

متوسطه ۲
ریاضی

۱۳۹



سازمان آموزش عالی
وزارت فرهنگ و آموزش عالی



فصلنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

برای دانش آموزان دوره دوم متوسطه اهلیار دبیران ریاضی

شماره بی دربی ۱۳۹ | بهار ۱۴۰۳ | دوره سی و سوم | ۴۸ صفحه

www.roshdmag.ir

$$x: p \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{A} = 1 \right)$$

$$N \rightarrow R \quad n \geq n_0: (x_n - g) < \varepsilon$$



$$x^2 + (y - \sqrt{x^2})^2 = 1$$

$$\sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[4]{13} n^{1/n}$$

$$\downarrow n \rightarrow \infty$$

$$g = g; x: p \quad n \sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[4]{13} n^{1/n}$$

$$\sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[4]{13} n^{1/n} \left(\frac{n^2 + n}{n^2 - 2n + 3} \right)$$

$$n \geq n_0: (x_n)$$

قدر استاندارد نلور دانستن

$$N \rightarrow R \quad n \quad \text{اجسام افلاطونی و توپ های فوتبال (۳)}$$

ماجرای شگفت انگیز ضرب سریع ذهنی

$$\{x\} \cup \{y\} = \{x, y\}$$

چشم انداز و پیشرو

(نمونه سؤالات امتحان کتبی و آزمون سرسری بارویکرد مفهومی)



$$\sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[4]{13} n^{1/n}$$

$$\cos 2n! \left(\frac{n^2 + n}{n^2 - 2n + 3} \right)^5$$

$$(x_n)$$



رمضان کریم

ماه باز شدن درهای رحمت



فصلنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
برای دانش آموزان دوره دوم متوسطه
شماره ۳۳ بهار ۱۴۰۳ | دوره بیست و سوم | ۴۸ صفحه
www.roshdmag.ir

مدیر مسئول: محمد صالح مدنی
سرمدیر: مجید حکمت
مدیر فنی: کوروش پارسا نژاد
مدیر داخلی: الهام الیکایی
ویراستار ادبی: بهروز راستانی
طراح گرافیک: روح الله محمودیان
عکس روی جلد: اعظم لاریجانی
پنجم این نور | محرم ایردوسی | ارجح خیر الله اده
آرش و ستارگاز | محمد هاشم رستمی
محمد رضا سید صالحی | محمد تقی طاهری تنهایی
حسین نامی ساعی | محمود نصیری
سید محمد رضا هاشمی موسوی | احسان یار محمدی

وبگاه: www.roshdmag.ir
ایمیل: borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir
صفحه خرید مجلات: www.roshdmag.ir/ui/299
نشانی دفتر مجله: تهران، ابرانشهر شمالی، پلاک ۲۷
تلفن دفتر مجله: ۰۲۱-۸۸۸۳۱۱۶۱-۹
تلفن شماره مجله: ۰۲۱-۸۸۸۲۹۰۳۲۶
صفحه پستی دفتر مجله: ۱۵۸۷۵/۴۵۸۵
صفحه پستی امور مشترکین: ۱۵۸۷۵/۳۳۳۱
تلفن امور مشترکین: ۰۲۱-۷۷۶۴۳۳۲-۸

جایگاه مجلات رشد همه تلاش خود را کرده است تا این مجله در دسترس عموم دانش آموزان قرار گیرد و همه کودکان و نوجوانان همین عزیز اسلامی ما، امکان تهیه آن را داشته باشند.



- سحر: سردبیر اقدر استاندنو دانستن، امجد حکمت ۲۱
- فرار از جنگل: امجد تقی طاهری تنهایی ۳۱
- تابع وارون (قسمت اول): امجد نصیری ۶۱
- صور دبیر باید درد - تمرین های متفاوت ریاضی (قسمت سوم): خسرو دادوی، آرش و ستارگاز ۱۴۱
- لثایف الحساب: قطب الدین لاهیجی (قسمت هفتم) آکس می رسیم! امجد نصیری ۱۶۱
- قصه ری کوا: امجد نصیری مقدم ۲۳۱
- نکته ناب: امجد جمیع جلات دنباله فیوناچی امجد حکمت ۲۴۱
- بیات در این شبیه چالش کنیم (قسمت ششم) امجد ایردوسی ۳۶۱
- چند جمله ای ها و اعداد مختلف (قسمت سوم) آرش و ستارگاز ۳۰۱
- داستان های شیرین: ریاضی با احادیث شریف (قسمت سوم) سید محمد رضا هاشمی موسوی ۳۶۱
- بیوسنگی و منشور اخفش: خاصه خان ۳۹۱
- پیشرو اسوال های امتحان کنای بار ویکرد مفهومی اجود شوهانی ۴۲۱
- چشم انداز اسوال های آزمونی (کنکوری) بار ویکرد مفهومی احسن صفاری ۴۵۱
- بازی عذر ها: احیبه خان نژاد ۴۷۱
- مسائل مسابقه ای: مجله رشد در (قسمت ششم) سید محمد رضا هاشمی موسوی ۴۸۱

مجله رشد برای دانش آموزان متوسطه ۲، از همه دبیران و دانش آموزان دعوت می کند تا با ارسال مقاله به این مجله، در زمینه های مختلف علمی و فرهنگی، به پیشرفت علم و فرهنگ اسلامی ایران کمک کنند. این مجله در دسترس عموم دانش آموزان قرار گرفته و همه کودکان و نوجوانان همین عزیز اسلامی ما، امکان تهیه آن را داشته باشند.

مستندات هر مقاله یا نوشتار آن است و مقالات را می توان به روش های مختلف ارسال کرد. در ابتدا، مقاله های ارسال شده را به روش دستی و رایانه ای (ایمیل) (E-mail) خود را ارسال کنید و در ابتدای مقاله، نام و نام خانوادگی و نام شهر، استان و پست خود را درج کنید.

مستندات هر مقاله یا نوشتار آن است و مقالات را می توان به روش های مختلف ارسال کرد. در ابتدا، مقاله های ارسال شده را به روش دستی و رایانه ای (ایمیل) (E-mail) خود را ارسال کنید و در ابتدای مقاله، نام و نام خانوادگی و نام شهر، استان و پست خود را درج کنید.

قدر استاد نگرود انسترن

۱۲ اردیبهشت روز معلم و
شهادت استاد شهید آیت الله
مرتضی مطهری گرامی باد.

بدون شک نقش معلمان همواره در زندگی انسان‌ها انکارناپذیر بوده است. ایشان در تربیت نسل‌های جوان و توسعه جامعه نقش اساسی را دارند. در واقع، هر انسان موفق وقتی به گذشته‌اش می‌نگرد، چهره معلم و استادش را می‌بیند که محبت و مهارت وی، موفقیت امروزش را رقم زده است.

به‌طور ویژه، دبیران محترم ریاضی با آموزش و فهماندن علم ارزشمند ریاضی می‌کوشند موضوعاتی دشوار را برای دانش‌آموزان قابل فهم و شیرین کنند. آن‌ها به خاطر فداکاری‌هایشان در زمینه تدریس ریاضی، باعث می‌شوند دانش‌آموزان بتوانند چالش‌های ریاضیاتی را بهتر درک و حل کنند و مهارت‌های لازم برای زندگی دانشگاهی و شغلی آینده‌شان را به دست آورند.

با توجه به نقش مهم ریاضیات در توسعه علمی و فناوری، دبیران ریاضی ارزشمندترین کمک‌ها را به جامعه می‌کنند. آن‌ها ساعت‌ها از وقت شریفشان را بی‌دریغ به بررسی تمرین‌ها،

طرح سؤال‌های استاندارد، تصحیح پاسخ‌ها، برگزاری کلاس‌های جبرانی و پشتیبانی از دانش‌آموزانشان در فضای حقیقی و مجازی اختصاص می‌دهند. دانش‌آموزان فعال و علاقه‌مند و آنان که فعالیت‌های علمی خارج از کلاس دارند و در مسابقات ریاضی و المپیادهای علمی شرکت می‌کنند، این موضوع را بهتر درک می‌کنند.

آری، شما دبیران دلسوز ریاضی، هر روز تلاش مضاعفی می‌کنید تا مفاهیم، قوانین و الگوریتم‌های پیچیده را به صورت ساده و قابل فهم برای دانش‌آموزانتان توضیح دهید. با صبر و حوصله بسیار، تمام توان خود را می‌گذارید تا بهترین روش‌ها و راهبردهای آموزشی را به ازای هر دانش‌آموز به کار ببندید تا هیچ دانش‌آموزی از یادگیری محروم نماند. شما عزیزان تمام همت خود را برای ایجاد حس ترغیب به تفکر، استدلال منطقی و حل مسئله ریاضی در دانش‌آموزان به کار می‌بندید. و شما دانش‌آموزان عزیز ادعان دارید که دبیران شما در واقع الگو و الهام‌بخش زندگی‌تان هستند، زیرا آنان زمینه‌سازی می‌کنند تا شما به عنوان یکی از دانشمندان، مهندسان، ریاضی‌دانان و انسان‌های خلاق در جامعه تربیت شوید.

از این رو فداکاری و تلاش‌های بی‌وقفه آن‌ها را همواره قدردان هستید. ما نیز از اعماق قلبمان سپاسگزار معلمان عزیز هستیم و آرزو می‌کنیم شاهد افزایش روزافزون عزت و منزلت حقیقی فرهنگیان در جامعه باشیم، زیرا جامعه‌ای که بهترین دبیران را داشته باشد، فرزندان‌ش بهترین آینده را خواهند داشت.

بنده نیز دست معلمانم و به ویژه دبیر ریاضی دوران دبیرستانم، استاد گران قدر جناب آقای حسین کرمی روشناوند را که مؤثرترین شخص در ترسیم مسیر حرفه‌ای زندگی‌ام بودند، می‌بوسم و برای ایشان آرزوی تندرستی و شادکامی دارم. دانش‌آموزان عزیز، شما هم می‌توانید با فرستادن خاطراتتان به رایتنامه مجله، مراتب ارادت و سپاس خود را نسبت به دبیر ریاضی‌تان ابراز نمایید.

دوستدار و ارادتمند شما

دکتر مجید حکمت

سردبیر مجله رشد ریاضی برهان متوسطه دوم

راه‌های ارتباط:

- borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir
- www.roshdmag.ir/3a0

فرار از جنگل

محمد تقی طاهری تنجانی
پژوهشگر ریاضی

حرکت پیش‌رونده داشته باشید، پس از طی مسیری معین به خارج از جنگل برسید. برای این گفتم ریاضی‌دان که بتوانید از همه ابزارهای هندسی استفاده کنید و محاسبات را به‌سادگی انجام دهید. حالا که مسئله را متوجه شدید و فرصتتان رو به اتمام است تا جلسه بعد روی آن فکر کنید.

راهنمایی می‌کنم از رابطه فیثاغورس، دایره، چندضلعی و... استفاده کنید.

بچه‌ها آن قدر درگیر مسئله شده بودند که صدای زنگ تفریح را نشنیدند. استاد ضمن آنکه از کلاس خارج می‌شد گفت: «به این سادگی‌ها نیست. روی آن فکر کنید و فکرتان را برای سایر افراد مطلع مطرح کنید و دنبال بهترین جواب باشید.»

روزها به سرعت سپری شدند. در اولین جلسه درس ریاضی از همان اول زنگ بچه‌ها اصرار داشتند که راه‌حل‌هایشان را مطرح کنند.

استاد نیک‌روش: امروز بخش آخر ساعت درس را به پیشنهادها و راه‌حل‌های شما اختصاص می‌دهیم. حالا به درس امروز گوش کنید.

یکی از دانش‌آموزان به استاد یادآوری کرد: «استاد فراموش نکنید!» استاد با پایان یافتن تدریس آن روز از دانش‌آموزان خواست راه‌های پیشنهادی‌شان را مطرح کنند. همه‌های در کلاس شروع شد. هر کس می‌خواست راه‌حل خودش را زودتر مطرح کند تقریباً نیمی از کلاس دست‌هایشان را بالا برده بودند تا با اجازه استاد راه‌حل خودشان را مطرح کنند.

استاد از انتهای کلاس **علی** را صدا زد: «آقای **مصطفوی** شما به چه راهی رسیدید؟»

علی: استاد من روی مسئله خیلی فکر کردم. به نظر من اگر روی دایره‌ای به قطر یک کیلومتر حرکت کند، حتماً به خارج از جنگل هدایت می‌شود. مقدار مسافتی هم که می‌پیماید طبق فرمول

استاد **نیک‌روش** کارهای خلاقانه‌ای در کلاس درس انجام می‌داد. وقتی بچه‌ها خسته می‌شدند، بخشی از پایان ساعت درس را به طرح یک مسئله و به چالش کشیدن دانش‌آموزان اختصاص می‌داد.

آن روز استاد نگاهی به ساعتش کرد و رو به دانش‌آموزان کرد و گفت: «برای آنکه کمی فکر کنید و ذهنتان را درگیر تمرینی برای رشد و شکوفایی استعدادهای نهفته شما کنم، مسئله‌ای را طرح می‌کنم تا جلسه بعد در هفته آینده روی آن فکر کنید و راه‌حل‌های پیشنهادی‌تان را مطرح کنید.»

فرض کنید ریاضی‌دانی در جنگلی مستطیل‌شکل به طول ۲۰ کیلومتر و عرض یک کیلومتر گم شده است. چگونه می‌تواند راهی برای فرار از جنگل پیدا کند؟ او می‌خواهد کمترین راه‌پیمایی را داشته باشد. سؤالی ندارید؟

امیر محمد: استاد ببخشید، اگر ۲۰ کیلومتر برود، مطمئن می‌شود که از جنگل خارج شده است. این مطلب درست است؟

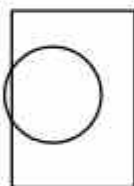
استاد: البته کمترین راه‌پیمایی را می‌خواهیم. حداکثر هم ۲۰ کیلومتر نمی‌شود، چون در بدترین حالت ممکن در یک مسیر مستقیم روی قطر مستطیل حرکت می‌کند که طبق رابطه فیثاغورس تقریباً ۲۰ کیلومتر و ۲۵ متر می‌شود. روی کمترین راه‌پیمایی تمرکز کنید.

آرمین: استاد کمترین راه‌پیمایی عرض جنگل نمی‌شود؟ یعنی همان یک کیلومتر؟

استاد: واضح است که نه. از کجا باید بدانند در مسیر عرض جنگل حرکت می‌کند؟! باید راهی پیدا کنید که به هر شکل که حرکت کند، مطمئن شود بعد از راه‌پیمایی مورد نظر به خارج جنگل هدایت می‌شود.

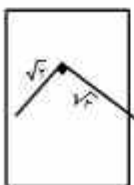
حالا روی کاغذ مدلی از مسئله را رسم کنید. یک مستطیل که طول آن ۲۰ و عرض آن ۱ باشد. چون نمی‌دانیم ریاضی‌دان مورد نظر کجای مستطیل قرار گرفته است، راهی پیدا کنید که اگر

محیط دایره ($\pi \times \text{قطر}$) برابر π کیلومتر، تقریباً ۳ کیلومتر و ۱۴ متر می شود.



استاد ضمن تشویق و تأیید راهحل علی از دانش آموزان خواست اگر راهحلی دارند که ریاضی دان ما کمترین مسیر را طی کند مطرح کنند **محمد مهدی**، استاد من راه خلاقانه ای دارم. البته صادقانه بگویم این پیشنهاد برادر من است. او دانشجوی مهندسی عمران است و مرا راهنمایی کرد. اگر ریاضی دان مسیری به طول $\sqrt{2}$ متر برود و سپس قطعه راهی عمود بر آن به اندازه $\sqrt{2}$ متر بپیماید از جنگل خارج می شود.

استاد از بچه ها خواست راهحل محمد مهدی را بررسی کنند آیا واقعاً همین طور است؟ در بدترین حالت اگر $\sqrt{2}$ متر حرکت کند در طول جنگل و بعد عمود بر آن $\sqrt{2}$ متر دیگر برود چطور؟



۴

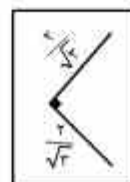
شماره تماس: ۱۱۳۹ | تهران: ۱۳۴۵

محمد مهدی: استاد همه حالت‌ها را در نظر گرفته‌ام. هر جور حساب کنیم، یا پیمودن این مسیر به طول $2\sqrt{2}$ متر که تقریباً می‌شود ۲ کیلومتر و ۸۲۸ متر، از راه حل علی که π کیلومتر بود، تقریباً ۳۱۲ متر کمتر است.

استاد: عزیزان توجه دارید که راه حل محمد مهدی $\sqrt{2}$ کیلومتر و سپس $\sqrt{2}$ کیلومتر عمود بر آن است. این کمترین عدد رادیکالی است. مثلاً اگر $\sqrt{3}$ متر بود طول مسیر بیشتر می‌شد. ولی آیا کمتر

از $\sqrt{2}$ هم می‌شد عددی در نظر گرفت؟ مثلاً عدد $\frac{2}{\sqrt{3}}$ واحد که با روش محمد مهدی تقریباً می‌شود $2/309$ کیلومتر. آیا این روش بهتری است؟ آیا اصلاً در بدترین حالت ممکن است حتماً از جنگل خارج شد؟

مثلاً اگر مسیر حرکت به صورت زیر باشد می‌توان نشان داد که ممکن است راه پیمایی به صورت زیر ریاضی‌دان را به خارج از جنگل نبرد!



عددهای دیگر را هم خودتان بررسی کنید
ایمان: استاد من هم به کمک پدرم به راه‌حلی رسیدم که میزان پیمایش کمتری دارد. ریاضی‌دان می‌تواند یک قطعه راه به طول $\frac{2}{\sqrt{3}}$ واحد را بپیماید. سپس با طی قطعه راه دیگری که با راه قبلی زاویه 120° بسازد و به طول $\frac{2}{\sqrt{3}}$ واحد باشد، از جنگل فرار کند. طول این راه تقریباً به اندازه $2/310 = \frac{4}{\sqrt{3}}$ کیلومتر خواهد بود که با راه حل محمد مهدی ۵۱۸ متر اختلاف دارد.

استاد: خوب، بعضی از عزیزان راه‌هایی را مطرح کردند که می‌توان بررسی کرد و از درستی آن‌ها مطمئن شد، ولی راه‌های دیگری هم می‌توان ارائه داد. من در دوران دانشجویی خودم این مسئله را در کتاب «استراتژی‌های حل مسئله» اثر آرتور انگل که به فارسی ترجمه شده است دیدم و راه‌های دیگری هم که در حوصله و سطح شما نیست در آن کتاب مطرح شده بود. علاقه‌مندان می‌توانند به این منبع مراجعه کنند. راه‌های خلاقانه دیگر شما هم می‌توانند راه‌گشای حل مسئله باشند که در جلسه‌های بعد می‌توانید آن‌ها را مطرح کنید.

صدای زنگ تفریح و همه‌ی بچه‌ها سخنان استاد را قطع کرد.



تابع وارون

محمود نصیری
مدرس ریاضی

مقدمه

مفهوم تابع وارون یکی از مواد درسی در ریاضیات مدرسه‌ای است. در عین حال که مفهوم ساده‌ای به نظر می‌رسد، اما دارای چالش‌های زیادی نیز هست. به همین دلیل اگر سری به وبگاه‌های (سایت‌های) ریاضی بزنیم و نام تابع وارون را جست‌وجو کنیم، بیش از هر مفهوم مقدماتی دیگر ریاضی، در مورد آن مقاله‌هایی در سطح‌های متفاوت می‌یابیم.

در این مقاله سعی می‌کنیم ابتدا با مفهوم کلی کلمه وارون در ریاضی آشنا شویم. سپس تعریفی از تابع وارون به وسیله زوج‌های مرتب ارائه می‌دهیم. البته تعریف مورد نظر ما از تابع وارون بر نقش متغیر مستقل و متغیر تابع مبتنی است.

نخست تفاوت بین تابع وارون، یعنی f^{-1} و وارون $f(x)$ یعنی $\frac{1}{f(x)}$ توضیح داده می‌شود. پس از ارائه مفهوم تابع وارون، قضیه مهمی را که شرط لازم و کافی برای وارون‌پذیری تابع است، بیان و ثابت می‌کنیم. یکی از مفاهیم مهمی که در این نوشتار مورد توجه است، مفهوم وارون در تابع‌هایی است که در آن‌ها برای متغیرها کمیت در نظر می‌گیریم. زیرا در این تابع‌ها با تعویض متغیرها با مشکل روبه‌رو خواهیم شد.

بعد از بیان مفهوم تابع وارون، چند مثال می‌آوریم که به تثبیت آن کمک می‌کند و روشی عملی برای پیدا کردن ضابطه تابع وارون بیان می‌کند. همچنین نشان می‌دهیم که چگونه با محدود کردن دامنه تابع‌هایی که در کل دامنه وارون‌پذیر نیستند، وارون آن‌ها را محاسبه می‌کنیم. می‌کوشیم دلیلی ارائه دهیم برای آنکه چرا در محاسبه ضابطه تابع وارون، نقش متغیر مستقل و متغیر وابسته را تعویض می‌کنیم و چرا نمودار تابع و تابع وارون نسبت به خط $y=x$ قرینه هستند.

بعد از بیان ویژگی‌هایی از تابع و تابع وارون نیز به محاسبه عکس عملیات جبری در محاسبه f^{-1} و همچنین تقاطع تابع و تابع وارون می‌پردازیم.

مفهوم وارون

کلمه وارون، در ریاضیات ابتدایی، به عملیاتی گفته می‌شود که یکدیگر را خنثا می‌کنند. البته گاهی درک این رابطه‌های وارون یا معکوس برای کودکان سخت است. مثلاً عدد ۲- وارون عدد ۲ در عمل جمع است؛ زیرا: $2 + (-2) = 0$ و عضو خنثا یا بی‌اثر در عمل جمع است. معمولاً وارون یک عدد را در عمل جمع، قرینه آن عدد می‌نامند. وارون عدد ۵ در عمل ضرب عدد $\frac{1}{5}$ است؛ زیرا $5 \times \frac{1}{5} = 1$ و عدد ۱، عضو خنثا یا بی‌اثر عمل ضرب روی مجموعه

عددهای حقیقی مخالف صفر است.

به همین ترتیب که در ریاضی با مفهوم‌های جدیدتری آشنا می‌شویم، مفهوم وارون نیز به صورت‌های متفاوت تعریف می‌شود، اما شباهت این تعریف‌ها در همه یکسان است. بعداً وقتی با مفهوم ماتریس نیز آشنا شدیم، خواهیم دید که وارون آن نیز به نوعی تعریف می‌شود. اما در رابطه‌ها و تابع‌ها مفهوم وارون، خیلی وسیع‌تر و عمیق‌تر از سایر زمینه‌های ریاضی است، به طوری که کاربردهای بیشتری نیز دارد.

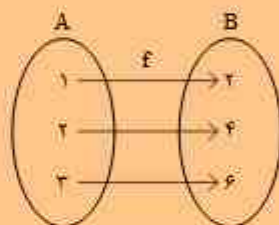
شاید تصور کنید که $-f(x)$ وارون $f(x)$ نسبت به عمل جمع تابع‌هاست یا $\frac{1}{f(x)}$ وارون $f(x)$ نسبت به عمل ضرب تابع‌هاست. اما چون این عمل‌ها در واقع فقط روی $f(x)$ ‌ها، یعنی مقدارهای تابع‌ها تعریف می‌شوند، به همان معنی وارون عددها نسبت به عمل‌های جمع و ضرب هستند مثلاً: $\frac{1}{f(x)} = (f(x))^{-1}$. مثلاً در تابع با ضابطه $f(x) = x^2 + 1$ داریم: $\frac{1}{f(2)} = \frac{1}{f(2)^{-1}} = \frac{1}{9}$.

بنابراین، تعریف وارون تابع، مفهومی به غیر از وارون یک عدد است. اکنون این پرسش مطرح می‌شود که پس منظور از وارون تابع چیست؟ یکی از نمادهایی که برای تابع به کار می‌بریم f است. پس چنین به نظر می‌رسد نمادی را که برای نمایش وارون f به کار می‌بریم، نماد f^{-1} باشد.



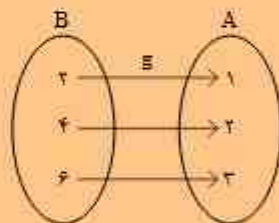
چون تابع یک عمل است که روی دو مجموعه تعریف می‌شود، پس وارون آن نیز عملی است که باید وارون عمل انجام‌شده روی این دو مجموعه باشد. در واقع، تابع وارون یک تابع، تابع دومی است که عمل تابع اول را خنثا یا بی‌اثر می‌کند.

ابتدا تابعی را که به وسیله زوج‌های مرتب تعریف شده است در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{2, 4, 6\}$ و f تابعی است که از A به B مطابق آنچه نمایش داده شده است، تعریف می‌شود پس $f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$ در واقع عملی را که تابع f انجام می‌دهد، عضوهای A را به عضوهای B به طریقی نظیر می‌کند که هر عضو A به دو برابر خودش از B نظیر شده است.



می‌دانیم وارون عمل ضرب در 2، عمل تقسیم بر 2 است اگر تابعی از B به A چنان تعریف کنیم که هر عضو B را به نصف آن از A نظیر کند، به تابع g می‌رسیم:

$$g = \{(2, 1), (4, 2), (6, 3)\}$$



در واقع جای مؤلفه‌های اول و دوم در تابع f عوض شده است و به تابع g رسیده‌ایم و مشاهده می‌کنیم که $D_g = R_f$ و $D_f = R_g$. طبق تعریف، تابع g را وارون تابع f می‌نامیم و به $g = f^{-1}$ نشان می‌دهیم. با توجه به مثال بالا، می‌توانیم وارون تابع f و حتی هر رابطه را تعریف کنیم.

تعریف: فرض کنیم f یک تابع یا رابطه باشد، $f^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in f\}$ و $D_{f^{-1}} = R_f$ و $R_{f^{-1}} = D_f$.

بنابراین، با تعویض جای مؤلفه‌های اول و دوم هر تابع یا رابطه f به رابطه‌ای می‌رسیم که وارون f نامیده می‌شود. چرا می‌گوییم رابطه و نمی‌گوییم تابع؟
مثال زیر را در نظر بگیرید:

$$f = \{(1, 2), (2, 0), (2, 5), (4, 2)\}$$

اکنون با تعویض جای مؤلفه‌های اول و دوم به رابطه زیر می‌رسیم:

$$f^{-1} = \{(2, 1), (0, 2), (5, 2), (2, 4)\}$$

مشاهده می‌کنیم که f^{-1} تابع نیست چرا؟
بنابراین، ممکن است وارون یک تابع، خودش یک تابع نباشد. در چه صورت وارون یک تابع، خودش تابع نیست؟

احتمالاً درست حدس زده‌اید: در صورتی که حداقل دو زوج مرتب با مؤلفه‌های اول متمایز، اما با مؤلفه‌های دوم مساوی در f وجود داشته باشند. این یعنی تابع f یک به یک نباشد. پس اگر تابعی یک به یک نباشد، رابطه وارون آن یک تابع است. در این صورت می‌گوییم تابع f وارون‌پذیر است و آن را تابع وارون تابع f می‌نامیم. بنابراین وارون تابع، با تابع وارون متفاوت است. وارون هر تابعی را می‌توانیم داشته باشیم، اما تابع وارون هر تابعی ممکن است موجود نباشد. در واقع قضیه زیر را داریم:

● **قضیه:** شرط لازم و کافی برای آنکه تابع f وارون‌پذیر باشد - یعنی وارون آن تابع باشد - این است که یک‌به‌یک باشد.

فرض کنید f تابعی یک‌به‌یک باشد، اگر: $y \in R_f$ در این صورت x از D_f وجود دارد که: $y = f(x)$ یعنی: $(x, y) \in f$ و بنابر تعریف: $(x, y) \in f^{-1}$.

حال چگونه ثابت می‌کنید f^{-1} تابع است؟
یکی از روش‌هایی که ثابت می‌کنیم یک رابطه g تابع است این است که اگر $(a, b) \in g$ و $(a, c) \in g$ آن‌گاه $b=c$.

اکنون فرض کنید: $(y, x_1) \in f^{-1}$ و $(y, x_2) \in f^{-1}$ در نتیجه: $(x_1, y) \in f$ و $(x_2, y) \in f$ یعنی: $y = f(x_1)$ و $y = f(x_2)$ پس: $f(x_1) = f(x_2)$.

پس چون f یک‌به‌یک است، در نتیجه: $x_1 = x_2$ یعنی f^{-1} تابع است. برعکس، فرض کنید f^{-1} تابع نباشد، چگونه نشان می‌دهید f یک‌به‌یک است؟

برای آنکه ثابت کنید یک تابع مانند g یک‌به‌یک است باید ثابت کنید به ازای هر x_1 و x_2 از دامنه f اگر: $f(x_1) = f(x_2)$ آنگاه: $x_1 = x_2$.

پس فرض کنید f^{-1} تابع باشد: $y = f(x_1) = f(x_2)$ در نتیجه: $x_1 = x_2$ و $x_1 = x_2$ و f^{-1} است. پس: $x_1 = x_2$ در نتیجه f یک‌به‌یک است.

اکنون مسئله‌های زیر را حل کنید:

مسئله ۱.۱ اگر $f: A \rightarrow B$ تابعی یک‌به‌یک باشد آنگاه $f^{-1}: R_f \rightarrow A$ نیز یک‌به‌یک است. سعی کنید از روش اثبات قضیه قبلی استفاده کنید.

مسئله ۱.۲ تابعی یک‌به‌یک است و $f(2) + f^{-1}(a^2 + 7) = 12$

$f^{-1}(f) = 15$ و $f^{-1}(4) = 2$ را محاسبه کنید. از یک‌به‌یک بودن f یا f^{-1} چگونه استفاده می‌کنید؟

تا اینجا ممکن است با مفهوم تابع یک‌به‌یک تا حدودی آشنا شده باشید. اما همه بحث‌های ما در مورد تابع‌هایی بودند که به صورت زوج مرتب‌ها تعریف شده‌اند، هنوز در مورد حالتی که تابع‌ها به وسیله ضابطه‌های متفاوت تعریف می‌شوند، بحثی انجام ندادیم. شاید این تصور برای شما به وجود آید که خوب با استفاده از ضابطه تابع آن را به صورت زوج‌های مرتب می‌نویسیم و وارون را با تعویض مؤلفه‌های اول و دوم محاسبه می‌کنیم. مثالی را حل می‌کنیم.

مثال: فرض کنیم تابع f با ضابطه $y = f(x) = x^2$ باشد. f را به صورت زوج‌های مرتب بنویسید و وارون آن را محاسبه کنید.

پاسخ: $D_f = R_f = \mathbb{R}$. به‌سادگی ثابت می‌شود f یک‌به‌یک است. آن را ثابت کنید.
فرض کنیم: $x = t$ پس: $y = t^2$. در واقع t یک متغیر ظاهری است که انتخاب می‌کنیم تا دو مؤلفه زوج‌های مرتب بر حسب یک متغیر بیان شوند. بنابراین: $f = \{(t, t^2) \mid t \in \mathbb{R}\}$. در نتیجه بنابر تعریف: $f^{-1} = \{(t^2, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. اما می‌توانیم دوباره ضابطه f^{-1} را به وسیله رابطه‌های جبری بنویسیم: $x = t^2$ و $y = t^2$ در نتیجه: $x = y$ و از این نیز داریم: $y = \sqrt{x}$. بنابراین: $y = f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

متغیر مستقل و متغیر وابسته

در این عملیاتی که انجام دادیم نکته‌هایی نهفته است که شاید به توضیح نیاز داشته باشد.

اجازه بدهید ابتدا به دو مفهوم اشاره کنیم که نقش آن‌ها در تابع وارون بسیار مهم است. این دو مفهوم اساسی **متغیر مستقل** و **متغیر وابسته** نام دارند. البته این دو مفهوم باید وقتی تابع را تعریف می‌کنیم مطرح شوند.

وقتی ضابطه تابع را به صورت $y = f(x)$ نشان می‌دهیم، پایه و وسیله زوج مرتب‌ها، f را به صورت $f = \{(x, y) \mid x \in D_f, y \in R_f\}$ نشان می‌دهیم، x را متغیر مستقل و y را متغیر وابسته یا با طور خلاصه وابسته می‌نامیم. البته این یک قرارداد است. مثلاً در $x^2 + y^2 = 1$ ، x و y را متغیر مستقل و y را وابسته فرض می‌کنیم. می‌توانیم برعکس آن را نیز در نظر بگیریم. معمولاً متغیر مستقل را به x و وابسته را به y نشان می‌دهیم؛ در غیر این صورت مشخص می‌کنیم.

معمولاً سعی می‌شود در هر معادله یا ضابطه، در صورت امکان معادله بر حسب متغیر وابسته حل شود یا به یک رابطه صریح $y = f(x)$ برسیم. البته در صورتی که معادله قابل حل باشد، اگر x متغیر

مستقل و y وابسته باشد می‌توانیم معادله $y^2 - x^2 + x - 1 = 0$

را به صورت $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$ بنویسیم؛ اما نوشتن معادله $y^2 + y - x^2 + 1 = 0$ به صورت صریح کار ساده‌ای نیست. حتی در موردهایی ممکن است امکان پذیر نباشد. اما در همین معادله، اگر y را متغیر مستقل و x را تابع در نظر بگیریم؛ به‌سادگی x بر حسب y قابل محاسبه است: $x = \sqrt{y^2 + y + 1}$ اما معمولاً مرسوم است که متغیر مستقل را به x و متغیر تابع را به y نشان دهیم. پس می‌توانیم نقش آن‌ها را عوض کنیم. نقش x را به y و نقش y را به x بدهیم. در این صورت x را به y و y را به x تبدیل

می‌کنیم و به معادله $y = \sqrt{x^2 + x + 1}$ می‌رسیم که همان نقش معادله اولی را دارد. در رسم نمودارها طبق قرارداد متغیر مستقل را روی محور افقی و متغیر تابع را روی محور قائم نمایش می‌دهیم و آن را وضعیت طبیعی یا استاندارد محورهای می‌نامیم؛ هرچند این نیز یک قرارداد است و می‌توانیم برعکس آن را هم انجام دهیم.

حالا که با مفهوم‌های متغیر مستقل و وابسته آشنا شدیم، به بحث اصلی بمرمی بگردیم. تابع وارون را به کمک زوج‌های مرتب تعریف کردیم. اما می‌دانیم که نمایش یک تابع به وسیله زوج‌های مرتب کار ساده‌ای نیست. البته شاید هم به‌خوبی قابل درک باشند. در واقع این تعریف از تابع وارون روشی علمی برای محاسبه ضابطه تابع وارون ارائه نمی‌دهد و همچنین نشان دادن موقعیت‌ها روی محورها دشوار است.

اکنون سعی می‌کنیم تعریفی از تابع وارون ارائه دهیم که هم مفهوم تابع وارون را به وضوح بیان کند و هم در صورت امکان روشی علمی برای پیدا کردن ضابطه تابع وارون ارائه دهد.

شاید در نگاه اول، مفهوم تابع وارون چندان مشکل به نظر نرسد، اما اگر بخواهیم آن را به‌طور عمیق‌تر بررسی کنیم، مشاهده خواهید کرد که مفهوم تابع وارون، فراتر از آن است که به دانش‌آموزان یاد می‌دهیم که در تابع با ضابطه $y = f(x)$ ، x را بر حسب y محاسبه و جای x و y را عوض می‌کنیم یا جای x و y را عوض و y را بر حسب x محاسبه کنیم.

شاید هم بعضی دانش‌آموزان این فن (تکنیک) را به خوبی به کار می‌برند، اما برای آن‌ها هدف اصلی تابع وارون و مفهوم آن واضح به نظر نرسد.

یکی از هدف‌های تابع وارون، کاربرد آن در فرمول‌ها چه در ریاضی و چه در فیزیک یا زمینه‌های دیگر است.

فرمول تبدیل درجه سانتی‌گراد (C) و فارنهایت (F) به یکدیگر، یعنی فرمول (۱)، $F = \frac{9}{5}C + 32$ را در نظر می‌گیریم. فرض

کنیم F تابعی از C باشد، یعنی C متغیر مستقل و F وابسته باشد. اکنون C را به F و F را به C تبدیل می‌کنیم. به فرمول (۲)

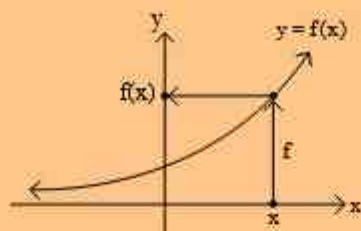
$C = \frac{5}{9}F + 32$ می‌رسیم. آیا (۱) و (۲) وارون یکدیگر هستند؟

یا اگر C را بر حسب F محاسبه کنیم: (۳)، $C = \frac{5}{9}(F - 32)$

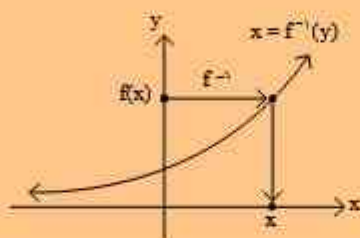
پروایند

۸

شماره ۱۳۶ | بهار ۱۳۹۳



تابع f ، یک ورودی x را به عدد $f(x)$ می‌فرستد.



تابع f^{-1} عدد $f(x)$ را به x برمی‌گرداند.

ابتدا تابع f را در نظر می‌گیریم. از روی نمودار می‌توانیم قانون f یا عمل f را به این صورت توصیف کنیم: برای یک ورودی x ، خروجی متناظر آن مقدار $f(x)$ را پیدا می‌کنیم. از نقطه x روی محور x ‌ها یا همان محور متغیر مستقل، به‌طور عمودی حرکت می‌کنیم تا به نمودار f برسیم. سپس از این نقطه به‌طور افقی حرکت می‌کنیم تا به خروجی $f(x)$ روی محور y ‌ها برسیم که همان محور متغیر وابسته است.

اکنون در نمودار بعدی مشاهده می‌کنیم که چگونه $f(x)$ را به x برمی‌گردانیم. بنابراین ورودی برای f^{-1} همان خروجی $f(x)$ برای f است. در واقع مانند آن است که نقش متغیر مستقل و وابسته عوض شده است. برای f^{-1} ، محور y ‌ها را محور متغیر مستقل یا ورودی‌ها و محور x ‌ها را محور وابسته یا خروجی‌ها در نظر می‌گیریم و به f^{-1} به‌عنوان قانونی فکر کنید که به صورت زیر عمل می‌کند:

مقدار $f(x)$ را به عنوان ورودی روی محور y ‌ها یا این بار محور متغیر مستقل در نظر می‌گیریم. اکنون به‌طور افقی از این نقطه روی محور y ‌ها حرکت می‌کنیم، تا به نمودار f برسیم. سپس از این نقطه روی نمودار به‌طور عمودی حرکت می‌کنیم تا به خروجی x روی محور x ‌ها، که این بار محور متغیر وابسته است، برسیم. البته توجه داریم که تابع f یک‌به‌یک است، زیرا در غیر این صورت ممکن است از یک ورودی $f(x)$ به دو خروجی x_1 و x_2 برسیم. اگر f یک‌به‌یک نباشد، حداقل یک خط افقی که از نقطه‌ای به عرض $f(x)$ می‌گذرد وجود دارد که نمودار تابع را حداقل در دو نقطه قطع کند. در این صورت یک ورودی $f(x)$ وجود دارد به طوری که برای آن دو خروجی x به دست می‌آید. بنابراین f^{-1} تابع نیست با این توصیف تابع f دارای تابع وارون است، به شرطی که f یک‌به‌یک باشد.

که فرض بر این است که C تابعی از F است، آیا (1) و (3) وارون یکدیگرند؟ یا باید طبق تعریفی که F را به C و C را به F تبدیل می‌کنیم، این عمل را انجام دهیم تا (1) و (3) وارون هم شوند. در این صورت آیا رابطه (3) به همان رابطه (2) تبدیل نمی‌شود؟ آیا این یک گزاره درست است؟ چه مشکلی در این روند وجود دارد که به جواب‌های نادرست می‌رسیم؟ این فقط وقتی می‌تواند درست باشد که کمیت‌های مرتبط با رابطه نادیده گرفته شوند. زیرا در این صورت مانند آن است که بگوییم سالتی گراد، فارنهایت است و فارنهایت، سالتی گراد!

روش رایجی که برای تعیین تابع معکوس در کتاب‌های درسی ارائه و آموزش داده می‌شود، این است که در رابطه یا معادله داده‌شده جای x و y را عوض کنیم و سپس معادله را بر حسب y حل کنیم. این روش معمولاً با توضیح کم یا بدون توضیح ارائه می‌شود. در این صورت دانش‌آموزان با درک ضعیفی از ایده تابع وارون، برای نشان راهی به‌غیر از به‌خاطر سپردن مرحله‌هایی از عملیات برعکس باقی نمی‌ماند.

همین اتفاق برای مسئله‌های مشابه ممکن است رخ دهد. رابطه $V(x) = x^3$ یا $y = x^3$ حجم یک مکعب را بر حسب اندازه ضلع آن محاسبه می‌کند. اگر نقش x و y را عوض کنیم و y را بر حسب x محاسبه کنیم، به معادله $y = \sqrt[3]{x}$ می‌رسیم. شاید از نظر ریاضی محض کاری درست انجام داده باشیم، اما آیا با همان قراردادهای اولیه، این فرمول برای محاسبه اندازه ضلع بر حسب حجم مکعب است؟

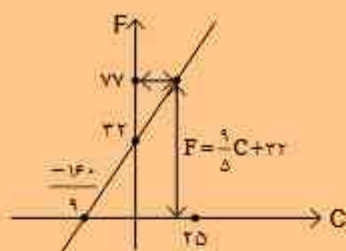
آیا مثال اول در فیزیک و مثال دوم در هندسه با مفهوم‌های آن‌ها سازگاری دارند؟

بنابراین، وقتی با مسئله‌های عملی و کاربردی، به ویژه در علوم غیرریاضی روبه‌رو می‌شویم، وضعیت متفاوت است. زیرا هر یک از این متغیرها در رابطه‌ها و فرمول‌ها نام ویژه خودش را دارد و در این صورت است که مفهوم وارون تابع مورد نظر چیزی فراتر از تعویض جای دو متغیر است. در غیر این صورت نام متغیرهای قراردادی در فرمول‌ها را باید مرتباً عوض کنیم.

ورود به هدف اصلی

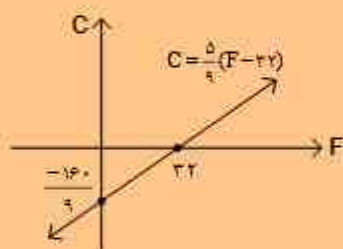
با توجه به مقدمه‌های بالا، باید ابتدا تعریفی از تابع وارون چنان ارائه دهیم که تمام موردهای بالا را شامل شود و تعریفی جامع باشد. ساده‌ترین و کلی‌ترین تعریفی که از تابع وارون می‌توان به دست داد این است:

مفهوم تابع وارون چیزی جز تغییر نقش متغیر مستقل و وابسته در خود تابع نیست و در عمل تحت شرایط مناسب، تابع f^{-1} وارون تابع f است، هرگاه اثر تابع f را خنثا کند.



پس ضابطه f^{-1} به این صورت است: $C = \frac{9}{5}(F - 32)$. مشاهده می کنید که معادله های تابع و تابع وارون همچنین نمودارهای آن ها هیچ تفاوتی ندارند و بر هم منطبق اند فقط متغیر مستقل و وابسته است که در آن دو متفاوت است. اگر: $C=25$, $F=77$ برعکس اگر: $F=77$, $C=25$.

می توانیم در حالتی که F متغیر مستقل و C تابع است نمودار را در صورتی که محور متغیر مستقل، یعنی محور شامل F افقی است نیز رسم کنیم. در شکل آن را مشاهده می کنید.



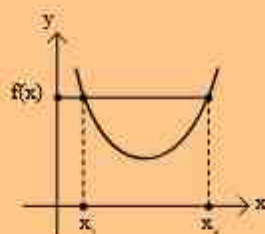
بنابراین نمودارهای f و f^{-1} در صورتی متفاوت می شوند که برای هر دو محور در وضعیت طبیعی رسم شوند؛ یعنی محور متغیر مستقل افقی و محور تابع قائم باشد.

تابع $y = f(x) = x^2$ را در بازه $[-1, 2]$ در نظر می گیریم. x متغیر مستقل و y متغیر وابسته است. از $D_f = [-1, 2]$ چگونه نتیجه می گیریم؟ $R_f = [-1, 8]$ ؟

ویژگی های نامساوی ها استفاده کنید پس: $f: [-1, 2] \rightarrow [-1, 8]$ و $y = x^2$. این تابع یک به یک است چرا؟ آن را ثابت کنید. بنابراین f وارون پذیر است. حال اگر در همین معادله $y = x^2$ ، y را متغیر مستقل و x را متغیر وابسته فرض کنید، می توانیم آن را به صورت $x = \sqrt{y}$ بنویسیم پس: $x = \sqrt{y}: [-1, 8] \rightarrow [-1, 2]$ با ضابطه $x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ وارون آن است.

$$y \in [-1, 8] \text{ به ازای هر } f(f^{-1}(y)) = f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$$

$$x \in [-1, 2] \text{ به ازای هر } f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2) = \sqrt{x^2} = x$$



پس می توانیم تعریفی به صورت زیر برای تابع وارون بیان کنیم که تعریفی ساده و کلی است:

تعریف: فرض کنیم $f: A \rightarrow B$ با ضابطه $y = f(x)$ تابعی یک به یک باشد که در آن x متغیر مستقل و y متغیر وابسته است. حال اگر تابعی را از $R_f \rightarrow A$ با همان ضابطه $y = f(x)$ چنان در نظر بگیریم که y متغیر مستقل و x وابسته باشد، آنگاه این تابع را وارون f می نامیم و به f^{-1} نشان می دهیم. حتی اگر x را بر حسب y محاسبه نکرده باشیم و فقط نقش آن دو را عوض کرده باشیم، آن را وارون f می نامیم.

بنابراین مفهوم تابع وارون چیزی جز تغییر نقش متغیر مستقل و متغیر وابسته نیست. در نتیجه دامنه تابع وارون برد خود تابع و برد تابع وارون دامنه خود تابع است.

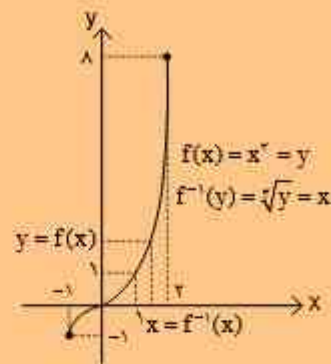
وقتی $y = f(x)$ بر حسب y قابل حل باشد، می توانیم ضابطه f^{-1} را به صورت $x = f^{-1}(y)$ بنویسیم که در این صورت متغیر مستقل و وابسته به وضوح مشخص هستند.

اگر دوباره به دو مثال کاربرد قبلی برگردیم، $y = V = x^2$ تابعی است که حجم مکعب را بر حسب اندازه ضلع آن تعریف می کند. حال اگر بخواهیم اندازه ضلع را بر حسب حجم تعریف کنیم، همان معادله $V = x^2$ را در نظر می گیریم؛ با این تفاوت که در آن V متغیر مستقل و x وابسته است. چون معادله بر حسب V قابل حل است، پس $x = \sqrt{V}$ ، ضابطه وارون، تابع با ضابطه $V = x^2$ است.

در اینجا هیچ نیازی به تبدیل x به V و یا V به x نیست. حتی اگر انجام دهیم با مشکل روبه رو خواهیم شد، مگر آنکه نام های کمیت ها را تغییر دهیم که چنین چیزی نه مرسوم است و نه منطقی. همین

روش را برای رابطه (۱) $F = \frac{9}{5}C + 32$ می توانید انجام دهید. اگر

این رابطه را تابع f بنامید که درجه فارنهایت را بر حسب درجه سانتی گراد محاسبه می کند، f^{-1} را تابعی می نامیم که درجه سانتی گراد را بر حسب درجه فارنهایت محاسبه می کند.



مثال: تابع f با ضابطه $f(x) = x^3 + 3^x$ مفروض است. آیا f وارون پذیر است؟ $f^{-1}(4)$ و $f^{-1}(17)$ و $f^{-1}(1)$ را محاسبه کنید. آیا می‌توانید نمودار آن را رسم کنید؟

پاسخ: اثبات مستقیم یک‌به‌یک بودن این تابع به‌سادگی امکان پذیر نیست، اما می‌توانیم با استفاده از چند قضیه آن را ثابت کنیم. یکی از این قضیه‌ها به صورت زیر است:

قضیه: اگر f تابعی یکتوای اکید باشد (صعودی اکید یا نزولی اکید)، آنگاه یک‌به‌یک است.

مثلاً اگر f صعودی اکید باشد، به ازای هر x_1 و x_2 از دامنه f ، اگر $x_1 < x_2$ ، آنگاه $f(x_1) < f(x_2)$ ، یعنی اگر $x_1 \neq x_2$ ، آنگاه $f(x_1) \neq f(x_2)$ و f یک‌به‌یک است. به همین ترتیب برای حالت f نزولی اکید ثابت می‌شود.

قضیه بعدی که نیاز داریم این است که اگر f و g دو تابع صعودی اکید باشند، آنگاه $f+g$ نیز صعودی اکید است. برای دو تابع نزولی اکید نیز به همین ترتیب برقرار است.

حتی اگر یکی از تابع‌ها اکید و دیگری اکید نباشد نیز درست است. اثبات آن بسیار ساده است. فرض کنید f صعودی اکید و g صعودی باشد.

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Rightarrow f(x_1) < f(x_2), \quad g(x_1) \leq g(x_2) \\ &\Rightarrow f(x_1) + g(x_1) < f(x_2) + g(x_2) \\ &\Rightarrow (f+g)(x_1) < (f+g)(x_2) \end{aligned}$$

اکنون اثبات صعودی اکید بودن $y = x^3$ و $y = 3^x$ ساده است. در نتیجه $f(x) = x^3 + 3^x$ صعودی اکید و بنا بر قضیه قبل یک‌به‌یک است. پس وارون پذیر است. اما محاسبه وارون این تابع به‌سادگی امکان پذیر نیست. فقط می‌توان گفت $x^3 + 3^x = y$ ، اگر y متغیر مستقل و x تابع باشد، ضابطه تابع وارون است. اما در اینجا نمی‌توانیم x را بر حسب y محاسبه کنیم، اما بعضی مقدارهای f^{-1} را که بتوانیم با حدس زدن مشخص کنیم، قابل محاسبه‌اند.

برای محاسبه $f^{-1}(4)$ فرض کنیم: $f^{-1}(4) = a$ ، پس: $f(a) = 4$ ، یعنی باید معادله $a^3 + 3^a = 4$ را حل کنیم که مشاهده می‌کنیم: $a=1$ برقرار است. یعنی $f^{-1}(4) = 1$ ، آیا معادله $a^3 + 3^a = 4$ فقط همین جواب $a=1$ را دارد، یا ممکن است جواب دیگری برای a موجود باشد؟ چرا؟

به همین ترتیب از $a^3 + 3^a = 17$ می‌توان حدس زد: $a=2$ زیرا: $2^3 + 3^2 = 17$ ، و بالاخره: $f^{-1}(1) = 0$ ، چرا؟

با رسم نمودارهای $y = x^3$ و $y = 3^x$ و جمع آن‌ها می‌توانید نموداری تقریبی برای f رسم کنید.

مشاهده می‌کنیم با وجودی که از معادله $y = x^3 + 3^x$ ، محاسبه ضابطه تابع وارون بر حسب x امکان ندارد، اما توانسته‌ایم مقدارهایی از تابع وارون را پیدا کنیم. در هر صورت معادله $y = x^3 + 3^x$ وقتی y متغیر مستقل فرض شود، ضابطه تابع

این همان مفهومی است که ابتدا توضیح دادیم. به‌طور غیررسمی f و f^{-1} یکدیگر را خنثا می‌کنند. به همین دلیل ترکیب هر یک با دیگری یک تابع همانی با دامنه متغیر خودش است. تا اینجا شاید تعجب کنید که نمودارهای f و f^{-1} بر هم منطبق و معادله‌ها نیز یکی هستند. تنها تفاوت در نقش متغیر مستقل و وابسته است. به همین دلیل در حالت کلی دامنه و برد نیز متفاوت می‌شوند: $R_{f^{-1}} = D_f$ و $D_{f^{-1}} = R_f$.

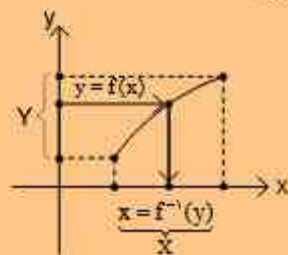
با توجه به عملیات جبری که در مثال بالا مشاهده کردیم، می‌توانیم تعریفی را که به وسیله کلمه‌ها از تابع وارون بیان کردیم و اینکه تابع وارون f باید تابعی مانند f^{-1} باشد که $y = f(x)$ را به x برگرداند، آن را به صورت زیر تعریف کنیم:

تعریف: هر تابع یک‌به‌یک f با دامنه X و برد Y دارای تابع وارون f^{-1} از دامنه Y با برد X است، به طوری که به ازای هر x از X : $f^{-1}(f(x)) = x$ و به ازای هر y از Y : $f(f^{-1}(y)) = y$.

این دو همان مفهوم‌های $f^{-1}(y) = x$ و $f(x) = y$ هستند. چنانچه در شکل مشاهده می‌کنید، تابع یک‌به‌یک f از $f: X \rightarrow Y$ نشان داده شده است. تابع وارون f^{-1} هر y از Y را به عدد x از X می‌برد یا نظیر می‌کند، به طوری که: $y = f(x)$.

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \text{عدد } x \text{ به طوری که} \\ f(x) = y \end{cases} \quad \text{بنابراین:}$$

در نتیجه، $f^{-1}(f(x)) = x$ و $f(f^{-1}(y)) = y$ به این معنی هستند که یکدیگر را خنثا می‌کنند. با توجه به ترکیب تابع‌ها، تابع‌های $f^{-1} \circ f$ و $f \circ f^{-1}$ تابع‌هایی همانی به ترتیب در دامنه f^{-1} و دامنه f هستند.



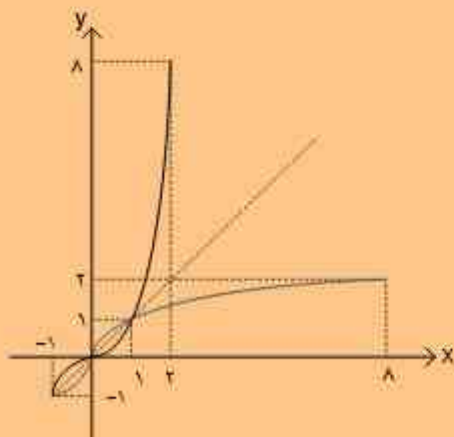
شاید برای دانش آموزانی که به آن‌ها یاد داده‌ایم، همواره متغیر مستقل افقی است و محور وابسته قائم، این خوشایند نباشد اما می‌توانیم توضیح دهیم که اگر با ریاضیات کاربردی سر و کار داشته باشیم، این کار مفید و حتی لازم است؛ چنانچه در دو مثال درجه حرارت و محاسبه حجم مکعب قبل‌آبررسی کردیم. اما اگر با رابطه‌ها و معادله‌هایی سر و کار داریم که هیچ کمیتی در آن‌ها به کار نبرده‌ایم، یا به طور غیررسمی در ریاضیات محض هستیم یا از معادله $y = f(x)$ ، محاسبه x برحسب y به سادگی ممکن باشد این مشکل به‌سادگی قابل حل است.

اگر معادله‌های $y = x^2 = f(x)$ که $D_f = [-1, 2]$ و $D_{f^{-1}} = [-1, 8]$ و $R_f = [-1, 8]$ و $R_{f^{-1}} = [-1, 2]$ را در نظر بگیریم، نمودارهای تابع و تابع وارون

بر هم متطبق و معادله‌ها یکی هستند، اما متغیرهای مستقل در آن‌ها متفاوت‌اند در نتیجه موقعیت محورهای برای آن دو متفاوت است. برای f محور متغیر مستقل افقی و برای f^{-1} محور متغیر مستقل قائم است. اکنون سعی می‌کنیم محورهای مختصات برای هر دو نمودار f و f^{-1} یکی شوند؛ یعنی محور متغیر مستقل برای f^{-1} نیز افقی شود.

به این منظور کافی است قرارداد نمادگذاری را تعویض کنیم. پس در $x, x = f^{-1}(y)$ و y به y و x به x تبدیل می‌کنیم. ضابطه تابع وارون به این صورت است: $y = f^{-1}(x)$.

اکنون متغیر مستقل در تابع و تابع وارون یکی هستند و در نتیجه محورهای مختصات نیز برای هر دو با یک نماد نشان داده می‌شوند در واقع محورهای مختصات برای تابع و تابع وارون هر دو در موقعیت طبیعی یا قراردادی مرسوم خود هستند. این عمل تعویض نقش x و y معادل آن است که (y, x) به (x, y) تبدیل شود و می‌دانیم که دو نقطه $A(y, x)$ و $A'(x, y)$ نسبت به خط $y = x$ قرینه‌اند در نتیجه:



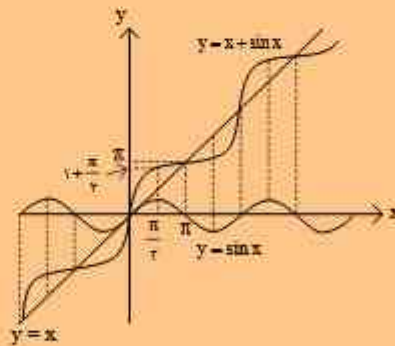
معکوس است بنابراین فن پیدا کردن وارون تابع به وسیله حل معادله $x = f(y)$ دارای محدودیت است زیرا ممکن است حل معادله مشکل و یا حتی غیر ممکن باشد.

تابع با ضابطه $f(x) = x + \sin x$ ، تابعی اکیداً صعودی است. اثبات آن با فن‌های مشتق که می‌خوانید ساده است: $f'(x) = 1 + \cos x \geq 0$.

مشتق همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر است و چون در نقطه‌های قابل شمارش صفر است و روی یک بازه صفر نیست، پس صعودی اکید است. در نتیجه یک‌به‌یک و وارون پذیر است. به وسیله مهندسی معکوس، که در مثال قبلی مشاهده کردید، می‌توانیم $f^{-1}(x)$ را به ازای مقدارهای خاص پیدا کنیم. برای مثال، اگر از ما محاسبه $f^{-1}(0)$ یا $f^{-1}(\frac{\pi}{4} + 1)$ پرسیده شود، چون می‌دانیم: $f(0) = 0$ و $f^{-1}(\frac{\pi}{4} + 1) = \frac{\pi}{4}$ و $f^{-1}(0) = 0$ پس: $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} + 1$.

اما در واقع یافتن فرمولی برای $f^{-1}(x)$ که آن را به‌طور صریح برحسب y بیان کند، مشکل‌ساز است. این به حل معادله $x + \sin x = y$ برحسب x منجر می‌شود. این یک مسئله دشوار است. زیرا فن‌های حل معادله‌های استاندارد، نمی‌توانند x را جدا کنند تا x برحسب y محاسبه شود.

با وجود این، رسم این تابع و تابع وارون آن ساده است. کافی است نمودارهای $y = \sin x$ و $y = x$ را رسم کنیم و با جمع مقدارهای دو تابع در نقطه‌های خاص، مثلاً $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ ، نمودار را رسم کنیم. سپس با پیدا کردن قرینه نمودار نسبت به خط $y = x$ نمودار $f^{-1}(x)$ را نیز وقتی x متغیر مستقل است رسم کنیم.



$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + 1, f(\pi) = \pi + 0 = \pi, f(n\pi) = n\pi$$

$$f^{-1}\left(\frac{\pi}{4} + 1\right) = \frac{\pi}{4}, f^{-1}(\pi) = \pi, f^{-1}(n\pi) = n\pi$$

اگر معادله $y = x + \sin x$ را در حالتی که y متغیر مستقل و x تابع است در نظر بگیریم، نمودار f^{-1} همین نمودار f است؛ با این تفاوت که محور y را محور متغیر مستقل اختیار کردیم.

هرگاه محور متغیر مستقل و وابسته برای هر دو تابع و تابع وارون یکی باشد، آنگاه نمودارهای f و f^{-1} نسبت به خط $y=x$ قرینه‌اند.

$$\begin{cases} y = (x-2)^2 - 1 \\ x \geq 2 \\ y \geq -1 \end{cases} \quad \text{بنابر این:}$$

فرض کنیم y متغیر مستقل و x متغیر وابسته باشد. بر این اساس داریم:

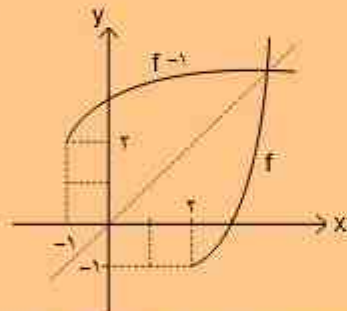
$$\begin{cases} x - 2 = \pm \sqrt{y+1} \\ y \geq -1 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

با توجه به اینکه $x \geq 2$ پس جواب $x - 2 = \sqrt{y+1}$ باید انتخاب شود.

پس $x = 2 + \sqrt{y+1} = f^{-1}(y)$ با شرط $y \geq -1$ و $x \geq 2$ وارون تابع در بازه $[2, +\infty)$ است که y متغیر مستقل و x متغیر وابسته است.

اگر x و y کمیت‌دار باشند، یعنی رابطه یا فرمول خاصی بین دو کمیت وجود داشته باشد، تا همین جا محاسبه وارون کافی است. اما اگر بخواهیم متغیر مستقل در تابع وارون نیز x باشد، را به y و y را به x تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{cases} f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x+1} \\ x \geq -1 \\ y \geq 2 \end{cases}$$



پس یک بار دیگر مرحله‌های پیدا کردن وارون تابع با ضابطه $y = x^2$ را با دامنه داده شده بازنویسی می‌کنیم. این مرحله‌ها برای یافتن وارون هر تابعی به کار می‌روند. عملیات را از راست به چپ دنبال کنید:

$$\begin{array}{ccc} x = \sqrt{y} = f^{-1}(y) & \longleftrightarrow & y = x^2 = f(x) \\ \begin{array}{l} \text{محله } x \text{ بر حسب } y \\ \text{متغیر مستقل } y \\ -1 \leq y \leq 8 \end{array} & & \begin{array}{l} \text{محله } y \text{ بر حسب } x \\ \text{متغیر وابسته } x \\ -1 \leq x \leq 8 \end{array} \end{array}$$

نمودارها و معادله‌ها یکی هستند اما محورها متمایزند.

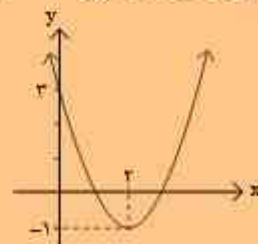
$$\begin{array}{ccc} x \text{ را به } y \text{ و } y \text{ را به } x \text{ تبدیل می‌کنیم محور متغیر} & \longleftrightarrow & \\ \begin{array}{l} \text{متغیر مستقل } x \\ -1 \leq x \leq 8 \end{array} & & \begin{array}{l} \text{متغیر وابسته } y \\ -1 \leq y \leq 2 \end{array} \end{array}$$

نمودارهای f و f^{-1} نسبت به خط $y=x$ قرینه‌اند.

محدود کردن دامنه

گاهی با تابع‌هایی روبه‌رو می‌شویم که ممکن است یک‌به‌یک نباشند، اما اگر دامنه آن‌ها را به بازه یا بازه‌هایی محدود کنیم که تابع با این دامنه محدود در آن‌ها یک‌به‌یک باشد، می‌توانیم وارون تابع را در این بازه یا بازه‌ها پیدا کنیم. در این نوع مسئله‌ها برای آنکه اشتباهی رخ ندهد، باید حدود تغییرات x و y را مشخص کنیم تا به کمک آن‌ها بتوانیم ضابطه مورد نظر را پیدا کنیم.

مثال: تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 4x + 2$ مفروض است این تابع در دامنه‌اش وارون‌پذیر نیست، اما در هر یک از بازه‌های $(-\infty, 2]$ و $[2, +\infty)$ یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر است. بهتر است ضابطه تابع را به صورت $y = (x-2)^2 - 1$ بنویسیم. در این صورت می‌توانیم وارون تابع را در هر یک از بازه‌های $(-\infty, 2]$ یا $[2, +\infty)$ یا هر زیربازه‌ای از این دو بازه محاسبه کنیم.



پاسخ: فرض کنیم بازه $[2, +\infty)$ را که تابع روی آن صعودی اکید است در نظر می‌گیریم. وقتی $x \geq 2$ ، آنگاه $y \geq -1$ چرا؟

- منابع
۱. کتاب‌های درسی حسابان ۱ و حسابان ۲، دفتر تألیف و برنامه‌ریزی درسی، ۱۴۰۲.
 ۲. آموزش مفهومی حسابان ۱، محمود نصیری، ۱۳۹۶.
 3. precalculus David Cohen, Theodore B. Lee, David Sklar Seventh Edition Brooks/cole
 4. The mathematics That every Secondary School math teacher to Know second Edition Alan Sultan Alice F. Artzt Taylor and Francis Group
 5. Precalculus David Cohen, Theodore B. Lee, David Sklar Seventh Edition Brooks/ Cole
 6. Mathematical Monthly Volume 97 Number 2 February 1990
 7. College Algebra and Calculus, Ron Larson, Anne Hodgkins BROOKS / COLE 2013



۱۳

شماره ۱۳۹ | بهار ۱۴۰۳

چون دیگر باید دید

مفاهیم هندسی

خسرو داوودی
آرش رستگار

مسئله‌های کتاب دهم

فصل پنجم: تابع

مسئله ۱:

الف) به یک پاره‌خط که لزوماً در محور عددها یا صفحه زندگی نمی‌کند، یک مربع نسبت دهید یا این کار قرار است تابعی از مجموعه پاره‌خط‌ها به مجموعه مربع‌ها تعریف کنید. مثلاً به یک پاره‌خط می‌توان مربعی به ضلع آن پاره‌خط را نسبت داد. چنین تابعی **خوش تعریف** یا قابل تعریف یا خوب تعریف شده است و مربع یگانه‌ای را به هر پاره‌خط نسبت می‌دهد. حال شما تابعی دیگر تعریف کنید. آیا می‌توانید به همین روش بی‌نهایت تابع از پاره‌خط‌ها به مربع‌ها تعریف کنید؟



ب) به یک پاره‌خط در صفحه، یک مربع در همان صفحه نسبت دهید. مثلاً مربعی به قطر آن پاره‌خط را نسبت دهید. آیا این تابع خوش تعریف است؟ اگر مربعی به ضلع آن پاره‌خط را نسبت دهید، تابعی خوش تعریف و یک‌مقداره خواهد بود؟ حال نامتناهی مربع در آن صفحه به همان پاره‌خط نسبت دهید و نامتناهی تابع از فضای پاره‌خط‌ها در صفحه به فضای مربع‌ها در صفحه تعریف کنید.



ج) حال به یک پاره‌خط که لزوماً در جایی زندگی نمی‌کند، یک دایره نسبت دهید و تابعی از فضای پاره‌خط‌ها به فضای دایره‌ها بسازید. در مرحله بعدی به یک پاره‌خط در صفحه یک دایره در همان صفحه نسبت دهید و تابعی از فضای پاره‌خط‌های صفحه به فضای دایره‌های صفحه تعریف کنید. آیا می‌توانید بی‌نهایت تابع

مانند این بسازید.

د) حال به یک پاره‌خط که لزوماً در جایی زندگی نمی‌کند، یک مکعب نسبت دهید. مثلاً مکعبی بسازید که طول ضلع آن یا قطر یک وجه آن یا قطر اصلی آن برابر همان پاره‌خط باشد. بی‌نهایت تابع مانند این بسازید. بعد به یک پاره‌خط در فضای سه‌بعدی یک مکعب در همان فضا نسبت دهید (مثلاً دو نقطه فیزیکی را در اتاق انتخاب کنید و آن‌ها را با یک پاره‌خط به هم وصل کنید).

آیا می‌توان مکعب یگانه‌ای در همان فضا به پاره‌خط نسبت داد؟ مثلاً آیا مکعب یگانه‌ای به قطر آن پاره‌خط می‌توان نسبت داد؟



هـ) حال به یک پاره‌خط در فضا، دایره یگانه‌ای نسبت دهید. آیا این کار ممکن است؟ آیا می‌توان کره یگانه‌ای نسبت داد؟ بی‌نهایت تابع از پاره‌خط‌های در فضا به کره‌ها در همان فضای سه‌بعدی نسبت دهید.

مسئله ۲:

الف) تابعی از مجموعه نقطه‌ها در صفحه به مجموعه خط‌های همان صفحه نسبت دهید.

ب) تابعی از مجموعه نقطه‌ها در صفحه، به مجموعه خط‌ها در همان صفحه نسبت دهید که دارای این خاصیت باشد: «خط متناظر شده به یک نقطه هرگز از همان نقطه نگذرد».

ج) تابعی از خط‌ها در فضا به صفحه‌ها در فضا تعریف کنید که صفحه متناظر با یک خط شامل آن خط باشد.

د) تابعی از خط‌ها در فضا به صفحه‌ها در فضا تعریف کنید که صفحه متناظر با یک خط، با آن خط موازی باشد، ولی هرگز شامل آن نباشد.

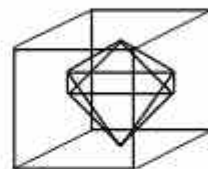
هـ) اگر صفحه‌ای در داخل یک فضا قرار داده شده باشد، به هر خط در فضا، زوج خط‌هایی در صفحه نسبت دهید. آیا می‌توان به هر زوج خط در صفحه، یک خط در فضا نسبت داد؟



فصل ششم، شمارش بدون شمردن

مسئله ۱:

الف) مکعب، چند رأس، چند یال و چند وجه دارد؟ آن‌ها را چگونه شمردید؟ آیا می‌توانید از روی تعداد رأس‌ها، تعداد یال‌ها را بشمارید؟ (بدون شمارش مستقیم). آیا می‌توانید از روی تعداد رأس‌ها، تعداد وجه‌ها را بشمارید؟ (بدون شمارش مستقیم). آیا می‌توانید از روی تعداد یال‌ها، تعداد وجه‌ها را بشمارید؟ (بدون شمارش مستقیم). آیا می‌توانید از روی تعداد رأس‌ها، تعداد یال‌ها را بشمارید؟ (بدون شمارش مستقیم). آیا می‌توانید از روی تعداد وجه‌ها، تعداد یال‌ها را بشمارید؟ (بدون شمارش مستقیم). آیا می‌توانید از روی تعداد رأس‌ها، تعداد وجه‌ها را بشمارید؟ (بدون شمارش مستقیم).

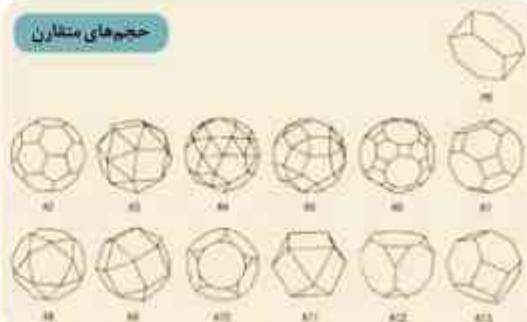


ب) در یک مکعب، مراکز وجه‌ها را مطابق شکل بالا به هم وصل کنید. شکل حاصل را یک هشت‌وجهی منتظم می‌نامند. این شکل را توصیف کنید، طوری که بتوان با توصیفات شما بدون استفاده از مکعب اولیه، آن را ساخت. بعد بگویید چرا یال‌های هشت‌وجهی منتظمی که از روی مکعب ساختید، با یال‌های مکعب متناظرند. در مورد رأس‌ها و وجه‌های این دو شکل چه می‌توانید بگویید؟ همه سؤال‌های قسمت (الف) را در اینجا هم برای هشت‌وجهی منتظم پاسخ دهید.

مسئله ۲:

در هر یک از شکل‌های زیر که چندوجهی‌های مقارنی هستند، بدون شمارش مستقیم تعداد رأس‌ها، یال‌ها و وجه‌ها را بیابید. آیا در هر شکل بین این سه عدد رابطه‌ای مشاهده می‌کنید؟ (ابتداء این شمارش را برای حجم‌های افلاطونی انجام دهید و بعد از نتیجه آن برای سایر شکل‌ها کمک بگیرید).

حجم‌های متقارن



مسئله ۳:

تعداد قطرهای اصلی مکعب را بشمارید. قطر اصلی یک هشت‌وجهی

منتظم را چگونه تعریف می‌کنید؟ یک هشت‌وجهی منتظم چند قطر اصلی دارد؟ تعداد همه قطرهای اصلی در حجم‌های افلاطونی را بشمارید و بگویید این عدد چه ارتباطی با تعداد رأس‌های این حجم‌ها دارد.

مسئله ۴:

فرض کنید مکعبی روی میز قرار داده شده است. چشمان دوست خود را ببندید و آن مکعب را بلند کنید و در هوا پخش کنید و به روش دیگری در همان محل قبلی قرار بدهید؛ به طوری که اگر چشمان دوست خود را باز کنید، نتواند تشخیص دهد که مکعب حرکتی کرده است. به چند روش می‌توان یک مکعب را درست روی خودش قرار داد، به طوری که رأس‌ها در محل قبلی رأس‌ها قرار بگیرند (اما نه لزوماً روی محل قبلی خودشان).

مسئله ۵:

تعداد قطرهای داخلی یک پنج‌ضلعی منتظم را بشمارید. در مورد تعداد قطرهای داخلی یک n -ضلعی منتظم چه می‌توانید بگویید؟ شبیه همین محاسبه را برای حجم‌های افلاطونی انجام دهید؟ در این حجم‌ها قطر را چه تعریف می‌کنید؟



پاسخ
تمرین‌های
پایه دهم



نکات تکمیلی
برای دبیران
پایه دهم



۱۵

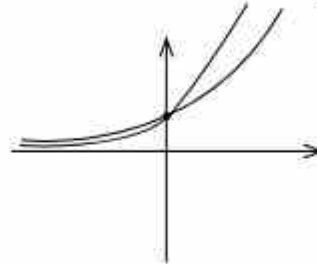
شماره ۱۳۹۹ | بهار ۱۴۰۱

کتاب یازدهم

فصل سوم: تابع‌های نمایی و لگاریتمی

مسئله ۱:

(الف) از دو نمودار زیر کدام نمودار $y = 2^x$ و کدام نمودار $y = 4^x$ است؟



(ب) آیا می‌توان این دو نمودار را با یک تغییر متغیر خطی مانند زیر از هم به دست آورد؟

$$X = ax + b$$

$$Y = cy + d$$

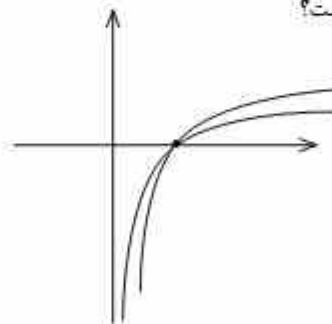
توجه کنید در این روش تغییر متغیر، متغیرهای x و y جداگانه تغییر می‌کنند و تغییر متغیر x ربطی به y ندارد و برعکس.

(ج) آیا هر دو تابع نمایی به شکل $y = a^x$ که در آن $a > 0$ را می‌توان با تغییر متغیر خطی به شکل بالا به هم تبدیل کرد؟

(د) آیا هر دو تابع نمایی به شکل $y = ka^x + 1$ که در آن $a > 0$ را می‌توان با تغییر متغیر خطی به شکل بالا، به هم تبدیل کرد؟

مسئله ۲:

(الف) از دو نمودار زیر کدام نمودار $y = \log_2 x$ و کدام نمودار $y = \log_4 x$ است؟



(ب) آیا می‌توان این دو نمودار را با یک تغییر متغیر خطی به شکل مسئله قبل به هم تبدیل کرد؟

(ج) آیا دو تابع لگاریتمی به شکل $y = \log_a x$ را می‌توان با تغییر متغیر خطی از نوع مورد نظر به هم تبدیل کرد؟

(د) آیا هر دو تابع لگاریتمی به شکل $y = k \log_a x + 1$ که در آن $a > 0$ را می‌توان با تغییر متغیر خطی از نوع مورد نظر به هم تبدیل کرد؟

مسئله ۳:

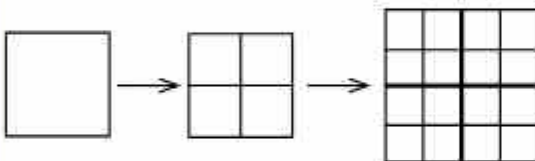
(الف) در مورد دامنه و برد تابع‌های نمایی دلخواه به شکل $y = a^x$ چه می‌توانید بگویید؟

(ب) در مورد دامنه و برد توابع لگاریتمی دلخواه به شکل $y = \log_a x$ چه می‌توانید بگویید؟

(ج) چرا تابع‌های نمایی و لگاریتمی جای دامنه و بردشان با هم عوض می‌شود؟ آیا این دلیل عمیقی دارد؟

مسئله ۴:

(الف) مربعی را در مرحله اول به چهار مربع مطابق شکل تقسیم می‌کنیم و در مرحله بعد، هر مربع کوچک‌تر را به همان صورت به چهار مربع کوچک‌تر تقسیم می‌کنیم. در مرحله n - ام چند مربع داریم؟ فرمولی ارائه بدهید.



حال این تابع گسسته را به نموداری پیوسته بدل کنید این کار را «مدل‌سازی رشد» می‌گویند.

(ب) حال برای طول ضلع کوچک‌ترین مربع‌ها یا مساحت آن‌ها فرمولی ارائه دهید و سپس آن را به نموداری پیوسته بدل کنید. این کار را «مدل‌سازی زوال» می‌گویند.

(ج) نشان دهید تابع نمایی که مدل رشد است از هر چندجمله‌ای $P(x)$ هر چقدر هم که درجه‌اش بزرگ‌تر باشد، از جایی به بعد سریع‌تر رشد می‌کند و بالاتر می‌رود.

(د) نشان دهید تابع نمایی که مدل زوال است از $\frac{1}{P(x)}$ برای هر چندجمله‌ای $P(x)$ هر چقدر هم که درجه‌اش بزرگ باشد، از جایی به بعد سریع‌تر به سمت صفر میل می‌کند و در عین مثبت بودن از آن کوچک‌تر می‌شود.

(ه) تابع a^x را برای $a > 1$ دارای رشد نمایی و تابع b^x را برای $0 < b < 1$ دارای زوال نمایی می‌نامیم. همچنین، تابع به شکل $P(x)$ را دارای رشد چندجمله‌ای و تابع به شکل $\frac{1}{P(x)}$ را دارای زوال

چندجمله‌ای می‌نامیم (به شرط آنکه $P(x)$ نزدیک بی‌نهایت مثبت باشد). نشان دهید اگر $P(x)$ و $Q(x)$ چندجمله‌ای‌هایی باشند که ضریب پیشرو مثبت دارند و در نتیجه نزدیک بی‌نهایت

کتاب دوازدهم

فصل سوم: حدهای نامتناهی، حد در بی نهایت

مسئله ۱:

الف) تابع‌های $y=x$ ، $y=x+2$ و $y=2x+1$ را در یک دستگاه مختصات بزرگ رسم کنید. قرار است در همین دستگاه مختصات چندین نمودار دیگر رسم شود. پس نظافت و خلوتی نمودار را با دقت رعایت نمایید.

حال در جدولی، نمودار هر سه این تابع‌ها را تعیین علامت کنید. یعنی بگویید در چه بازه‌هایی کدام یک از تابع‌های بالا مثبت یا منفی هستند. برای رسم نمودارها می‌توانید از جتوجبرا کمک بگیرید تا هر وقت لازم بود نمودار یا نمودارهایی را پنهان کنید.

ب) تابع $y = x(x+2)$ را در همان نمودار رسم کنید و به کمک اطلاعات قبلی تعیین علامت کنید.

ج) تابع‌های $y = \frac{x}{x+2}$ و $y = 1 + \frac{2}{x}$ را در همان نمودار رسم و تعیین علامت کنید. از مقایسه با حالت (ب) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ دربارهٔ مجانب‌های افقی و عمودی چه می‌توانید بگویید؟

د) تابع $y = \frac{x(x+2)}{2x+1}$ را در همان نمودار به کمک اطلاعاتی که دارید، تعیین علامت کنید و مجانب‌های آن را رسم کنید. توجه کنید که یک مجانب کج هم داریم:

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 2x & 2x + 1 \\ -x^2 - \frac{1}{2}x & \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \\ \hline \frac{3}{2}x & \\ -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2} & \\ \hline -\frac{3}{2} & \end{array}$$

بنابراین $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ مجانب کج نمودار خواهد بود.

هـ) حال نمودارهای $y = \frac{x(2x+1)}{x+2}$ و $y = \frac{(2x+1)(x+2)}{x}$

را نیز رسم و تعیین علامت کنید. چرا تعیین علامت این تابع‌ها به هم شبیه است؟ چرا این علامت‌ها درست مانند تعیین علامت حالت (د) در بالاست؟

مجانب‌های کج را هم محاسبه کنید. در مورد سایر مجانب‌ها چه می‌توانید بگویید؟ آیا مجانب افقی داریم؟

مثبت هستند، چنانچه: $\deg P(x) > \deg Q(x)$ آنگاه

رشد تابع $P(x)$ بیشتر از رشد تابع $Q(x)$ است و در نتیجه زوال $\frac{1}{P(x)}$ نیز بیشتر از زوال $\frac{1}{Q(x)}$ است. برای اینکه شهود بگیرید نمودارهای $y=x$ ، $y=x^2$ و $y=\frac{1}{x^2}$ را مقایسه کنید. همچنین نمودارهای $y=\frac{1}{x}$ ، $y=\frac{1}{x^2}$ و $y=\frac{1}{x^3}$ را مقایسه کنید.

مسئله ۵:

تابع به شکل $y = k \log_e x + b$ را دارای رشد لگاریتمی می‌گویند. نشان دهید تابع لگاریتم، از هر تابع چندجمله‌ای با ضریب پیشرو مثبت کندتر رشد می‌کند، و نتیجه بگیرید رشد چندجمله‌ای بین رشد لگاریتمی و رشد نمایی قرار می‌گیرد.

مسئله ۶:

به کمک نرم‌افزار جتوجبرا نمودار e^{x^2} و $e^{(e^x)}$ را با هم مقایسه کنید. سپس نمودار $\log x$ و $\log(\log x)$ را با هم مقایسه کنید. حال رشد تابع‌های زیر را در یک ترتیب خطی مرتب کنید:

$$\begin{array}{lll} y = 2^{x^2} & y = x+2 & y = x^2 - 5 \\ y = \log_2 x^2 & y = 2^{\log_2 x} & \\ y = \log(2 \log x) & y = 2^{x^2} & \end{array}$$

نمودار همهٔ این تابع‌ها را به کمک نرم‌افزار جتوجبرا رسم و مقایسه کنید.

مسئله ۷:

الف) پدیده‌های با رشد یا زوال نمایی در طبیعت فراوان هستند. مثال‌هایی از آن‌ها را بنویسید. برای پاسخ به این سؤال می‌توانید در اینترنت جست‌وجو کنید.

ب) پدیده‌هایی با رشد یا زوال چندجمله‌ای در ریاضیات به ابتکار خود بسازید و در هر مورد، درجهٔ رشد یا درجهٔ زوال را مشخص سازید.

ج) در مورد رشد تابع 2^x چه می‌توانید بگویید؟ آیا می‌توان رشد آن را با مدل‌های پیوسته مدل‌سازی کرد؟ برای پیدا کردن پاسخ از اینترنت کمک بگیرید.



پاسخ
تمرین‌های
پایهٔ یازدهم

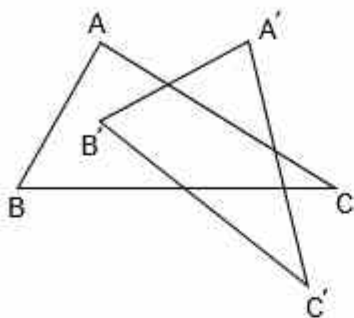


نکات تکمیلی
برای دبیران
پایهٔ یازدهم



۱۷

شمارهٔ ۱۳۹۹ بهار ۱۴۰۰



$$d(\triangle ABC, \triangle A'B'C') = d(A, A') + d(B, B') + d(C, C')$$

اما این روش تعریف فاصله، وابسته به انتخاب تناظر بین رأس‌هاست.

روشی مستقل از انتخاب تناظر پیدا کنید حال ببینید در شرط برابری مثلث‌ها اگر و فقط اگر فاصله صفر باشد صدق می‌کند؟ (تعریف بالا صدق نمی‌کند). حال بکوشید درستی نامساوی مثلث را برای تعریف خود بررسی کنید.

مسئله ۴:

فاصله دو دایره در صفحه را چنان تعریف کنید: که دو دایره بر هم منطبق باشند اگر و فقط اگر فاصله آن‌ها صفر باشد سپس برقراری نامساوی مثلث را تحقیق کنید.

و) تابع‌های $y = \frac{2x+1}{x(x+2)}$ ، $y = \frac{x+2}{x(2x+1)}$ را نیز رسم و تعیین علامت کنید و با $y = \frac{x}{(2x+1)(x+2)}$ مثال‌های (د) و (ه) مقایسه کنید.

آیا این نمودارها مجانب کج دارند؟ در مورد مجانب‌های افقی و عمودی چه می‌توانید بگویید؟

ز) حال تابع‌هایی را رسم می‌کنیم که مجانب‌های افقی داشته باشند بعد از رسم و تعیین علامت تابع‌های زیر، آن‌ها را با مثال‌های قبل مقایسه و مجانب‌های آن‌ها را تعیین کنید.

$$y = \frac{x^2}{(2x+1)(x+2)}$$

$$y = \frac{(x+2)^2}{x(2x+1)}$$

$$y = \frac{(2x+1)^2}{x(x+2)}$$

مسئله ۲:

الف) برای فاصله دو خط در صفحه، فرمولی از خودتان درست کنید که در آن دو خط بر هم منطبق باشند اگر و فقط اگر فاصله آن‌ها برابر صفر باشد.

ب) حال، همین کار را برای فاصله دو خط در فضای سه‌بعدی انجام دهید.

ج) آیا با این مفهوم‌های فاصله که تعریف کردید، می‌توانید مفهوم میل کردن یک خط به سمت خط دیگری را دقیق کنید؟

د) آیا مفهوم‌های فاصله‌ای که شما تعریف کرده‌اید، در نامساوی مثلث صدق می‌کنند؟ یعنی اگر m و n سه خط متمایز باشند و فاصله دو خط را با $d(.,.)$ نمایش دهیم، آیا $d(l, m) + d(m, n) \geq d(l, n)$ برقرار است؟

مسئله ۳:

فاصله دو مثلث در صفحه را چنان تعریف کنید که دو مثلث بر هم منطبق باشند اگر و فقط اگر فاصله آن‌ها صفر باشد. برای این کار شاید لازم باشد با تناظری بین رأس‌های دو مثلث شروع کنید مثلاً رأس‌های یکی را A, B, C و رأس‌های دیگری را A', B', C' بنامید و فاصله مثلث ABC و مثلث $A'B'C'$ را تعریف کنید.

نکات تکمیلی
دبیران پایه
دوازدهم



پاسخ
تمرین‌های
پایه دوازدهم



لطیفه الحساب قطب الدین لاهیجی
(قسمت هشتم)

کی می رسیدیم؟

جعفر زیدی

کارشناس ارشد تاریخ علم و دبیر ریاضی

لطیفه چهل و دوم: (مطابق نسخه اصل): در بیان آنکه ماشی^۱ روزی ثمن راه^۲

می رود و عشر راه^۳ برمی گردد پس به چند روز به منزل رسد؟
بیانش آن است که مخرجین کسریں درهم ضرب کنند و حاصل الضرب را بر تفاوت مابین الکسریں قسمت کنند خارج قسمت ایام رسیدن به منزل بود.
مثلاً کشتی در موضع از دریا به نهجی واقع بود گسه روزی ثمن راه قطع می کرد و روز دیگر عشر راه رجعت می نمود می خواهیم بدانیم که به چند روز به منزل می رسد.

مخرج ثمن را که هشت است در مخرج عشر که ده است ضرب کردیم هشتاد شد. حاصل الضرب بر تفاوت مابین ثمن و عشر که دو است قسمت کردیم چهل شد پس گوییم که ایام وصول متحرک به منزل [معهود] چهل بود.

لطیفه چهل و دوم به زبان ساده: یک رهرو یا رونده هر روز یک هشتم کل مسیر را به جلو حرکت می کرده و سپس یک دهم راه را برمی گشته است. او پس از چند روز به انتهای مسیر می رسد؟ روش محاسبه تعداد روزهای طی کل مسیر آن است که مخرج یک هشتم یعنی هشت را در مخرج یک دهم یعنی ده ضرب کنید. سپس عدد هشتاد را بر اختلاف عدد ده و هشت یعنی عدد دو، تقسیم کنید. عدد حاصل چهل خواهد شد که همان عدد روزهای رسیدن به مقصد است. قطب الدین لاهیجی به عنوان مثال ملموس برای این عمل کشتی گرفتار در موج را آورده است.

نسبت حرکت اول به کل مسیر $\frac{1}{m}$ نسبت حرکت دوم به کل مسیر $\frac{1}{n}$ $n > m$ تعداد روزهای طی کل مسیر $= \frac{n \times m}{n - m}$

ما را با نصد و چهل هزار جو و اربع مایل فتح اهدا و شست
نصف چهل و دوم در بیان آنکه ماشی روزی ثمن راه^۲
و عشر راه بر میگردد پس به چند روز به منزل رسد بیانش
مخرجین کسریں درهم ضرب کنند و حاصل الضرب را بر
تفاوت مابین کسریں قسمت کنند خارج قسمت ایام رسیدن
به منزل بود مثلاً کشتی در موضع از دریا به نهجی واقع بود
و روزی ثمن راه قطع می کرد و روز دیگر عشر راه رجعت
می نمود پس گوییم که ایام وصول متحرک به منزل [معهود]
در حقیقت عشر که ده است ضرب کردیم هشتاد شد حاصل الضرب
بر تفاوت مابین ثمن و عشر که دو است قسمت کردیم چهل شد
پس گوییم که ایام وصول متحرک به منزل [معهود] چهل بود
در بیان پیدا کردن مخرجی هر عددی هر کجی را که در دست
بر وجه سهولت بپیش است که عدد مطلوب را به دست
آورده از جانب بین عدد او تین را که بر مطلوب بگوید و آن
که خط غلطی کشیده باشد در زیر وی خطی علامت نموده

پی نوشت ها

۱. رهرو یا رونده
۲. یک هشتم راه
۳. یک دهم راه
۴. برگشت





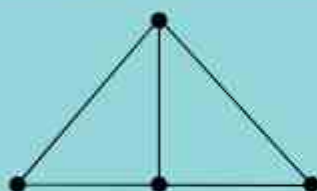
اجسام افلاطونی و کاربردهای آن‌ها توپ‌های فوتبال

محمدرضا اسفندیاری

دکترای ریاضی گرایش نظریه عددها، دبیر ریاضی
m.esfandiari@znu.ac.ir

مقدمه

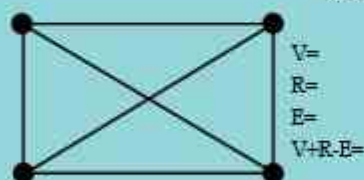
در نوشته قبل، ضمن معرفی و تعریف اجسام افلاطونی، به برخی از کاربردهای آن‌ها در ساخت توپ‌های رایج در فوتبال اشاره کردیم. در این نوشته، ابتدا فرمول مشخصه اویلر روی گراف‌ها را بیان می‌کنیم و با استفاده از استقرای ریاضی این فرمول مهم را اثبات می‌کنیم. در ادامه، به انواع شکل‌های رایج روی سطح توپ فوتبال اشاره و با استفاده از این فرمول، تعداد پنج‌ضلعی‌ها و شش‌ضلعی‌های روی توپ‌های کلاسیک و رایج فوتبال را مشخص می‌کنیم. همچنین، به ساختار هندسی سایر توپ‌های رایج امروزی در فوتبال اشاره می‌کنیم.



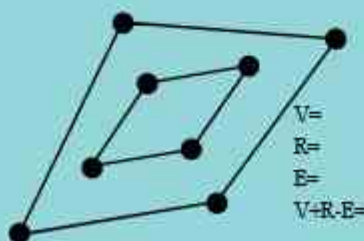
$$\begin{aligned} V &= 4 \\ R &= 2 \\ E &= 5 \\ V + R - E &= 4 + 2 - 5 = 1 \end{aligned}$$

توجه داریم در شماردن ناحیه‌ها، فضای بیرون گراف را نیز یک ناحیه در نظر می‌گیریم.

فرمول مشخصه اویلر برای چه گراف‌هایی برقرار است؟ آیا فرمول مشخصه اویلر برای این گراف برقرار است؟ یعنی آیا $V + R - E = 2$ است؟



$$\begin{aligned} V &= 4 \\ R &= 2 \\ E &= 6 \\ V + R - E &= 4 + 2 - 6 = 0 \end{aligned}$$



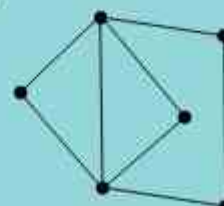
$$\begin{aligned} V &= 8 \\ R &= 2 \\ E &= 12 \\ V + R - E &= 8 + 2 - 12 = -2 \end{aligned}$$

فرمول مشخصه اویلر برای گراف‌های گفته‌شده برقرار نیست. گراف

فرمول مشخصه اویلر روی گراف‌ها و چندوجهی‌ها

اویلر در مطالعه گراف‌ها و در زمان حل مسئله و معمای مشهور پل‌های شهر کونیگسبرگ و ارائه دورهای اویلری، متوجه رابطه جالب بین تعداد رأس‌ها، پال‌ها و ناحیه‌ها در گراف‌ها شد. در گراف $G(V, E)$ که V تعداد رأس‌ها، E تعداد پال‌ها و R تعداد ناحیه‌هاست، اویلر متوجه این رابطه شد:

$$V + R - E = 2$$



$$\begin{aligned} V &= 4 \\ R &= 2 \\ E &= 6 \\ V + R - E &= 4 + 2 - 6 = 0 \end{aligned}$$

نام شکل	تعداد رأس V	تعداد لب E	تعداد وجه F	$V+F-E$
چهاروجهی (مربع)	۴	۶	۴	۲
شش‌وجهی (مکعب)	۸	۱۲	۶	۲
هش‌وجهی	۶	۱۲	۸	۲
نوازده‌وجهی	۱۲	۳۰	۲۰	۲
بیست‌وجهی	۲۰	۳۰	۱۲	۲

بنابراین، فرمول مشخصه اویلر برای اجسام افلاطونی برقرار است.

مسئله

نشان دهید تعداد پنج‌ضلعی‌های روی توپ فوتبال باید دقیقاً ۱۲ تا باشد؟

فرض کنیم تعداد پنج‌ضلعی‌های روی توپ برابر x و تعداد شش‌ضلعی‌ها برابر y باشد.

در فرمول مشخصه اویلر ما باید سه چیز را مشخص کنیم:

۱. **تعداد ناحیه‌ها:** تعداد ناحیه‌ها در واقع همان تعداد پنج‌ضلعی‌ها و شش‌ضلعی‌هاست؛ یعنی:

$$R=x+y$$

۲. **تعداد یال‌ها:** تعداد یال‌ها همان تعداد ضلع‌هاست؛ ولی توجه داشته باشیم، هر یال دو بار شمرده می‌شود یعنی هر ضلع پنج‌ضلعی یک ضلع شش‌ضلعی هم هست و برخی از ضلع‌های شش‌ضلعی‌ها مشترک هستند پس تعداد یال‌ها برابر است با:

$$E = \frac{5x+6y}{2}$$

۳. **تعداد رأس‌ها:** درجه هر رأس سه است. یعنی هر رأس به سه یال وصل است پس تعداد رأس‌ها برابر است با:

$$V = \frac{5x+6y}{3}$$

در واقع رابطه بین تعداد رأس‌ها و یال‌ها به این صورت است:

$$3V=2E$$

یعنی تعداد یال‌ها $\frac{2}{3}$ تعداد رأس‌هاست.

حال با قراردادن تعداد یال‌ها، رأس‌ها و ناحیه‌ها در فرمول اویلر، ببینیم چه اتفاقی می‌افتد. باید:

$$V+R-E=2$$

$$V+R-E = \frac{1}{3}(5x+6y) + x + y - \frac{1}{2}(5x+6y) = 2$$

برای ساده کردن عبارت گفته شده، طرفین معادله را در ۶ ضرب می‌کنیم. چون مخرج کسرها ۲ و ۳ است، پس:

$$6 \times \frac{1}{3}(5x+6y) + 6 \times (x+y) - 6 \times \frac{1}{2}(5x+6y) = 6 \times 2$$

$$10x + 12y + 6x + 6y - 15x - 18y = 12$$

در نتیجه، با ساده کردن عبارت جبری بالا داریم:

پایینی ناهم‌بند است و گراف بالایی گراف مسطحه نیست. بنابراین، فرمول مشخصه اویلر به صورتی که در ادامه می‌آید بیان می‌شود.

فرمول مشخصه اویلر

در گراف مسطحه هم‌بند $G(V, E)$ اگر R تعداد ناحیه‌ها باشد، همواره داریم:

$$V+R-E=2$$

اثبات با استفاده از استقرای ریاضی

ساده‌ترین حالت یعنی گراف با یک رأس را در نظر می‌گیریم (پایه استقرا).

$$V=1, E=0, R=1 \Rightarrow V+R-E=2$$

بنابراین، فرض استقرا برقرار است. حال برای اینکه یک یال دیگر اضافه کنیم، حتماً باید یک رأس دیگر اضافه کنیم. اگر تنها یک رأس اضافه کنیم و یالی اضافه نکنیم، گراف ناهم‌بند می‌شود و با فرض مسئله در تناقض است.



$$V=2, E=1, R=1 \Rightarrow V+R-E=2$$

در واقع اضافه کردن یک رأس و یک یال در فرمول اویلر اثر یکدیگر را خنثی می‌کند. حال اگر فقط یک یال اضافه کنیم، در این صورت تعداد رأس‌ها تغییر نمی‌کند، ولی تعداد ناحیه‌ها یکی زیاد می‌شود.



برای گراف قبل داریم:

$$V=2, E=2, R=2 \Rightarrow V+R-E=2$$

به همین ترتیب، برای هر گراف مسطحه هم‌بند، فرمول مشخصه اویلر درست است. در گام بعد، اگر یک یال اضافه کنیم، به تعداد ناحیه‌ها نیز یکی اضافه می‌شود و اثر یکدیگر را خنثی می‌کنند، و اگر یک رأس اضافه کنیم، حتماً باید یک یال اضافه کنیم تا گراف هم‌بند بماند. بنابراین، در این حالت نیز همواره فرمول اویلر برقرار است.

به این ترتیب، با استفاده از استقرای ریاضی، اثبات تمام می‌شود. فرمول مشخصه اویلر برای چندوجهی‌های محدب و به ویژه اجسام افلاطونی نیز برقرار است. در جدول بعد، برای هر یک از اجسام افلاطونی، تعداد رأس‌ها، یال‌ها و همچنین وجه‌ها (برای چندوجهی‌ها به جای ناحیه از وجه استفاده می‌کنیم و آن را با F نشان می‌دهیم) را مشخص می‌کنیم.

۲. با پوش (اسکن) سطح توپ فوتبال با چاپگر (پرینتر)، منحنی‌ها را برش می‌دهیم (در ادامه تصویرهای پوش و برش منحنی‌ها را مشاهده می‌کنید).



بنابراین، با ترکیب منحنی‌ها به این صورت می‌توان مکعب ایجاد کرد:



توپ‌های امروزی رایج در فوتبال از سه نوع حجم اقلاتونی، مکعب، دوازده‌وجهی و بیست‌وجهی ساخته شده‌اند.

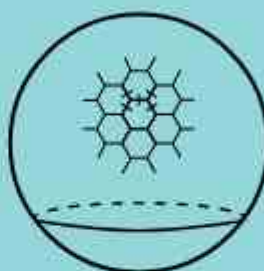


$$(10+6-15)x + (12+6-18)y = 12$$

بنابراین: $x=12$. یعنی تعداد پنج‌ضلعی‌ها ۱۲ تاست.

مسئله

آیا می‌توان تمام سطح توپ فوتبال را فقط با شش‌ضلعی ساخت؟ در صورت امکان با چند شش‌ضلعی؟ با برهان خلف، فرض کنیم بتوان تمام سطح توپ فوتبال را با شش‌ضلعی ساخت.



فرض کنیم تعداد شش‌ضلعی‌های روی سطح توپ x باشد. در این صورت، تعداد یال‌ها برابر است با $E = \frac{6x}{2} = 3x$ و تعداد رئس‌ها برابر است با $V = \frac{6x}{3} = 2x$. بنابراین، با توجه به فرمول مشخصه اویلر داریم:

$$V + R - E = 2x + x - 3x = 0$$

و این با فرمول مشخصه اویلر در تناقض است. بنابراین، سطح توپ فوتبال را نمی‌توان فقط با شش‌ضلعی ساخت.

منحنی‌های روی سطح توپ فوتبال و اجسام اقلاتونی

در جام جهانی ۲۰۱۴ برزیل، شرکتی برای اولین بار از توپ فوتبالی رونمایی کرد که از شش منحنی ساخته شده بود. در ادامه، با استفاده از تصویر نشان می‌دهیم، ترکیب این شش منحنی با هم، به صورت یک شش‌وجهی یعنی مکعب است.

در ادامه تصویرهایی از یک ویدئوی آموزشی را مشاهده می‌کنیم که به این موضوع پرداخته است.

۱. در تصویر زیر، منحنی‌های روی سطح توپ را مشاهده می‌کنید:



منابع

1. S. Tanna, Amazing Math: Introduction to Platonic Solids, CreateSpace, 2014.
2. Richard J. Trudeau, Introduction to Graph Theory, Dover Publications, 1994.
3. آزمایشگاه ریاضی برای کودکان و نوجوانان، ترجمه محمدرضا استعدیاری، انتشارات شبانگه، ۱۴۰۱.



قضیه دی گوا

مجید ابریشمی مقدم

استادیار ریاضی دانشگاه

m.abrishami.m@gmail.com

چکیده

در این مقاله قضیه‌ای در خصوص رابطه بین مساحت‌های وجوه یک چهاروجهی با یک زاویه قائمه متناسب به دی گوا بررسی می‌شود پس از بیان تاریخچه‌ای مختصر قضیه را معرفی می‌کنیم و سپس اثباتی برای آن ارائه می‌دهیم.

کلیدواژه‌ها: قضیه فیثاغورس، قضیه دی گوا، چهاروجهی

به‌طور خلاصه با توجه به شکل ۱ می‌توان قضیه را به صورت زیر بیان کرد:

$$(S_{ABC})^2 = (S_{ABO})^2 + (S_{BCO})^2 + (S_{CAO})^2$$

اثبات‌های متعددی برای این قضیه وجود دارد که در این مقاله می‌خواهیم یکی از ساده‌ترین آن‌ها را بیان کنیم.

اثبات قضیه دی گوا

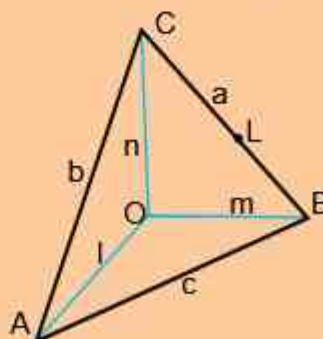
فرض کنید $OABC$ یک چهاروجهی با کنج قائمه O باشد، به طوری که: $l=OA$, $m=OB$ و $n=OC$ همچنین فرض کنید نقطه L پای عمود واصل از رأس A بر پایه خط BC باشد. آنگاه OL نیز بر BC عمود است، بنابراین روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه OBC داریم: $CL = \frac{OC^2}{CB}$ ، بنابراین:

$$\begin{aligned} (S_{ABC})^2 &= \frac{1}{4} BC^2 \cdot AL^2 \\ &= \frac{1}{4} (OB^2 + OC^2)(AC^2 - CL^2) \\ &= \frac{1}{4} (m^2 + n^2)(l^2 + n^2 - \frac{n^4}{m^2 + n^2}) \\ &= \frac{1}{4} (l^2 m^2 + m^2 n^2 + n^4) \\ &= (S_{ABO})^2 + (S_{BCO})^2 + (S_{CAO})^2 \end{aligned}$$

قضیه فیثاغورس یکی از قدیمی‌ترین، اساسی‌ترین و مهم‌ترین قضایای هندسه است که تاکنون اثبات‌های متعدد و تعمیم‌های متفاوتی از آن ارائه شده است. یکی از مهم‌ترین تعمیم‌های این قضیه حالت سه‌بعدی آن برای یک چهاروجهی است که به قضیه دی گوا مشهور است. این قضیه در سال ۱۷۸۳ میلادی توسط ژان پل دی گوا دی مالوز^۱ به آکادمی علوم پاریس ارائه شد.

قضیه دی گوا

اگر یک چهاروجهی دارای یک کنج قائمه باشد، آنگاه مربع مساحت وجه روبه‌روی گوشه قائم‌الزاویه برابر است با مجموع مجذور مساحت‌های سه وجه دیگر.



شکل ۱. چهاروجهی $OABC$ با کنج قائمه O

بی‌نوشته

1. Jean Paul de Guz de Malves

منابع

1. Jean-Marc Levy-Leblond A Symmetric 3D Proof of Heron's Formula, *Mathematical Intelligencer*, Vol. 43:2, pp. 37-39 (2021).
2. Lukarevski, M. A Straightforward Proof of De Guz's Theorem, *Mathematical Intelligencer*, Vol 44, pp. 301 (2022).



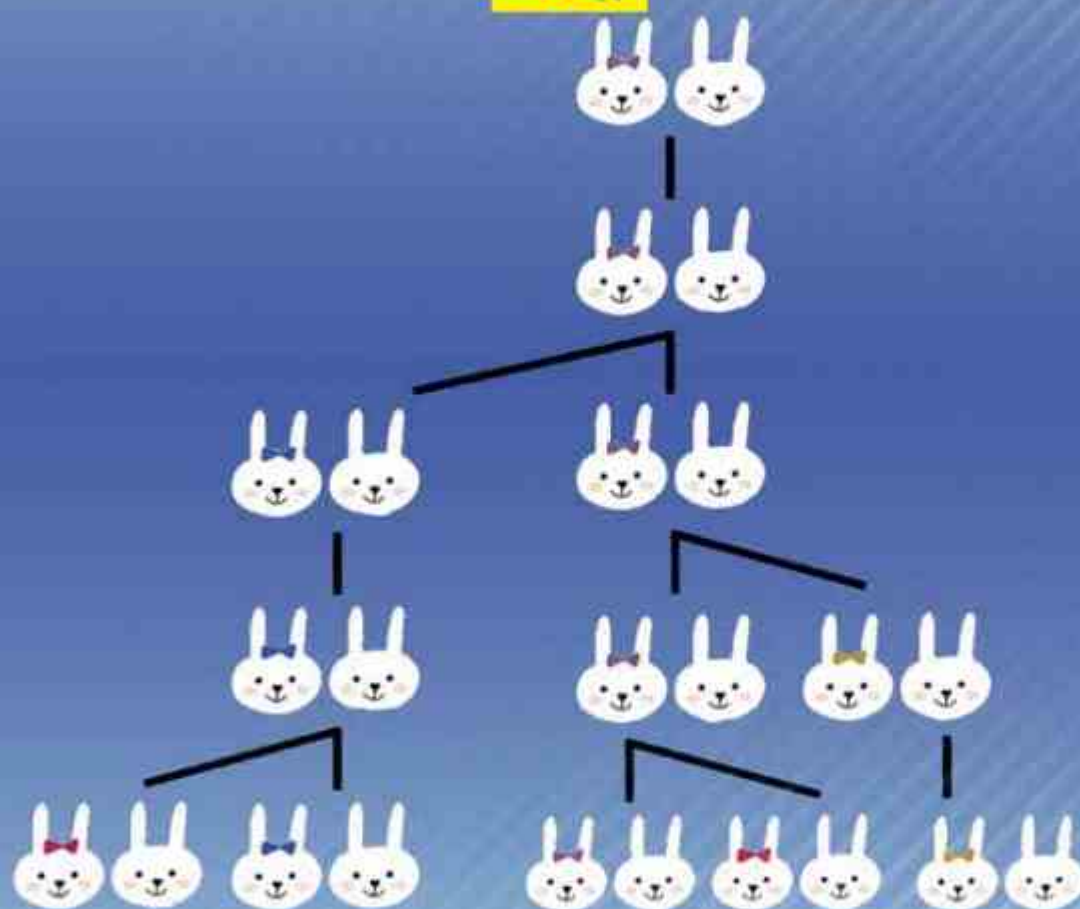
۲۳

شماره ۱۳۹۹ | بهار ۱۴۰۱

نکته ناب

مجموع جملات دنباله فیبوناچی

مجید حکمت



$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 3$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$$

سؤال من از شما این است: «مجموع ۱۰ جمله اول این دنباله را بیابید» (لطفاً قلم و کاغذ بردارید و محاسبه کنید؛ سپس به خواندن ادامه مطلب بپردازید).

مجموع جمله‌های دنباله فیبوناچی

درود بر دانش‌آموزان عزیز!
می‌دانیم که دنباله معروف فیبوناچی، یک دنباله بازگشتی است. بدین صورت که هر جمله دنباله از مجموع دو جمله قبل آن به دست می‌آید.



۲۴

شماره ۱۳۹ | بهار ۱۴۰۳

احتمالاً چون به $۱ =$ جمله اول دسترسی دارید، پاسخ شما این گونه بوده است:

$$۱ + ۱ + ۲ + ۳ + ۵ + ۸ + ۱۳ + ۲۱ + ۳۴ + ۵۵ = ۱۴۳$$

خب! اگر از شما مجموع $۱ =$ جمله اول خواسته شود، آن وقت هم $۱ =$ جمله اول را با هم جمع می‌زنید؟! حتماً جواب شما «خیر» است.

پس چه کار کنیم؟!

جالب است بدانید:

مجموع n جمله اول دنباله فیبوناچی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = a_{n+2} - 1$$

از آنجا که: $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ ، لذا این مجموع را این گونه هم می‌توان نوشت:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = a_n + a_{n+1} - 1$$

به زبان ساده: «مجموع n جمله اول دنباله فیبوناچی مساوی است با: مجموع جمله آخر و جمله بعد از آن منهای یک.» حالا سؤال چهار گزینه‌ای سراسری زیر را ببینید و پاسخ دهید. پس از آن اثبات این نکته ارائه خواهد شد.

سؤال آزمون سراسری سال ۱۳۹۶

در دنباله فیبوناچی، دو جمله آخر ۲۷۷ و ۶۱۰ هستند. مجموع جمله‌های این دنباله کدام است؟

(۱) ۱۵۷۶

(۲) ۱۵۹۶

(۳) ۱۶۱۸

(۴) ۱۶۲۸

$$S_{610} = 1 - 877 + 0.1 = 1 - 1^{610} + 1^{610} = 1$$

پس:

$$877 = 888 + 0.1 = 1^{610} + 1^{610} = 1 + 1^{610} \Rightarrow \begin{cases} 888 = 1^{610} \\ 0.1 = 1^{610} \end{cases}$$

پس: $888 + 0.1 = 888.1$



$۱ =$ جمله پانزدهم دنباله فیبوناچی است. حالا فکرش را بکنید، اگر می‌خواستید این ۱۵ جمله را جمع بزنید، چقدر زمان می‌برد و اکنون چه زمانی را ذخیره کرده‌اید! برویم سراغ اثبات این نکته برای دانش آموزان علاقه‌مند:

حکم: مجموع n جمله نخست دنباله فیبوناچی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_{n+2} - 1$$

اثبات: برای اثبات از «استقرای ریاضی» استفاده می‌شود:

استقرای ریاضی در سه گام انجام می‌شود:

گام اول: حکم برای $n = ۱$ برقرار است؛ زیرا:

$$\left. \begin{matrix} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow a_1 = a_{1+2} - 1 = a_3 - 1$$

گام دوم: فرض استقرا: فرض کنید حکم برای $n = k$ برقرار باشد:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k = a_{k+2} - 1 \quad (\text{فرض استقرا})$$

گام سوم: حکم استقرا: باید اثبات شود که:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{k+1} = a_{k+2} - 1 \quad (*)$$

برای اثبات حکم استقرا، می‌دانیم که از فرض استقرا داریم:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k = a_{k+2} - 1$$

با جای‌گذاری این رابطه در رابطه $(*)$ داریم:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k) + a_{k+1} = a_{k+2} - 1 + a_{k+1} = a_{k+2} - 1$$

و بنابراین حکم اثبات شد.



۲۵

شماره ۱۳۹۶ | بهار ۱۳۹۶

بیانات در این شیوه چالش کنیم!

قبلش برو یک فنجان چای برای خودت بریز

(قسمت هشتم)

محرم ایردموسی

عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی

مقدمه

چالش بیست و هفتم

< یک می‌توان به کمک اتحاد مربع مجموع، یعنی برابری $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ، مجموع عددهای طبیعی ۱ تا n را محاسبه کرد

$$\left. \begin{aligned} (1+1)^2 &= 1^2 + 2 \times 1 + 1 \\ (2+1)^2 &= 2^2 + 2 \times 2 + 1 \\ (3+1)^2 &= 3^2 + 2 \times 3 + 1 \\ &\vdots \\ (n+1)^2 &= n^2 + 2 \times n + 1 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow 2^2 + \dots + (n+1)^2 = (1^2 + \dots + n^2) + 2(1+2+\dots+n) + n$$

$$\Rightarrow (n+1)^2 = 1 + 2(1+\dots+n) + n$$

$$\Rightarrow 1+2+\dots+n = \frac{(n+1)^2 - 1 - n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

< دو با روش فوق، مجموع مربعات نخستین n عدد طبیعی را به دست آورید و نشان دهید.

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

< راهتمایی: از اتحاد مکعب مجموع استفاده کنید؛ یعنی برابری زیر:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

< سه ابتدا اتحادی برابر $(a+b)^3$ بنویسید، بعد به کمک آن فرمولی برای مجموع مکعبات نخستین n عدد طبیعی پیدا کنید.

< چهار با توجه به قسمت‌های قبل ثابت کنید:

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1+2+\dots+n)^2$$

اگر اهل مسئله‌های چالشی هستید، شما را به خواندن این مطلب دعوت می‌کنیم. در هر شماره با چند مجموعه از مسئله‌های مرتبط با هم، سعی می‌کنیم علاوه بر به چالش کشیدن ذهن پویای شما مطالبی را هم مرور کنیم یا مطالب جدیدی یاد بگیریم. کاغذ و قلم فراموش نشود، چون بدون آن لطفی ندارد. قبلش بروید و برای خودتان یک فنجان چای یا قهوه بریزید و هر چالش را گام به گام پیش ببرید.

چالش بیست و هشتم

مربعی به ضلع ۱ داریم. می‌خواهیم آن را به n مربع کوچک‌تر که لزوماً هم اندازه نیستند، افراز کنیم.

< یک برای $3 \leq n \leq 6$ بررسی کنید که این کار امکان‌پذیر است یا نه؟ اثبات در صورتی که امکان افراز وجود ندارد قعلاً ضروری نیست.

< دو برای $n=7$ روشی برابر افراز وجود دارد که به حالت $n=4$ مربوط می‌شود. آن را پیدا کنید.

< سه برای مقادیر زوج n یک روش کلی برای افراز وجود دارد. آن را پیدا کنید. شاید حالت‌های $n=6$ و $n=8$ کمک کنند.

< چهار با توجه به قسمت‌های قبل نشان دهید برای هر مقدار $n \leq 6$ ، این کار امکان‌پذیر است.

فراآموزشی

۲۶

شماره ۱۳۹ | بهار ۱۴۰۳

چالش بیست و هشتم

یک) حامد می‌خواهد بررسی کند که آیا می‌تواند عددهای طبیعی ۱ تا n را طوری جمع و تفریق کند که حاصل برابر ۱ باشد. برای مثال:

$$+1=1, \quad -1-2=1$$

برای $n=3$ حامد با نوشتن همه حالت‌های ممکن مشاهده کرد که این کار شدنی نیست:

$$\begin{array}{ll} +1+2+3=6 & -1-2+3=0 \\ +1+2-3=0 & -1-2-3=-6 \\ +1-2+3=2 & +1-2-3=-4 \\ -1+2+3=4 & -1-2-3=-6 \end{array}$$

دو) آیا حامد بدون نوشتن همه حالت‌ها می‌توانست استدلال کند که حاصل جمع و تفریق ۱، ۲ و ۳ هیچ‌وقت ۱ نیست؟

سه) برای $n=4$ بدون نوشتن همه حالت‌ها، ثابت کنید حاصل جمع و تفریق هیچ‌وقت برابر ۱ نیست.

چهار) با بررسی مسئله در حالت‌های $8 \leq n \leq 5$ ، سعی کنید مشخص کنید که در حالت کلی برای چه مقادیری از n حامد می‌تواند به عدد ۱ برسد.

پنج) آن جاهایی که حامد پاسخ منفی گرفته است ($n=2, 4, \dots$) و تلاش می‌کند حاصل جمع یا تفریق برابر ۲ باشد. مثلاً:

$$+1-2+3=2 \\ +1+2+3-4=2$$

آیا حامد می‌تواند اثبات کند برای همه مقادیری که پاسخ سؤال اول منفی بود، اکنون پاسخ سؤال دوم مثبت است؟

شش) با توجه به قسمت‌های قبل می‌توان قضیه زیر را نتیجه گرفت:
«می‌توان عددهای ۱ تا n را با علامت مثبت و منفی، علامت‌گذاری کرد، به طوری که مجموعشان برابر ۱ یا ۲ باشد»

چالش بیست و نهم

یک) می‌دانیم که مجموعه‌های $\{a, b\}$ و $\{b, a\}$ برابر هستند. اما زوج مرتب‌های $\{a, b\}$ و $\{b, a\}$ برابر نیستند می‌توان به کمک مجموعه نیز تمایز و ترتیب ایجاد کرد. برای مثال مجموعه $\{a, \{a, b\}\}$ با مجموعه $\{b, \{a, b\}\}$ یکسان نیست.

دو) با جابه‌جایی ۱، ۲ و ۳ در مجموعه $\{1, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$ چند مجموعه متفاوت می‌توان ایجاد کرد؟

سه) با جابه‌جایی a, b و c در مجموعه $\{a, \{a, b\}, \{a, c\}\}$ چند مجموعه متفاوت می‌توان ایجاد کرد؟

چهار) با جابه‌جایی عددهای ۱ تا ۶ در مجموعه $A = \{1, \{2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}$ چند مجموعه متفاوت می‌توان ساخت؟

چالش سی‌ام

یک) سه بازه باز I_1, I_2 و I_3 از عددهای حقیقی مفروض‌اند، به طوری که هر دو تایی از آن‌ها با هم اشتراک دارند. ثابت کنید عددی وجود دارد که عضو هر سه بازه است؛ یعنی:

$$I_1 \cap I_2 \cap I_3 \neq \emptyset$$

راهنمایی: از روش برهان خلف استفاده کنید و فرض کنید $I_1 \cap I_2 \cap I_3$ هیچ عضو مشترکی ندارد در نظر داشته باشید که $I_1 \cap I_2$ یک بازه باز خواهد بود.

دو) آیا می‌توان n بازه باز مانند $I_1, I_2, \dots, I_n$ ، مثال زد به طوری که I_i با I_{i+1} اشتراک داشته باشد (برای هر $1 \leq i < n$)؟

سه) اگر در قسمت قبل داشته باشیم $I_1 \cap I_2 \cap I_3 \neq \emptyset$ آنگاه نشان دهید همه بازه‌ها حداقل یک نقطه مشترک دارند.

چهار) آیا می‌توان چهار بازه باز مانند I_1 تا I_4 پیدا کرد به طوری که مجموعه‌های $I_1 \cap I_2, I_1 \cap I_3, I_1 \cap I_4, I_2 \cap I_3, I_2 \cap I_4, I_3 \cap I_4$ ناتمامی باشند و مجموعه‌های $I_1 \cap I_2, I_1 \cap I_3, I_2 \cap I_4$ تهی باشند؟

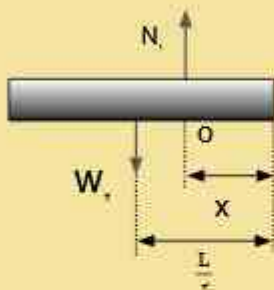


۲۷

آجرها در تعادل

رحیم خیرالله زاده
دبیر ریاضی

در این حالت «همودار جسم آزاد» آجر بالایی به صورت زیر خواهد بود:

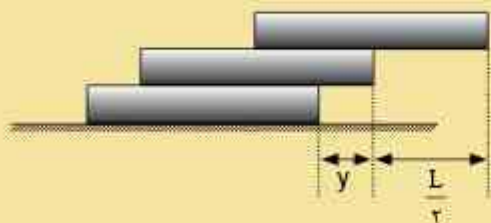


مجموع گشتاورها حول نقطه O باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد تا آجر بالایی نیفتد:

$$\sum M_O = W_1 \times \left(\frac{L}{2} - x\right) + N_1 \times x \geq 0$$

و در نتیجه: $W_1 \times \left(\frac{L}{2} - x\right) \geq 0$ که از آنجا نتیجه می‌شود: $\frac{L}{2} - x \geq 0$ و یا $x \leq \frac{L}{2}$ یعنی حداکثر بیرون آمدگی لبه آجر

بالایی نسبت به آجر پایینی برابر $\frac{L}{2}$ است و: $x_{\max} = \frac{L}{2}$ بنابراین بیشترین مقدار جلوآمدگی آجر بالایی نصف طول هر آجر، یعنی $\frac{L}{2}$ است. حال مسئله را برای سه آجر در نظر می‌گیریم:



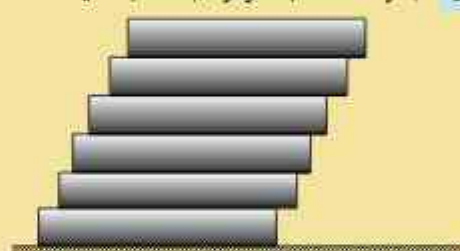
در این حالت بالاترین آجر باید طبق حالت قبلی طوری قرار گیرد که بیشترین جلوآمدگی را از لبه آجر وسطی داشته باشد و این مقدار همان $\frac{L}{2}$ است. در این حالت باز مثل حالت قبل، بالاترین

آجر در حال تعادل خواهد بود و پایین‌ترین آجر نیز همواره در حال تعادل است. بنابراین کافی است آجر وسط در حال تعادل باشد.

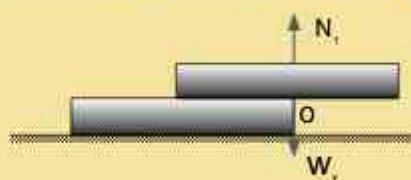
«سلام بچه‌ها! امیدوارم حالتون خوب و وجودتان پر از سلامتی و انرژی باشد. مسئله زیر یک مسئله بسیار جالب کاربردی و ترکیبی از فیزیک و ریاضیات است، البته برای دانش‌آموزان سال دوازدهم شاید مناسب‌تر باشد. صورت مسئله این‌طور است: مطابق شکل چند آجر مشابه و یکسان به طول L طوری روی هم قرار گرفته‌اند که قسمتی از آجر بالایی از لبه هر آجر پایینی خود جلوتر است. حالت تعادلی که در آن آجرها حداکثر جلو رفتگی را می‌توانند داشته باشند به وجود می‌آوریم.

«اولاً: فاصله لبه آجرها را از هم بیابید»

«ثانیاً: مجموعه فاصله لبه‌ها را از هم محاسبه کنید.»



«حل: ابتدا برای دو آجر روی هم مسئله را در نظر می‌گیریم:



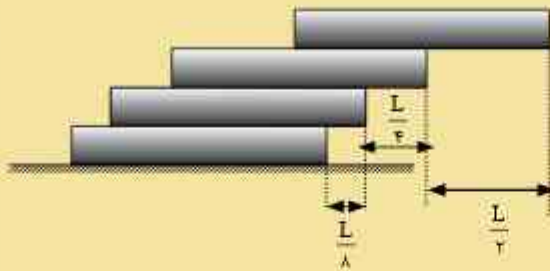
هر دو آجر زیری و بالایی باید در حال تعادل باشند. برای تعادل باید برابری نیروها و همچنین گشتاور نیروهای وارد بر جسم حول هر نقطه دلخواه صفر باشد. برای تعادل آجر بالایی باید داشته باشیم: $N_1 = W_1$ در واقع به آجر بالایی دو نیرو وارد می‌شود: یکی نیروی وزن W_1 که وسط آجر اثر می‌کند و دیگری نیروی عکس‌العمل قائم سطح که در نقطه O باید اثر کند تا گشتاور نیروها صفر شود. البته اگر فاصله لبه آجر بالایی از تکیه‌گاه کمتر از نصف طول آجر باشد، باز وضعیت حاصل از دو آجر در حال تعادل خواهد بود، یعنی شکل به صورت زیر است:



۲۸

شماره ۱۳۹ | بهار ۱۴۰۳

و اگر همین استدلال را برای چهار آجر به کار ببریم، خواهیم داشت:



در واقع دنباله حاصل از فاصله لبه هر آجر بالایی از آجر زیرین خود و با شروع از بالاترین آجر به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{L}{2}, \frac{L}{4}, \frac{L}{8}, \frac{L}{16}, \dots$$

حل: ثانیا:

$$S = \frac{L}{2} + \frac{L}{4} + \frac{L}{8} + \frac{L}{16} + \dots$$

طرفین تساوی بالا را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$2S = L + \frac{L}{2} + \frac{L}{4} + \frac{L}{8} + \dots$$

از تفاضل دو تساوی بالا و با توجه به بی‌شمار بودن تعداد جمله‌های دنباله خواهیم داشت:

$$S_{\infty} = L \quad \text{و} \quad 2S - S = L$$

البته از دستور مجموع جمله‌های یک دنباله هندسی با قدر نسبت کوچک‌تر از ۱ (در اینجا $\frac{1}{2}$) هم می‌توانستیم استفاده کنیم:

$$S = S_{\infty} = \frac{a_1}{1-q}$$

در اینجا با توجه به:

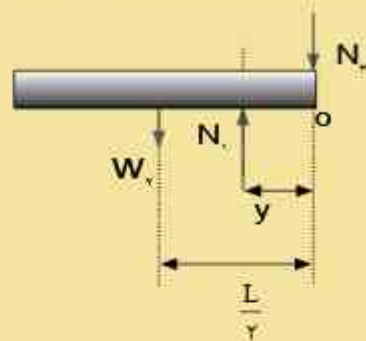
$$S = \frac{L}{2} + \frac{L}{4} + \frac{L}{8} + \frac{L}{16} + \dots$$

جمله اول یعنی $a_1 = \frac{L}{2}$ و قدر نسبت تصاعد (دنباله) هندسی:

$$q = \frac{1}{2} \quad \text{و بنابراین:} \quad S = S_{\infty} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{L}{2}}{1-\frac{1}{2}} = L$$

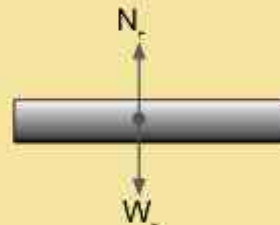
$$S_{\infty} = L$$

نمودار جسم آزاد آجر وسطی در این حالت به صورت زیر خواهد بود:



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -W_v - N_v + N_1 = 0 \Rightarrow N_1 = W_v + N_v \quad (1)$$

از طرف دیگر اگر نمودار جسم آزاد بالاترین آجر را رسم کنیم خواهیم داشت:



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -W_v + N_v = 0 \Rightarrow N_v = W_v \quad (2)$$

از (۱) و (۲) و با توجه به اینکه آجرها یکسان هستند و داریم:

$$W_1 = W_v = W_v = \dots = W$$

$$N_1 = W_v + W_v = 2W \quad (4)$$

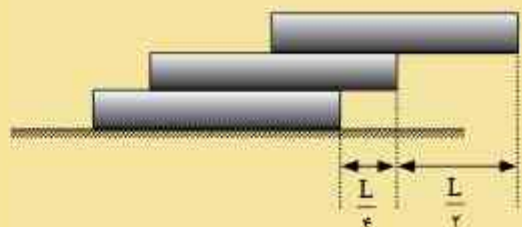
حال اگر گشتاور نیروها را حول نقطه O که N_v از آن می‌گذرد حساب کنیم، باید صفر شود (شرط دوم تعادل). بنابراین می‌توان نوشت:

$$\sum M_O = W_v \times \left(\frac{L}{2}\right) - N_1 \times y = 0 \quad (5)$$

که چون: $N_1 = 2W$ و $W_v = W$ از رابطه (۵) نتیجه می‌شود:

$$W \times \left(\frac{L}{2}\right) - 2W \times y = 0 \Rightarrow 2y = \frac{L}{2} \Rightarrow y = \frac{L}{4}$$

یعنی شکل سه آجر روی هم در این حالت به صورت زیر خواهد بود:



بی‌نوشت

1 Free body diagram



۲۹

شماره ۱۳۹۱ | چهارم خرداد ۱۳۹۱

چند جمله‌ای‌ها و اعداد معتکله

چند جمله‌ای‌های چندمتغیره

آرش دستگار

ضرایب چندجمله‌ای‌های بر حسب x مرتب کرد. به مثال زیر توجه کنید:

$$\begin{aligned} P(x, y) &= 1 + x + y + rx'y + rxy' + \Delta x' + x'y \in A[x, y] \\ &= (1+y) + (1+ry')x + (ry)x' + (\Delta)x' + (y)x' \in A[y][x] \\ &= (1+x + \Delta x') + (1+rx' + x')y + (rx)y' \in A[x][y] \end{aligned}$$

نمایش اول بر حسب درجه تک جمله‌ای‌ها نسبت به هر دو متغیر x و y مرتب شده است و نمایش دوم به عنوان یک چندجمله‌ای بر حسب x با ضرایب چندجمله‌ای‌های بر حسب y و نمایش سوم به صورت یک چندجمله‌ای بر حسب y با ضرایب چندجمله‌ای‌های بر حسب x مرتب شده‌اند. به همین روش می‌توان حلقه $A[x_1][x_2] \dots [x_n]$ را ساخت و چون ساختن این حلقه به ترتیب x_1 ‌ها وابسته نیست، آن را $A[x_1, \dots, x_n]$ نامید. اعضای این حلقه، چندجمله‌ای‌های بر حسب n متغیر $x_1, \dots, x_n$ خواهند بود. اینکه چندجمله‌ای بر حسب n متغیر، چگونه خواص خوب یک دستگاه عددی را دارا هستند، نمونه‌ای از توانایی و توانگری روش‌های جبر نوین است.

همان‌طور که می‌توان از $A[x]$ با اضافه کردن تابع‌های گویا که چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای هستند، میدان $A(x)$ را ساخت. به همین روش حلقه $A[x_1, \dots, x_n]$ با اضافه کردن تابع‌های گویا که صورت و مخرج آن در $A[x_1, \dots, x_n]$ هستند، میدان $A(x_1, \dots, x_n)$ را می‌سازد. بنابراین تا اینجا کار، علاوه بر میدان‌های عددی Q, R, C و میدان‌های تابعی $Q(x), R(x), C(x)$ ، با میدان‌های تابعی چندمتغیره $Q(x_1, \dots, x_n), R(x_1, \dots, x_n), C(x_1, \dots, x_n)$ نیز آشنا شده‌ایم.

البته در این مقاله تنها با حساب چندجمله‌ای‌های چندمتغیره سروکار داریم، تا به تئیم چه خصوصیات حاسی از چندجمله‌ای‌های یک متغیره به چندجمله‌ای‌های چندمتغیره تعمیم پیدا می‌کنند. مثلاً به هندسه صفرهای یک چندجمله‌ای چندمتغیره که موضوع شاخه هندسه جبری است، نخواهیم پرداخت و یا ساختارهای میدان‌هایی که در بالا معرفی کردیم، مورد مطالعه ما نیستند. تنها به ذکر این نکته کفایت می‌کنیم که نشستن یک حلقه

در قسمت اول از مجموعه مقاله‌های «چندجمله‌ای‌ها و اعدادهای مختلط» با مفهوم عدد مختلط آشنا شدیم و آن را برای فهم بهتر چندجمله‌ای‌های درجه دوم به کار بردیم. در قسمت دوم چندجمله‌ای‌های یک متغیره از درجه دلخواه را مطالعه کردیم. در اینجا به توسعه مفهوم‌های چندجمله‌ای‌های یک متغیره به چندجمله‌ای‌های چندمتغیره خواهیم پرداخت.

مقدمه در باب چندجمله‌ای‌های چندمتغیره

در هریک از مجموعه‌های $Q, Z[i], Z, Q[i], R, C$ اعمال جمع و ضرب تعریف می‌شوند که در اصول موضوعه خاصی صدق می‌کنند. مجموعه چندجمله‌ای‌ها با ضرایب در $Q, Z[i], Z, Q[i], R, C$ بر حسب متغیر x را به ترتیب به صورت $Q[x], Z[i][x], Z[x], Q[i][x], R[x]$ نمایش می‌دهند. با تعریف جمع و ضرب چندجمله‌ای‌ها، $Q[x], Z[i][x], Z[x], Q[i][x], R[x]$ رفتار مشابه Q, Z, R, C از خود به نمایش می‌گذارند. یعنی جمع و ضرب چندجمله‌ای‌ها در همان اصول موضوعه صدق می‌کند و این مجموعه‌ها مانند یک ساختار عددی رفتار می‌کنند.

چنین ساختاری را یک «حلقه» می‌نامند. برای هر ساختار عددی A یا همان حلقه A می‌توان چندجمله‌ای‌هایی با ضرایب در یک متغیر y را در نظر گرفت و آن را با $A[y]$ نمایش می‌دهیم. توجه کنید که A می‌تواند نمایش دهنده Q, Z, R, C یا $Q(x), R(x), C(x)$ باشد. حالتی که A خودش یک حلقه چندجمله‌ای‌ها باشد را در نظر بگیرید. اعضای $A[y]$ به شکل $P_0(x) + P_1(x)y + \dots + P_m(x)y^m$ هستند که در آن $P_0(x), P_1(x), \dots, P_m(x)$ چندجمله‌ای‌هایی با ضرایب در $Q, Z[i], Z, Q[i], R, C$ هستند.

به جای $Z[x][y]$ یا در حالت کلی $A[x][y]$ می‌توان نوشت: $Z[x, y]$ یا $A[x, y]$. چون به سادگی می‌توان دید که ترتیب x و y اهمیت ندارد، یعنی $A[x][y] = A[y][x]$. چون چندجمله‌ای‌های دو متغیره را می‌توان بر حسب توان‌های x با ضرایب چندجمله‌ای‌های بر حسب y یا بر حسب توان‌های y با

در یک میدان بزرگتر، مختص حلقه‌های چندجمله‌ای نیست و پدیده‌ای کلی‌تر است. اگر در حلقه‌ای، صفر شدن ab نتیجه بدهد a یا b حتماً صفر هستند. چنین حلقه‌ای در یک میدان بزرگتر می‌نشیند.

۱. در باب تساوی و اتحاد چندجمله‌ای‌ها

یك نکته مهم درباره چندجمله‌ای‌ها این است که ما آن‌ها را به‌عنوان تابع می‌شناسیم. مثلاً چندجمله‌ای $P(x_1, \dots, x_n)$ به جز اینکه ضرایب در $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشند، می‌تواند به تناسب به‌عنوان تابعی روی $\mathbb{Z}^n, \mathbb{Q}^n, \mathbb{R}^n$ یا $\mathbb{C}^n$ در نظر گرفته شود. با توجه به اینکه $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ توابعی چندجمله‌ای روی $\mathbb{Z}^n$ یا $\mathbb{Q}^n$ می‌توانند به‌عنوان توابعی روی $\mathbb{Q}^n$ یا $\mathbb{R}^n$ یا $\mathbb{C}^n$ نیز در نظر گرفته شوند. این نکته به‌طور مشابه برای هر یک از ضرایب بزرگتر $\mathbb{Q}$ یا $\mathbb{R}$ هم برقرار است.

بنابراین تا اینجا کار دو مفهوم مختلف از تساوی چندجمله‌ای‌ها داریم. دو چندجمله‌ای n -متغیره P و Q با ضرایب در حلقه A را می‌توانیم برابر بگیریم، اگر به‌عنوان تابع‌های روی A^n برابر باشند، یا اینکه ضرایب تک‌جمله‌ای‌های متناظر آنان برابر باشد. همین سؤال را می‌توانستیم در مورد چندجمله‌ای‌های یک‌متغیره بپرسیم. از اینکه هر چندجمله‌ای یک‌متغیره درجه k حداکثر k ریشه دارد، نتیجه می‌شود که دو مفهوم تساوی بالا بر هم منطبق هستند. چون در مثال‌هایی که مورد مطالعه ما هستند، حلقه A بی‌نهایت عضو دارد و اگر دو چندجمله‌ای روی بی‌نهایت مقدار از A مساوی باشند، تفاضل آن‌ها بی‌نهایت صفر دارد و ناچار است برابر چندجمله‌ای ثابت صفر باشد. البته در اینجا ظرایفی هم هست. مثلاً اگر $P(x)$ و $Q(x)$ با ضرایب در $\mathbb{Z}$ داده شده باشند، آنگاه اگر $P(x) - Q(x)$ روی همه عددهای صحیح برابر صفر باشد، بی‌نهایت ریشه دارد و برابر چندجمله‌ای صفر می‌شود.

اما مطالعه ریشه‌های $P(x)$ و $Q(x)$ ممکن است به مطالعه عددهای حقیقی در $\mathbb{R}$ یا عددهای مختلط در $\mathbb{C}$ منجر شود. حال که ادعای یکی بودن دو تعریف تساوی چندجمله‌ای‌ها برای چندجمله‌ای‌های یک‌متغیره نشان داده شد، کافی است توجه کنید که هر چندجمله‌ای $n+1$ -متغیره $P(x_1, \dots, x_{n+1})$ را می‌توان بر حسب توان‌های x_{n+1} مرتب کرد و چنین نوشت:

$$P(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = P_0(x_1, \dots, x_n) + P_1(x_1, \dots, x_n)x_{n+1} + \dots + P_k(x_1, \dots, x_n)x_{n+1}^k$$

بنابراین با توجه به حکمی که برای یک متغیر x_{n+1} ثابت کردیم، اگر $c_1, \dots, c_n, d$ عددهایی دلخواه در A باشند و d نیز عضوی دلخواه در A باشد و رابطه:

$$P(c_1, \dots, c_n, d) = P_0(c_1, \dots, c_n) + P_1(c_1, \dots, c_n)d + \dots + P_k(c_1, \dots, c_n)d^k = 0$$

به ازای مقادیر ثابت $c_1, \dots, c_n$ و مقادیر دلخواه d برقرار باشد، ضرایب $P_0(c_1, \dots, c_n), \dots, P_k(c_1, \dots, c_n)$ برابر صفر خواهند بود. اما این حرف را می‌توان برای هر انتخابی از متغیرهای $c_1, \dots, c_n$ تکرار کرد. پس $P(x_1, \dots, x_n) = 0$ به‌عنوان تابع برقرار است. همین نکته به ما اجازه می‌دهد به روش استقرا ثابت کنیم اگر یکی بودن دو مفهوم تساوی چندجمله‌ای‌ها در $A[x_1, \dots, x_n]$ برقرار باشد، در $A[x_1, \dots, x_{n+1}]$ هم برقرار خواهد بود. و این البته نکته مهمی است. چون نشان می‌دهد تساوی دو تابع چندجمله‌ای که بی‌نهایت مقدار را می‌توانند بپذیرند، در تساوی ضرایب تک‌جمله‌ای‌ها نشان که متناهی عدد هستند، خلاصه می‌شود، که نتیجه کارآمد و ارزشمندی است.

بحثی که در اینجا آمد یک بحث مبانی است و به‌طور روزمره که با چندجمله‌ای‌ها سروکار داریم، به مسائل مبانی نمی‌اندیشیم. اما مسائل مبانی مهم هستند، چون باید مطمئن باشیم که همه جانب‌های کار را در نظریه (تئوری) پژوهی‌مان مدنظر قرار داده‌ایم. به‌خصوص وقتی یک نظریه کار نمی‌کند و شما می‌خواهید کمی آن را تغییر دهید، به مبانی برمی‌گردید تا ببینید مشکل نظریه شما در چه چیزی بوده است. مثلاً وقتی با چندجمله‌ای‌هایی که ضرایب آن‌ها در عددهای صحیح به پیمانه p هستند که p یک عدد اول است و آن را به صورت تابعی روی همین دسته‌های هم‌ارزی که یک میدان F_p را تشکیل می‌دهند که اعضای آن دسته‌های هم‌ارزی $[0], [1], \dots, [p-1]$ هستند، در نظر می‌گیریم:

$$P(x_1, \dots, x_n) : \underbrace{F_p \times \dots \times F_p}_n \rightarrow F_p$$

آیا در این حالت هم دو تعریف مورد بحث معادل‌اند؟ هم‌نشینی $x^p \equiv x(p)$ به ما دقیقاً چه می‌گوید؟

۲. چندجمله‌ای‌های همگن

فرض کنید $P(x_1, \dots, x_n) \in A[x_1, \dots, x_n]$ یک چندجمله‌ای است. اگر همه تک‌جمله‌ای‌های آن نسبت به همه $x_1, \dots, x_n$ هم‌درجه باشند، می‌گوییم P همگن است. مصطلح است که اگر درجه تک‌جمله‌ای‌ها k باشد، P را یک فرم درجه k هم می‌خوانند. هر چندجمله‌ای دلخواه P را که لزوماً همگن نباشد، به یک و تنها یک طریق می‌توان به صورت مجموع چندجمله‌ای‌های همگن نوشت:

$$P = H_0 + H_1 + \dots + H_{r-1} + H_r$$

که در آن H_i برای $0 \leq i \leq r$ همگن از درجه i است. برای مثال در:

$$P(x, y) = 1 + x + y + 2x^2y + 3xy^2 + 5x^3 + x^2y \\ = 1 + (x + y) + (2x^2y + 3xy^2 + 5x^3) + x^2y$$



داریم:

$$\begin{cases} H_0(x, y) = 1 \\ H_1(x, y) = x + y \\ H_2(x, y) = 0 \\ H_3(x, y) = 2xy + 2xy^2 + \Delta x^2 \\ H_4(x, y) = 0 \\ H_5(x, y) = x^2 y \end{cases}$$

حال به این نکته توجه کنید که یک تک جمله‌ای از P به شکل کلی $a_n x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$ است اگر به جای x_i بگذاریم tx_i تک جمله‌ای بالا در t^k ضرب می‌شود. بنابراین اگر P همگن از درجه k باشد، خواهیم داشت:

$$P(tx_1, \dots, tx_n) = t^k P(x_1, \dots, x_n) \quad (*)$$

جالب اینجاست که برقراری این شرط معادل همگن بودن P است، زیرا:

$$\begin{aligned} P(tx_1, \dots, tx_n) &= H_0(tx_1, \dots, tx_n) + \dots + H_r(tx_1, \dots, tx_n) \\ &= H_0(x_1, \dots, x_n) + tH_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\quad + \dots + t^r H_r(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

اما شرط $(*)$ نتیجه می‌دهد:

$$t^k (H_0 + \dots + H_r) = H_0 + tH_1 + t^2 H_2 + \dots + t^r H_r$$

در اینجا H_i چندجمله‌ای‌های n -متغیره برحسب $x_1, \dots, x_n$ هستند. بنا بر بحثی که در مبانی داشتیم نتیجه می‌شود چندجمله‌ای‌های دو طرف ضرایب برابر دارند؛ یعنی:

$$\begin{cases} H_k \neq 0 \\ H_i = 0 \quad i \neq k \end{cases}$$

پس: $P = H_k$ و لذا همگی از مرتبه k است. در اینجا اهمیت مباحثی که در باب مبانی داشتیم روشن می‌شود. حال به چند نتیجه جالب توجه کنید. اگر مشتق چندجمله‌ای P نسبت به متغیر x را P_x بنامیم که این‌طور تعریف می‌شود: اگر داشته باشیم:

$$\begin{aligned} P(x_1, \dots, x_n)(x) &= a_k(x_1, \dots, x_n) x^k \\ &\quad + \dots + a_1(x_1, \dots, x_n)x + a_0(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

که در آن $a_i \in A[x_1, \dots, x_n]$ ، آنگاه تعریف می‌کنیم:

$$P_x(x_1, \dots, x_n)(x) = k a_k x^{k-1} + (k-1) a_{k-1} x^{k-2} + \dots + a_1$$

این همان مفهوم مشتقی است که برای چندجمله‌ای‌های یک‌متغیره در قسمت اول این مجموعه مقاله‌ها تعریف کرده بودیم. در اینجا آن را برای ضرایب چندجمله‌ای نیز به کار می‌بریم و در

این حالت آن را «مشتق جزئی» نسبت به متغیر x می‌نامیم. حال برای چندجمله‌ای دومتغیره دلخواه ثابت کنید $P_{xy} = P_{yx}$. یعنی اگر اول نسبت به x مشتق جزئی بگیریم و بعد نسبت به y ، این کار وابسته به ترتیب x و y نیست! **اولر**، ریاضی‌دان سوئیسی که در قرن هفدهم می‌زیست، ثابت کرد اگر $P(x, y)$ چندجمله‌ای همگن از درجه k باشد، اتحادهای زیر برقرارند:

$$kP = xP_x + yP_y$$

$$k(k-1)P = x^2 P_{xx} + 2xy P_{xy} + y^2 P_{yy}$$

اولر استاد محاسبه بود. آستین‌ها را بالا بزنید و با او رقابت کنید.

۳. قابلیت قسمت و تقسیم چندجمله‌ای‌ها

تقسیم دو چندجمله‌ای دلخواه بر حسب بیش از یک متغیر عموماً ممکن نیست. یعنی اگر Q, P دو چندجمله‌ای چندمتغیره باشند، معمولاً چندجمله‌ای‌های R و S وجود ندارند، به طوری که:

$$P = QS + R$$

و R یا صفر از درجه کل کمتر از Q باشد به‌منظور آنکه مطلب را برای خودتان روشن کنید، بکشید چندجمله‌ای $x^2 + 2y^2 z + 1$ را بر $xy^2 + z^2$ تقسیم کنید.

اما حالت خاص مهمی هست که تقسیم ممکن است و نتایجی مانند آنچه درباره چندجمله‌ای‌های یک‌متغیره گفتیم، از آن نتیجه می‌شود. فرض کنید $P(x, y, z)$ یک چندجمله‌ای بر حسب x, y, z و با ضرایب دو حلقه A باشد. برای تقسیم، البته به ضرایب در میدان F نیاز داریم. P را یک چندجمله‌ای بر حسب x به حساب می‌آوریم و بر حسب قوای نزولی x می‌نویسیم و بر $x - Q(y, z)$ تقسیم می‌کنیم که Q یک چندجمله‌ای دلخواه است.

به صورت ظاهری، این کار مانند تقسیم یک چندجمله‌ای بر حسب x است که بر $x - q$ تقسیم شده است و از آن تلاوی‌ای مانند $P(x, y, z) = (x - Q(y, z))S(x, y, z) + R$ به دست می‌آید که R و S دو چندجمله‌ای بر حسب x, y, z با ضرایب در F هستند و R چندجمله‌ای صفر است یا درجه‌اش نسبت به x از درجه $x - Q(y, z)$ نسبت به x کمتر است. پس در هر حال R خالی از x است و تلاوی به صورت زیر درمی‌آید:

$$P(x, y, z) = (x - Q(y, z))S(x, y, z) + R(y, z)$$

از اینجا نتیجه می‌شود:

$$P(Q(y, z), y, z) = R(y, z)$$

می‌توان مشاهده کرد که شرط لازم و کافی برای آنکه داشته باشیم $P(x, y, z) | P(Q(y, z), y, z)$ آن است که: $P(Q(y, z), y, z) = 0$.

احکام مشابه نیز برای قابلیت قسمت بر $y - Q(x, z)$

از بین $x_1, \dots, x_n$ متقارن باشند، چندجمله‌ای P را یک چندجمله‌ای متقارن می‌نامیم. حالت کلی چندجمله‌ای درجه دوم متقارن سه متغیره به شکل زیر است:

$$P(x, y, z) = a(x^2 + y^2 + z^2) + b(xy + yz + xz) + c(x + y + z) + d$$

هرمیت ثابت کرد که اگر چندجمله‌ای متقارن $P(x, y)$ بر $x - y$ بخش پذیر باشد، بر $(x - y)^2$ نیز بخش پذیر است. زیرا اگر:

$$P(x, y) = (x - y)Q(x, y)$$

اما از آنجا که P متقارن است داریم:

$$P(x, y) = P(y, x)$$

پس می‌توان نوشت:

$$(y - x)Q(y, x) = P(y, x) = P(x, y) = (x - y)Q(x, y)$$

پس داریم:

$$Q(x, y) = -Q(y, x)$$

و لذا:

$$Q(y, y) = -Q(y, y)$$

و این نتیجه می‌دهد: $Q(y, y) = 0$ پس: $Q(x, y) = (x - y)^2 | P(x, y)$.
آنجا:

یک نکته جالب در مورد چندجمله‌ای‌های متقارن این است که اگر بسط $P = H_0 + H_1 + \dots + H_n$ را در نظر بگیریم که در آن H_i ها همگن هستند، متقارن بودن P متقارن بودن همه H_i ها را نتیجه می‌دهد برای هر $1 \leq r \leq n$ تعریف کنید S_r برابر مجموع حاصل ضرب‌های r تایی متغیرهای $x_1, \dots, x_n$ باشد یعنی در حالت $n=3$ داریم:

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3$$

$$S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

$$S_3 = x_1x_2x_3$$

روشن است که برای $0 \leq r \leq n$ تعداد جمله‌های S_r برابر $\binom{n}{r}$ است. چندجمله‌ای‌های S_r را چندجمله‌ای‌های متقارن ابتدایی می‌نامند.

برای مثال، چون حاصل ضرب هر دو چندجمله‌ای همگن متقارن، باز هم همگن و متقارن خواهد بود، عبارتی مانند:

و $z - Q(x, y)$ برقرار است. در تقسیم چندجمله‌ای $P(x, y)$ بر $x - Q(y)$ هم تساوی به صورت زیر درمی‌آید:

$$P(x, y) = (x - Q(y))S(x, y) + R(y)$$

پس شرط لازم و کافی برای آنکه: $x - Q(y) | P(x, y)$ این است که: $P(Q(y), y) = 0$. به خصوص، شرط لازم و کافی برای آنکه: $x - y | P(x, y)$ این است که: $P(y, y) = 0$.

یک نتیجه مهم هم این است که اگر چندجمله‌ای $P(x, y, z)$ بر هر یک از $x - y$ ، $y - z$ و $z - x$ بخش پذیر باشد، بر حاصل ضرب آن‌ها هم بخش پذیر است؛ زیرا:

$$P(x, y, z) = (x - y)Q(x, y, z)$$

اما چون: $y - z | P$ می‌دانیم: $P(x, z, z) = 0$. پس از رابطه بالا داریم: $Q(x, z, z) = 0$ پس: $Q(x, y, z) = (y - z)R(x, y, z)$ و این می‌شود نوشت:

$$Q(x, y, z) = (y - z)R(x, y, z)$$

و از آنجا:

$$P(x, y, z) = (x - y)(y - z)R(x, y, z)$$

و روشن است که چطور ادامه دهیم تا برسیم به:

$$P(x, y, z) = (x - y)(y - z)(z - x)S(x, y, z)$$

در حالت کلی‌تر، از $x - Q(y, z) | P(x, y, z)$ و $y - R(x, z) | P(x, y, z)$ داریم:

$$P(x, y, z) = (x - Q(y, z))S(x, y, z) \quad (*)$$

$$P(x, R(x, z), z) = 0 \quad (**)$$

از دو رابطه بالا نتیجه می‌شود:

$$(x - Q(R(x, z), z))S(x, R(x, z), z) = 0$$

پس اگر: $x - Q((R(x, z), z)) \neq 0$ آنکه:

$$S(x, R(x, z), z) = 0$$

و لذا: $y - R(x, z) | S(x, y, z)$ و می‌توان نوشت:

$$S(x, y, z) = (y - R(x, z))T(x, y, z)$$

و از آنجا:

$$P(x, y, z) = (x - Q(y, z))(y - R(x, z))T(x, y, z)$$

۴. چندجمله‌ای‌های متقارن

چندجمله‌ای $P(x_1, \dots, x_n)$ را نسبت به دو متغیر x_i و x_j متقارن می‌نامیم، اگر جایگزینی x_i با x_j و x_j با x_i همان چندجمله‌ای قبلی را به دست بدهد. اگر چندجمله‌ای P نسبت به هر دو متغیر



۳۳

شماره ۱۳۹۹ | بهار ۱۴۰۱

یک کاربرد قضیه اصلی چندجمله‌ای‌های متقارن این است که اگر داشته باشیم:

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

و $f(x)$ دارای n ریشه متمایز باشد، a_1 ها برحسب ریشه‌های $x_1, \dots, x_n$ با همان فرمول بالا داده می‌شوند پس مجموع توان‌های k ام ریشه‌ها را می‌توان برحسب ضرایب a_i محاسبه کرد. حالت خاص آن را در ریاضیات دبیرستان دیدناید. مثلاً اگر:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

آنگاه

$$S_1 = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$S_2 = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

$$x_1^r + x_2^r = (x_1 + x_2)^r - r x_1 x_2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^r - r \left(\frac{c}{a}\right)$$

$$x_1^r + x_2^r = (x_1 + x_2)^r - r(x_1 + x_2)(x_1 x_2)$$

$$= \left(-\frac{b}{a}\right)^r - r \left(-\frac{b}{a}\right) \left(\frac{c}{a}\right)$$

محاسبه‌های توان‌های بالاتر $x_1^k + x_2^k$ مشابه است.

۵. چندجمله‌ای‌های پادمتقارن

چندجمله‌ای P برحسب متغیرهای $x_1, \dots, x_n$ را نسبت به دو متغیر x_1 و x_2 پادمتقارن می‌نامیم، اگر با تعویض x_1 و x_2 چندجمله‌ای P به دست بیاید. اگر P نسبت به هر دو متغیر پادمتقارن باشد، آنگاه می‌گوییم چندجمله‌ای P پادمتقارن است. برای مثال چندجمله‌ای زیر پادمتقارن است:

$$P(x, y, z) = (x - y)(x - z)(y - z)$$

در حالت کلی، چندجمله‌ای

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_n) \\ (x_2 - x_3)(x_2 - x_4) \dots (x_2 - x_n) \\ (x_3 - x_4) \dots (x_3 - x_n) \\ \vdots$$

را چندجمله‌ای «واندرموند» می‌نامند و یک چندجمله‌ای پادمتقارن مهم به شمار می‌رود. زیرا هر چندجمله‌ای پادمتقارن n - متغیره، از ضرب کردن یک چندجمله‌ای واندروند n - متغیره با یک چندجمله‌ای متقارن n - متغیره به دست می‌آید. برای مثال:

$$P = (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \quad (*)$$

$$a S_1^k + \dots + S_n^k$$

یک چندجمله‌ای متقارن و همگن از درجه $k_1 + k_2 + \dots + k_n$ خواهد شد می‌بینیم که برای هر چندجمله‌ای دلخواه $Q(x_1, \dots, x_n)$ ، چندجمله‌ای $P(x_1, \dots, x_n)$ که به صورت زیر تعریف می‌شود، یک چندجمله‌ای متقارن است:

$$P(x_1, \dots, x_n) := Q(S_1, \dots, S_n)$$

در ریاضیات دبیرستانی این نکته را به شکل متقارن بودن چندجمله‌ای زیر دیده‌اید:

$$P(x, y) := Q(x + y, xy)$$

قضیه اصلی چندجمله‌ای‌های متقارن

اگر $P(x_1, \dots, x_n)$ یک چندجمله‌ای متقارن باشد که ضرایب آن در حلقه A است، یک و تنها یک چندجمله‌ای $Q(x_1, \dots, x_n)$ هست که:

$$P(x_1, \dots, x_n) = Q(S_1, \dots, S_n)$$

می‌توان دید که درجه کلی $Q(x_1, \dots, x_n)$ برابر است با درجه جزئی P نسبت به هریک از متغیرهای $x_1, \dots, x_n$. از آنجا که P متقارن است، درجه جزئی نسبت به x_i ها با هم برابرند.

با کمی محاسبه می‌توانید خودتان الگوریتمی برای محاسبه Q از روی P داده‌شده به دست آورید. این الگوریتم را اولین بار ریاضی‌دانی به نام **ورنیگ** به دست آورد.

در حالت خاص اگر مجموع‌های توان‌های متشابه را که به شکل $x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k$ هستند، با σ_k نمایش دهیم (σ نمایش حرف σ کوچک به زبان یونانی است و «سیگما» خوانده می‌شود)، طبق قضیه اصلی بالا می‌توان σ_k را برحسب S_i ها نمایش داد. دستورات **نیوتون** برای محاسبه σ_k چنین هستند:

اگر قرار دهیم: $S_0 = a_0 = 1$ و $S_r = a_r (-1)^r$ برای $1 \leq r \leq n$ آنگاه:

$$(I) \sigma_0 = n$$

$$(II) \sigma_1 + a_1 = 0$$

$$(III) \sigma_k + \sum_{r=1}^{k-1} \sigma_r \sigma_{k-r} + k a_k = 0 \quad (1 \leq k \leq n)$$

$$(IV) \sigma_k + \sum_{r=1}^n a_r \sigma_{k-r} = 0 \quad \text{برای هر } k$$

$$(V) a_n \sigma_k + \sum_{r=1}^{n-1} a_r \sigma_{n+k-r} = 0 \quad \text{برای هر } k$$

۶. دستور چندجمله‌ای در حالت کلی

با دستورهای زیر در ریاضیات متوسطه آشنا هستید:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

در حالت کلی داریم:

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \dots + \binom{n}{i} x^{n-i}y^i + \dots + y^n$$

$$= \sum_{n_1+n_2=\dots+n_k=n} \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!} x^{n_1}y^{n_2}\dots$$

و با مثلث خیام که ضرایب را به دست می‌دهد نیز آشنایی دارید:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

حرف مثلث خیام این است که:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

در حالت کلی، برای محاسبه $(x_1 + \dots + x_k)^n$ فرمول زیر را داریم:

$$(x_1 + \dots + x_k)^n = \sum_{n_1+\dots+n_k=n} \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!} x_1^{n_1}x_2^{n_2}\dots x_k^{n_k}$$

که در آن معنی حاصل جمع $\sum$ در نظر گرفتن جمیع جواب‌های صحیح نامنفی معادله سیاله r مجهولی $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ است. اگر علاقه‌مند هستید این بار اثبات به کمک استقرا قابل استفاده و صحیح است. نکته جالب اینجاست که اگر $n_1 + \dots + n_k = n$ ضریب $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$ عددی صحیح است. به عبارت دیگر:

$$n_1!n_2!\dots n_k! \mid (n_1 + \dots + n_k)!$$

در قسمت بعدی این مجموعه مقاله‌ها، با توشه‌ای که اندوخته‌ایم به پیدا کردن ریشه‌های حقیقی معادله‌ها با ضرایب حقیقی خواهیم پرداخت و قاعده علامت‌های دکارت را خواهیم آموخت.

پادمتقارن است و می‌توانیم به کمک نکته بالا آن را تجزیه کنیم. می‌دانیم: $P = (x-y)(x-z)(y-z) \mid$ و می‌دانیم خارج قسمت متقارن هم هست از همگن بودن P می‌دانیم خارج قسمت همگن است. پس:

$$P = (x-y)(x-z)(y-z)(a \sum x^2 + b \sum xy) \quad (**)$$

در $(*)$ ضریب x^3 مساوی $-(y-z)$ است و در $(**)$ ضریب

x^2 برابر $a(y-z)$ است. پس: $a = -b$ برای تعیین b در $(*)$ مقادیر $x=2, y=1, z=0$ را قرار می‌دهیم و به دست می‌آوریم: $b=5$.

بنابراین:

$$P = 5(x-y)(x-z)(y-z)(\sum xy - \sum x^2)$$

حال کمی تمرین کنید.

مسئله ۱. با شرط $x+y+z=0$ ثابت کنید:

$$\left(\frac{y-z}{x} + \frac{z-x}{y} + \frac{x-y}{z}\right)\left(\frac{x}{y-z} + \frac{y}{z-x} + \frac{z}{x-y}\right) = 9$$

مسئله ۲. تحقیق کنید چندجمله‌ای‌های زیر پادمتقارن هستند سپس خارج قسمت آن‌ها بر چندجمله‌ای والدروموند را محاسبه کنید.

$$P_1 = x(y-z)^2 + y(z-x)^2 + z(x-y)^2$$

$$P_2 = x^2(y-z)^2 + y^2(z-x)^2 + z^2(x-y)^2$$

$$P_3 = x^3(y-z)^2 + y^3(z-x)^2 + z^3(x-y)^2$$

مسئله ۳. چندجمله‌ای زیر را به حاصل ضرب پنج عامل تجزیه کنید:

$$x^5(y-z) + y^5(z-x) + z^5(x-y) + xyz(y-z)(z-x)(x-y)$$

می‌بینید که آشنایی با چندجمله‌ای‌های متقارن و پادمتقارن توانایی تجزیه عبارت‌های جبری شما را تا چه میزان بالا برده است.

بی‌نوشت

1. Hermit



۳۵

شماره ۱۳۹۹ | بهار ۱۴۰۰

قسمت سوم

داستان‌های شیرین ریاضی

ماجرای شگفت‌انگیز ضرب سریع و ذهنی

سید محمد رضا هاشمی موسوی
مدرس، مؤلف و محقق ریاضیات

ضرب چقدر زمان لازم است؟!!!!

یکی از بچه‌ها بلافاصله از ته کلاس با صدای بلند گفت: «آقا تا آخر کلاس طول می‌کشد.» یکی دیگر از بچه‌ها فریاد زد: «آقا حداقل یک ساعت طول می‌کشد.»
همهمه کلاس را فرا گرفت و بین بچه‌ها زمزمه ۴۵ دقیقه، نیم‌ساعت و زمان‌های دیگر رد و بدل شد. برای اینکه کلاس از نظم خودش خارج نشود، معلم با صدای بلند گفت: «ساکت بچه‌ها!» در یک لحظه سکوت کلاس را فرا گرفت. معلم از بچه‌ها خواست که سه نفر پای تابلو بیایند. بچه‌ها در سه قسمت تابلو برای انجام عمل ضرب ایستادند.

معلم اشاره کرد که بچه‌ها زمان را حساب کنند. یکی از بچه‌های اول ورزش فریاد زد: «آقا ساعت من زمان سنج (کرونومتر) دارد.» معلم بلند گفت: «هر کسی ساعت دارد زمان بگیرد» و ادامه داد که: «با اشاره دست من هر سه به عمل ضرب مشغول شوید. هر کسی هم که تمام کرد بلافاصله بیاید کنار تابلو بایستد.»

با اشاره معلم در یک زمان هر سه با هم شروع کردند. پس از دو دقیقه هر سه ضرب انجام شدند و هر سه دانش‌آموز کنار تابلو ایستادند. بلافاصله معلم این زمان را در کنار تخته نوشت و گفت: «در واقع اگر این سه ضرب توسط یک نفر انجام شود، بیش از دو دقیقه زمان می‌برد.» به این ترتیب، معلم به صورت تجربی مدت زمان ۳ عمل ضرب را به کلاس نشان داد و بلافاصله پای تخته رفت و در کمتر از یک دقیقه پاسخ هر ۹ ضرب را بدون عملیات ذهنی نوشت!

در اینجا بود که همه شگفت‌زده شدند. مدتی مات و مبهوت به پاسخ ضرب‌ها نگاه کردند و بعد از شگفتی یک‌دفعه با هورا و دست به تشویق معلم پرداختند. معلم با اشاره درخواست سکوت کرد.

اشاره

در داستان‌های قبل با ماجراهای هدیه حاکم بزرگ به مخترع شطرنج (همراه دو داستان دیگر) و حل حسابی مسئله مشهور پنج کلاه و روش زیبایی بازگشتی و حل تعمیم آن و بدون استفاده از نظریه آنالیز ترکیبی آشنا شدید. در این داستان با ماجرای شگفت‌انگیز ضرب سریع و ذهنی آشنا خواهید شد.

ماجرای شگفت‌انگیز ضرب سریع و ذهنی

ابتدای سال تحصیلی بود. در کلاس هشتم نشسته بودم. همه بچه‌ها چشم به در کلاس دوخته بودند و منتظر معلم ریاضی جدیدشان بودند. جوانی که به ظاهر دانشجو بود وارد کلاس شد و بدون مقدمه پس از سلام و عرض ادب و احترام بچه‌ها، پای تخته ایستاد و ضرب‌های زیر را روی تابلو نوشت:

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 15 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 25 \\ \times 25 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 35 \\ \times 35 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 45 \\ \times 45 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 55 \\ \times 55 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 65 \\ \times 65 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 75 \\ \times 75 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 85 \\ \times 85 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 95 \\ \times 95 \\ \hline \end{array}$$

سکوت کلاس را احاطه کرده بود و همه مات و مبهوت به تخته نگاه می‌کردند. در این هنگام معلم سکوت را شکست و به ضرب‌هایی که نوشته بود اشاره کرد و گفت: «بچه‌ها، برای ضرب کردن این ۹ عمل



۳۶

شماره ۱۱۳۹ | بهار ۱۴۰۳

همیشه‌ها که خوابید معلم گفت: «ساکت باشید تا من راز

و رمز این ضرب ذهنی را یاد بدهم.»

معلم که خود نیز به وجد آمده بود، روش ضرب ذهنی و سریع را تشریح کرد: «برای ضرب عددهای دورقمی که رقم سمت راست آن‌ها (یکان عدد) عدد ۵ باشد کافی است 5×5 که می‌شود ۲۵ را سمت راست بنویسیم و رقم سمت چپ را در عدد بعدی خودش ضرب کنیم و در سمت چپ عدد ۲۵ بنویسیم.» مانند ضرب 3×2

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times 35 \\ \hline 1725 \end{array}$$

زمان ضرب ذهنی: ۳ ثانیه

حاصل ضرب: ۱۷۲۵

همین‌جا بود که در ذهن من جرقه‌ای زد و بلافاصله با شگفتی زیاد و هیجان گفتم: «آقای معلم این روش را برای هر دو عدد دورقمی دلخواه می‌توان به کار برد!»

معلم کمی تأمل کرد و گفت: «این روش ذهنی فقط برای ضرب عددهای دورقمی که سمت راست آن‌ها به ۵ ختم شود برقرار است.»

همین‌جا بود که این روش ضرب ذهنی مرا درگیر خودش کرد.

با خودم عهد کردم که قاعده ضرب ذهنی را برای هر دو عدد دلخواه کشف کنم و آن را به آقای معلم و دوستانم انتقال دهم. از همان روز کار من شد ضرب کردن عددهای دورقمی که سمت راست آن‌ها به ۱، ۲، ۳ تا ۹ ختم می‌شد. برای ضرب ذهنی دو عددی که به ۱ یا ۲ ختم می‌شدند، قاعده‌ای ذهنی به دست آوردم، ولی قاعده کلی نبود و برای ضرب‌هایی که به رقم‌های دیگر ختم می‌شدند، صادق نبود. ولی من همچنان به کار ضرب کردن روی تخته سفید (وایت‌برد) کوچکی که تازه گرفته بودم، ادامه دادم. این تلاش تا پایه اول متوسطه دوم ادامه داشت و بالاخره اولین کشف من ضرب هر دو عدد دلخواه دورقمی به صورت ذهنی و سریع بود. ولی این ضرب کردن‌ها به پایان نرسید و این کار تا سال بعد ادامه داشت که بالاخره اواسط سال تحصیلی بود که ضرب ذهنی 3×2 را یافتم.

در اینجا روش ضرب ذهنی 2×2 و $m \times n$ برای عددهای دلخواه را همراه شکل هندسی آن‌ها می‌آورم:

قاعده ضرب 2×2 ذهنی و سریع

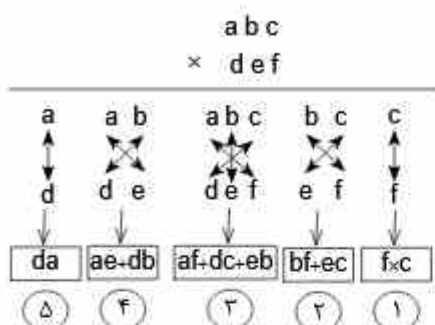
برای قاعده ضرب 2×2 ذهنی برای دو عدد دلخواه ab و cd به این ترتیب انجام می‌دهیم (خط بالای این دو عدد نشان‌دهنده رتبه یکان و دهگان).



۳۷

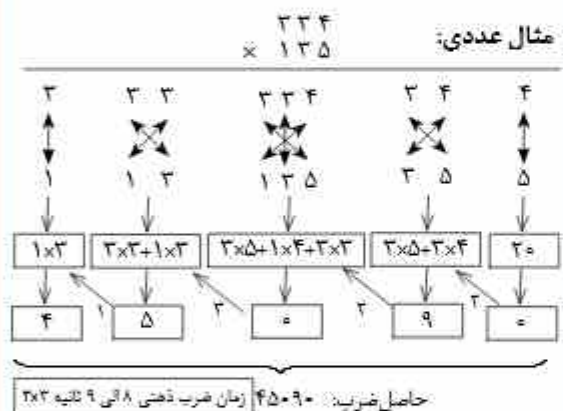
شماره ۱۳۹۹ | بهار ۱۴۰۰

می‌توان به این صورت عمل کرد:

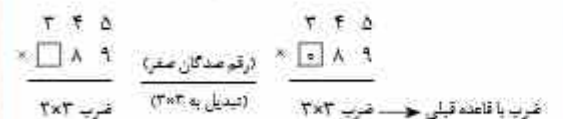


توجه: در پنج مرحله به صورت ذهنی و مستقیم در کسری از دقیقه محاسبه ضرب ذهنی انجام می‌شود. اگر عددها فقط ۰، ۱، ۲ و ۳ باشند، زیر ۱۴ ثانیه ضرب ۳×۳ به روش ذهنی انجام می‌شود.

تذکره: در هر مرحله رقم یکان نوشته می‌شود و بقیه عدد با مرحله بعد جمع می‌شود.

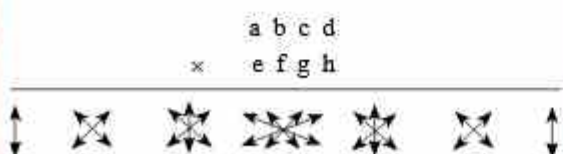


نکته: اگر با ضرب ۲×۳ روبه‌رو شدیم، قاعده همان است و فقط جای رقم صدگان عدد دورقمی عدد صفر $\square$ قرار می‌دهیم؛ مانند:



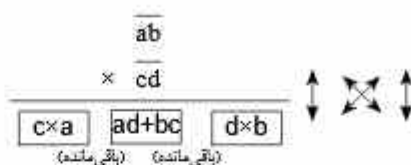
قاعده ضرب ۴×۴ ذهنی و سریع

مشابه ضرب ۳×۳ عمل می‌کنیم؛ مانند شکل هندسی زیر:



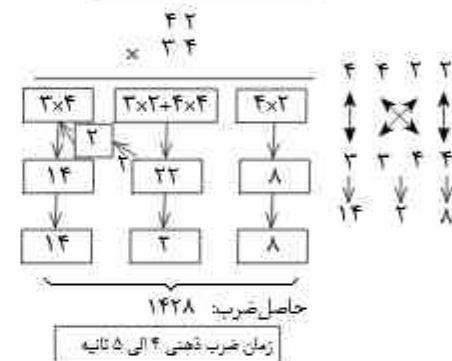
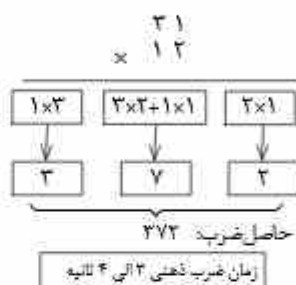
فعالیت ۱: یک ضرب عددی ۲×۲، ۲×۳، ۳×۳، ۳×۴، ۴×۴، ۲×۴، ۳×۴ و ۵×۵ ذهنی انجام دهید و زمان محاسبه ذهنی را در پایان یادداشت کنید. ببینید چقدر سریع این کار انجام می‌شود.

شکل هندسی ضرب ذهنی:



مثال عددی:

شکل هندسی:



بنابراین در پایه دوم متوسطه دوم، به آرزویی که داشتم، رسیدم و دیگر هر ضرب ۲×۲ دلخواه را به صورت ذهنی انجام می‌دادم. هر جا که موضوع را بیان می‌کردم و بلافاصله حاصل را به‌طور ذهنی می‌گفتم، باعث شگفتی در مجالس دوستان می‌شد! اما داستان به اینجا ختم نشد و ذهنم هنوز درگیر ضرب ذهنی برای مرتبه‌های بالاتر بود. اواخر سال دوم متوسطه بودم که قاعده ضرب ذهنی برای حالت ۳×۳ را نیز با تلاش و پشتکار بسیار کشف کردم.

قاعده ضرب ۳×۳ ذهنی و سریع

برای یافتن قاعده ضرب ۳×۳ ذهنی در حالتی که هر دو عدد سه رقمی دلخواه باشند تلاش زیادی کردم و این قاعده بسیار مهم بود. چون دیگر راه برای یافتن قاعده ضرب ذهنی $n \times n$ هموار می‌شد. در اینجا هم در حالت کلی و هم در حالت عددی این قاعده را ارائه خواهم داد. ولی قبل از دیدن راه حل ضرب ۳×۳ ذهنی، شما با توجه به ضرب ذهنی ۲×۲، سعی کنید به آن قاعده دست یابید؛ زیرا لذت درک و فهم و انجام آن چند برابر خواهد بود (فعالیت ۱).

قاعده ضرب ۳×۳ ذهنی و سریع

برای ضرب دو عدد سه‌رقمی دلخواه به صورت کلی abc و def

درمانگاه ریاضی

پیوستگی و مشتق

افشین خاصه‌خان

کارشناس ارشد و مشاور ریاضی

به راحتی هم به پاسخ تشریحی مراجعه نمی‌کرد. در این گفت‌وگوی مختصر من متوجه شدم که سوایل تعریف‌ها را به خوبی می‌داند و آن‌ها را با ترتیبی درست اجرا کرده است. اما دو مشکل وجود داشت: اول اینکه سوایل فکر می‌کرد برای بررسی مشتق‌پذیری حتماً باید پیوستگی آن را نیز بررسی کرد. دوم اینکه او قبل از تعریف هر دو تابع در همسایگی صفر (نوشتن تابع به صورت قطعه‌ای) اعمال روی تابع‌ها را انجام داده و بعد از آن مشتق‌پذیری را بررسی کرده بود.

درمان

از سوایل پرسیدم: «طراح مسئله، مشتق‌پذیری این تابع‌ها را در چه نقطه‌ای خواسته است؟» او بلافاصله جواب داد: «در صفر.» گفتم: «برای بررسی مشتق‌پذیری در صفر به ترتیب چه کارهایی باید انجام دهیم؟» او گفت: «اول باید تابع اصلی را تشکیل دهیم، یعنی اعمال روی دو تابع را انجام دهیم (جمع، ضرب و ترکیب دو تابع). سپس باید بدانیم تابع در این نقطه پیوسته است یا نه.»

پرسیدم: «چگونه؟» گفت: «حد چپ، حد راست و مقدار را در صفر باید محاسبه کنیم. اگر هر سه برابر شدند یعنی پیوسته است.» گفتم: «بعد؟» او جواب داد: «سپس تعریف مشتق را در نقطه $x=0$ برای هر کدام از تابع‌ها محاسبه می‌کنیم؛ هم مشتق چپ و هم مشتق راست. در هر تابعی که آن‌ها با هم برابر باشند، آنگاه تابع در صفر مشتق‌پذیر است.»

حال زمان پرسیدن یکی از سؤال‌های اصلی بود. گفتم: «به نظر شما بدون بررسی پیوستگی نمی‌توان مشتق‌پذیری را بررسی کرد؟» با کمی مکث گفت: «نه.» جواب دادم: «هیچ امتحان کرده‌ای؟» گفت: «نه. اما به نظرم اگر پیوستگی را بررسی نکنیم بررسی مشتق‌پذیری ناقص می‌ماند.»

گفتم: «در اوایل درس دوم از فصل ۴ در متن کتاب یک فعالیت با همین شرایط وجود دارد که مشتق در نقطه ناپیوسته در چپ و راست، هر دو نامتناهی است. آن‌ها را خوانده‌ای؟» با تأیید سر گفت: «بله، اما به گمانم فراموش کرده‌ام.» از او خواستم که در کتاب آن را پیدا کند و سوایل با راهنمایی من فعالیت صفحه ۷۷ را پیدا کرد.

سلام بچه‌ها. سال نو مبارک. به درمانگاه ریاضی خوش آمدید. امیدوارم در آخر سال تحصیلی آزمون‌های مهم پیش رو را با موفقیت پشت سر بگذارید. داستان این شماره درباره یک دانش‌آموز دوازدهمی (رشته تجربی) به نام سوایل هادی‌زاده است. او هر هفته یک جلسه به درمانگاه ریاضی مراجعه می‌کند.

سوایل دانش‌آموز «دبیرستان قرزانگان» شهرستان سلماس است. پدرش شغل آزاد دارد و مادرش خیاطی ماهر است. سوایل برای آزمون سراسری آماده می‌شود و در زمان مراجعه، درباره موضوع‌هایی که برایش چالش برانگیزند و او را به نحوی به زحمت انداخته‌اند، سؤال‌هایی مطرح می‌کند و بحث‌هایی را با هم انجام می‌دهیم. او دانش‌آموز بسیار مستعدی است و با اینکه توانایی تندخوانی را دارد، مطالعه مداوم را نیز در دستور کار خود دارد.

بعد از سلام و احوال‌پرسی روزمره، سوایل را به اتاق درمانی دعوت می‌کنم. طبق روال همیشگی، او با کلی سؤال آمده است. برای کشف مشکل تفکر ریاضی سوایل در اشکال‌های مطرح‌شده، «گفت‌وگوی سقراطی» را با او آغاز کردم.

تشخیص بیماری

یکی از مواردی که مطرح‌شد، سؤال جامعی در ارتباط با بحث مشتق‌پذیری بود. چون علاوه بر آن، مبحث اعمال روی تابع‌ها و ترکیب تابع‌ها را هم شامل می‌شد:

اگر $f(x) = 3x + |x|$ و $g(x) = \frac{3x - |x|}{4}$ ، کدام تابع در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست؟

۱. $f \circ g$ ۲. $f \circ g$ ۳. $g \circ f$ ۴. $f + g$

سوایل برای حل این سؤال ابتدا همه تابع‌های مطرح‌شده در گزینه‌ها را تشکیل داده و سپس بررسی کرده بود و چون حجم عملیات جبری بسیار بالا شده بود، او کلافه شده و حل سؤال را رها کرده بود. طبق توصیه من، به جواب تشریحی هم مراجعه نکرده بود. او دانش‌آموزی بود که بدون علت روش حلی را نمی‌پذیرفت و



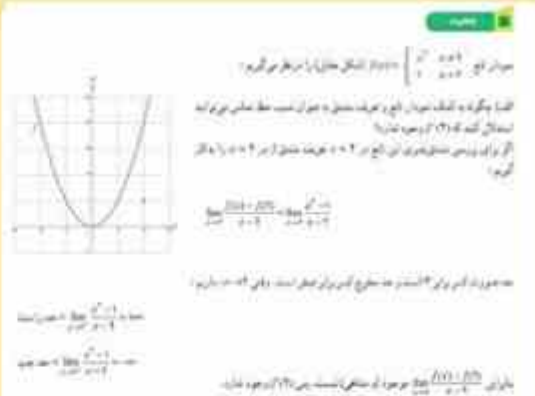
۳۹

شماره ۳۹ | بهار ۱۳۹۸

$$(f+g)(x) = \begin{cases} \frac{9}{2}x & x \geq 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases}$$

سوئیل که دانش آموزی بسیار باهوش و پرتلاش و مهارتش در حل مسئله قابل توجه بود، بدون تأمل گفت: «استاد سه تابع اول چندجمله‌ای اند و در R مشتق‌پذیر و لذا در $x=0$ نیز مشتق‌پذیر خواهند بود. فقط تابع $f+g$ در صفر مشتق‌ناپذیر است و تابع مشتق آن برابر است با:

$$(f+g)'(x) = \begin{cases} \frac{9}{2} & x > 0 \\ 2 & x < 0 \end{cases}$$



سپس با کمی مکث روی فعالیت گفت: «درست است، برای بررسی مشتق‌پذیری نیازی به بررسی پیوستگی نیست، من با اینکه این فعالیت را خوانده بودم، اما به کلی از یادم رفته بود.» حال نوبت سؤال کلیدی دوم بود. از او پرسیدم: «به نظر شما اول باید تابع‌های gof ، $f \circ g$ و $f \times g$ را تشکیل داد و سپس تابع حاصل را به صورت قطعهای نوشت (روشی که شما به کار برده‌ای) یا به عکس؟ در کدام یک حجم عملیات کمتر است؟»

سوئیل با مکنی طولانی گفت: «اصلاً این طور فکر نکرده بودم. به احتمال زیاد دومی بهتر است.» گفتم: «می‌توانی امتحان کنی. یعنی کافی است شما دو تابع f و g را در همسایگی چپ و راست صفر به صورت یک تابع قطعهای تعریف کنی و سپس اعمال خواسته شده روی هر دو تابع را انجام دهی و در نهایت مشتق‌پذیری در صفر را بررسی کنی. این کار حجم عملیات جبری شما را خیلی کاهش می‌دهد.»

سوئیل گفت: «استاد همچنان که گفته بودید قدر مطلق یک عدد، یعنی فاصله آن عدد از مبدأ روی محور، اگر عدد مثبت باشد فاصله‌اش از مبدأ برابر خود آن عدد، و اگر منفی باشد برابر با قرینه آن عدد است. بنابراین:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{3x-x}{2} = \frac{x}{2} & x \geq 0 \\ \frac{3x+x}{2} = 2x & x < 0 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 2x+x=3x & x \geq 0 \\ 2x-x=x & x < 0 \end{cases}$$

حال نوبت اعمال روی تابع‌هاست:

$$(f \times g)(x) = \begin{cases} 2x^2 & x \geq 0 \\ 2x^2 & x < 0 \end{cases} \rightarrow (f \times g)(x) = 2x^2$$

$$f \circ g(x) = \begin{cases} 2(2x) = 4x & x \geq 0 \\ 2(x) = 2x & x < 0 \end{cases} \rightarrow (f \circ g)(x) = 2x$$

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} \frac{3(2x)}{2} = 3x & x \geq 0 \\ \frac{3(x)}{2} = \frac{3x}{2} & x < 0 \end{cases} \rightarrow (g \circ f)(x) = 2x$$

درست است؟» او را تحسین کردم و گفتم: «مثل همیشه به سرعت متوجه مطلب می‌شوی و نیازی به توضیح اضافه نداری.»

تجویز دستورالعمل‌های درمانی

بعد از تشخیص نارسایی تفکر ریاضی سوپل، در بررسی مشتق‌پذیری و رعایت زمان‌بندی تعریف قدر مطلق، حال نوبت تجویز دستورالعمل‌های درمانی لازم بود.

۱. به او توصیه کردم حتماً فصل ۴ از کتاب ریاضی ۳ را دوباره به دقت بخواند، همه فعالیت‌ها و کار در کلاس‌ها را حل کند و سپس همه تمرین‌های آخر درس‌ها را جواب دهد.

۲. تمرین‌های مشابهی را از کتاب‌های کمک آموزشی خودش

تعیین و سفارش کردم که برای حلشان آزمون و خطا انجام دهد و تا حد امکان از نگاه کردن به پاسخ مسئله اجتناب کند.

۳. برای مسئله‌هایی که نتوانسته حل کند، در طول هفته دوباره چالشی انجام دهد. حل یک سؤال بعد از چندین بار تلاش بسیار لذت‌بخش خواهد بود.

۴. اگر امکان داشته باشد یک سؤال را با راهبردهای متفاوت حل کند و از این کار لذت ببرد.

۵. اگر علاقه‌مند باشد، چند سؤال در همین زمینه طراحی کند و با دوستانش به حل و بحث بگذارد تا نقاط قوت و ضعفش بیشتر آشکار شود. همچنین بتواند از منظر یک طراح به موضوع نگاه کند.



۴۱

شماره ۱۳۹۹ | بهار ۱۴۰۰

تجویز دستورالعمل‌های درمانی

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$$



تجویز دستورالعمل‌های درمانی

تجویز دستورالعمل‌های درمانی

تجویز دستورالعمل‌های درمانی

پیشرو

سوال های امتحان نهایی

بار اول و دوم شهری

جواد شوهانی

دبیر مدارس استعداد های درخشان

ریاضی یک

سؤال ۱: با فرض $4a^2 = 3a^2 - 2a + 2$ ، دو عدد a و $\sqrt{1-3a^2}$ چقدر با یکدیگر اختلاف دارند (فصل سوم)؟

سؤال ۲: اگر $A = 4(x^2 + 3) - 2(x - 2)(2x - 2)$ و $B = 14(2x - \frac{1}{y})(7x + \frac{1}{y})$ حاصل $(B - A^2)^{100}$ را بیابید (فصل سوم)؟

سؤال ۳: کدام یک از روابط زیر تابع هستند (فصل پنجم)؟

$$x = \sqrt{y} + \sqrt{-y} \quad (\text{الف})$$

$$|x| + |y| = 0 \quad (\text{ب})$$

$$|y^2 - y| + |x - 2| = 0 \quad (\text{پ})$$

سؤال ۴: اگر $f(\frac{x}{x^2 + x + 1}) = \frac{x^2}{x^2 + x^2 + 1}$ آنگاه $f(\frac{1}{2})$ را

بیابید

سؤال ۵: اگر $\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{13} + \sqrt{48} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ که $a, b \in \mathbb{Q}$ آنگاه حاصل $a + b$ را بیابید

سؤال ۶: (فصل ۱، ریاضی ۲ تجربی)

اگر α و β ریشه های معادله درجه دوم $2x^2 - 3x - 7 = 0$ باشند، آنگاه حاصل عبارت $\frac{2\beta^2(3\alpha + 7)}{(4\alpha^2 - 6\alpha - 1)(2\beta^2 - 3\beta + 1)}$ را بیابید.

سؤال ۷ (فصل سوم، ریاضی دهم)

نشان دهید $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ عددی گویاست.

سؤال ۸: اگر $10^x = (10^{1001} + 25)^2 - (10^{1001} - 25)^2$ آنگاه مقدار x را محاسبه کنید

سؤال ۹: اگر $x^2 + \frac{1}{x^2} = 777$ و $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ مقدار $(x^2 - \frac{1}{x^2})$ را بیابید

سؤال ۱۰: جواب یا جواب های این معادله را بیابید:

$$|||x - 8| - 10| - 4| - 5| - 1| = 0$$

پاسخ ۱:

داریم:

$$\begin{aligned} fa^x - 3a^x + 3a - 2 &= 0 \Rightarrow 3a^x + \underbrace{a^x - 3a^x + 3a - 1}_{(a-1)^x} - 1 = 0 \\ \Rightarrow 3a^x - 1 + (a-1)^x &= 0 \Rightarrow (a-1)^x = 1 - 3a^x \\ \Rightarrow a-1 &= \sqrt[3]{1-3a^x} \Rightarrow a - \sqrt[3]{1-3a^x} = 1 \end{aligned}$$

پاسخ ۲:

$$\begin{aligned} A &= \cancel{6x^2} + 3x^2 - \cancel{6x^2} + 14x - 12 = 14x \Rightarrow A^x = (14)^x x^x \\ B &= 14(14x^x + x - x - \frac{1}{14}) = 14(14x^x - \frac{1}{14}) \\ &= 14(\frac{(14)^x x^x - 1}{14}) = (14)^x x^x - 1 \\ \text{لذا: } B - A^x &= (14)^x x^x - 1 - (14)^x x^x = -1 \\ \text{یعنی: } (B - A^x)^{140x} &= -1 \text{ و } (B - A^x)^{140x} = 1 \end{aligned}$$

پاسخ ۳:

گزینه الف تابع است، زیرا تنها مقداری که y می‌گیرد، برابر با $x=0$ است. پس $f = \{(0,0)\}$.
گزینه ب تابع است، زیرا باید $|x| = |y| = 0$ پس $x=0$ و $y=0$.
گزینه پ تابع نیست، زیرا برای $x=2$ مقادیرهای $y = 0, 1, -1$ را داریم.

پاسخ ۴:

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2 + x + 1} &= \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \\ \Rightarrow (x-1)^2 &= 0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow f(\frac{1}{x}) &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

پاسخ ۵:

نکته: برای مجموع میانگین حسابی و هندسی a و b داریم:

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{2} + \sqrt{ab} &= (\sqrt{\frac{a}{2}} + \sqrt{\frac{b}{2}})^2 \\ \sqrt{12} + \sqrt{48} &= \sqrt{(\sqrt{12} + 1)^2} = \sqrt{12} + 1 \\ \sqrt{5} - \sqrt{12} + \sqrt{48} &= \sqrt{5 - \sqrt{12} - 1} \\ &= \sqrt{4 - \sqrt{12}} = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} = \sqrt{2} - 1 \\ \sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{12} + \sqrt{48} &= \sqrt{2} + (\sqrt{2} - 1) \\ &= \sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}})^2} = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

پس: $a+b=2$

پاسخ ۶:

بتابه فرض داریم: $2\alpha^x - 3\alpha - 7 = 0$.
پس: $2\alpha^x + 7 = 3\alpha$ از طرف دیگر: $6\alpha^x - 6\alpha - 14 = 0$.
پس:

$$\begin{aligned} &\frac{2B^x(2\alpha+7)}{(6\alpha^x-6\alpha-1)(2B^x-2B+1)} \\ &= \frac{2B^x(2\alpha^x)}{(6\alpha+14-6\alpha-1)(2B+7-2B+1)} \\ &= \frac{f(\alpha\beta)^x}{13 \times 8} = \frac{f(\frac{-7}{2})^x}{104} = \frac{69}{104} \end{aligned}$$

پاسخ ۷:

فرض کنید: $A = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ و $B = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ می‌دانیم $A+B$ عدد حقیقی است و داریم: $A^3+B^3=4$

از طرف دیگر: $A \times B = \sqrt[3]{4-5} = -1$ و لذا: $P = A \times B$ و $S = A+B$ پس: $A^3+B^3 = S^3 - 3PS$

$$4 = S^3 + 3S \Rightarrow S^3 + 3S - 4 = 0 \Rightarrow S = 1$$

یعنی: $A+B=1$ و چون: $S^3+3S-4=(S-1)(S^2+S+4)$ پس S ریشه حقیقی دیگری ندارد.

پاسخ ۸:

روش اول) استفاده از اتحاد:

$(a+b)^3 - (a-b)^3 = 6ab$ و انتخاب $a=1$ و $b=25$ پس داریم: $4 = 6 \times 25 \times (1 \cdot 10^{10}) = 10^x \Rightarrow 10^{10 \cdot x} = 10^x \Rightarrow x = 1403$

روش دوم) استفاده از اتحاد مزدوج:

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ و انتخاب $a=1$ و $b=25$ لذا داریم: $b=10^{10} - 25$

$$-[(1 \cdot 10^{10} + 25) - (1 \cdot 10^{10} - 25)] \times [(1 \cdot 10^{10} + 25) + (1 \cdot 10^{10} - 25)] = 10^x \\ \Rightarrow 50 \times 2 \times 10^{10} = 10^x \Rightarrow x = 1403$$

پاسخ ۹:

$$(x^3 + \frac{1}{x^3})^2 - 2 = x^3 + \frac{1}{x^3} \Rightarrow (x^3 + \frac{1}{x^3})^2 = 729 = (27)^2$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 27 \Rightarrow (x - \frac{1}{x})^3 + 2 = x^3 + \frac{1}{x^3} = 27$$

$$\Rightarrow x - \frac{1}{x} = \pm 5$$

بنابراین اتحاد چاق و لاغر $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ داریم:

$$x^3 - \frac{1}{x^3} = (x - \frac{1}{x})(x^2 + \frac{1}{x^2} + 1) = \pm 5 \times (27 + 1) = \pm 140$$

پاسخ ۱۰:

$$|||x-8|-10|-4|-5|-1|=0$$

$$\Rightarrow |||x-8|-10|-4|-5|-1|=1 \Rightarrow |||x-8|-10|-4|-5|=1$$

$$\Rightarrow |||x-8|-10|-4|-5|=\pm 1 \Rightarrow \begin{cases} ||x-8|-10|-4|=6 \\ ||x-8|-10|-4|=4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x-8|-10=6 \\ |x-8|-10=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x-8|=16 \\ |x-8|=14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-8=16 \\ x-8=-16 \\ x-8=14 \\ x-8=-14 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x-8|=16 \Rightarrow x-8=\pm 16 \Rightarrow x=24, -8 \\ |x-8|=14 \Rightarrow x-8=\pm 14 \Rightarrow x=22, -6 \end{cases}$$

یعنی ۹ جواب برای x وجود دارد.

۴۴

شماره ۱۳۹۶ / بهار ۱۴۰۳

چشم انداز

مسئله های آزمون دکتری

باریکرد مشهوری

حسین حجازی

دبیر مدارس استعدادهای درخشان

۶. معادله $6^x + 9^x = 2^{x+1}$ چند ریشه دارد؟
الف) ۰ (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۳

۷. در صورتی که بدانیم x و y دو عدد صحیح نامفی هستند و $y^2 = 4^x + 4^{x+1} + 4^{x+2}$ است، مجموع ارقام x کدام می تواند باشد؟
الف) ۳ (ب) ۶ (ج) ۹ (د) ۱۲

۸. حاصل $\sqrt[n]{\frac{x^{x-y} + y^{x-y}}{x^{y-x} + y^{y-x}}}$ کدام است؟

الف) $\frac{x}{y}$ (ب) ۱ (ج) $\frac{y}{x}$ (د) xy

۹. فرض کنید α و β ریشه های معادله $x^2 - ax + b = 0$ و

$\left\{ \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta} \right\}$ ریشه های معادله $x^2 - (b+3)x + (a+2) = 0$

باشد حاصل $(b+1)^2$ کدام است؟

الف) ۲ (ب) $a+3$ (ج) -2 (د) $a-3$

۱۰. اگر $f(x) = a \cdot 2^x + 3^x$ و $f^{-1}(15) = f^{-1}(6) + 1$ باشد، مقدار $f^{-1}(3)$ کدام است؟

الف) ۱۲ (ب) ۲۹ (ج) ۱۰ (د) ۰

۱. معادله $\frac{110}{1+x} + \frac{131}{(1+x)^2} = 200$ چند جواب دارد؟

الف) ۰ (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۳

۲. معادله $\frac{8^x + 27^x}{12^x + 18^x} = \frac{7}{6}$ چند جواب نامفی دارد؟

الف) ۰ (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۳

۳. حاصل ضرب ریشه های معادله زیر کدام است؟

$$a^x(a^x - 1)(a^x - 4)(a^x - 9) = 8!$$

الف) ۵ (ب) -5 (ج) $\sqrt{5}$ (د) $-\sqrt{5}$

۴. اگر $\log_{17}^x n = n$ در نظر بگیریم، مقدار $\log_{17}^x n$ بر حسب n کدام است؟

الف) $\frac{2n-1}{2n+1}$ (ب) $\frac{2-n}{2+n}$

ج) $\frac{2n-1}{2n+1}$ (د) $\frac{2-n}{2+n}$

۵. اگر $f(x) = x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 2x^5 - 2$ باشد، حاصل

$f(\sqrt{\sqrt{5}+2} - \sqrt{\sqrt{5}-2})$ کدام است؟

الف) $\sqrt{5}$ (ب) $\sqrt[3]{5}$ (ج) ۱ (د) ۰



۴۵

شماره ۱۳۹۹ | بهار ۱۴۰۰

پاسخ ۱.

قرار می دهیم: $\frac{11}{1+x} = t$ خواهیم داشت:

$$1 \cdot t + t^2 = 20 \Rightarrow t^2 + 1 \cdot t - 20 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 10 \Rightarrow x = \frac{1}{10} \\ t = -20 \Rightarrow x = \frac{-21}{20} \end{cases}$$

پاسخ ۲.

$$\frac{1^x + 2^x}{1^x + 18^x} = \frac{2^x + 2^x}{2^x + 2^x} = \frac{(2^x + 2^x)(2^x - 2^x + 2^x)}{2^x \cdot 2^x (2^x + 2^x)} = \frac{2}{2} = 1$$

$$6 \cdot 2^x - 12 \cdot 2^x + 6 \cdot 2^x = 0 \Rightarrow 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x - 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 6 = 0$$

$$6t - 12t + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{2}{2} \Rightarrow x = 1 \\ t = \frac{2}{2} \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

پاسخ ۳.

اتحاد مزوج برانته‌ها را می نویسیم و مرتب می کنیم:

$$(a^x + 2)(a^x + 2)(a^x + 1) \cdot a^x \cdot (a^x - 1)(a^x - 2)(a^x - 2) = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{(a^x + 2)!}{(a^x - 2)!} = 1! (a^x + 2) \Rightarrow \frac{(a^x + 2)!}{(a^x - 2)! 1!} = a^x + 2 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{a^x + 2}{a^x - 2} \right) = a^x + 2 \Rightarrow a^x - 2 = 1 \Rightarrow a = \pm \sqrt{5}$$

پاسخ ۴.

$$\log_{1/2}^y = \frac{\log_2^y}{\log_2^{1/2}} = \frac{y}{2 \log_2^y + 1} = n \Rightarrow \log_2^y = \frac{y - n}{2n}$$

$$\log_2^y = \frac{\log_2^y}{\log_2^y} = \frac{y \log_2^y}{\log_2^y + 1} = \frac{y - fn}{y + n} = f \left(\frac{y - n}{y + n} \right)$$

پاسخ ۵.

$$\begin{cases} \sqrt{\sqrt{5} + 2} = n \\ \sqrt{\sqrt{5} - 2} = m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n^2 = \sqrt{5} + 2 \\ m^2 = \sqrt{5} - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n^2 - m^2 = 4 \\ n \cdot m = 1 \\ f(n - m) = ? \end{cases}$$

$$n^2 - m^2 = (n - m)((n - m)^2 + 2nm) = 4$$

$$\Rightarrow (n - m)^2 + 2(n - m) - 4 = 0$$

$$n - m = 1 \Rightarrow f(1) = 6$$

پاسخ ۶.

$$2^x + 9^x = 2^x \cdot 3^x + 3^x \cdot 2^x = 2^x \cdot 2 \cdot 3^x \Rightarrow$$

$$\frac{2^x}{2^x} + \frac{3^x}{3^x} = 2, \quad \frac{3^x}{2^x} = t \Rightarrow t^2 + t - 2 = 0$$

$$\begin{cases} t = 1 \Rightarrow x = 1 \\ t = -2 \Rightarrow \text{غ.ق.ی} \end{cases}$$

پاسخ ۷.

$$4^x + 4^{2x} + 4^{3x} = y^7 \Rightarrow 2^{2x} + 2^{4x} + 2^{6x} = y^7$$

هر دو طرف مربع کامل هستند، پس سه حالت می تواند رخ دهد:

$$\begin{cases} (2^x + 2^{2x})^2 = y^7 \\ (2^{2x} + 2^{4x})^2 = y^7 \\ (2^x + 2^{3x})^2 = y^7 \end{cases} \xrightarrow{\text{اتحاد می نویسیم}} \begin{cases} 2 \cdot 2^x \cdot 2^{2x} = 2^{3x} \Rightarrow x = 21 \\ 2 \cdot 2^{2x} \cdot 2^{4x} = 2^{6x} \Rightarrow x = 40 \\ 2 \cdot 2^x \cdot 2^{3x} = 2^{4x} \Rightarrow x = 26 \end{cases}$$

پاسخ ۸.

$$\begin{cases} x^{x-y} = a \\ y^{x-y} = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^{x-y} = a^{-1} = \frac{1}{a} \\ y^{x-y} = b^{-1} = \frac{1}{b} \end{cases} \Rightarrow ab = (xy)^{x-y}$$

$$x^{-y} \sqrt{\frac{a+b}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}} = x^{-y} \sqrt{ab} = xy$$

پاسخ ۹.

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a \\ \alpha \beta = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\alpha + \beta}{\alpha \beta} = \frac{a}{b} = b + 2 \Rightarrow a = b^2 + 2b \\ \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = b + 2 \\ \frac{1}{\alpha \beta} = a + 2 \end{cases}$$

$$(b^2 + 2b)b + 2b = 1 \Rightarrow b^2 + 2b^2 + 2b + 1 = 2 \Rightarrow (b + 1)^2 = 2$$

پاسخ ۱۰.

$$f^{-1}(15) = f^{-1}(6) + 1 = t$$

قرار می دهیم:

$$\begin{cases} f(t) = 15 \\ f(t-1) = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot 2^t + 2^t = 15 \\ a \cdot 2^{t-1} + 2^{t-1} = 6 \end{cases}$$

یک دستگاه دو معادله و دو مجهول داریم؛ معادله پایین را در ۲ ضرب می کنیم:

$$\begin{cases} a \cdot 2^t + 2^t = 15 \\ -2a \cdot 2^{t-1} - 2 \cdot 2^{t-1} = -12 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع کنیم}} 2^t - 2 \cdot 2^{t-1} = 9 \Rightarrow 2^t - \frac{2}{2} \cdot 2^t = 9$$

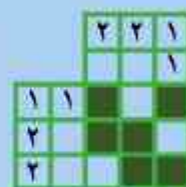
$$2^{t-1} = 9 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow a = \frac{9}{2} \Rightarrow f\left(\frac{9}{2}\right) = 29$$



برای مشاهده
پاسخ و هزینه را
بیش کنید

[illegible]

عددهای بیرون هر سطر و ستون، تعداد ردیف‌های مربع سیاه را که در آن سطر یا ستون وجود دارند، نشان می‌دهند. برای مثال ۴، ۵، ۹ و ۲ نمایش ۴ ردیف مربع سیاه ۴، ۵، ۹ و ۲ تایی است. در واقع عددهای جدا نمایش دهنده حداقل یک فضای خالی بین آن‌ها هستند.

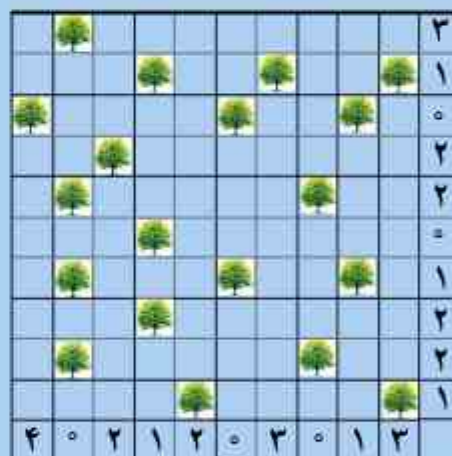


حللوا، اجتهدوا

جدول راهنما

جدول ۱: اهمیت

گل‌ها را در بالا، پایین یا طرفین درخت‌ها قرار دهید. گل‌ها نباید به صورت سطری، ستونی یا قطری کنار یکدیگر قرار گیرند تعداد گل‌های هر سطر و ستون بیرون از جدول نشان داده شده است. هر درخت فقط به یک گل وصل می‌شود.



	1	2	3	4	5	6	7	8
1								
2				↑				
3		↙						
4							↘	
5		↗		↘				
6						↗		
7								
8								

معددهای بیرون جدول تعداد
العاس موجود در هر سطر و ستون
را نشان می دهند هر ییکانه (فلش)



خداوند را اعظم

نشان دهنده راستای قرارگیری یک یا چند الماس را نشان می دهد و داخل خانه پیکانه، الماسی وجود ندارد. ممکن است الماس بلافاصله بعد از پیکانه یا با فاصله از آن قرار گیرد و ممکن است برای تمامی الماس ها پیکانه وجود نداشته باشد. لذا ممکن است قبل از پیکانه هم الماس هایی موجود باشند.

مسائل مسابقه‌ای و جایزه‌دار



سید محمد رضا هاشمی موسوی
مدرس و محقق ریاضیات



برای مشاهده
پاسخ قسمت
قبل، رمزینته را
بودش کنید

مسئله جایزه‌دار ۱۲۹ (جایزه نقدی)

معادله درجه چهارم عمومی زیر را (بدون استفاده از روش فراری و روش دکارت) به روش تقلیل درجه توسط معادله ویژه (حلال: HM) حل کنید:

$$a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad (\text{معادله عمومی درجه ۴})$$

$$x^4 + Ax + B = Cx + D \quad (\text{معادله حلال HM})$$

نشان دهید معادله حلال HM قابل تعمیم است و اگر برای حل معادله درجه ۶ به کار ببریم، معادله حلال آن از درجه ۱۰ است که چون از درجه معادله اصلی ۴ درجه بالاتر است، پس به صورت عملی «نظریه گالوا» ثابت و نتیجه می‌شود که معادله‌های درجه ۴ به بالا توسط رادیکال‌ها قابل بیان نیستند (معادله حلال معادله درجه ۵ از درجه ۶ است).

۱. تابع‌های با ضابطه‌های $f(x) = x+1$ و $(fog)(x) = \frac{2}{x-1}$ مفروض‌اند. برد تابع (gof) را بیابید.

۲. اگر انتهای کمان x در ناحیه اول دایره مثلثاتی باشد و داشته باشیم:

$$3f(\sin x) + 4f(\cos x) = \Delta x$$

ضابطه تابع f را بیابید.

۳. اگر داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow +} \left(\frac{1}{x^n} - \frac{1}{\sin^n x} \right) = 0$$

آنگاه حدود n را بیابید.

۴. ثابت کنید یک ریشه حقیقی معادله درجه سوم کانونیک

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

پس از دوازده مرتبه ریشگی با تقریب 0.00001 چنین است:

$$x = \sqrt[3]{1} \cdot \sqrt[3]{-\frac{\sqrt{3}}{9}} + \sqrt[3]{-\frac{\sqrt{3}}{9}} + \sqrt[3]{-\frac{\sqrt{3}}{9}} + \sqrt[3]{-\frac{\sqrt{3}}{9}}$$

$x \approx -1/8794 \approx -1/87928415$ (دوازده مرتبه ریشگی)



۴۸

شماره ۱۳۹ / بهار ۱۳۹۹

نیکلاس کوپرنیک

احسان یار محمدی



تمبر منتشر شده در جمهوری
مالی در سال ۲۰۱۱



تمبر منتشر شده در جمهوری
گینه استوایی در سال ۱۹۷۴



تمبر منتشر شده در جمهوری
رواندا در سال ۱۹۷۳



تمبر منتشر شده در رومانی در
سال ۱۹۷۳



تمبر منتشر شده در روانده در سال
۱۹۷۴



تمبر منتشر شده در جمهوری
لیبریا در سال ۱۹۷۳

«آلبوم ریاضیات» ستونی در مجلهٔ برهان دورهٔ دوم متوسطه است که به ارائهٔ تصویرها، تمیزها، سکه‌ها، اسکناس‌ها، تندیس‌ها، سردیس‌ها، نقاشی‌ها و... متناظر با ریاضی‌دانان ایران و جهان می‌پردازد. هدف ستون آلبوم ریاضیات این است که دانش‌پژوهان و علاقه‌مندان با مشاهدهٔ این موارد به احترام و اهمیتی پی‌ببرند که در سراسر جهان به ریاضی‌دانان و جایگاه آنان می‌شود.

نیکلاس کوپرنیک، ریاضی‌دان و اخترشناس برجستهٔ لهستانی بود که به رد «نظریهٔ زمین مرکزی» در منظومهٔ خورشیدی پرداخت و به‌عنوان نخستین فرد «نظریهٔ خورشیدمرکزی» را برای منظومهٔ خورشیدی ارائه کرد. نظریهٔ خورشیدمرکزی نیکلاس کوپرنیک باعث تحولات بسیار زیاد و ارزشمندی در دورهٔ رنسانس و اصلاحات علمی شد. از او به‌عنوان پدر اخترشناسی نوین یاد می‌شود.



تندیس نیکلاس کوپرنیک
در کراکف لهستان

۱

بهار نماد رویش و زایش است. این فصل نوید زندگی و سرزندگی را برای کرهٔ خاکی به ارمغان می‌آورد. به صورتی که دشت و دامنهٔ کوه‌ها سرسبز می‌شود و جانوران متعددی در این فصل به تولیدمثل می‌پردازند. در این بین پروانه که حشره‌ای زیباست، در ماه‌های فروردین و اردیبهشت در هر کوی و برزن جولان می‌دهد. خداوند بلندمرتبه زیبایی ویژه‌ای به این حشرهٔ ظریف عطا کرده است؛ به گونه‌ای که نقش‌های زیبای هندسی بر بال‌های او نگاشته شده‌اند. توجه ویژه به این نقش‌های دل‌پسند قدرت بی‌پایان خالق هستی هندسه‌دان را یادآور می‌شود. اما علاوه بر این نقش‌های چشم‌نواز که پروانه را با هندسه^۱ پیوند زده است، نام و یاد پروانه با یکی از کاربردی‌ترین شاخه‌های ریاضی یعنی نظریهٔ آشوب^۲ نیز در آمیخته است.

نظریهٔ آشوب اثر پروانه‌ای

احسان یارمحمدی

۳

اما اثر پروانه‌ای^۳ سنگ‌بنای نظریهٔ آشوب است. اثر پروانه‌ای بیان می‌کند که تغییرات بسیار اندک در یک سامانهٔ غیرخطی قطعی^۴ یک خروجی بسیار قابل توجه متفاوت را ایجاد می‌کند و تغییرات بزرگ، نتایج وسیع و انتظارات غیرقابل پیش‌بینی را در سامانهٔ مزبور به ارمغان خواهد آورد. اصطلاح اثر پروانه‌ای برای نخستین بار توسط ریاضی‌دان و هواشناس آمریکایی ادوارد نورتون لورنز^۵ پا به عرصهٔ حضور گذاشت.

پی‌نوشت‌ها

1. Geometry
2. Chaos Theory
3. Butterfly Effect
4. Deterministic Nonlinear System
5. Edward Norton Lorenz
6. Differential Equation

۲

نظریهٔ آشوب شاخه‌ای از ریاضیات است که امروزه به‌عنوان دانشی میان‌رشته‌ای ارزش خود را برای دانشمندان، اقتصاددانان، سیاست‌مداران، مدیران و ... هویدا ساخته است. نظریهٔ آشوب به مطالعه و بررسی سامانه‌های پویای آشوبناک می‌پردازد؛ سامانه‌هایی که در آن‌ها بی‌نظمی رکن رکین است. این بی‌نظمی در ظاهر تصادفی است، اما در واقع هر نوع بی‌نظمی موجود در سامانه‌های آشوبناک از قواعد حتمی و قوانین قطعی پیروی می‌کند که به‌شدت به شرایط اولیه حساس‌اند.

۴

لورنز در حال پژوهش روی آب و هوای جو زمین با استفاده از یک مدل ریاضی شامل تعدادی معادلهٔ دیفرانسیل^۶ بود. او برای حل این معادله‌ها از روش‌های عددی به کمک رایانه بهره می‌برد. بعد از چند روز کار او متوجه شد تغییرات کوچک در حد یک عدد اعشار برای عددهای واردشده به رایانه، به خروجی بی‌اندازه بزرگ و بسیار قابل تأملی منتج شده است.

۵

او ابتدا قصد داشت این دستاورد خود را با استفاده از واژگان مرغ دریایی و طوفان در قالب مقاله‌ای ارائه کند. اما به منظور ایجاد فضای شاعرانگی و جذابیت بیشتر در عنوان مقاله، با عاریه گرفتن از دو کلمهٔ «پروانه» و «گردباد»، مقاله‌ای با عنوان «آیا بال‌زدن پروانه‌ای در برزیل می‌تواند باعث ایجاد گردباد در تگزاس شود؟» ارائه کرد که توجه جهانیان را به خود معطوف ساخت.