله‌ای درجه دوم و مربع یک چندجمله‌ای درجه سوم می‌نویسیم:

$$a_0 P(x) = (a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2 + 2\lambda)^2 - \{4(\lambda a_0 + a_1^2 - a_2 a_1) x^2 + 4(2\lambda a_1 + a_1 a_2 - a_2 a_3) x + (4\lambda^2 + 5\lambda a_2 + a_2^2 - a_2 a_4)\}$$

برای آنکه عبارت داخل ابرو مجذور یک عبارت درجه اول باشد که به شکل $2\mu x + \nu$ است، شرط لازم و کافی این است که مبین عبارت داخل ابرو صفر باشد. این شرط به شکل $4\lambda^2 - 4\lambda + J = 0$ است که در آن:

$$I = a_2 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2$$

$$J = a_2 a_4 a_1 + 2a_1 a_2 a_3 - a_2 a_3^2 - a_4 a_1^2 - a_4^2$$

J را می‌توان به شکل یک دترمینان هم نوشت:

$$J = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}$$

این معادله را «معادله حلال» می‌نامند. اگر λ یکی از ریشه‌های آن باشد، μ و ν از فرمول‌های زیر به دست می‌آیند.

$$\mu^2 = a_1^2 - a_2 a_3 + a_2 \lambda$$

$$\nu^2 = (a_2 + 2\lambda)^2 - a_2 a_4$$

پی‌نوشت‌ها

1. Michele Rolle
2. Sturm
3. Seagner
4. Horner



۳۳

شماره ۱۳۰ | تابستان ۱۴۰۱

افتخار برانزیدگان مسابقه بتا

برهان پژوهان

دانش آموزان: زهرا اکبری، فاطمه بخش و معصومه ابراهیمی
دبیر راهنما: محبوبه فنودی

حوزه علم و زندگی از آن‌ها الگو بگیریم. در کل، شناخت افکار بزرگان علم ریاضی هیجان‌انگیز است.

دوست دارید در مجله رشد برهان ریاضی متوسطه دوم بیشتر درباره چه موضوعی بحث شود؟

قسمت معادله‌ها که در همه علوم، به‌طور مثال فیزیک، به کار برده می‌شود، ضابطه‌های تابع‌ها، احتمال و هندسه. چون این‌ها بعضی وقت‌ها نقاط ضعف دانش‌آموزان نیز هستند. در واقعیت نیز کاربرد فراوان دارند.

خیلی علاقه داریم. به نظر ما، ترکیب منطق و ریاضی یکی از موضوعات بحث‌برانگیز و چالشی در حوزه مباحث ریاضیات است. همچنین، از بخش تاریخ ریاضی نیز لذت می‌بریم، زیرا با دانشمندان و فیلسوفان ریاضی آشنا می‌شویم و می‌توانیم در

در این شماره با نخستین برگزیدگان مسابقه ریاضی - پژوهشی «بتا»، مسابقه «برهان پژوهی تیمی اندیشه‌ورزان نوجوان»^۱، گفت‌وگو می‌کنیم.

سلام. لطفاً خودتان را معرفی کنید و بفرمایید کلاس چندم هستید و در کدام مدرسه تحصیل می‌کنید:

سلام زهرا ابهری هستم؛ کلاس یازدهم، رشته ریاضی فیزیک از دبیرستان رضویه ناحیه ۲ مشهد مقدس. فاطمه بخشی هستم. هر سه هم کلاسی هستیم. معصومه ابراهیمی هستم.

چطور و از چه زمانی با مجله برهان ریاضی متوسطه دوم آشنا شدید؟

در پایه دهم ریاضی فیزیک، دبیر ریاضی عزیزمان خانم محبوبه فنودی، مسابقات برهان پژوهی را به ما معرفی کردند. همین واسطه‌ای شد تا با مجلات برهان آشنا شویم.

کدام قسمت‌های مجله را بیشتر می‌پسندید؟

از بخش‌های آموزشی، به منطق ریاضی



۳۳

شماره ۱۳۰ | تابستان ۱۴۰۲



چگونه دانش آموزان خود را به ریاضی علاقه مند می کنید؟

هنگام تدریس سعی می کنم مباحث ریاضی را با دنیای واقعی آن ها آموزش دهم. به طور مثال، هنگام تدریس بردارها، کاربرد آن ها را در علامت های راهنمایی و رانندگی برای فهم و نشان دادن عکس العمل مناسب شرح می دهم تا برخی مباحث ها برای آن ها ملموس تر شود. همچنین، سعی می کنم آن ها را با دنیای پژوهش در حوزه ریاضی آشنا کنم و به مطالعه کتاب های علمی غیر درسی تشویق کنم. اگر امکانات و شرایط فراهم باشد نیز گاهی در کلاس فیلم های آموزشی ای را که خودم تهیه یا صداگذاری کرده ام، نمایش می دهم. همچنین، در زمان هایی از کلاس در مورد تاریخ ریاضیات بحث های جالبی مطرح می کنم.

برای آموزش مفاهیم ریاضی چه روش ها و فعالیت هایی به کار می برید؟
برای تدریس مباحثی مانند جبر، سعی می کنم روش های تصویرسازی را به کار ببرم. به طور مثال، مبحث اتحاد مربع را با روش تصویرسازی به این صورت آموزش می دهم:

$$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

	x	$+3$
x	x^2	$3x$
$+3$	$3x$	$+9$

یا در انتهای مباحث مطرح می شوند علاقه داریم و در مورد آن ها وقت می گذاریم و به دنبال راه حل هایی جدیدتر برای آن ها هستیم.

آیا مجله را به دوستان یا خانواده خود هم معرفی کرده اید یا خیر؟

بله. تا به حال خیلی پیش آمده است که این مجله را به دوستان و هم کلاسی هایمان معرفی کرده باشیم.

از نحوه برگزاری مسابقه بتا چقدر رضایت دارید و چه انتقاد و پیشنهادی برای بهتر شدن آن دارید؟

مسابقه برای ما خیلی مفید بود و باعث شد هم ریاضی را بهتر یاد بگیریم و هم با شیوه پژوهش آشنا بشویم. اگر این امکان وجود داشته باشد که گاهی این مسابقه به صورت حضوری برگزار شود، هیجان انگیز خواهد بود.

درباره مجله رشد ریاضی برهان صحبت دیگری دارید؟

از صفحه های مجله، صفحه «آینده سازان» خیلی برای دانش آموزان نویدبخش و جذاب است. بهتر است این صفحه در هر شماره گنجانده شود. این صفحه یک «بتا» در ابعاد کوچک است و ما را امیدوار می کند در آینده جزو نویسندگان برهان باشیم.

خیلی هم عالی! و حرف آخر؟

از معلم عزیزمان، خانم فنودی، قدرانی ویژه داریم و برایشان آرزوی تندرستی می کنیم.

گفت و گو با خانم محبوبه فنودی سلام. لطفاً خودتان را معرفی بفرمایید.

سلام. محبوبه فنودی هستم. دبیر ریاضی و رایانه و دبیر پژوهش سرای رازی ناحیه ۲ مشهد مقدس.

برای بهبود کیفیت مجله چه پیشنهاد یا انتقادی دارید؟

ما به طور کلی از مجله برهان ریاضی راضی هستیم. همین که این مجله دانش آموزان را با شاخه های علوم ریاضی بیشتر آشنا می کند، یکی از بهترین نقاط قوت آن است. البته بهتر است مباحث اخترشناسی و سایر علوم و ارتباط آن ها با علوم ریاضی هم به آن افزوده شود تا دنیای برهان پژوهی هم گسترده تر شود.

معلم راهنمای شما در این مسابقه چه نقشی داشت؟

ایشان در این مسیر کمک های شایانی به ما کردند. ما را با دنیای پژوهش در حوزه ریاضی آشنا کردند. دو سال تمام است که در «پژوهش سرای دانش آموزی رازی ناحیه ۲ مشهد مقدس» شاگرد ایشان هستیم. بسیار مشوق ما هستند و کمک کردند به علوم ریاضی از بعدهای دیگر مانند کاربرد آن در کدنویسی و الگوریتم نویسی نیز توجه کنیم. علاوه بر این، با نحوه نگارش مقاله های پژوهشی نیز آشنایمان کردند. همچنین، کتاب ها و منابع خوبی برای مطالعه بیشتر به ما معرفی کردند.

کدام مقاله و مطالب مجله را مفیدتر از بقیه مطالب آن می دانید؟

انتخاب یک مقاله واقعاً سخت است، ولی مقالات آقای محمدتقی طاهری تنجانی را خیلی می پسندیم، چون ایشان موضوعات گوناگون را به نحوی ساده و با مثال های جالب و قابل فهم آموزش می دهند. مقاله برهان خلف ایشان در شماره ۱۱۸ مجله را به هم کلاسی هایمان معرفی کردیم تا در این مبحث بیشتر مطالعه کنند، چون تعداد زیادی از آن ها در این مبحث مشکلاتی داشتند. همچنین، مطالب اخیر ایشان با موضوعات «مسائل منطقی» و «یک ایده خلاقانه» در شماره های ۱۲۶ و ۱۲۸ خیلی برایمان جالب بود.

آیا سؤال ها و مسئله های مطرح شده در مجله را حل می کنید؟

بله. به سؤالات و چالش هایی که در مقالات



۳۵

شماره ۳۵ | تابستان ۱۴۰۱

روش دوم:

$$(x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot x + \frac{1}{x^2}$$

در آموزش ریاضی با دانش‌آموزان خود چه چالش‌ها و مشکلاتی داشته‌اید؟

از بیشترین چالش‌ها در آموزش ریاضیات به دانش‌آموزان می‌توانم به این موارد اشاره کنم:

- ضعیف بودن پایه دانش‌آموزان در درس ریاضی و در محاسبه؛
- آشنایی ناکافی با مفاهیم و علامت‌های ریاضی؛
- ناتوانی در درست‌نوشتن مفاهیم ریاضی و حل مسئله توسط دانش‌آموزان؛
- تطابق‌نداشتن تعداد جلسات درس ریاضی، با مطالب حجیم کتاب‌های درسی روزانه، به خصوص در مدرسه‌های دولتی؛
- مجهز نبودن کلاس‌های درسی به فناوری‌های روز مانند تخته‌های هوشمند، به‌منظور جذاب کردن تدریس ریاضی؛
- جمعیت بیش از حد کلاس‌ها در مدرسه‌های دولتی؛
- دخالت والدین در آموزش ریاضی.

برای بهبود یادگیری ریاضی دانش‌آموزان چه توصیه‌ای دارید؟

از نظر من اساس یادگیری ریاضی دانش‌آموز در دوره دبستان، به‌خصوص پایه‌های پنجم و ششم، رقم می‌خورد. به‌طور مثال، در پایه نهم معمولاً دانش‌آموزان اطلاعات و دانش مناسب پایه‌ای را ندارند و لازم می‌شود مباحث مهم پایه‌های قبل هم بررسی شوند که به دلیل نبودن زمان مناسب اختصاص یافته به درس ریاضی، چالش‌های زیادی ایجاد می‌شود. لذا در مرحله اول باید برای آموزش صحیح ریاضی در پایه ابتدایی راهکارهایی لحاظ شوند. همچنین، در برخی پایه‌ها، کتاب‌های ریاضی به خوبی نگاشته نشده‌اند و مطالب درس به زبان ساده و روان بیان نشده‌اند. در صورتی که نگارش خوب کتاب درسی ریاضی می‌تواند خیلی از چالش‌ها را برطرف کند.

چه مقاله‌ها و مطالبی از مجله را مفیدتر از بقیه مطالب برای دانش‌آموزان می‌دانید؟

به نظرم مقاله‌های حوزه‌های فناوری، کدنویسی و آموزش نرم‌افزارها بسیار مفیدند، چون هم مهارت‌های عصر حاضر آن‌ها را ارتقا می‌بخشند و هم با کاربرد بیشتر ریاضی آشنایشان می‌کند؛ به‌خصوص در حوزه کدنویسی که پایه آن تفکر و حل مسئله است و با ریاضی در موضوع حل مسئله نقطه اشتراک دارد.

چگونه دانش‌آموزان را برای شرکت در مسابقه ریاضی برهان‌پژوهی آماده کردید؟

ابتدا منابع و مطالب مفید مرتبط با موضوع انتخابی را تهیه کردم و در اختیار آن‌ها قرار دادم. از آن‌ها خواستم مطالب تهیه‌شده را مطالعه و خلاصه‌نویسی کنند تا با روش خلاصه‌برداری مطالعه نیز آشنا شوند. سپس در جلسه‌های حضوری و به کمک هم آن‌ها را بررسی کردیم و کار نگارش را با مشارکت هم انجام دادیم.

نظرتان درباره نام‌گذاری «بتا» چیست؟

«بتا» کلمه بامسمایی است که مفاهیم ریاضی را به ذهن متبادر می‌کند. لذا مناسب این مسابقه است. ولی من یک پیشنهاد هم برای نام‌گذاری دارم و آن اینکه هر دوره این مسابقه به یاد و بزرگداشت یکی از ریاضی‌دانان ایرانی اختصاص یابد. به این ترتیب، علاوه بر اینکه یاد این اندیشمندان زنده نگه داشته خواهد شد، دانش‌آموزان با دانشمندان قدیم و معاصر در حوزه ریاضی آشنا می‌شوند و همچنین الگوهای مناسبی در حوزه علم ریاضیات به دانش‌آموزان معرفی می‌شوند.

اگر شما طراح مسابقه بتا بودید، چه تصمیم‌هایی می‌گرفتید؟

اگر طراح مسابقه بودم، در مرحله نهایی این مسابقه را به‌صورت حضوری برگزار می‌کردم تا گروه‌های برتر در کنار هم حاضر شوند. همچنین، ضمن ایجاد هیجان

و افزایش لذت مسابقه، از فعالان موفق در حوزه ریاضیات دعوت می‌کردم در این مسابقه حضور یابند و در طول مسابقه با دانش‌آموزان گفت‌وگوی صمیمانه داشته باشند. حتی دعوت از خانواده‌ها و حضور آنان باعث افزایش تشویق و تهییج شرکت‌کنندگان می‌شود.

در مسابقه برهان‌پژوهی چه مزیت‌ها و عیب‌هایی می‌بینید؟

به نظر من می‌توان به این مزیت‌ها اشاره کرد:

- تشویق دانش‌آموزان به مطالعه مطالب ریاضی از کتاب‌های غیردرسی؛
 - تقویت پژوهش و نگارش در حوزه ریاضی؛
 - تقویت انجام کار تیمی؛
 - تقویت روحیه پژوهشی و پرسشگری؛
 - افزایش اطلاعات در حوزه‌های پژوهشی ریاضی؛
 - تقویت نیروی تفکر و تحلیل مطلب و متن‌های علمی تخصصی؛
 - آشنایی با نگارش مقاله در حوزه ریاضیات.
- عیب خاصی نمی‌بینم، فقط بهتر است محدودیت موضوعی چندانی برای انتخاب مقاله مشخص نشود تا دانش‌آموزان با توجه به علاقه خود، دامنه اختیار بیشتری در انتخاب مقاله مورد نظرشان داشته باشند.

حرف آخر؟

از همکارانم در قطب ریاضی دانش‌آموزی استان خراسان رضوی که مسابقه پژوهشی «بتا» را برگزار کردند و از شما دست‌اندرکاران مجله رشد ریاضی برهان کمال تشکر و قدردانی را دارم.

ما هم برای شما آرزوی سلامتی و موفقیت داریم.

پی‌نوشت

۱. برای اطلاعات بیشتر درباره مسابقه پژوهی «بتا» به قسمت مصاحبه در مجله برهان ۱۲۷ مراجعه کنید.



۳۶

شماره ۱۳۵ | تابستان ۱۴۰۵

مستأحی!

سید محمد رضا هاشمی موسوی
مدرس، مؤلف و محقق ریاضیات

اشاره

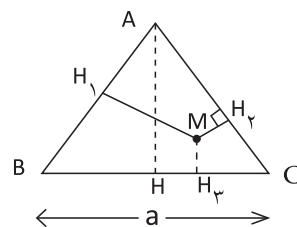
در داستان‌های قبل با ماجراهای هدیه حاکم بزرگ به مخترع شطرنج (و دو داستان دیگر) و حل حسابی مسئله ۵ کلاه و حل تعمیم آن بدون استفاده از ریاضیات گسسته و ضرب ذهنی و سریع $m \times n$ آشنا شدید.

کلاس درس هندسه (محاسبه مساحت)

چند جلسه‌ای از درس هندسه گذشته بود که معلم به درس محاسبه مساحت‌ها رسید. معلم ما عادت داشت که درس را با طرح کردن یک یا چند مسئله درباره موضوع و مبحث جدید آغاز کند. معلم با مثال‌های عملی و تجربی توضیحاتی در مورد محاسبه مساحت مثلث، مربع، مستطیل، لوزی، دوزنقه و دایره داد. پس از ورود به مبحث جدید چهار مسئله زیر را روی تابلو نوشت:

مسئله ۱: ثابت کنید مجموع فاصله‌های یک نقطه دلخواه داخل یک مثلث متساوی‌الاضلاع (شکل ۱)، برابر با ارتفاع مثلث است:

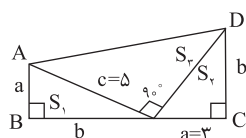
$$AH = MH_1 + MH_2 + MH_3$$



شکل ۱

مسئله ۲: در دوزنقه شکل ۲ ضلع b را حساب کنید و رابطه فیثاغورس را نتیجه بگیرید:

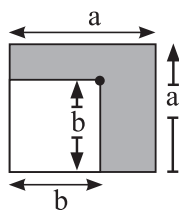
$$a^2 + b^2 = c^2$$



شکل ۲

مسئله ۳: با توجه به شکل ۳، برابری زیر را ثابت کنید:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

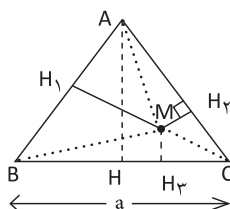


شکل ۳

مسئله ۴: مستطیل ABCD با ابعاد ۲۱ و ۳۰ واحد را در نظر می‌گیریم (شکل ۴). اگر مساحت مثلث K برابر ۴۴ و مساحت مثلث S برابر ۱۱ باشد، مساحت مستطیل H چقدر است؟

کارگروه مربع (امتیاز: ۲۵)

حل مسئله ۱: ابتدا برای هر یک از ارتفاع‌های H_1 ، H_2 و H_3 یک مثلث در نظر می‌گیریم (شکل ۵):



شکل ۵

حال مساحت مثلث‌ها با ارتفاع‌های H_1 ، H_2 و H_3 را محاسبه می‌کنیم:

$$S_1 = \frac{1}{2} MH_1 \cdot a \quad \text{و} \quad S_2 = \frac{1}{2} MH_2 \cdot a \quad \text{و} \quad S_3 = \frac{1}{2} MH_3 \cdot a$$

از طرف دیگر مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ارتفاع AH چنین است:

$$S_A = \frac{1}{2} AH \cdot a$$

از آنجا که مجموع مساحت‌های S_1 ، S_2 و S_3 برابر با مساحت کل مثلث متساوی‌الاضلاع (S_A) است، پس می‌توان نوشت:

$$S_A = S_1 + S_2 + S_3$$

$$\frac{1}{2} AH \cdot a = \frac{1}{2} MH_1 \cdot a + \frac{1}{2} MH_2 \cdot a + \frac{1}{2} MH_3 \cdot a$$

$$\frac{1}{2} AH \cdot a = \frac{1}{2} a (MH_1 + MH_2 + MH_3) \quad \text{و یا:}$$

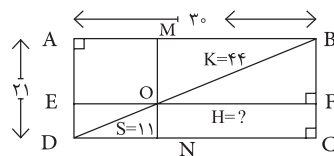
اگر دو طرف برابری بالا را در ۲ ضرب و بر a (غیر صفر) تقسیم کنیم داریم:

$$AH = MH_1 + MH_2 + MH_3$$

و این برابری بود که باید ثابت می‌کردیم.

معلم گفت: «بسیار عالی، بچه‌ها گروه مربع را تشویق کنید!»

بچه‌ها با شور و شوق گروه مربع را تشویق کردند. معلم برای اینکه



شکل ۶

معلم چهار مسئله را نوشت و نشست. بعد به تابلو اشاره کرد و گفت:

«بین خودتان چهار تیم درست کنید. می‌دانم از کلاس شما چهار نفر برای مسابقات ریاضی انتخاب شده‌اند. هریک از این چهار نفر سرگروه تیم باشند. این چهار مسئله هر کدام ۲۵ امتیاز دارد و ۵ نمره برای امتحان نیمسال (ترم) محسوب می‌شود. بدانید که گروهی باید کار کنید و مسائل را با هم حل کنید. اگر گروهی ۵ نمره را کسب کند، من به همه نفرات آن گروه ۵ نمره نیمسال را می‌دهم.»

بلافاصله زمزمه‌های بچه‌ها درباره مسئله‌ها و امتیازها و نمره بلند شد. معلم به تابلو اشاره کرد و گفت: «سرگروه‌ها بیایند و اسامی گروه خودشان را روی تابلو بنویسند.»

یکی از بچه‌های منتخب آمد و تخته را چهار قسمت کرد و نام‌های نفرات گروه خودش را نوشت و نشست. به همین ترتیب بقیه هم عمل کردند و به این ترتیب چهار گروه هشت نفره ایجاد شد؛ و باز همه و هیاهو کلاس را فراگرفت. معلم اضافه کرد: «زمان حل این چهار مسئله یک ساعت است. با اشاره من گروه‌ها حل مسئله‌ها را شروع کنند.»

ساعت ۱۰:۳۴ بود که معلم دست خود را بالا برد و بلافاصله با اشاره و صدای بلند گفت گروه‌ها شروع کنند و دست خود را مانند داورهای بین‌المللی با شتاب پایین آورد.

معلم رفت پای تابلو و تیم‌ها را با عنوان‌های مثلث، دوزنقه، مربع و مستطیل نام‌گذاری کرد. خودش هم نشست و با بچه‌ها مسئله‌ها را حل کرد. ۵۱ دقیقه از زمان گذشته بود که تیم مربع اعلام کرد که چهار مسئله را حل کرده است. ۳ دقیقه بعد تیم مستطیل و ۴ دقیقه بعد تیم دوزنقه اعلام کردند که مسئله‌ها را حل کردند.

دقایق پایانی بود که بالاخره تیم مثلث هم موفق به حل مسئله‌ها شد و با هیجان و شور و شوق زیاد فریاد زدند آقا ما هم حل کردیم. معلم بسیار شادمان و خرسند بود که کار گروهی جواب داده است و همه بچه‌ها با هم‌فکری توانستند موفق و پیروز از میدان مبارزه و مسابقه علمی بیرون بیایند. معلم ساعت خودش را نگاه کرد. درست ۱۱:۳۴ دقیقه بود که گفت سرگروه‌ها کارهای گروه را بیاورند و پس از اینکه همه برگه‌ها را تحویل گرفت، از سرگروه مربع خواست بیاید پای تابلو و نتایج کار گروه خود را برای همه توضیح دهد. سرگروه مربع پس از جمع‌بندی کارها به حل مسئله‌ها پرداخت که نتایج کارگروه مربع را در اینجا می‌آوریم:

او بلافاصله برای صرفه‌جویی در وقت به نماینده گروه دوزنقه اشاره کرد که گزارش کارگروه خود را بدهد و مسئله ۳ را حل کند.

نماینده ۱ دقیقه فرصت خواست که توضیحاتی بدهد و کل کارگروه را تشریح کند. با عجله شروع کرد و گفت: «آقای معلم، ما چهار نفر به کلاس‌های آمادگی برای شرکت در مسابقات ریاضی می‌رفتیم و در آن کلاس‌ها درسی با عنوان اتحادهای مهم را با ما کار کردند. برای همین من اول توضیحاتی درباره اتحاد مزدوج دادم. ولی مسئله اثبات هندسی این اتحاد را می‌خواهد، زیرا این برابری همیشه درست است:

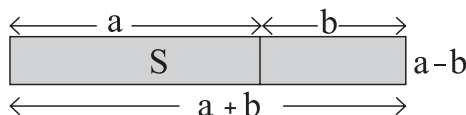
$$(a+b)(a-b) = a \cdot a - \underline{a \cdot b} + \underline{b \cdot a} - b^2 = a^2 - b^2$$

کارگروه دوزنقه (امتیاز: ۲۵+۳=۲۸)

حل مسئله ۳: برای حل هندسی، کافی است قسمت سایه‌خورده را این‌طور برش بزنیم (شکل ۶) و در کنار هم قرار دهیم:

$$S = (a+b) \times (a-b)$$

(عرض سایه‌خورده) (طول سایه‌خورده)



شکل ۶

از طرف دیگر، مساحت قسمت سایه‌خورده برابر با تفاضل مساحت‌های مربع‌هاست:

$$S_a = a \cdot a = a^2 \text{ (مساحت مربع بزرگ)} \quad S_b = b \cdot b = b^2 \text{ (مساحت مربع کوچک)} \quad \text{و} \quad S_a - S_b = a^2 - b^2$$

بدیهی است که S برابر است با: $S_a - S_b$.

$$S = S_a - S_b : (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

معلم گفت: «بسیار عالی، بچه‌ها گروه دوزنقه را تشویق کنید.» در بین تشویق بود که نماینده گروه دوزنقه با اشاره درخواست سکوت کرد و گفت: «در کلاس‌های آمادگی برای مسابقات ریاضی به ما در این زمینه مطلب مهم دیگری را یاد دادند که من فشرده و خلاصه به آن اشاره می‌کنم.»

نکته: این نتیجه را می‌توان برای اثبات یک حکم بسیار مهم به کار برد.

حکم: در بین مستطیل‌هایی که محیط برابر دارند، مستطیلی دارای مساحت حداکثر است که طول و عرض برابر داشته باشد؛ یعنی مربعی با همان محیط است.

اثبات: ضلع بزرگ‌تر را $a+b$ و ضلع کوچک‌تر آن را $a-b$ در نظر می‌گیریم.

معلم گفت: «بچه‌ها! به خاطر همین فعالیت اضافی و اثبات این حکم مهم ۳ امتیاز به این گروه می‌دهم.»

زمان تلف نشود، بلافاصله از گروه مستطیل خواست کار گروهی خود را برای مسئله بعد مانند گروه مربع روی تابلو بیاورد. نماینده گروه مستطیل پای تابلو آمد و پس از گزارش کوتاهی به حل مسئله ۲ پرداخت و اضافه کرد که من به نمایندگی، کار گروه مستطیل را ارائه می‌دهم:

کارگروه مستطیل (۲۵ امتیاز)

حل مسئله ۲: ابتدا نماینده تیم مستطیل گزارش جمع‌بندی‌شده‌ای از کار گروه ارائه کرد و سپس توضیح داد که برای این مسئله فقط کافی است رابطه فیثاغورس را استخراج کنیم؛ زیرا در این صورت چون a و c معلوم هستند، مقدار b هم تعیین می‌شود. در ادامه توضیح داد که چون مساحت دوزنقه برابر مجموع مساحت‌های سه مثلث قائم‌الزاویه است، پس برابری زیر بدیهی است:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 \text{ (مساحت دوزنقه)}$$

چون ارتفاع دوزنقه $h=a+b$ و قاعده کوچک a و قاعده بزرگ b است داریم:

$$h=a+b \quad S = \frac{h}{2} (a+b) = \frac{(a+b)}{2} \cdot (a+b) = \frac{(a+b)^2}{2}$$

از طرف دیگر مساحت مثلث‌های قائم‌الزاویه نیز معلوم است:

$$S_1 = S_2 = \frac{1}{2} ab \quad \text{و} \quad S_3 = \frac{1}{2} c^2$$

$$\frac{(a+b)^2}{2} = 2\left(\frac{1}{2} ab\right) + \frac{c^2}{2}$$

پس می‌توان نوشت:

$$(a+b)^2 = 2ab + c^2$$

در اینجا کافی است حاصل $(a+b)^2$ را به دست آوریم:

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= (a+b)(a+b) = a(a+b) + b(a+b) \\ &= a^2 + ab + ab + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \end{aligned}$$

بنابراین:

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

پس از اختصار لازم:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

چون $a=3$ و $c=5$ ، از رابطه بالا به برابری زیر می‌رسیم:

$$3^2 + b^2 = 5^2$$

و در آخر مقدار b هم به دست می‌آید:

$$\Rightarrow b^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow b = 4$$

بنابراین، نتیجه مطلوب که همان رابطه فیثاغورس است نتیجه می‌شود:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

معلم گفت: «بسیار خوب، بچه‌ها گروه مستطیل را تشویق کنید.»

تشویق کردند. دقایق آخر کلاس بود که معلم همه راه‌حل‌ها را بررسی کرده بود و گفت: «بچه‌ها، گروه مثلث مسئله ۴ را با دو روش حل کرده و این دارای امتیاز مثبت است. من برای این گروه ۵ امتیاز بیشتر در نظر گرفتم و در نتیجه امتیاز این گروه تا اینجا ۳۰ خواهد شد. پس از بررسی کار گروه‌ها نمره‌های نهایی را که از ۱۰۰ است اعلام خواهیم کرد.

بچه‌ها روش دوم حل مسئله ۴ را به شما می‌گویم، ولی پاسخ نهایی این دو روش را شما توضیح دهید. البته باز هم به صورت گروهی این تناقض را حل کنید.»

فعالیت برای گروه (روش دوم برای حل مسئله ۴). راهنمایی می‌کنم: ابتدا از قضیه تالس، تناسب را می‌نویسیم: معلم گفت: «از نماینده گروه مثلث می‌خواهم روش دوم را تشریح کند.» $\Delta MOB \sim \Delta NOD$ نماینده گروه مثلث گفت: «به ترتیب می‌نویسیم:

$$\frac{MB}{ND} = \frac{MO}{NO} = \frac{BO}{DO} \quad (1)$$

از طرف دیگر:

$$\frac{K}{S} = \frac{44}{11} = \frac{\frac{1}{2} MB \cdot MO}{\frac{1}{2} ND \cdot NO} = \frac{MB}{ND} \cdot \frac{MO}{NO} = \frac{MB}{ND} \cdot \frac{MB}{ND} \quad (2)$$

بنابراین با توجه به رابطه‌های (۱) و (۲)، خواهیم داشت:

$$\frac{MB}{ND} \cdot \frac{MB}{ND} = \frac{44}{11} = 4 \quad (3)$$

به طور مشابه از تناسب (۱) و برابری (۲)، خواهیم داشت:

$$\frac{MO}{NO} \cdot \frac{MO}{NO} = \frac{44}{11} = 4 \quad (4)$$

از روابط (۳) و (۴) داریم:

$$\left(\frac{MB}{ND}\right)^2 = 4; \left|\frac{MB}{ND}\right| = 2; \left(\frac{MO}{NO}\right)^2 = 4; \left|\frac{MO}{NO}\right| = 2$$

پس می‌توان نوشت:

$$MB = 2ND; AM = ND; \underbrace{MB + AM}_{AB} = 2ND = AB \quad (5)$$

به‌طور مشابه:

$$MO = 2NO; \underbrace{MO + NO}_{MN} = 2NO + NO = 3NO = MN = AD \quad (6)$$

از رابطه‌های (۵) و (۶)، خواهیم داشت:

نماینده گروه دوزنقه ادامه داد:

در این صورت محیط مستطیل چنین است:

$$P = 2(A + B) = 2(a + b + a - b) = 2(2a) = 4a$$

و مساحت آن چنین است:

$$S = (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

↓

شرط

واضح است که مساحت $(a^2 - b^2)$ وقتی حداکثر است که $b=0$ باشد. در این حالت هر دو ضلع مستطیل برابر a و مستطیل به مربع تبدیل می‌شود. در اینجا به مثال‌های عددی زیر توجه می‌کنیم:

a	b	محیط (ثابت)	مساحت
۱۶	۱۶	$2(16+16)=64$	۲۵۶
۱۷	۱۵	$2(17+15)=64$	۲۵۵
۱۸	۱۴	$2(18+14)=64$	۲۵۲
⋮	⋮	⋮	⋮
۳۰	۲	$2(30+2)=64$	۶۰
۳۱	۱	$2(31+1)=64$	۳۱

پس، در حالتی که محیط مستطیل ثابت باشد (۶۴)، مساحت حداکثر متعلق به مربعی به ضلع ۱۶ است. پس حکم عمومی زیر صادر می‌شود:

حکم ۲: حاصل ضرب دو عاملی مثل a و b که مجموع ثابتی دارند $a+b=c$ ، وقتی حداکثر است که این دو عامل برابر باشند: $a=b$. معلم گفت: «دقیقه‌های آخر کلاس است و گروه مثلث باید کارش را ارائه دهد. سریع نماینده گروه مثلث بیاید و گزارش خود را ارائه کند.»

نماینده کار گروه مثلث پای تابلو آمد و بلافاصله شروع کرد.

کار گروه مثلث (امتیاز: ۳۰+۲۵)

حل مسئله ۴: مساحت مثلث بزرگ ΔBCD چنین است:

$$S_{\Delta BCD} = \frac{30 \times 21}{2} = 315; H = 315 - K - S = 315 - 44 - 11$$

$$H = 260 \text{ (واحد سطح)}$$

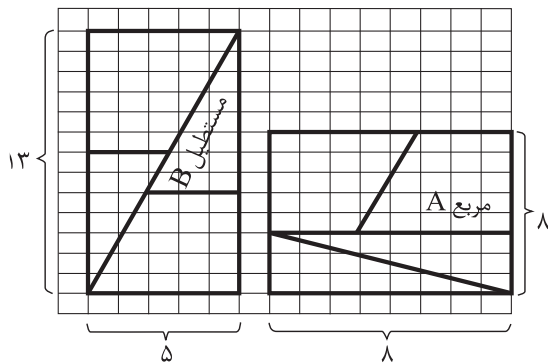
پس، مساحت مستطیل مورد نظر برابر است با: $H = 260$ (واحد سطح)

معلم گفت: «آفرین، بسیار عالی! بچه‌ها گروه مثلث را تشویق کنید!»

بچه‌ها با ذوق و شور فراوان این گروه را که گروه آخر بود، مفصل

توجه: مسئله مسابقه‌ای (پاسخ مسئله زیر را ارسال کنید.
به نفرات اول جوایزی اهدا می‌شود)

فعالیت ۲: به شکل‌های زیر در صفحه شطرنجی دقت کنید:



هر دو شکل از چهار قطعه یکسان تشکیل شده‌اند. مساحت شکل مستطیل B برابر ۶۵ است، ولی مساحت مربع A تشکیل شده از همان قطعات برابر با ۶۴ است.

مسئله: این موضوع را با توجه به حل مسئله ۴ (روش دوم) توجیه کنید:

$$A = 8 \times 8 = 64; B = 5 \times 13 = 65$$

(سطح مستطیل) $A \neq B$ (سطح مربع) (چرا؟)

$$3ND = AB = 30; ND = 10;$$

$$NC = DC - ND = AB - ND$$

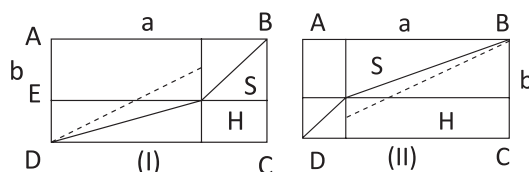
$$NC = 30 - 10 = 20;$$

$$3NO = AD = 21; NO = 7;$$

$$H = NC.NO = 20 \times 7 = 140$$

معلم گفت: «در اینجا محاسبه سطح H با دو روش انجام شد، ولی برای H دو مقدار متفاوت به دست آمد. بگویید مشکل از کجاست؟» نماینده گروه مربع دست خود را بالا برد و اجازه گرفت تا دلیل این اختلاف را بگوید. بدون مقدمه گفت: «در رسم شکل خطا وجود دارد و با اطلاعات عددی مسئله منطبق نیست. به نظر من باید شکل اصلاح شود و پاسخی که با این روش حاصل شد درست است: $H = 140$ »

معلم گفت: «می‌توانی بیشتر توضیح بدهی؟» نماینده گروه مربع گفت: «به نظر من نقطه O نمی‌تواند منطبق بر قطر BD شود و باید به یکی از این صورت‌ها باشد:



شکل ۷

در واقع با مقدارهای داده‌شده یکی از دو مورد شکل ۷ می‌تواند شکل واقعی باشد.»

معلم نتیجه گرفت: «بچه‌ها همیشه مواظب باشید که شکل گولتان نزنند.»

و ادامه داد: بسیار بسیار عالی، آفرین بر شما. بچه‌ها نماینده گروه مربع را تشویق کنید.»

در همین لحظه بود که صدای زنگ تفریح به صدا درآمد و بچه‌ها آزادانه با شور و شوق و هیاهوی بلند به تشویق پرداختند. معلم در همین شلوغی اعلام کرد که برای این فعالیت و دقت و تیزهوشی گروه مربع، به این گروه ۶ امتیاز بیش‌تر تعلق می‌گیرد و روی تابلو امتیاز گروه مربع را نوشت: «امتیاز کار گروه مربع: $25 + 6 = 31$ » و ادامه داد: «بچه‌ها تا اینجا امتیاز کار گروه مربع برابر ۳۱ است و رتبه اول به کار گروه مربع تعلق می‌گیرد. این گروه را تشویق کنید!» معلم به فکر فرو رفت و با خود گفت: «بله، این داوری درست بود. هم برگه‌ها را اول دادند و هم حل مسئله ۴ را تصحیح کردند. بله این داوری دقیق است.»

بچه‌ها با هیجان و رضایت کامل از کلاس هندسه، با شور و شوق همراه با تشویق راهی حیاط مدرسه شدند. معلم هم فعالیت‌های زیر را برای جلسه بعد روی تابلو نوشت.

فعالیت ۱: مساحت H را در دو شکل (I) و (II) برحسب S, K, b, a محاسبه کنید.



شماره ۱۳۰۵

شماره ۱۳۰۵ | تابستان ۱۴۰۱

پیشرو

نمونه سوال های امتحان نهایی بارویکرد مفهومی

جواد شوهانی

دکترای ریاضی، گرایش سیستم های هوشمند فازی

علی یعقوبی

دانشجوی رشته دبیری ریاضی دانشگاه فرهنگیان مشهد

➤ پاسخ
سوالات



سوالات دهم

د) اگر α یکی از ریشه های معادله $2x^2 + 13x - 7 = 0$ باشد، حاصل $4\alpha^2 + 26\alpha + 5$ برابر با _____ است.

۳. اگر $(-\infty, 7) \cap (2x^2 + 5x, +\infty) = \emptyset$ باشد، مجموعه مقادیرهای ممکن برای x را به دست آورید.

۴. حاصل عبارت

$$A = \sin^2 1^\circ + \sin^2 3^\circ + \sin^2 5^\circ + \dots + \sin^2 89^\circ + \sin^2 90^\circ$$

را به دست آورید.

۵. حاصل عبارت

$$A = \sqrt[16]{16} \sqrt[16]{16} \sqrt[16]{16} \sqrt[16]{16} \dots + \sqrt{20} + \sqrt{20} + \sqrt{20} + \sqrt{20} \dots$$

را به دست آورید.

۶. مقدار m را طوری تعیین کنید که معادله $x^2 + (m^2 - 1)x + (m^2 + 6m^2 + 5m + 1) = 0$ عکس هم داشته باشد.

۷. دامنه تابع $f(x) = \sqrt{4 - \sqrt{4x^2 + 12x}}$ را به دست آورید.

۱. درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید:

الف) در هر دنباله هندسی، اگر قدر نسبت، عددی بین صفر و یک باشد، دنباله نزولی است.

ب) مجموعه جواب نامعادله $1 \leq \sqrt{x} \leq 3$ شامل ۹ مقدار صحیح متفاوت است.

ج) رابطه ای که شماره همراه هر فرد را به او نسبت می دهد، تابع است.

د) مجموعه اعداد اول یک مجموعه نامتناهی است.

۲) جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

الف) کوچک ترین جمله دنباله $a_n = n + \frac{9}{n}$ برابر با _____ است.

ب) مجموعه جواب نامعادله $2 < \sqrt[3]{3x} < 4$ شامل _____ عدد طبیعی است.

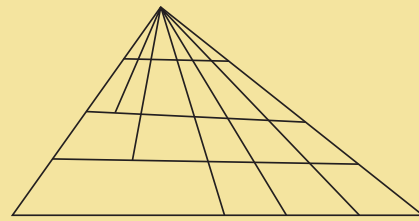
ج) تعداد جواب های معادله $1 = (2x^2 + x)!$ برابر با _____ است.



۱۴۲

شماره ۱۳۰ | تابستان ۱۴۰۳

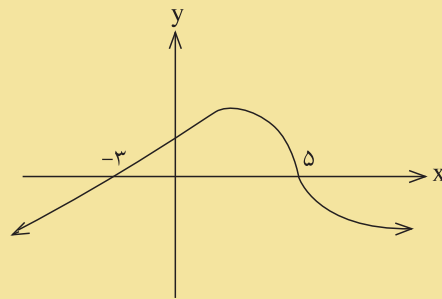
۸. در شکل زیر چند مثلث وجود دارد؟



۹. حرف‌های کلمه «شهیدان» را کنار هم قرار می‌دهیم. چقدر احتمال دارد که کلمه ساخته‌شده با حرف نقطه‌دار شروع و به حرف بدون نقطه ختم شود؟

۱۰. اگر نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر باشد، نمودار

تابع $g(x) = \frac{x^3 + 4x^2 - 5x}{(x+3)f(x)}$ در چه بازه یا بازه‌هایی پایین محور طول‌ها قرار می‌گیرد.



سوالات یازدهم

۱. درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید:

(الف) تابع $f(x)=[x]$ در نقطه‌های با طول صحیح، پیوستگی راست دارد.

(ب) در خانواده‌ای با شش فرزند، احتمال اینکه تعداد فرزندان پسر بیشتر از تعداد فرزندان دختر باشد، برابر با $\frac{1}{2}$ است.

(ج) اگر در تعدادی داده آماری، هر داده را سه برابر کنیم، واریانس نیز سه برابر می‌شود.

(د) دو تابع $f(x) = \sqrt{1 - \cos^2 x}$ و $g(x) = \sin x$ با هم برابرند.

۲. جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

(الف) تابع $f(x) = (2a^2 - a)^x$ یک تابع نمایی کاهشی است.

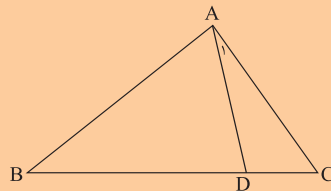
مجموعه مقادیر ممکن برای a برابر با _____ است.
(ب) اگر $\alpha + \beta = 30^\circ$ باشد، حاصل عبارت $\sin(6\alpha + 5\beta) + \cos(3\alpha + 4\beta)$ برابر با _____ است.
(ج) فاصله نقطه $A(3, 5)$ تا خط $3y + 4x = 2$ برابر با _____ است.

(د) اگر $f(x) = 3^{-x+1}$ و $g(x) = \log(x+2)$ باشد، مقدار $(-1)(f-g)(4)$ برابر با _____ است.

۳. اگر معادله خط ضلع‌های مثلث ABC به صورت $AB: 3y - 4x = 2$ و $AC: 4y - 2x = 6$ و $BC: 2y + 3x = 4$ باشد، معادله خط ارتفاع AH را بنویسید.

۴. اگر $f(x) = 3x + m - 2$ و $f^{-1}(5) = f(4) + 3$ باشد، تابع $f(x)$ در چه نقطه‌ای تابع وارون خودش را قطع می‌کند؟

۵. در شکل زیر $A_1 = B$ است و $AC = 6$ و $BD = 16$ و $AD = 5$ است. محیط مثلث ABC را به دست آورید.



۶. نمودار تابع $y = \sin(\frac{\pi}{4} - x) + 1$ را در بازه $[-2\pi, 2\pi]$ رسم کنید.

۷. دامنه تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2x^2 + \frac{5}{x^2} - 7}$ را به دست آورید.

۸. نمودار تابع $f(x) = \left| 1 + \log_2 \frac{1}{x^2} \right|$ را رسم کنید.

۹. پیوستگی تابع $f(x) = [\cos^2 x - \sin^2 x]$ در نقطه $x = \frac{3\pi}{4}$ را بررسی کنید.

۱۰. داده‌های a و 1 و 1 و 1 مفروض هستند. مقدار a را طوری تعیین کنید که واریانس داده‌ها کوچک‌تر از انحراف معیار آن‌ها باشد.



۱۳۳

شماره ۱۳۳ | تابستان ۱۴۰۱

مثلثاتی رأس‌های یک _____ هستند.

(د) اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{2x^2+ax+b} = +\infty$ باشد، حاصل $a+b$ برابر با _____ است.

۳. ضابطه وارون تابع $f(x) = |3x-9| - |x+2|$ را در بازه‌ای که این تابع صعودی است بنویسید.

۴. اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^n + \sqrt{9x^2 + 2x}}{2x + |x-1|} = a+n$ باشد، مقدار $a+n$ را به دست آورید.

۵. مشتق تابع $f(x) = \cos(2x^4 + \sqrt[3]{3x^2 - 2})^3$ را به دست آورید.

۶. مقدار $\cos 15^\circ$ و $\tan 37/5^\circ$ را به دست آورید.

۷. ورق فلزی مربع شکلی به طول ضلع دو متر را در نظر بگیرید. می‌خواهیم از چهار گوشه آن مربع‌هایی کوچک به ضلع x برش دهیم و آن‌ها را کنار بگذاریم. سپس لبه‌های ورق را به اندازه x برمی‌گردانیم تا یک جعبه در باز ساخته شود. مقدار x چقدر باشد تا حجم جعبه حداکثر مقدار ممکن باشد؟ بیشترین حجم ممکن برای این جعبه چقدر است؟

۸. در استوانه‌ای مجموع قطر قاعده و ارتفاع ۹ متر است. مساحت سطح استوانه‌ای که بیشترین حجم ممکن را دارد چقدر است؟

۹. مساحت دایره‌ای را که از دو نقطه $A(0, -1)$ و $B(0, 3)$ می‌گذرد و بر خط $y=1$ مماس است، به دست آورید.

۱۰. دو ظرف A و B را در اختیار داریم که در ظرف A ۳ مهره آبی و ۵ مهره قرمز و در ظرف B ۶ مهره آبی و ۲ مهره قرمز قرار دارد. به‌طور تصادفی، یک مهره را از یکی از ظرف‌ها خارج می‌کنیم و در ظرف دیگر قرار می‌دهیم. سپس از ظرف دوم یک مهره به تصادف خارج می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که این مهره آبی باشد؟



سوالات دوازدهم

۱. درستی یا نادرستی هر یک از عبارت‌های زیر را مشخص کنید:

(الف) تابع $f(x) = |x+1| + |x-2|$ دو نقطه بحرانی دارد.

(ب) بیشترین و کمترین مقدار تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ روی بازه $[1, 4]$ ، ۱۸ واحد اختلاف دارند.

(ج) مساحت ناحیه محصور بین نمودار تابع $y = \sqrt{4-x^2}$ و محور x ‌ها برابر با 2π است.

(د) در دایره $2x^2 + 2y^2 + 8x - 6y + 9 = 0$ مختصات مرکز دایره به صورت $O(3, -4)$ است.

۲. جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

(الف) در تابع $f(x) = \begin{cases} 2-x & x > 1 \\ x+1 & x \leq 1 \end{cases}$ حاصل $f \circ f(\sin^2 x)$

برابر با _____ است ($\sin x \neq 0$).

(ب) معادله درجه دومی که ریشه‌های آن $\cot 15^\circ$ و $-\tan 15^\circ$ باشد، به صورت _____ است.

(ج) جواب‌های معادله $\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x$ در دایره



۴۴

شماره ۱۳۰ | تابستان ۱۴۰۳

چشم انراز

نمونه سوال های آزمون سراسری بارویکرمفهومی

حسین حجازی
مدرس ریاضی

سوالات

۱. در صورتی که $\cos 2x = \frac{1}{3}$ باشد، مقدار $A = \sin^4 x + \cos^4 x$ کدام است؟

- (الف) $\frac{2}{3}$ (ب) $\frac{17}{81}$ (ج) $\frac{20}{81}$ (د) $\frac{1}{81}$

۲. معادلات $\log_2^x + \log_2^y = 4$ و $\log_2^{(1+\frac{x}{y})} + \log_2^y = 2$ برقرارند. زوج مرتب (x, y) کدام است؟

- (الف) $(\frac{9+\sqrt{17}}{2}, \frac{9-\sqrt{17}}{2})$ (ب) $(\frac{9+\sqrt{17}}{2}, \frac{9+\sqrt{17}}{2})$ (ج) $(\frac{9-\sqrt{17}}{2}, \frac{9-\sqrt{17}}{2})$ (د) $(\frac{9+\sqrt{17}}{2}, \frac{9}{2})$

۳. در تابع $f(x) = x^2 + 10x + 20$ داریم $f(f(f(f(x)))) = 0$. مجموع مقدارهای x کدام است؟

- (الف) ۱۰ (ب) -۱۰ (ج) $\sqrt[4]{5}$ (د) $2\sqrt[4]{5}$

۴. حاصل عبارت زیر کدام است؟

- $A = \frac{1 + \cos 56^\circ}{1 + \cos 28^\circ} + 2(1 + \sin 62^\circ)$
(الف) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (ب) $\frac{1}{4}$ (ج) $4 \cos 28^\circ$ (د) ۴

۵. در تابع $f(x)$ داریم: $f(f(x)) = x^2 - x + 1$. مقدار $f(0)$ کدام است؟

- (الف) ± 1 (ب) ۰ (ج) $\sqrt{2}$ (د) ۱

۶. حاصل حد $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \frac{1 - \cot^4 x}{\sqrt{1 - \sqrt{\cos 8x}}}$ کدام است؟

- (الف) ۲ (ب) -۲ (ج) $\sqrt{2}$ (د) $-\sqrt{2}$

۷. اگر

$$f(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{3}{1+x^3} + \frac{5}{1+x^5} + \frac{7}{1+x^7} + \frac{9}{1+x^9}$$

آن گاه حاصل $f(\sqrt{2}+1) + f(\sqrt{2}-1)$ کدام است؟

- (الف) ۵۰ (ب) ۴۰ (ج) ۲۵ (د) ۲۰

۸. اگر $a_1, a_2, a_3, \dots$ دنباله حسابی با قدر نسبت d

باشد و $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2n} = \frac{2nd}{5}$ ، حاصل کسر

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2n-1}}{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2n+1}}$$

- (الف) $-\frac{1}{9}$ (ب) -۹ (ج) $\frac{1}{9}$ (د) ۹



۴۵

شماره ۱۳۰۵ | تابستان ۱۴۰۱

۳.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^7 + 10x + 20 = (x+5)^7 - 5 \\ \Rightarrow f(f(x)) &= (f(x)+5)^7 - 5 \\ &= [((x+5)^7 - 5) + 5]^7 - 5 = (x+5)^{49} - 5 \\ \Rightarrow f(f(f(x))) &= (f(f(x))+5)^7 - 5 \\ &= [((x+5)^{49} - 5) + 5]^7 - 5 = (x+5)^{343} - 5 \\ \Rightarrow f(f(f(f(x)))) &= (f(f(f(x))+5)^7 - 5 \\ &= [((x+5)^{343} - 5) + 5]^7 - 5 = (x+5)^{2401} - 5 = 0 \\ \Rightarrow (x+5)^{2401} - 5 &= 0 \Rightarrow (x+5)^{2401} = 5 \Rightarrow x+5 = \pm \sqrt[2401]{5} \\ \Rightarrow x_1 = \sqrt[2401]{5} - 5, \quad x_2 = -\sqrt[2401]{5} - 5 &\Rightarrow \underbrace{x_1 + x_2}_{\text{مجموع مقادیر } x} = -10 \end{aligned}$$

گزینه «ب»

۴.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1 - \cos 56^\circ}{1 + \cos 28^\circ} + 2(1 + \sin 62^\circ) \\ \Rightarrow A &= \frac{1 - \cos(2 \times 28^\circ)}{1 + \cos 28^\circ} + 2(1 + \sin(90^\circ - 28^\circ)) \\ &= \frac{1 - (2 \cos^2 28^\circ - 1)}{1 + \cos 28^\circ} + 2(1 + \cos 28^\circ) \\ &= \frac{2 - 2 \cos^2 28^\circ}{1 + \cos 28^\circ} + 2(1 + \cos 28^\circ) \\ &= \frac{2(1 - \cos^2 28^\circ)(1 + \cos 28^\circ)}{1 + \cos 28^\circ} + 2(1 + \cos 28^\circ) \\ \Rightarrow A &= 2(1 - \cos^2 28^\circ) + 2(1 + \cos 28^\circ) = 4 \end{aligned}$$

گزینه «د»

۵.

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= x^2 - x + 1 \Rightarrow f(f(f(x))) = f^2(x) - f(x) + 1 \\ \Rightarrow f(x^2 - x + 1) &= f^2(x) - f(x) + 1 \\ \text{به جای } x \text{ مقدار } 1 \text{ را قرار می‌دهیم:} \\ x = 1 &\Rightarrow f(1) = f^2(1) - f(1) + 1 \\ \Rightarrow f^2(1) - 2f(1) + 1 &= 0 \Rightarrow f(1) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{حال به جای } x \text{ مقدار } 0 \text{ را قرار می‌دهیم:} \\ x = 0 &\Rightarrow f(0) = f^2(0) - f(0) + 1 \\ \Rightarrow f^2(0) - f(0) &= 0 \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(0) = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

دلیل غیرقابل قبول بودن $f(x) = 0$ این است که اگر در $f(f(f(x))) = f^2(x) - f(x) + 1$ مقدار $f(x)$ را صفر قرار دهیم، نادرست است.

۹: اگر تابع f به صورت $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{4}}(x-1) + 1}$ باشد،

ضابطه و برد تابع $f^{-1}(x)$ کدام است؟

(الف) $(\frac{1}{4}, +\infty), f^{-1}(x) = \frac{(\frac{1}{4})^{x^2-1} + 1}{2}$

(ب) $(\frac{1}{4}, +\infty), f^{-1}(x) = \frac{(4)^{x^2-1} - 1}{2}$

(ج) $(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}], f^{-1}(x) = \frac{(4)^{1-x^2} + 1}{2}$

(د) $(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}], f^{-1}(x) = \frac{(\frac{1}{4})^{x^2+1} - 1}{2}$

۱۰: اگر f تابعی یک‌به‌یک باشد و $1 + f^2(x) = \sqrt[3]{1+x^3}$ باشد، ضابطه $f^{-1}(\sqrt[3]{x}-1)$ کدام است؟

(الف) $\sqrt[3]{x^3-1}$ (ب) $\sqrt[3]{x^3-1}$ (ج) $\sqrt[3]{x^3-1} + 1$ (د) $\sqrt[3]{x^3+1} - 1$

جواب‌ها

۱.

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ \Rightarrow \cos 2x &= 2 \cos^2 x - 1 = \frac{1}{3} \Rightarrow 2 \cos^2 x = \frac{4}{3} \\ \Rightarrow \cos^2 x &= \frac{2}{3} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{3} \\ A &= \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 \\ &= (\frac{1}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2 = \frac{1+4}{9} = \frac{5}{9} \end{aligned}$$

گزینه «ب»

۲.

$$\begin{aligned} \log_7^x + \log_7^y &= \log_7^{xy} = 4 \Rightarrow xy = 16 \\ \log_{\frac{1+x}{y}}^y + \log_{\frac{y}{x}}^x &= \log_{\frac{1+x}{y}}(x+y) = 2 \\ \Rightarrow x+y &= 9 \Rightarrow y = 9-x \\ \Rightarrow xy &= x(9-x) = 16 \Rightarrow -x^2 + 9x = 16 \\ \Rightarrow x^2 - 9x + 16 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Delta = 9^2 - 4 \times 16 = 17 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{9 + \sqrt{17}}{2} \Rightarrow y_1 = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \\ x_2 = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \Rightarrow y_2 = \frac{9 + \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

زوج مرتب (x, y) می‌تواند به صورت $(\frac{9 + \sqrt{17}}{2}, \frac{9 - \sqrt{17}}{2})$ یا $(\frac{9 - \sqrt{17}}{2}, \frac{9 + \sqrt{17}}{2})$ باشد. گزینه «ب»



۱۴۶

شماره ۱۳۰ | تابستان ۱۴۰۱

اما $f(f(f(\circ))) = f(f(\circ)) = f(\circ) = \circ$
 $f(\circ) - f(\circ) + 1 = 1$ پس $f(\circ) = 1$ است.
 گزینه «د»

۶.

رفع ابهام

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{4}} \frac{1 - \cot^x x}{\sqrt{1 - \sqrt{\cos \lambda x}}} = \frac{\circ}{\circ} \rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{4}} \frac{1 - \cot^x x}{\sqrt{1 - \sqrt{\cos \lambda x}}} \times \frac{\sqrt{1 + \sqrt{\cos \lambda x}}}{\sqrt{1 + \sqrt{\cos \lambda x}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{4}} \frac{(1 - \cot^x x) \times \sqrt{1 + \sqrt{\cos \lambda x}}}{\sqrt{1 - \cos \lambda x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{4}} \frac{\sqrt{2}(1 - \cot^x x)}{\sqrt{1 - \cos \lambda x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{4}} \frac{1 - \cot^x x}{\sqrt{1 - \sqrt{\cos \lambda x}}} = \frac{\circ}{\circ} \rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{4}} \frac{1 - \cot^x x}{\sqrt{1 - \sqrt{\cos \lambda x}}} \times \frac{\sqrt{1 + \sqrt{\cos \lambda x}}}{\sqrt{1 + \sqrt{\cos \lambda x}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{4}} \frac{(1 - \cot^x x) \times \sqrt{1 + \sqrt{\cos \lambda x}}}{\sqrt{1 - \cos \lambda x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{4}} \frac{\sqrt{2}(1 - \cot^x x)}{\sqrt{1 - \cos \lambda x}}$$

گزینه «الف»

۷.

ابتدا توجه داشته باشید:

$$\sqrt{x} + 1 = \frac{1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{3}{1+x^3} + \frac{5}{1+x^5} + \frac{7}{1+x^7} + \frac{9}{1+x^9}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1+\frac{1}{x}} + \frac{3}{1+(\frac{1}{x})^3} + \frac{5}{1+(\frac{1}{x})^5} + \frac{7}{1+(\frac{1}{x})^7} + \frac{9}{1+(\frac{1}{x})^9}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x+1} + \frac{3x^3}{x^3+1} + \frac{5x^5}{x^5+1} + \frac{7x^7}{x^7+1} + \frac{9x^9}{x^9+1}$$

$$\Rightarrow f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{x+1}{x+1} + \frac{3x^3+3}{x^3+1} + \frac{5x^5+5}{x^5+1} + \frac{7x^7+7}{x^7+1} + \frac{9x^9+9}{x^9+1}$$

$$= 1+3+5+7+9=25$$

$$\Rightarrow f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 25 \Rightarrow f(\sqrt{x}+1) + f(\sqrt{x}-1) = 25$$

گزینه «ج»

۸.

$$a_r + a_r + a_r + \dots + a_{rn} = \frac{rnd}{\Delta}$$

$$a_r + a_\Delta + a_\Delta + \dots + a_{rn-1}$$

$$= (a_r - \frac{d}{r}) + (a_r - \frac{d}{r}) + \dots + (a_{rn} - \frac{d}{r}) = \frac{rnd}{\Delta} - \frac{nd}{r}$$

$$a_r + a_r + a_r + \dots + a_{rn+1}$$

$$= (a_r + \frac{d}{r}) + (a_r + \frac{d}{r}) + \dots + (a_{rn} + \frac{d}{r}) = \frac{rnd}{\Delta} + \frac{nd}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{a_r + a_\Delta + a_\Delta + \dots + a_{rn-1}}{a_r + a_r + a_r + \dots + a_{rn+1}}$$

$$= \frac{\frac{rnd}{\Delta} - \frac{nd}{r}}{\frac{rnd}{\Delta} + \frac{nd}{r}} = \frac{\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{r}} = \frac{-1}{9}$$

گزینه «الف»

۹.

$$f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{4}}^{(rx-1)} + 1} \Rightarrow y = \sqrt{\log_{\frac{1}{4}}^{(rx-1)} + 1}$$

$$\Rightarrow y^r = \log_{\frac{1}{4}}^{(rx-1)} + 1 \Rightarrow y^r - 1 = \log_{\frac{1}{4}}^{(rx-1)}$$

$$\Rightarrow rx - 1 = \left(\frac{1}{4}\right)^{y^r-1} \Rightarrow rx = \left(\frac{1}{4}\right)^{y^r-1} + 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{y^r-1} + 1}{r} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{x^r-1} + 1}{r} = \frac{4^{1-x^r} + 1}{r}$$

برد تابع f^{-1} برابر است با دامنه تابع f . در نتیجه داریم:

$$R_{f^{-1}} = D_f \Rightarrow \log_{\frac{1}{4}}^{(rx-1)} + 1 \geq 0 \Rightarrow \log_{\frac{1}{4}}^{(rx-1)} \geq -1$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{1}{4}}^{(rx-1)} \geq \log_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} \Rightarrow 0 < rx - 1 \leq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 1 < rx \leq \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{1}{r} < x \leq \frac{5}{4r}$$

گزینه «ج»

۱۰.

$$1 + f^r(x) = \sqrt[3]{1+x^3} \Rightarrow f^r(x) = \sqrt[3]{1+x^3} - 1$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{\sqrt[3]{1+x^3} - 1} \Rightarrow y = \sqrt[3]{\sqrt[3]{1+x^3} - 1}$$

$$\Rightarrow y^r = \sqrt[3]{1+x^3} - 1 \Rightarrow y^r + 1 = \sqrt[3]{1+x^3}$$

$$\Rightarrow (y^r + 1)^3 = 1 + x^3 \Rightarrow (y^r + 1)^3 - 1 = x^3$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{(y^r + 1)^3 - 1} = x$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{(x^3 + 1)^{\frac{1}{r}} - 1} \Rightarrow f^{-1}(\sqrt[3]{x-1})$$

$$= \sqrt[3]{((\sqrt[3]{x-1})^{\frac{1}{r}} + 1)^3 - 1}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(\sqrt[3]{x-1}) = \sqrt[3]{x^3 - 1}$$

گزینه «ب»

۱۴۷

شماره ۱۳۵ | تابستان ۱۴۰۱

مسائل مسابقه‌ای وجایزه‌دار

قسمت هفتم



برای مشاهده
پاسخ قسمت
قبل، رمزینه را
پوشش کنید.

سید محمد رضا هاشمی موسوی
مدرس، مؤلف و محقق ریاضیات

مسئله جایزه‌دار ۱۳۰

ثابت کنید جواب‌های معادله

$$d, r \geq 1; a^r + b^r = dc^r \quad (1)$$

از معادله پایه زیر دریافت می‌شوند:

$$x^r + y^r = z^r \quad (2)$$

توجه ۱: در واقع باید ثابت کنیم معادله (۱) را می‌توان به معادله (۲) تحویل داد.

توجه ۲: معادله (۱) برای حالت‌های خاص $d=1$ و $1 \leq r \leq 12$ بررسی شده است و تعداد جواب‌های معادله‌ها محدود می‌باشند و در واقع خم بیضوی هستند.

توجه ۳: از تحویل معادله (۲) سه معادله درجه (۷ و ۳ و ۲) نتیجه می‌شود که معادله (۱) یک خم بیضوی است.

(۱) تابع f صعودی است و از مبدأ می‌گذرد. دامنه تعریف

تابع g با ضابطه $g(x) = \sqrt{2x^3 f(x)}$ را بیابید.

(۲) دامنه و برد توابع مرکب زیر را بیابید:

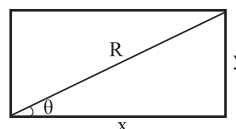
$$f = \{(4, 3), (5, 7), (3, 8)\}, g = \{(3, 5), (4, 6), (6, 3)\}$$

$$\text{الف) } (2f) \circ (3g) \quad \text{ب) } (f+g) \circ (f-g)$$

(۳) اگر ریشه‌های معادله درجه دوم:

$$x^2 + px + q = 0$$

را طول و عرض یک مستطیل فرض کنیم و قطر مستطیل را با R نشان دهیم:



ثابت کنید: ریشه‌های معادله چنین‌اند:

$$\theta = \frac{1}{2} \text{Arc sin } \frac{2q}{p^2 - 2q}$$

$$\begin{cases} x = \frac{-p}{1 + \tan \theta} \\ y = \frac{-p}{1 + \cot \theta} \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x = \sqrt{q \cot \theta} \\ y = \sqrt{q \tan \theta} \end{cases}$$



۴۸

شماره ۱۳۰ | تابستان ۱۴۰۵

	↖	↖	↗	↖	↖	↗	↖	↖
↖								
↗								
↖								
↗			↗		↖			
↖						↗		
↗								
↖			↗					↓
↖	↗							



شیر

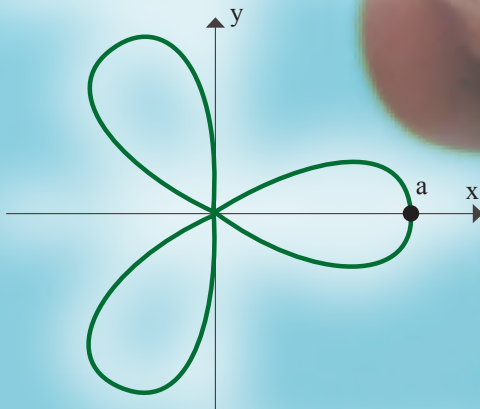
احسان یار محمدی

معادله جبری شیدر سه برگ:

$$(x^2 + y^2)^2 = a(x^2 - 3xy^2) \quad (a > 0)$$

معادله قطبی شیدر سه برگ:

$$r = a \cos(3\theta) \quad (a > 0)$$

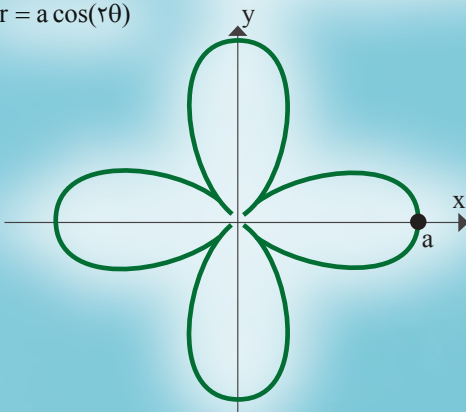


معادله جبری شیدر چهار برگ:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

معادله قطبی شیدر چهار برگ:

$$r = a \cos(2\theta)$$



«تابستان» فصل سرسبزی هاست؛ منظره‌های سرسبز در این فصل طبیعت را شاداب و زیبا می‌کنند. مرتع‌های سبز و علفزارهای مملو از گل و گیاهان زیبا، منظره‌ای شاداب و دل‌نشین را به تصویر می‌کشند؛ از گیاهان سبز و گلدار این فصل می‌توان به گیاه «شیدر» اشاره کرد که شکل برگ‌های آن ساختار هندسی زیبایی دارد. به همین بهانه، قصد داریم نمودار هندسی^۱ و معادله‌های جبری^۲ و قطبی^۳ شیدر را در اینجا معرفی و تبیین کنیم تا عظمت خداوند بلندمرتبه برای بار دیگر بر همگان هویدا شود.

گیاه شیدر بر دو نوع شیدر سه برگ^۴ و شیدر چهار برگ^۵ است که نوع اول آن، یعنی شیدر سه برگ، به هنگام رویش این گیاه از فراوانی زیادی برخوردار است. اما شیدر چهار برگ به ندرت در طبیعت یافت می‌شود؛ به صورتی که در میان عموم مردم، اگر فردی به شیدر چهار برگ دسترسی پیدا کند، خوش‌شانسی و طلیعه نیک را فرجام خود خواهد دید. به همین دلیل شیدر چهار برگ را شیدر شانس نیز می‌نامند.

پی‌نوشت‌ها

1. Geometric
2. Algebraic
3. Polar
4. Shamrock
5. Four - Leaf Clover