

متوسطه ۲
ریاضی

۱۲۸



وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی



فصلنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

برای دانش آموزان دوره دوم متوسطه اهلیار دبیران ریاضی

شماره بی دربی ۱۲۸ / زمستان ۱۴۰۲ / دوره سی و سوم / ۴۸ صفحه
www.roshdmag.ir

۲۴
اسفند

14
March



روز جهانی عدد پی

π

۳/۱۴ نلتله لطیف

درباره عدد

ساده شلغت انلیز

اجسام افلاطونی و توپ های فوتبال

اسپیروگراف

هر مثلث دلخواه، متساوی الاضلاع است!!!



هندسه در معماری ایران با توجه به اصول
فکری و عرفانی و زیباشناختی به اجرا درآمده است.

از گذشته تا کنون استفاده از اشکال مختلف
هندسی برای ساخت مکان های تاریخی و بناهای
باستانی رواج داشته تا حدی که این سازه ها زبانزد
تمام باستان شناسان می باشد و تعداد زیادی
بازدید کننده را به طور سالانه به خود اختصاص
داده اند و از همین رو برای کشور از ارزش
بالایی برخوردار هستند.

π 3.14 | ۳.۱۴ ۳.۱۴ نکتہ لطیف درباره عدد پی

مجید حکمت

سردبیر

خواهد بود:

(نکته سوم) $Pi \times z \times a = \text{Pizza}$ = حجم پیتزا
 ریاضی دوستان خوش ذوق روز جهانی پی را با شیرینی پای جشن می گیرند. شاید گمان کنید دلیل این کار تشابه نگارشی پی و پای باشد؛ البته این هم می تواند باشد، ولی دست به قلم شوید و عدد پی را با رقم های لاتین تا دو رقم اعشار (3.14) بنویسید و در آینه به آن نگاه کنید؛ مشاهده خواهید کرد که املاي آن مشابه PIE است (انصافاً حقش است ۰.۱۴، نکته برایش در نظر بگیرید.)

از اینکه شما دبیران محترم و علاقه مندان به ریاضی و دانش آموزان عزیز نسبت به مجله خودتان اظهار لطف دارید، سپاسگزاریم؛ بعد از انتشار شماره قبل، نامه های الکترونیکی زیادی را از سوی شما دریافت کردیم؛ نمونه اش را هم در بالا ذکر کردیم. نظرات و مطالب ریاضی خود را از مسیرهای زیر برای ما ارسال کنید. دوستان داریم.

راه های ارتباط:

- borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir
 - www.roshdmag.ir/u/3ao

پی نوشت ها

۱. غیاث الدین جمشید کاشانی دانشمند ریاضی دان و اخترشناس ایرانی قرن هشتم هجری است. وی در قرب به الکاشی معروف است.
 ۲. ۱۴ مارس میلادی مطابق با ۲۳ یا ۲۴ اسفند تقویم شمسی است.

روزی هیجان انگیز برای ریاضی دانان به شمار می آید (نکته دوم).
 در خبرها آمده بود که یک پیتزافروش ایتالیایی در روز جهانی پی (۱۴ مارس)، به مدت ۳ ساعت و ۱۴ دقیقه پیتزای رایگان عرضه می کند؛ ارادت یک پیتزافروش به عدد پی عجیب به نظر می رسد؛ چه ارتباطی بین پیتزا و عدد پی وجود دارد؟ مطلب ارسالی یکی از دوستان



نوجوان برهان، خانم رامینا یار احمدی دانش آموز پایه یازدهم تجربی ساکن بروجرد استان لرستان می تواند پاسخی لطیف به این سؤال باشد:

یک پیتزای خوش مزه دایره ای شکل را با شعاع z و ضخامت a در نظر بگیرید؛ حالا یک ریاضی دان می خواهد حجم این پیتزای خوش مزه را حساب کند؛ چون شکل واقعی پیتزا یک استوانه است، پس باید مساحت قاعده در ارتفاع ضرب شود. لذا حجم پیتزا به این صورت

به نام خدایی که از نسبت محیط دایره به قطر آن آگاه است.

غیاث الدین جمشید کاشانی

در واقع نسبت محیط دایره به قطر آن عدد پی (π) است که با حروف لاتین به صورت Pi نمایش داده می شود. پی عددی گنگ است؛ یعنی مقدار دقیق آن رقم های اعشاری نامحدود دارد، به طوری که تا بی نهایت رقم و بدون پیروی از الگویی خاص ادامه پیدا می کند. جالب است بدانید، در سال های اخیر، به کمک برنامه های رایانه ای تا بیش از یک تریلیون رقم اعشار برای این عدد محاسبه شده است.

و اما:

حدود ۶۰۰ سال قبل در ایران، غیاث الدین جمشید کاشانی^۱، در رساله المحيطیه خود درباره دایره عدد پی را تا ۱۶ رقم اعشار نوشته است که تا ۱۸۰ سال پس از او، کسی نتوانسته بود به این رقم برسد؛ (باز هم ایران (نکته اول))

عدد پی در ریاضیات به قدری اهمیت دارد که از سال ۱۹۸۸ میلادی (۱۳۶۶ شمسی)، یک روز جهانی به این عدد جادویی اختصاص یافته است. ۱۴ ماه مارس^۲ که چهاردهمین روز از سومین ماه تقویم میلادی است، به عنوان روز عدد پی در جهان شهرت دارد. دلیل نام گذاری هم این است که تاریخ این روز که به شکل ۳/۱۴ نوشته می شود، ظاهری کاملاً مشابه عدد پی (π) دارد؛ لذا

ابن جهان کهنه را برهان نو وقتی جبر باتوی کفش مجموعه همامی لنرا

محرم ایردموسی

دکترای آموزش ریاضی

عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی

ابتدا به چند مسئله زیر در زمینه مجموعه‌ها توجه کنید. شاید بعضی از آن‌ها را قبلاً دیده‌اید و روی آن‌ها فکر کرده‌اید:

مسئله ۱. اگر $A \cup B = A \cup C$ و $A \cap B = A \cap C$ ، آنگاه $B = C$ ثابت کنید.

مسئله ۲. اگر $A \cap B = A \cup B$ ، آنگاه ثابت کنید: $A = B$

مسئله ۳. برای هر سه مجموعه A ، B و C ثابت کنید: $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

مسئله ۴. برای هر سه مجموعه A ، B و C ثابت کنید: $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$ که در آن عمل Δ تفاضل متقارن نامیده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$X \Delta Y = (X - Y) \cup (Y - X)$$

برای حل این مسئله‌ها روش‌های متفاوتی وجود دارند که مهم‌ترین آن‌ها روش عضوگیری است. ما در اینجا قصد نداریم به سراغ این روش برویم. می‌خواهیم این مسئله‌ها را به کمک یک پل ارتباطی در محدوده مجموعه‌ها، به محدوده جبر منتقل و با یک روش جبری آن‌ها را حل کنیم. این پل راهبردی و مهم، «تابع مشخصه» نام دارد که در ادامه با مفهوم و تعریف آن آشنا می‌شوید.

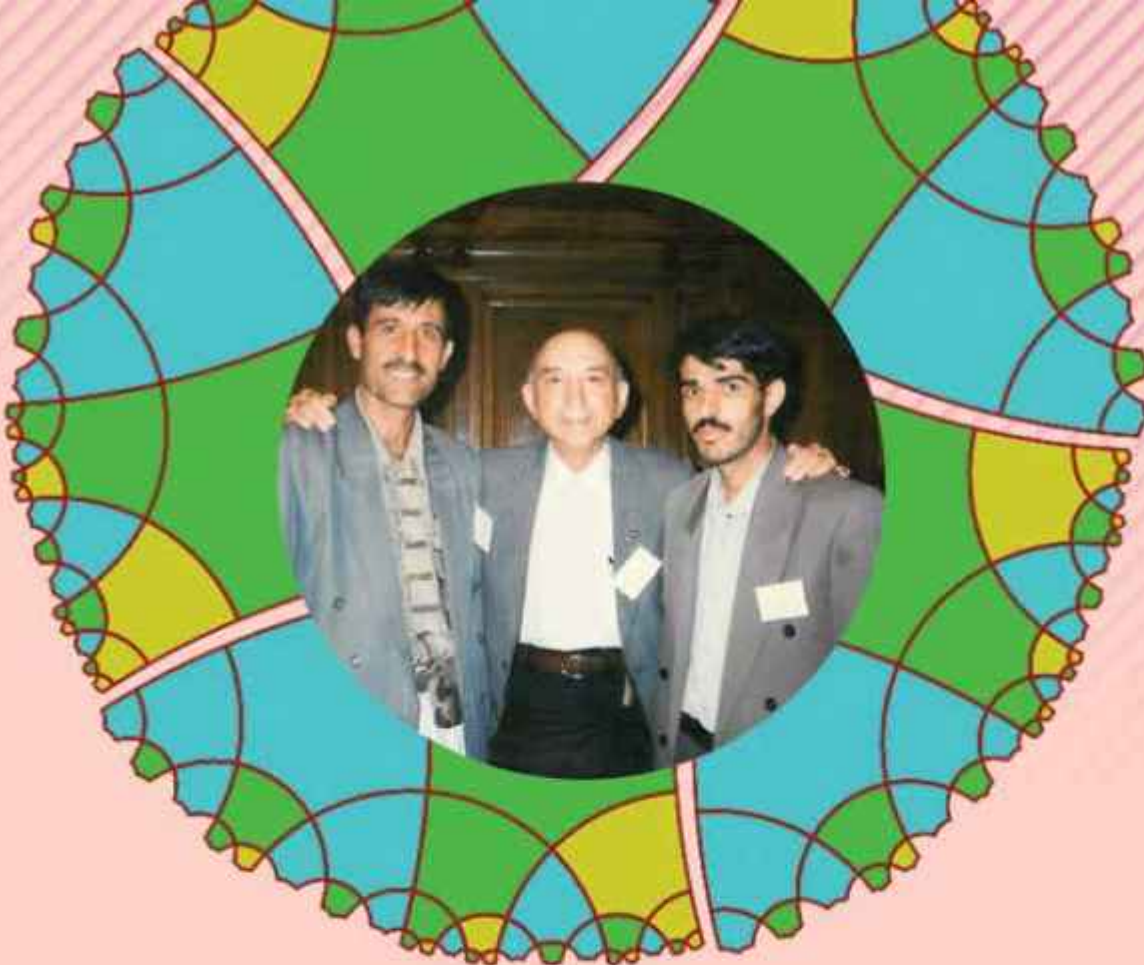
تعریف: فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از مجموعه مرجع M باشد. تابع مشخصه A (نسبت به M) تابعی است از M به $\{0, 1\}$ که با نماد f_A نمایش داده می‌شود و به این صورت تعریف می‌شود:

$$f_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

با کمی دقت روی تعریف متوجه خواهید شد که چرا به این تابع، تابع مشخصه A می‌گوییم. در واقع با معلوم بودن تابع، می‌توان A را به‌طور یکتا مشخص کرد. دقت کنید که برای هر زیرمجموعه A از M ، یک تابع مشخصه می‌توان تعریف کرد.

مثال: فرض کنید: $M = \{1, 2, \dots, 7\}$ و $A = \{2, 4, 6\}$ در این صورت: $f_A(7) = f_A(4) = f_A(6) = 1$ و $f_A(1) = f_A(3) = f_A(5) = f_A(7) = 0$. برای مکمل مجموعه A ، یعنی A^c ، مقادیر تابع مشخصه را بنویسید. اگر B مجموعه عددهای اول عضو M باشد، جدول زیر را تکمیل کنید:

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
$f_B(x)$	۰	۱					
$f_{A \cap B}(x)$	۰		۰				
$f_{A \cup B}(x)$		۱					
$f_{A-B}(x)$			۰	۱			



از راست دکتر حمیدرضا علیکی (دانشگاه صنعتی شیراز)

پروفسور لطفی علی عسگرزاده و پروفسور ماشاءالله ماشین چی (دانشگاه شهید باهنر کرمان)
کنفرانس بین‌المللی پردازش اطلاعات و مدیریت عدم قطعیت در سیستم‌های دانش‌بنیان (IPMLU)

عضو A است و نه عضو B . پس: $f_A(x) = f_B(x) = 0$ و بنابراین:
 $f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) \cdot f_B(x) = 0$ که نشان می‌دهد دو
طرف برابرند. اگر: $f_{A \cup B}(x) = 1$ ، آنگاه: $x \in A \cup B$. سه حالت
پیش می‌آید:

حالت اول. x هم عضو A است و هم عضو B . در این صورت:
 $f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) \cdot f_B(x) = 1 + 1 - 1 \times 1 = 1$

حالت دوم. x فقط در A است. در این صورت:
 $f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) \cdot f_B(x) = 1 + 0 - 1 \times 0 = 1$

حالت سوم. x فقط در B است. مشابه حالت قبل، طرف دوم
تساوی مجدداً برابر ۱ است. در نتیجه تساوی باز هم برقرار است.

سعی کنید خاصیت ۶ را از خاصیت‌های ۳ و ۴ و تساوی
 $A - B = A \cap B^c$ نتیجه بگیرید. سعی کنید خاصیت‌های دیگر
را خودتان ثابت کنید.

دو خاصیت زیر را هم به عنوان تمرین خود نشان دهید:

خاصیت ۷.

$$f_{A \Delta B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - 2f_A(x) \cdot f_B(x)$$

قبل از آنکه به سراغ حل مسئله‌ها برویم، لازم است چند خاصیت
مهم این تابع را بیان کنیم. فرض کنیم A و B دو مجموعه از M
باشند و A^c نشان‌دهنده مکمل A باشند.

خاصیت ۱. دو مجموعه A و B برابرند، اگر و تنها اگر: $f_A = f_B$
(یادآوری می‌کنیم که دو تابع f و g برابرند، هرگاه دامنه یکسان داشته
باشند و در هر نقطه x از دامنه داشته باشیم: $(f(x) = g(x))$).

خاصیت ۲. $f_{\emptyset}(x) = 0$ و $f_M(x) = 1$.

خاصیت ۳. $f_{A^c}(x) = 1 - f_A(x)$.

خاصیت ۴. $f_{A \cap B}(x) = f_A(x) \cdot f_B(x)$.

خاصیت ۵. $f_{A \cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) \cdot f_B(x)$.

خاصیت ۶. $f_{A - B}(x) = f_A(x) - f_A(x) \cdot f_B(x)$.
این خاصیت‌ها را می‌توانید به راحتی ثابت کنید. در اینجا به اثبات
خاصیت‌های ۱ و ۵ اکتفا می‌کنیم.

اثبات ۱. اگر: $A = B$ ، آنگاه هر عضو x از A ، عضو B هم خواهد
بود و برعکس. در نتیجه: $f_A(x) = 1$ ، اگر و تنها اگر: $f_B(x) = 1$
در نتیجه: $f_A = f_B$ به طور مشابه از تساوی $f_A = f_B$ می‌توانید تساوی دو
مجموعه را نتیجه بگیرید.

اثبات ۵. اگر $f_{A \cup B}(x) = 0$ ، آنگاه: $x \notin A \cup B$. در نتیجه x نه

خاصیت ۸.

$$(f_A(x))^r = f_A(x)$$

حال به سراغ مسئله‌های ابتدای مقاله می‌رویم:

حل مسئله ۱. از مفروضات مسئله داریم:

$$f_{A \cup B} = f_{A \cup C} \text{ و } f_{A \cap B} = f_{A \cap C}$$

در نتیجه:

$$f_A \times f_B = f_A \times f_C$$

و

$$f_A + f_B = f_A + f_C$$

که از این دو تساوی نتیجه می‌شود:

$$f_A + f_B - f_A \times f_B = f_A + f_C - f_A \times f_C$$

خاصیت ۱ نشان می‌دهد که: $B=C$

حل مسئله ۲.

$$A \cup B = A \cap B \Rightarrow f_A + f_B - f_A \times f_B = f_A \times f_B$$

$$\Rightarrow f_A^2 + f_B^2 - 2f_A \times f_B = 0$$

$$\Rightarrow (f_A - f_B)^2 = 0 \Rightarrow f_A = f_B \Rightarrow A = B$$

دقت کنید که از خاصیت‌های ۱، ۴، ۵ و ۸ استفاده کردیم.

حل مسئله ۳.

$$f_{(A-B)-C} = f_{A-B} - f_{A-B} \times f_C$$

$$= (f_A - f_A \times f_B) - (f_A - f_A \times f_B) \times f_C$$

$$= f_A - f_A \times f_B - f_A \times f_C + f_A \times f_B \times f_C$$

$$= f_A - f_A \times (f_B + f_C - f_B \times f_C)$$

$$= f_A - f_A \times f_{B \cup C} = f_{A - (B \cup C)} \Rightarrow (A - B) - C = A - (B \cup C)$$

سعی کنید مسئله ۴ و مسئله‌های زیر را به کمک تابع مشخصه حل کنید:

$$\text{مسئله ۵. } A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B$$

$$\text{مسئله ۶. ثابت کنید: } A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$$

مسئله ۷. (قوانین دمورگان) برای هر دو مجموعه A و B ثابت کنید:

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C \text{ و } (A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

مسئله ۸. برای هر مجموعه A ثابت کنید:

$$\sum_{x \in M} f_A(x) = n(A)$$

مسئله ۹. به کمک تابع مشخصه تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه Π عضوی را به دست آورید.

سعی کنید این روش را در مواجهه با هر مسئله دیگری درباره مجموعه‌ها به کار بگیرید. نکته پایانی اینکه اگر مقدار تابع مشخصه به جای صفر و یک بتواند هر مقداری از بازه $[0, 1]$ را قبول کند، آنگاه وارد دنیای مجموعه‌های فازی (بخشی از ریاضیات فازی) می‌شویم که شاخه جدیدی در ریاضیات است و توسط یک ریاضی‌دان ایرانی به نام پروفیسور **لطفی علی عسکریزاده** مشهور به **لطفی‌زاده** ابداع شده است.

پروفیسور لطفی‌زاده بنیان‌گذار منطق فازی در ریاضیات است. او دوران دبیرستان را در «دبیرستان البرز تهران» طی کرد و بعد از آن وارد دانشکده فنی تهران شد و در رشته مهندسی برق تحصیل کرد. با شروع جنگ جهانی دوم، او به آمریکا مهاجرت کرد و در دانشگاه

MIT ادامه تحصیل داد و در سال ۱۹۴۹ فارغ‌التحصیل شد. پروفیسور لطفی‌زاده ۱۰ سال در دانشگاه کلمبیا تدریس کرد و در سال ۱۹۵۷ به درجه **استاد تمامی** ارتقا یافت. او اثر پیش‌گامانه خود در زمینه **مجموعه‌های فازی** را در ۱۹۶۵ منتشر کرد؛ اثری که در آن به شرح نظریه مجموعه فازی پرداخت. او همچنین در ۱۹۷۳ **نظریه منطق فازی** خود را طرح کرد.

پروفیسور لطفی‌زاده دارای ۲۵ **دکترای افتخاری** از دانشگاه‌های معتبر دنیاست. بیش از ۲۰۰ مقاله علمی را به تنهایی در کارنامه علمی خود دارد و در هیئت تحریریه ۵۰۰ مجله علمی جهان مقام «مشاور» را داراست. وی یکی از پژوهشگرانی است که بیشترین ارجاع در مقالات علمی دنیا را دارند. در اسفندماه ۱۳۹۴ **دانشگاه تهران** به‌عنوان اولین دانشگاه محل تحصیل ایشان ضمن برگزاری بزرگداشتی، نشان **دکترای افتخاری** خود را به ایشان اهدا کرد.



۵

شماره ۱۷۸ | زمستان ۱۴۰۴

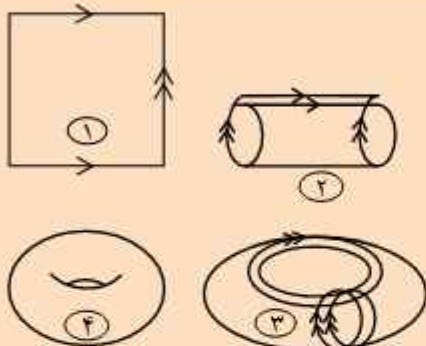


چور دیگر باید دید

مجموعه‌های متناظر با همی



خسرو داودی
آرش رستگار



(د) از چسباندن نقطه‌های روی یک مکعب توپر نیز فضایی حاصل می‌شود که تخیل آن کمی پیچیده است. چون این فضا سه‌بعدی است. اما در فضای سه‌بعدی که ما تخیل می‌کنیم و همان $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ یا $\mathbb{R}^3$ است، نمی‌تواند قرار بگیرد. اگر شما در چنین مکعبی زندگی می‌کردید، زندگی چگونه بود؟ تخیل خود را به کار بیندازید.

(هـ) نشان دهید صفحه همان $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ و فضا همان $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ است. پس نقطه‌های صفحه را با دوتایی‌های مرتب و نقطه‌های فضا را با سه‌تایی‌های مرتب می‌توان نشان داد.

(و) در مورد مکعب چهاربعدی چه می‌توانید بگویید؟

مسئله ۲. روش زیر را برای ضرب کردن عبارت‌های جبری می‌توان به کار برد:

$$(2x+1)(3x+5) = 6x^2 + 10x + 3x + 5 = 6x^2 + 13x + 5$$

x	3x	5
2x	6x ²	10x
1	3x	5

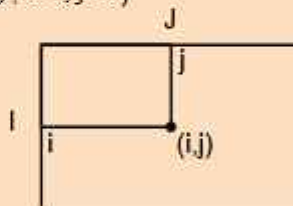
این روش را برای ضرب عبارت‌های درجه دوم در هم و یا عبارت‌های درجه‌های بالاتر بسط دهید. آیا به نظر شما ضرب کردن عبارت‌های جبری به روش بالا شباهتی به ضرب کردن $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ در مسئله قبل دارد؟ شباهت‌ها کدام و تفاوت‌ها کدام‌اند؟

مسئله‌های کتاب دهم

فصل سوم: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

مسئله ۱. همان‌طور که یک عدد را می‌توان به توان دو یا سه تا توان‌های بالاتر رساند، می‌توان یک شکل هندسی را به توان رساند. الف) ابتدا ضرب دو بازه بسته I و J را تعریف می‌کنیم. حاصل ضرب $I \times J$ یک سطح مستطیل به طول I و به عرض J است. در مستطیل ما مهم نیست I که نماینده طول است از J که نماینده عرض است، بزرگ‌تر یا کوچک‌تر باشد به زبان جبری $I \times J$ مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب است:

$$I \times J = \{(i, j) \mid i \in I, j \in J\}$$



هر نقطه‌ای از مستطیل به یک زوج مرتب از نقطه‌های I و J متناظر می‌شود و برعکس هر انتخاب $i \in I$ و $j \in J$ یک نقطه یگانه از مستطیل را می‌دهد که به i و به j تصویر می‌شود درست مانند شکل شما حاصل ضرب سه بازه بسته I, J و K را چطور تعریف می‌کنید؟

(ب) حال حاصل ضرب یک عدد در خودش را به زبان هندسه مدل می‌کنیم. $I \times I$ با یک مربع متناظر می‌شود. چون طول و عرض آن‌ها برابرند. $I \times I$ با یک مکعب متناظر می‌شود. می‌توان $I \times I$ را با I^2 و $I \times I \times I$ را با I^3 نمایش داد. حال شما بگویید اگر C نماینده یک دایره باشد، $C \times C$ به چه شکلی خواهد بود؟ $C \times C \times C$ چطور؟

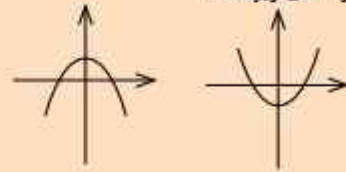
(ج) می‌توان C را با به هم چسباندن نقطه‌های انتهای I به دست آورد. پس $C \times C$ را می‌توان با به هم چسباندن نقطه‌های مرزی $I \times I$ به دست آورد.

نقطه‌های روبه‌رو از ضلع‌های موازی را به هم بچسبانید. چه شکلی حاصل می‌شود؟ آیا شکل حاصل با آنچه از $C \times C$ می‌شناسید یکسان است؟

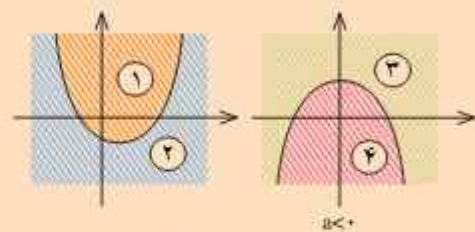


فصل چهارم: معادله‌ها و نامعادله‌ها

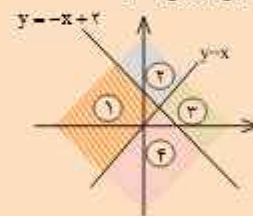
مسئله ۱. نمودار یک تابع درجه دوم به شکل $y = ax^2 + bx + c$ به یکی از صورت‌های زیر است:



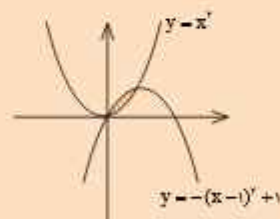
الف) ناحیه‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ با چه نامساوی‌هایی مشخص می‌شوند؟ کدام ناحیه‌ها با نامساوی مشترکی به نمایش گذاشته می‌شوند؟



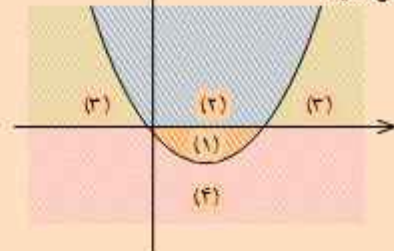
ب) چهار ناحیه محصور بین دو خط $y = -x + 2$ و $y = x$ را با نامساوی‌ها به زبان جبری بیان کنید.



ج) ناحیه هاشورخورده بین نمودار دو تابع $y = x^2$ و $y = -(x-1)^2 + 1$ محصور است. آیا می‌توانید این ناحیه را توسط نامساوی‌ها به زبان جبری بیان کنید؟

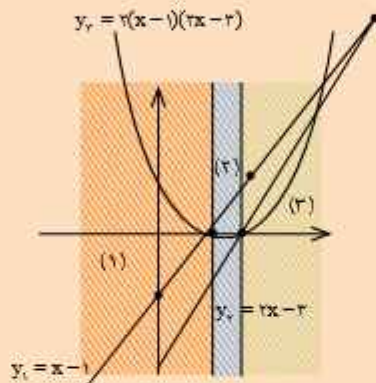


د) نمودار تابع $y = (x-1)^2 - 1$ در شکل مقابل رسم شده است. هریک از ناحیه‌های هاشورخورده ۱، ۲، ۳ و ۴ را با یک عبارت نامساوی بیان کنید.



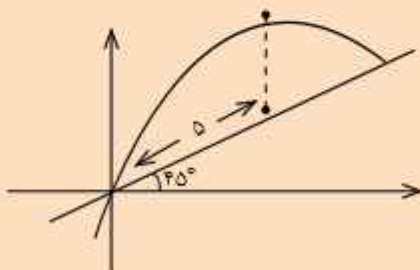
ه) عبارت $|x| + |y| < 1$ چه نقطه‌هایی در صفحه را معین می‌کند؟

مسئله ۲. عبارت $y_1 = x - 1$ را به‌طور هندسی با کمک نمودار آن تعیین علامت کنید. همین کار را برای $y_2 = 2x - 3$ انجام دهید و هر دو تابع را در یک نمودار رسم کنید. حال تابع $y_3 = 2(x-1)(2x-3)$ را نیز در همان شکل رسم کنید و بگویید تعیین علامت y_3 چه ارتباطی با تعیین علامت y_1 و y_2 دارد.



درباره علامت y_1 ، y_2 و y_3 در هریک از ناحیه‌های هاشورخورده ۱، ۲ و ۳ بحث کنید.

مسئله ۳. یک قهرمان پرتاب وزنه در پایین تیه‌ای به شیب 45° ایستاده است. او قصد دارد گوی سنگین را چنان پرتاب کند که سایه عمودی مرتفع‌ترین نقطه‌ای که گوی در آن قرار می‌گیرد روی سطح تپه ۵ متر از خودش جلوتر باشد. تعیین کنید گوی در چه فاصله‌ای از محل پرتاب به روی تپه سقوط و با آن برخورد می‌کند.



پاسخ
تمرین‌های
پایه دهم



نکات تکمیلی
برای دبیران
پایه دهم



Y

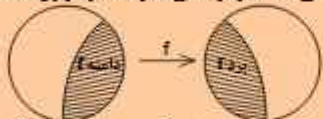
شماره ۱۷۸ | زمستان ۱۴۰۴

(د) حال عددهای مربع کامل طبیعی را که می‌شناسید بر ۵ تقسیم کنید و باقی‌مانده آن‌ها را در نظر بگیرید. این باقی‌مانده‌ها را با قسمت (ج) مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

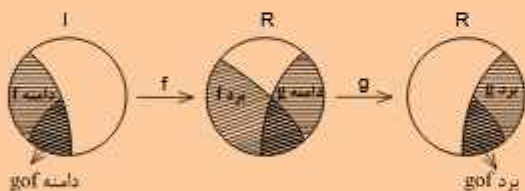
(ه) حال همین محاسبات را برای عدد اول p دیگری انجام دهید و $f: \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p$ را با معادله $f(x) = x^2$ در نظر بگیرید و بگویید کدام دسته‌های هم‌ارزی مربع کامل هستند.

(و) اگر p و q دو عدد اول باشند، اینکه $[p]$ در $\mathbb{Z}_q$ مربع کامل باشد و اینکه $[q]$ در $\mathbb{Z}_p$ مربع کامل باشد، به هم مربوط هستند. این ارتباط را «قانون تقابل مربعی گاوس» می‌گویند. صورت قانون تقابل مربعی گاوس را در اینترنت بیابید و سعی کنید آن را به زبان ساده شرح دهید.

مسئله ۲. گاهی دامنه و برد تابع‌ها را با نمودار ون نمایش می‌دهند.



(الف) حاصل ترکیب تابع‌های f و q را در نظر بگیرید. در مورد دامنه و برد $g \circ f$ چه می‌توانید از روی نمودار بگویید؟



(ب) چرا دامنه $g \circ f$ قسمتی از دامنه f است که به اشتراک برد f و دامنه g در نمودار وسط می‌رود؟

(ج) چرا برد $g \circ f$ قسمتی از برد g است که تصویر اشتراک برد f و دامنه g است که در نمودار وسط قرار دارد؟

مسئله ۳.

(الف) وارون تابع $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ را به روش جبری محاسبه کنید.

(ب) حال نمودار تابع $f(x)$ و تابع $f^{-1}(x)$ را در یک دستگاه مختصات مشترک به روش نقطه‌گذاری رسم کنید.

(ج) تحقیق کنید که نمودار $f(x)$ و نمودار $f^{-1}(x)$ نسبت به خط $y=x$ تقارن آینه‌ای دارند.

مسئله ۴. تابع‌های چندجمله‌ای موجوداتی مشابه عددهای صحیح هستند. علاوه بر اینکه جمع، تفریق و ضرب برای آن‌ها تعریف می‌شود و تابع ثابت مشابه نقشی را که عدد یک در عددهای صحیح ایفا می‌کند، در تابع‌های چندجمله‌ای بازی می‌کند. تجزیه



کتاب یازدهم

فصل دوم: تابع

مسئله ۱. تابع $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ با معادله $f(x) = x^2$ را در نظر

بگیرید.

(الف) مفهوم مربع کامل بودن یک عدد صحیح را به کمک دامنه و برد تابع f چگونه تعریف می‌کنید؟

(ب) حال دامنه و برد همین عبارت را به عنوان تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ در نظر بگیرید. آیا مفهوم مربع کامل بودن برای یک عدد حقیقی را هم می‌توان تعریف کرد؟ کدام عددهای حقیقی مربع کامل هستند؟

(ج) حال عددهایی را که در تقسیم بر یک عدد اول مانند عدد ۵ باقی‌مانده مشترکی دارند، در یک دسته هم‌ارزی قرار دهید. این

دسته‌های هم‌ارزی را با باقی‌مانده آن‌ها مشخص می‌کنیم. در حالت

عدد ۵ دسته‌های هم‌ارزی $[0], [1], [2], [3], [4]$ هستند. جمع و

ضرب کردن روی این دسته‌های هم‌ارزی خوش‌تعریف است. این

را خودتان با محاسبه امتحان کنید. این دسته‌های هم‌ارزی را که

جمع و ضرب روی آن‌ها خوش‌تعریف است با $\mathbb{Z}_5$ نمایش می‌دهیم. خواهد بود. حال با بررسی دامنه و برد f بگویید کدام دسته‌های

هم‌ارزی مربع کامل هستند.

یادداشت: جمع کردن خوش‌تعریف است یعنی هر عضوی از مثلاً $[2]$ انتخاب کنیم، مانند ۷ یا ۱۲، و هر عضوی از مثلاً $[3]$ انتخاب کنیم، مانند ۱۸ یا ۲۳، حاصل جمع آن‌ها در $[0]$ قرار می‌گیرد. یعنی در دسته هم‌ارزی مشترکی می‌افتند.



به عوامل اول در چندجمله‌ای‌ها معنی دارد.

چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر موجوداتی مشابه عددهای اول هستند. هر عدد صحیح n را می‌توان به شکل یگانه‌ای به حاصل ضرب $n = \pm p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ تجزیه کرد که p_i ها عددهای اول هستند. هر چندجمله‌ای $f(x)$ را نیز می‌توان به شکل یگانه‌ای به صورت حاصل ضرب $f(x) = P_1^{\alpha_1}(x) \dots P_k^{\alpha_k}(x)$ تجزیه کرد که $P_i(x)$ ها چندجمله‌ای‌های تجزیه‌ناپذیر هستند.

چندجمله‌ای‌های درجه دوم که ریشه‌های حقیقی ندارند، تجزیه‌ناپذیر هستند. مفهوم تجزیه‌پذیری در چندجمله‌ای‌های دارای ضرب‌های صحیح می‌تواند بین چندجمله‌ای‌های دارای ضرب‌های صحیح مطرح شود. یعنی یک چندجمله‌ای را در $\mathbb{Z}$ تحویل‌ناپذیر می‌گوییم اگر نتوان آن را به صورت حاصل ضرب عوامل با ضرب‌ها در $\mathbb{Z}$ نوشت؛ حتی اگر ریشه‌های حقیقی داشته باشد.

الف) یک چندجمله‌ای درجه دوم مثال بزنید که ضرب‌های آن صحیح باشد و در $\mathbb{Z}$ تحویل‌ناپذیر، ولی در $\mathbb{R}$ تحویل‌پذیر باشد.

ب) از تقسیم عددهای صحیح بر هم، عددهای گویا به دست می‌آیند. از تقسیم چندجمله‌ای‌ها بر هم، تابع‌های گویا به دست می‌آیند. عددهای گویا و تابع‌های گویا چه شباهتی به هم دارند؟

ج) هر عدد گویای r را می‌توان به صورت یگانه به شکل $r = \pm p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ نوشت که در آن p_i ها عددهای صحیح هستند. آیا مشابه این حکم برای تابع‌های گویا نیز درست است؟

د) اثبات اینکه $\sqrt{x}$ عددی گویا نیست که در آن p عددی اول است را در نظر بگیرید. می‌توانید نشان دهید $\sqrt{p(x)}$ را که در آن $P(x)$ یک چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر است نمی‌توان به صورت چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای نمایش داد؟

هـ) در مورد دامنه و برد تابع‌های گویا چه می‌توان گفت؟ در مورد دامنه و برد تابع‌های چندجمله‌ای چه می‌توان گفت؟



پاسخ
تمرین‌های
پایه یازدهم



نکات تکمیلی
برای دبیران
پایه یازدهم

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$



۹

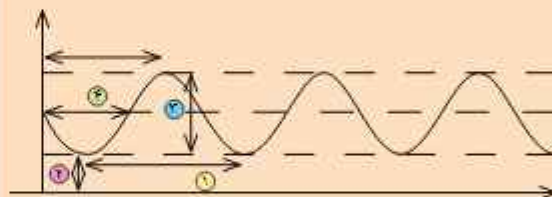
شماره ۱۳۸ | زمستان ۱۴۰۴



کتاب دوازدهم

فصل دوم: مثلثات

مسئله ۱. تابع $f(x) = a \sin(bx + c) + d$ را در نظر بگیرید و طول‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ را بر حسب a ، b ، c و d نمایش دهید. آیا نمایش ۴ یگانه است؟ نمایش‌های ۱، ۲ و ۳ چگونه؟



حال a ، b ، c و d را بر حسب ۱، ۲، ۳ و ۴ بنویسید. می‌بینید که با داشتن نمودار یک تابع سینوسی می‌توان برای آن معادله‌ای نوشت. آیا این معادله یگانه است؟ آیا می‌توان $f(x)$ را به شکل $a' \cos(b'x + c') + d'$ نوشت؟ اگر بدانیم: $a' \cos(b'x + c') + d' = a \sin(bx + c) + d$ درباره ارتباط a ، b ، c و d با a' ، b' ، c' و d' چه می‌توان گفت؟

مسئله ۲. نقطه‌هایی در صفحه با مختصات (x, y) را در نظر بگیرید که در آن: $x = \sin t$ و $y = \sin t$. در اینجا t یک پارامتر و یک عدد حقیقی است. می‌توانید در آن عددگذاری کنید و چندین زوج (x, y) روی نمودار رسم کنید. چنین نموداری را یک «خم لیسازو» می‌گویند. با نقطه‌یابی این نمودار را رسم کنید. به کمک نرم‌افزار «جئوجبرا» (هندسه - جبر)، نمودارهای حالت‌های کلی‌تر زیر را رسم کنید:

$$\begin{cases} x = \sin nt \\ y = \cos mt \end{cases} \quad \begin{cases} x = \sin nt \\ y = \sin mt \end{cases}$$

تناوب تابع‌های $\sin nt$ ، $\sin mt$ و $\cos mt$ چگونه خود را در نمودار لیسازو نشان می‌دهند؟



۱۵

شماره ۱۳۸ | زمستان ۱۴۰۳

$$\cosh^2 \theta + \sinh^2 \theta = 1$$



$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

فرمول‌های $\sinh(\alpha + \beta)$ و $\cosh(\alpha + \beta)$ را برحسب $\sinh \alpha$ ، $\cosh \alpha$ ، $\sinh \beta$ و $\cosh \beta$ حدس بزنید، و سپس با عددگذاری، درستی آن‌ها را تحقیق کنید.

(ب) با توجه به فرمول‌های $\sin(-\theta) = -\sin \theta$ و $\cos(-\theta) = +\cos \theta$ ، فرمول‌هایی برای $\sinh(-\theta)$ و $\cosh(-\theta)$ حدس بزنید و سپس با عددگذاری درستی آن‌ها را تحقیق کنید.

(ج) با توجه به فرمول:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

فرمولی برای $\tanh(\alpha + \beta)$ برحسب $\tanh \alpha$ و $\tanh \beta$ حدس بزنید. سپس با عددگذاری درستی فرمول خود را بررسی کنید.

مسئله ۵. کاربردهای تابع‌های مثلثاتی $\sin \theta$ و $\cos \theta$ در زندگی روزمره فراوان هستند. کارکرد این تابع‌ها محاسبه در مثلث‌های قائم‌الزاویه متشابه است. برای تابع‌های مثلثاتی هذلولی $\sinh \theta$ و $\cosh \theta$ چه کاربردهایی در زندگی روزمره می‌شناسید؟ توجه کنید که بیضی مجموعه نقاطی است که جمع فاصله‌های آن‌ها از دو نقطه داده‌شده به نام «کانون» برابرند. دایره بیضی‌ای است که کانون‌های آن بر هم منطبق باشند. هذلولی هم مجموعه نقاطی است که تفاضل فاصله‌های آن‌ها از دو نقطه داده‌شده به نام کانون برابرند. این دو نقطه را نمی‌توان بر هم منطبق کرد. مصداق‌هایی از کاربرد در نظر گرفتن تفاضل فاصله از دو نقطه در زندگی روزمره پیدا کنید.



نکات تکمیلی
دیران پایه
دوازدهم



پاسخ
تمرین‌های
پایه دوازدهم

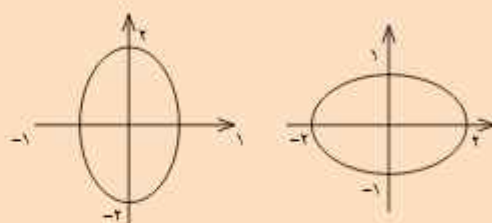


مسئله ۳.

(الف) به جای دایره مثلثاتی یک بیضی مثلثاتی تعریف می‌کنیم که

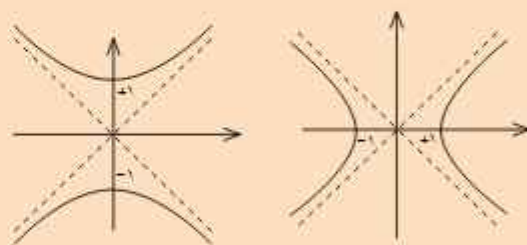
$$\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$$

معادله آن $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$ است. کدام یک از شکل‌های زیر نماینده نمودار بیضی مثلثاتی است؟



برای زاویه θ نسبت‌های $\sin \theta$ و $\cos \theta$ را روی شکل به‌طور هندسی تعریف کنید. چرا به جای دایره مثلثاتی از بیضی مثلثاتی استفاده نمی‌کنیم؟

(ب) به جای دایره مثلثاتی یک هذلولی مثلثاتی تعریف می‌کنیم که معادله آن $x^2 - y^2 = 1$ است. کدام یک از شکل‌های زیر نماینده نمودار هذلولی مثلثاتی است؟



به جای نسبت‌های مثلثاتی $\sin \theta$ و $\cos \theta$ ، از روی نمودار هذلولی مثلثاتی، نسبت‌های مثلثاتی $\sinh \theta$ و $\cosh \theta$ را تعریف کنید. این نسبت‌ها را به ترتیب سینوس هذلولوی و کسینوس هذلولوی می‌نامند. نشان دهید به جای معادله $\cosh^2 \theta + \sinh^2 \theta = 1$ معادله $\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1$ برقرار است. حال $\tanh \theta$ را چگونه تعریف می‌کنید؟ آیا $\sinh \theta$ و $\cosh \theta$ تابع‌هایی متناوب هستند؟ نمودار آن‌ها را با نقطه‌یابی رسم کنید. آیا $\tanh \theta$ نیز متناوب است؟ نمودار $\tanh \theta$ را با نقطه‌یابی رسم کنید و بگویید دوره تناوب $\sinh \theta$ و $\cosh \theta$ هر کدام چقدر است.

مسئله ۴.

(الف) با توجه به تشابه $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ و $\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1$ و فرمول‌های زیر که قبلاً دیدهاید:

1. lissajous curve

پی‌نوشت



۱۱

شماره ۱۷۸ | زمستان ۱۴۰۴

مسائل منطقی

محمد تقی طاهری تنجانی

پژوهشگر ریاضی و مؤلف کتاب‌های درسی

راه حل

همان‌طور که مشاهده می‌شود اطلاعات زیادی مطرح شده است. اهمیت شیوه بصری در حل این نوع مسئله‌ها غیرقابل انکار است. با این شیوه‌ها داده‌ها را به گونه‌ای می‌توان سازمان‌دهی کرد که فقط با نوشتن ممکن نیست. جدول زیر را با توجه به اطلاعات داده شده تشکیل می‌دهیم.

فرد شهر	F	E	D	C	B	A
تهران		x		x	x	x
اصفهان		x		x		x
قم	x	x		x	x	x
سمنان						
مشهد				x	x	x
تبریز				x		

هرجا ارتباط غیرممکن باشد علامت $\times$ می‌گذاریم. مثلاً در گزاره ۱ می‌گوییم: A اهل تهران نیست. پس در ستون A زیر ردیف تهران $\times$ می‌گذاریم. به همین ترتیب گزاره ۷ می‌گوییم: B اهل تهران نیست. گزاره‌های ۱ و ۲ با هم نتیجه می‌دهند: A که پزشک است اهل اصفهان نیست (چون شخصی که اهل اصفهان است معلم است). علامت‌های $\times$ دیگر هم بر اساس استدلال‌های مشابهی گذاشته

در حل برخی از مسئله‌ها نیاز چندانی به فرمول‌های ریاضی نداریم و فقط با منطق و استدلال می‌توانیم آن‌ها را حل کنیم. در واقع، هرکس فارغ از هر نوع رشته و پایه تحصیلی می‌تواند درگیر حل آن‌ها شود. دو مسئله زیر از جمله مسئله‌های منطقی هستند که نحوه حل و استدلال آن‌ها می‌تواند راهگشای حل مسئله‌های مشابه آن‌ها باشد. حجمی از اطلاعات به مخاطب داده می‌شود، چگونگی طبقه‌بندی و نوع برخورد با آن در نتیجه‌گیری و حل مسئله بسیار مؤثر است.

مسئله شغل و محل تولد

شش نفر به نام‌های A, B, C, D, E و F در واگن رستوران یک قطار هستند. یکی از آن‌ها اهل تهران، یکی اهل اصفهان، یکی اهل قم، یکی اهل مشهد، یکی اهل تبریز، و یکی اهل سمنان است. اطلاعات زیر را می‌دانیم:

۱. A و مردی که اهل تهران است پزشک‌اند.
 ۲. E و زنی که اهل اصفهان است معلم‌اند.
 ۳. C و شخصی که اهل قم است مهندس‌اند.
 ۴. B و F در جنگ تحصیلی شرکت کرده‌اند، ولی شخصی که اهل قم است، خدمت سربازی نکرده است.
 ۵. شخصی که اهل مشهد است، پیرتر از A است.
 ۶. شخصی که اهل تبریز است، پیرتر از C است.
 ۷. B و شخصی که اهل تهران است در سمنان پیاده می‌شوند.
 ۸. C و مردی که اهل مشهد است در سبزوار پیاده می‌شوند.
- شغل و زادگاه هریک از این شش نفر را تعیین کنید.



۱۲

شماره ۱۲۸ | زمستان ۱۴۰۳



شده است.

وقتی همه $\times$ ها را قرار دهیم، می‌بینیم C فقط ممکن است اهل سمنان باشد. در این صورت تنها امکان برای شهر زادگاه A تبریز است.

وقتی سمنان را برای زادگاه C مشخص کردیم، دیگر این شهر زادگاه هیچ‌یک از پنج نفر دیگر نخواهد بود. این موضوع را با علامت # در جدول زیر مشخص می‌کنیم. همچنین تبریز را برای همه غیر از A حذف می‌کنیم. برای نشان دادن اینکه کدام شهر زادگاه این افراد است در محل جدول مورد نظر علامت * می‌گذاریم.

فرد	A	B	C	D	E	F
شهر						
تهران	$\times$	$\times$	$\times$		$\times$	
اصفهان	$\times$		$\times$		$\times$	
قم	$\times$	$\times$	$\times$		$\times$	$\times$
سمنان	#	#	*	#	#	#
مشهد	$\times$	$\times$	$\times$			
تبریز	*	#	$\times$	#	#	#

با کمی دقت معلوم می‌شود B اهل اصفهان، E اهل مشهد، F اهل تهران و D اهل قم است.

سرانجام از گزاره‌های ۱ و ۲ و ۳ نتیجه می‌گیریم:

A اهل تبریز و پزشک است.

B اهل اصفهان و معلم است.

C اهل سمنان و مهندس است.

D اهل قم و مهندس است.

E اهل مشهد و معلم است.

F اهل تهران و پزشک است.

حالا یک بار دیگر صورت سؤال را در نظر بگیرید آیا همه گزاره‌ها برای حل مسئله مورد نیاز بود؟ واضح است که برخی از گزاره‌ها برای ردگم کردن مطرح شدند و غیرضروری بودند. به‌عنوان تمرین می‌توانید آن‌ها را مشخص کنید.

مسائلی وجود دارند که برای حل آن‌ها باید تحلیل دقیقی از مفروضات مسئله به عمل آید؛ مفروضاتی که در نظر اول با مجهول ارتباط ندارند. به نمونه زیر توجه کنید:

مسئله رتبه‌بندی

در یک مسابقه پنج نفر شرکت کرده‌اند. پس از مسابقه چنین اعلام شد:

۱. سعید دوم و ساسان سوم شد.



چهار نفر اهل کرمان: M و L ، K و I و
چهار نفر اهل زاهدان: P و O ، N و R بودند.
همچنین A ، E و N ۲۰ ساله، B و F ، K و D ۲۱ ساله، C ، L و P ۲۲ ساله، و H و M ۲۳ ساله هستند. بین آن‌ها چهار نفر
دانشجوی ریاضی، چهار نفر دانشجوی شیمی، چهار نفر دانشجوی
فیزیک و چهار نفر دانشجوی زیست‌شناسی وجود دارد.
ضمناً هریک از چهار نفری که در یک رشته درس می‌خوانند، از
شهرهای مختلف هستند و سن متفاوت دارند. چهار دانشجو در
دوره اول، چهار نفر در دوره دوم، چهار نفر در دوره سوم و چهار نفر
در دوره چهارم تحصیل می‌کنند. ضمناً هریک از چهار نفری که در
یک دوره تحصیل می‌کنند، از شهرهای متفاوت یا سن مختلف و در
رشته‌های گوناگون‌اند.

بالاخره چهار نفر از این دانشجویان به فوتبال، چهار نفر به
بسکتبال، چهار نفر به والیبال و چهار نفر به شطرنج علاقه‌مندند.
هریک از چهار نفری که یکی از این ورزش‌ها را دوست دارند، از
شهرهای متفاوت، با سن مختلف و رشته‌های گوناگون و از دوره‌های
متنوع تحصیلی‌اند.

برای هریک از دانشجویان، رشته تحصیلی، دوره تحصیل و ورزش
مورد علاقه را معلوم کنید؛ در صورتی که بدانید: I والیبالیست، F
فوتبالیست، C زیست‌شناس، D دانشجوی دوره اول ریاضیات و
علاقه‌مند به شطرنج و G دانشجوی دوره دوم شیمی و علاقه‌مند
به شطرنج و بالاخره K دانشجوی دوره سوم فیزیک و علاقه‌مند به
شطرنج است.

مسئله ۲

شش دانش‌آموز در یک اردوی تفریحی آموزشی به سه دسته
تقسیم شدند. رؤسای دسته‌ها عبارت بودند از **احمد، محمد و**
کریم.

احمد و زهیر قطعه‌چوب‌های دومتري، **محمد و محمود**
قطعه‌چوب‌های یک و نیم‌متری و **کریم و فریدون** قطعه‌چوب‌های
یک متری برداشتند. قرار شد که همه چوب‌ها را به صورت
قطعه‌های نیم‌متری اِره کنند.

روی کاغذی که به دیوار نصب شده بود، یادداشت شده بود که
دسته A و $۲۶B$ قطعه، دسته C و $۲۷D$ قطعه و دسته E و $۲۸F$
قطعه چوب تحویل داده‌اند. نام D را پیدا کنید.

۲. جواد سوم و خسرو پنجم شد.
۳. خسرو اول و جواد دوم شد.
۴. سعید دوم و حمید چهارم شد.
۵. ساسان اول و حمید چهارم شد.

اگر بدانیم در هر مورد از این پنج گزاره، رتبه یک نفر درست و رتبه
نفر دیگر نادرست ذکر شده است، رتبه صحیح پنج نفر را پیدا کنید.

راه‌حل: اگر فرض کنیم سعید دوم باشد (یعنی در مسابقه دوم
شده باشد) به نتایج زیر می‌رسیم:

- از (۱) معلوم می‌شود که ساسان سوم نیست.
- از (۴) نتیجه می‌شود حمید چهارم نیست.
- از (۵) نتیجه می‌شود که ساسان اول است.
- از (۳) معلوم می‌شود که خسرو اول نیست و جواد دوم است.
- و این به تناقض برمی‌خورد چون برای رتبه دوم، هم سعید را داریم
و هم جواد. حالا ساسان را سوم فرض می‌کنیم.
- از (۱) معلوم می‌شود که سعید دوم نیست.
- از (۴) معلوم می‌شود که حمید چهارم است و از (۲) معلوم می‌شود
جواد سوم نیست و خسرو پنجم است.

از (۳) معلوم می‌شود که خسرو رتبه ۱ نیست و جواد دوم است.

بنابراین برای سعید رتبه یکم باقی می‌ماند. به این ترتیب رتبه افراد
عبارت است از: سعید، جواد، ساسان، حمید و خسرو.

به‌عنوان تمرین دو مسئله بعدی را پیشنهاد می‌کنیم. در مسئله
اول با یک جدول و در مسئله دوم، با استدلال منطقی می‌توانید به
پاسخ صحیح برسید.

مسئله ۱

شانزده دانشجو پس از تعطیلات نیمسال (ترم) به تهران بازگشتند.
از بین آن‌ها:

- چهار نفر اهل اصفهان: A ، B ، C و D ،
چهار نفر اهل شیراز: E ، F ، G و H .

منابع

۱. دموریس، پتروبیچ، الکساندر (۱۳۴۴). در قلمرو ریاضیات ترجمه پرویز شهریاری.
انتشارات امیرکبیر، تهران: چاپ دوم.
۲. گرامس، استیون ج. (۱۳۸۴). فنون مسئله حل کردن. ترجمه مهرداد اخیارفر.
انتشارات فاطمی، تهران: چاپ سوم.



۱۴

شماره ۱۳۸ زمستان ۱۴۰۴

بیاتاد را این شایوه چالش کنیم!

قبلش برو یک فنجان چای برای خودت بریز

(قسمت پنجم)

محرم ایردموسی

عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی

مقدمه

اگر اهل مسئله‌های چالشی هستید، شما را به خواندن این مطلب دعوت می‌کنیم. در هر شماره با مطرح کردن چند مجموعه از مسئله‌های مرتبط به هم، سعی می‌کنیم علاوه بر به چالش کشیدن ذهن پویای شما، مطالبی را هم مرور کنیم یا مطالب جدیدی یاد بگیریم. کاغذ و قلم فراموش نشود، چون بدون آن لطفی ندارد. قبلش بروید و برای خودتان یک فنجان چای یا قهوه بریزید و هر چالش را گام به گام پیش ببرید.

می‌کند که اگر تساوی $fog=gof$ برای دو تابع خطی در نقطه ۰ برقرار باشد، آنگاه در تمام نقاط هم برقرار است.

چهار) با ارائه یک مثال نشان دهید، در گزاره قسمت قبل اگر شرط خطی بودن f و g را حذف کنیم، گزاره ممکن است نادرست باشد.

پنج) بررسی کنید که اگر در گزاره قسمت سه، به جای نقطه صفر هر نقطه دلخواه دیگری را هم جایگزین کنید، باز هم گزاره درست است.

چالش بیست و یکم

دو تابع خطی f و g با ضابطه‌های $f(x) = ax + b$ و $g(x) = cx + d$ را در نظر بگیرید.

یک) با ارائه یک مثال نشان دهید در حالت کلی تساوی $fog=gof$ برقرار نیست.

یادآوری: fog همان ترکیب تابع f با تابع g است؛ یعنی:

$$fog(x) = f(g(x))$$

دو) حال فرض کنید به دنبال شرایطی روی دو تابع خطی f و g باشیم که تحت آن شرایط $fog=gof$ یعنی عمل ترکیب روی این دو تابع خاصیت جابه‌جایی داشته باشد. سعی کنید شرایط لازم و کافی را روی ضریب‌های دو تابع پیدا کنید.

راهنمایی: مسیر سراسر است. fog و gof را حساب کنید (که هر دو از درجه ... هستند) و بعد دو تابع را متحد قرار دهید.

سه) اگر قسمت قبل را حل کردید و شرایط لازم و کافی را پیدا کردید به راحتی نتیجه زیر را هم می‌توانید ثابت کنید.

ه) فرض خطی بودن دو تابع f و g ، شرط لازم و کافی برای آنکه به ازای هر عدد حقیقی x داشته باشیم $fog(x) = gof(x)$ است که $fog(0) = gof(0)$.

توضیح: این شرط لازم و کافی کمی عجیب است! در واقع ادعا



۱۵

شماره ۱۷۸ | زمستان ۱۴۰۴

چالش بیست و دوم

یک اگر x_1, x_2, x_3 سه ریشه حقیقی معادله درجه سوم $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ باشند، چه رابطه‌هایی بین ریشه‌ها و ضریب‌های آن وجود دارند؟
راهنمایی: با توجه به اینکه x_1, x_2, x_3 ریشه‌های معادله هستند، پس:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

راه حل: با متحد قراردادن ضریب‌های توان‌های مساوی در دو طرف تساوی فوق خواهیم داشت:

$$b = -a(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$c = a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$$

$$d = -ax_1x_2x_3$$

بنابراین رابطه‌های بین ریشه‌ها و ضریب‌ها به صورت زیر خواهند بود:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$$

دو) معادله‌ای بنویسید که ریشه‌های آن معکوس ریشه‌های معادله $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ باشد. فرض کنید: $d \neq 0$.
راهنمایی: از رابطه‌های بین ریشه‌ها و ضریب‌ها استفاده کنید.

سه) رحمان برای حل قسمت قبل فرض می‌کند x ریشه معادله اولیه باشد و X را ریشه معادله خواسته شده در نظر می‌گیرد. سپس نتیجه می‌گیرد: $X = \frac{1}{x}$. پس: $X = \frac{1}{x}$. حال این مقدار را در معادله اولیه به جای x جای گذاری می‌کند و چنین ادامه می‌دهد:

$$a\left(\frac{1}{X}\right)^3 + b\left(\frac{1}{X}\right)^2 + c\left(\frac{1}{X}\right) + d = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{X^3}(a + bX + cX^2 + dX^3) = 0$$

از آنجا که $X \neq 0$ ، در نتیجه باید: $dX^3 + cX^2 + bX + a = 0$. پس معادله مطلوب به دست آمد.
 آیا راه حل رحمان درست است و با جوابی که از قسمت دو به دست می‌آید، تطابق دارد؟

چهار) در قسمت اول مجموع مربعات ریشه‌ها و مجموع مکعبات ریشه‌ها را برحسب ضریب‌های معادله به دست آورید.

پنج) دستگاه معادله‌های بعد را حل کنید:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{11}{6} \end{cases}$$

راهنمایی: از رابطه‌های بین ریشه‌ها و ضریب‌های معادله درجه سوم استفاده کنید.

چالش بیست و سوم

یک) محمود می‌خواهد معادله خطی را پیدا کند که در نقطه $(1, 2)$ بر منحنی سهمی $y = x^2 + x$ مماس است. خط مماس بر منحنی C در نقطه (x_0, y_0) خطی است که در یک بازه شامل x_0 منحنی را تنها در نقطه (x_0, y_0) قطع کند (ممکن است خط مماس بر منحنی C در نقطه (x_0, y_0) ، در نقطه یا نقطه‌های دیگری منحنی C را قطع کند). راه حل محمود این است که فرض می‌کند خط مماس شبیهی برابر m دارد. در نتیجه معادله آن به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$y - 2 = m(x - 1) \Rightarrow y = mx + 2 - m$$

حال محمود این معادله را با معادله سهمی در یک دستگاه حل می‌کند:

$$\begin{cases} y = mx + 2 - m \\ \Rightarrow x^2 + x = mx + 2 - m \\ y = x^2 + x \end{cases}$$

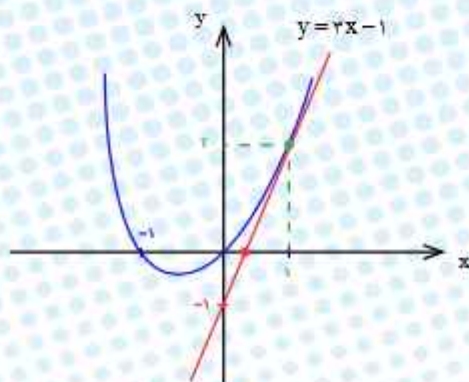
$$\Rightarrow x^2 + (1 - m)x + (m - 2) = 0$$

از آنجا که دستگاه باید یک جواب داشته باشد (چرا؟) پس معادله فوق باید ریشه مضاعف داشته باشد و در نتیجه:

$$\Delta = (1 - m)^2 - 4(m - 2) = 0 \Rightarrow m^2 - 6m + 9 = 0 \Rightarrow \boxed{m = 3}$$

بنابراین، معادله خط مماس به صورت $y = 3x - 1$ خواهد بود.

دو) به کمک این روش معادله خط مماس بر منحنی $y = x^2 + x$ در مبدأ مختصات را به دست آورید.

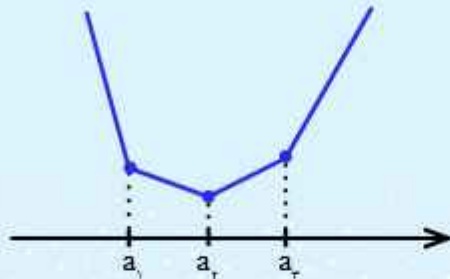


۱۶

شماره ۱۶ | زمستان ۱۴۰۳

سه) به ازای چه مقدارهایی از k منحنی دو تابع $f(x) = x^2$ و $g(x) = k(x^2 - x)$ بر هم مماس هستند؟

سه) حالت‌بندی مسئله در قسمت قبل را به شما می‌سپاریم و تنها نمودار نهایی f را رسم می‌کنیم:



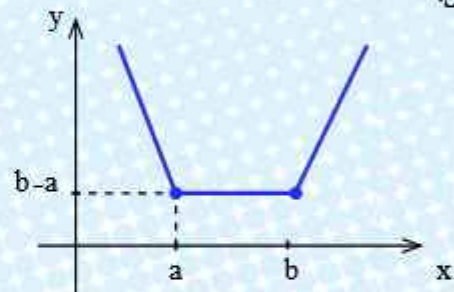
چهار) تحت چه شرایطی روی ضریب‌های دو سهمی $y = ax^2 + bx + c$ و $y' = a'x^2 + b'x + c'$ در: الف) ۲ نقطه و ب) ۱ نقطه، همدیگر را قطع می‌کنند؟

چالش بیست و چهارم

یک) تابع $f(x) = |x - a| + |x - b|$ را با فرض $a < b$ در صفحه رسم کنید. کمترین مقدار تابع چقدر است و در چه نقطه‌ای است؟

راهنمایی: با حالت‌بندی $x < a$ و $a < x < b$ و $x > b$ می‌توان ضابطه را در هر حالت ساده و رسم کرد در هر بازه نمودار خطی خواهد بود.

راه‌حل:



شیب نمودار در چهار بازه چقدر است؟

مقدار تابع در سه نقطه a_1, a_2, a_3 چقدر است؟

می‌تیمم تابع چقدر است و در چه نقطه‌ای اتفاق می‌افتد؟

چهار) سعید در ادامه با نتیجه‌های جالبی روبه‌رو می‌شود. سعی کنید خودتان به این نتیجه‌ها دست پیدا کنید.

چالش بیست و پنجم

یک) اگر $\{a_n\}$ یک دنباله هندسی با جمله‌های مثبت باشد، ثابت کنید دنباله $b_n = \log_2(a_n)$ یک دنباله حسابی است. قدر نسبت این دنباله جدید را به دست آورید. (b عددی ثابت، مثبت و مخالف ۱ است).

دو) اگر $\{a_n\}$ یک دنباله حسابی باشد، ثابت کنید دنباله $c_n = c^{a_n}$ یک دنباله هندسی است (C عددی ثابت و مثبت است).

سه) اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله حسابی باشند، بررسی کنید کدام‌یک از دنباله‌های جدید زیر دنباله حسابی هستند؟

$\{a_n b_n\}$ ، $\{a_n + b_n\}$ ، $\{a_n - b_n\}$

چهار) فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله حسابی هستند همچنین جمله‌های b_n همگی طبیعی هستند. دنباله $a_{b_1}, a_{b_2}, a_{b_3}, \dots$ چه نوع دنباله‌ای است؟ (دقت کنید در دنباله جدید b_n ها اندیس هستند. یعنی نشان‌دهنده جمله b_n ام از دنباله $\{a_n\}$ است).

راهنمایی: فرض کنید داریم: $a_n = a_1 + (n-1)d_1$ و $b_n = b_1 + (n-1)d_2$ ابتدا حاصل a_{b_1} و بعد حاصل a_{b_2} را به دست آورید.

$x > b: f(x) = 2x - a - b$

$a < x < b: f(x) = b - a$

$x < a: f(x) = a + b - 2x$

با توجه به شکل کمترین مقدار تابع برابر است با: $b - a$ و در تمام نقطه‌های بازه $[a, b]$ این مقدار حاصل می‌شود.

دو) سعید سعی می‌کند این مسئله را تعمیم دهد و در حالت کلی $f(x) = |x - a_1| + |x - a_2| + \dots + |x - a_n|$ مقدار می‌تیمم تابع را به دست آورد که در آن: $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. او ابتدا حالت $n=2$ (قسمت قبل) و $n=3$ ، یعنی تابع:

$$f(x) = |x - a_1| + |x - a_2| + |x - a_3| > |a - a_1|$$

را در نظر می‌گیرد به نظر شما نمودار تابع در این حالت چگونه خواهد بود؟



۱۷

شماره ۱۷۸ | زمستان ۱۴۰۴

ساده شگفت انگیز



مجید حکمت
دکترای ریاضی کاربردی

108 The Golden Ratio and Fibonacci Numbers

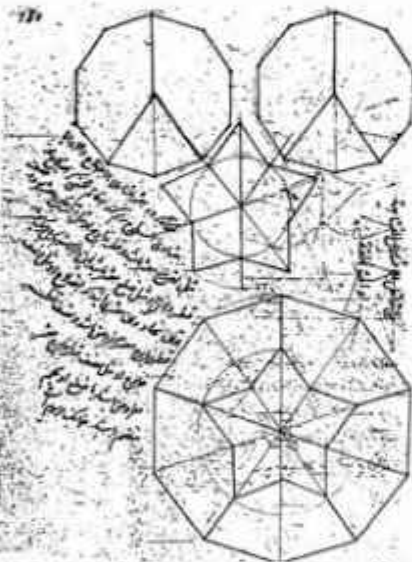


Fig. 11.13. Portions of tilings comprised of darts and kites designed by Abu'l Wafa'al Buzjani (c.1180). From Chorbachi and Loeb (1992), copyright World Scientific Publishing.

تصویر ۱: تصویری از محاسبات و مقالات علمی دانشمند مسلمان ابوالوفا محمد بوزجانی در کتاب لاتین «نسبت طلایی و اعداد فیبوناچی»

تصویر ۲



لئوناردو فیبوناچی^۱ نخستین ریاضی دان بزرگ اروپا در سده سیزدهم میلادی است. لئوناردو به خاطر حرفه پدرش، **گوگلیمو بوناچی** که بازرگانی بود، به کشورهای بسیاری از جمله مصر، سوریه، الجزایر و ... مسافرت کرد. این سفرها او را با «ریاضیات در جهان اسلام» آشنا کرد. او شیفته ریاضیات مسلمانان شد. بیشتر کارهایش برگرفته از آثار ریاضی دانان مسلمان، به طور ویژه **خوارزمی**، **کرجی** و **ابو کامل** هستند.

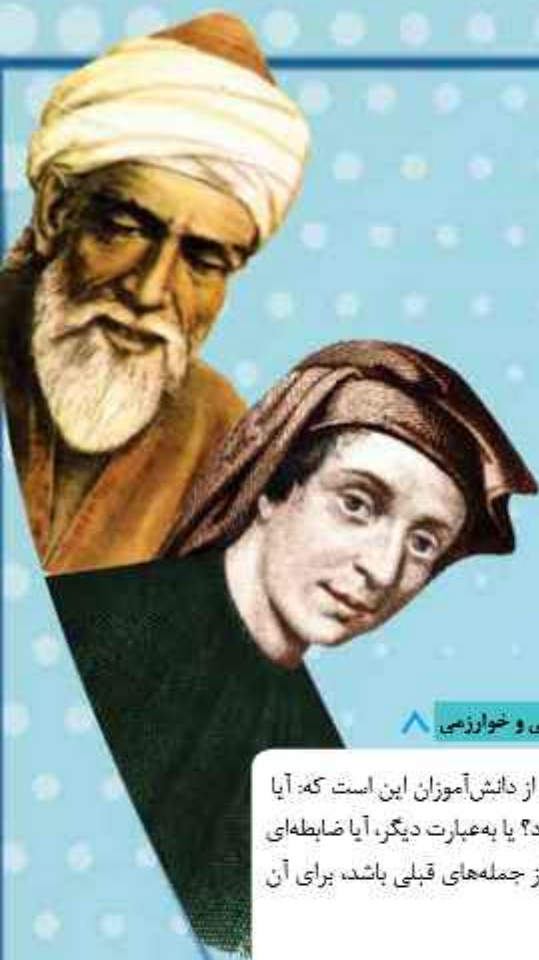
شنیده‌اید که می‌گویند: «ز کاه کوه می‌سازد»؟ ماجرای دنباله فیبوناچی به نوعی مصداق این ضرب‌المثل است. فیبوناچی ابتدا توجهش به این دنباله عددی جلب شد:

$$F_1=1, F_2=1, F_n=F_{n-1}+F_{n-2} \quad n \geq 3$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$$

این دنباله در طبیعت بسیار وجود دارد و با یک جست‌وجوی ساده می‌توانید موارد متعددی از آن را ببینید. ولی توصیه می‌شود خودتان هم از نزدیک آن را مشاهده و تجربه کنید؛ برای این کار کافی است یک میوه مخروطی درخت کاج را بردارید و منحنی‌های آن را ببینید. همان‌طور که در تصویر ۲ هم مشاهده می‌کنید، تعداد منحنی‌های ساعت‌گرد، ۸ عدد است و تعداد منحنی‌های پادساعت‌گرد ۱۳ عدد.

یکی از کاربردهای مهم فیبوناچی کاربرد اقتصادی آن در «تحلیل فنی (تکنیکال) بهایازار (بورس)» است که بحث آن در اینجا نمی‌گنجد، ولی بهایازاریان (بورس‌بازان) از آن به‌خوبی



فیبوناچی و خوارزمی

توجه می‌کنند! سؤال بسیاری از دانش‌آموزان این است که: آیا دنباله فیبوناچی ضابطه تابعی دارد؟ یا به عبارت دیگر، آیا ضابطه‌ای که بازگشتی نباشد و مستقل از جمله‌های قبلی باشد، برای آن وجود دارد؟

پاسخ مثبت است.

دنباله فیبوناچی دارای ضابطه تابعی است.

$$F_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}} \quad (*)$$

و از آنجا که عدد طلایی $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ است و این عدد

طلایی دارای ویژگی جذاب $1-\phi = \frac{-1}{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ است،

لذا ضابطه تابعی دنباله فیبوناچی را به این صورت‌ها نیز می‌توان نوشت:

$$F_n = \frac{\phi^n - (1-\phi)^n}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}}$$

رابطه (*) در نهایت جذابیت قرار دارد؛ در نگاه اول به رابطه

(*) خوش‌حال می‌شویم که: «به‌نبه! دنباله فیبوناچی هم دارای ضابطه تابعی است.» ولی کمی که عمیق شویم، اگر n فقط به اندازه سه چهار انگشت رشد کند، آن‌گاه واقعاً چه کسی حوصله محاسبه آن را دارد؟ پس در خوش‌بینانه‌ترین حالت، استفاده از این رابطه فقط به کمک رایانه کمی مقرون به صرفه است و باز هم جای رابطه بازگشتی را به راحتی نمی‌گیرد.

اثبات رابطه (*) و اینکه چگونه واقعاً حاصل این رابطه به عددهای طبیعی دنباله فیبوناچی منجر می‌شود، حتماً برای شما هم جالب خواهد بود:

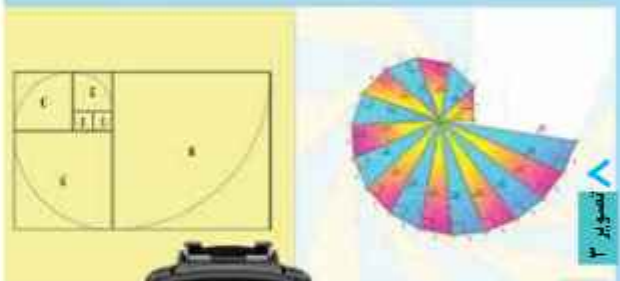
اثبات: به روش «استقرای کامل ریاضی» اثبات صورت می‌گیرد.

مطلع هستند.

حتماً به خاطر دارید که مثلث‌های قائم‌الزاویه فیثاغورس، با وترهایی که اندازه آن‌ها ریشه دوم (جذر) عددهای طبیعی بود، شکل مارپیچی شبیه پوسته حلزون تشکیل می‌دادند. ولی حالا نکته جالب اینجاست که مارپیچ حلزون بیش از آنکه به ریشه دوم عددهای طبیعی مرتبط باشد، به عددهای فیبوناچی، یا به عبارت دیگر، به مارپیچ فیبوناچی، مربوط است.

برای درک بهتر این ارتباط، با یک شکل ساده شروع کنید: ابتدا دو مربع کنار هم به عرض‌های ۱ واحد رسم کنید.

در کنار این دو، مربعی با عرض ۲ قرار دهید. سپس در کنار این سه، مربعی با عرض ۳ و تا آخر ... حالا با هر مربع یک‌چهارم از یک دایره را تشکیل دهید که شعاع آن به اندازه ضلع آن مربع باشد. به همین ترتیب با بزرگ‌تر شدن شکل، قوس‌های دایره هم بزرگ‌تر می‌شوند و با شکلی مشابه صدف مارپیچی مواجه می‌شوید که براساس سری فیبوناچی تولید شده است. اگر گنج شده‌اید، نگاهی به تصویر ۳ بیندازید.



تصویر ۳



تصویر ۴

جالب است بدانید که در طراحی و عکاسی، اگر موضوع (سوژه) در نقطه شروع مارپیچ فیبوناچی قرار بگیرد، به‌طور خاص و زیرکانه‌ای مورد توجه مخاطب قرار خواهد گرفت. (تصویر ۴) حالا از این به بعد که به تصویرها نگاه می‌کنید، بیشتر دقت کنید و ببینید که موضوع تصویر در مرکز واقع نشده است.

ضابطه تابعی فیبوناچی

خب رسیدیم به اصل مطلب! آنچه بیشتر از آن سؤال می‌شود، ولی عموم علاقه‌مندان به ریاضی و دنباله فیبوناچی کمتر به آن





$$F_{k+1} = \frac{(1+\sqrt{5})^{k+1} - (1-\sqrt{5})^{k+1}}{2^{k+1}\sqrt{5}}$$

به عنوان نکته آخر خوب است بدانید که:

مربع هر جمله فیبوناچی برابر با حاصل ضرب جمله قبل و بعد از آن با اختلاف ۱ واحد است؛ به صورت دقیق تر:

$$F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^{n+1}$$

مثال:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots \Rightarrow 13^2 = (5 \times 13) - 1$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots \Rightarrow 5^2 = (3 \times 8) + 1$$

اثبات: این نکته نیز با استقرای ریاضی صورت می گیرد.
از شما دانش آموز علاقه مند به ریاضیات می خواهیم که اثبات آن را از طریق رایانامه مجله برای ما ارسال کنید.

گام ۱. بررسی می کنیم که رابطه (*) برای $n=1$ و $n=2$ برقرار است یا خیر؟

$$\frac{(1+\sqrt{5})^1 - (1-\sqrt{5})^1}{2\sqrt{5}} = 1 = F_1 \quad \checkmark$$

$$\frac{(1+\sqrt{5})^2 - (1-\sqrt{5})^2}{2^2\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = 1 = F_2 \quad \checkmark$$

پس رابطه (*) برای $n=1$ و $n=2$ برقرار است.

گام ۲. فرض استقرا: فرض کنید حکم برای k برقرار باشد. لذا برای $n=k$ و $n=k-1$ داریم:

$$n=k \Rightarrow F_k = \frac{(1+\sqrt{5})^k - (1-\sqrt{5})^k}{2^k\sqrt{5}} \quad (**)$$

$$n=k-1 \Rightarrow F_{k-1} = \frac{(1+\sqrt{5})^{k-1} - (1-\sqrt{5})^{k-1}}{2^{k-1}\sqrt{5}} \quad (***)$$

گام ۳. حکم استقرا: باید ثابت شود که حکم برای $n=k+1$ برقرار است؛ یعنی:

$$F_{k+1} = \frac{(1+\sqrt{5})^{k+1} - (1-\sqrt{5})^{k+1}}{2^{k+1}\sqrt{5}}$$

برای اثبات این مرحله، از خاصیت بازگشتی فیبوناچی و فرض استقرا استفاده می شود:

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$$

$$\begin{aligned} & \frac{(1+\sqrt{5})^k - (1-\sqrt{5})^k}{2^k\sqrt{5}} + \frac{(1+\sqrt{5})^{k-1} - (1-\sqrt{5})^{k-1}}{2^{k-1}\sqrt{5}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{(1+\sqrt{5})^k}{2^k} + \frac{(1+\sqrt{5})^{k-1}}{2^{k-1}} - \frac{(1-\sqrt{5})^k}{2^k} - \frac{(1-\sqrt{5})^{k-1}}{2^{k-1}} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{(1+\sqrt{5})^{k-1}}{2^{k-1}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 \right) - \frac{(1-\sqrt{5})^{k-1}}{2^{k-1}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1 \right) \right] \end{aligned}$$

از طرف دیگر:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1$$

و

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1$$

پس:

1. Leonardo Fibonacci

منابع

۱. وان در وارفن (۱۳۷۶). تاریخ جبر از خوارزمی تا امی نوتر. ترجمه محمدقاسم وحیدی اصل و علیرضا جمالی. تهران و میتران.

2. Richard A. Dunlap, (1997) the Golden Ratio and Fibonacci Numbers, World scientific.

لانه کبوتران

رحیم خیراللهزاده

دبیر ریاضی ناحیه ۱ شهرری

مثال ۱. پنج کبوتر و چهار لانه را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم هر لانه گنجایش هر تعداد کبوتر را دارد. در متمرکزترین حالت ممکن آن است که هر پنج کبوتر در یک لانه قرار بگیرند و پراکنده‌ترین حالت ممکن آن است که چهار کبوتر در چهار لانه قرار بگیرند و به ناچار کبوتر پنجم در یکی از ۴ لانه قبلی جا دهیم. هر حالت دیگری بین متمرکزترین و پراکنده‌ترین حالت ممکن را در نظر بگیریم، می‌توان این نتیجه مهم را استخراج کرد: «اگر ۵ کبوتر در ۴ لانه قرار گیرند، به شرطی که هر لانه گنجایش هر تعداد کبوتر را داشته باشد، در این صورت لانه‌ای یافت می‌شود که دارای حداقل ۲ کبوتر است.»

مثال ۲. ده کبوتر و چهار لانه را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم هر لانه گنجایش هر تعداد کبوتر را دارد. در این صورت اگر متمرکزترین و پراکنده‌ترین حالت‌های ممکن را در نظر بگیریم، می‌توان نتیجه گرفت که:

«اگر ۱۰ کبوتر در ۴ لانه قرار گیرند، به شرطی که هر لانه گنجایش هر تعداد کبوتر را داشته باشد، در این صورت لانه‌ای یافت می‌شود که دارای حداقل ۳ کبوتر است.»

در واقع اگر پراکنده‌ترین حالت ممکن را در نظر بگیریم، در مرحله اول در هر لانه یک کبوتر قرار می‌گیرد. در مرحله دوم دوباره در هر چهار لانه که یک کبوتر وجود دارد، ۴ کبوتر دیگر، یعنی در هر لانه یک‌یکی قرار می‌دهیم، یعنی ۸ کبوتر در ۴ لانه و در هر لانه ۲ کبوتر قرار گرفته است. پس ۲ کبوتر از ۱۰ کبوتر باقی می‌ماند که اگر در هر لانه‌ای قرار دهیم (اگر متمرکزترین حالت را هم در نظر بگیریم) می‌توان نتیجه گرفت:

«اگر ۱۰ کبوتر در ۴ لانه قرار گیرند، به شرطی که هر لانه گنجایش هر تعداد کبوتر را داشته باشد، در این صورت لانه‌ای یافت می‌شود که دارای حداقل ۳ کبوتر است.»

سلام بچه‌ها، امیدوارم حالتان خوب باشد و سالم و تندرست باشید در این شماره می‌خواهم یک دستور یا اصل مهم و کاربردی به نام اصل لانه کبوتری را برای شما عزیزان شرح دهم و اثبات آن را در حالت کلی بیان کنم.

اولین نکته مهم در مورد اصل لانه کبوتری این است که اسم کبوتر و اسم لانه استعاری است و در مسئله‌های متفاوت ممکن است کبوتر یا لانه با کلمه دیگری جایگزین شود مثلاً ۱۰ نفر و ۷ روز هفته را در نظر می‌گیریم. هر یک نفر یک کبوتر و هر روز هفته را می‌توان یک لانه در نظر گرفت. یا برای مثال، ۷ مهره و ۴ رنگ را در نظر می‌گیریم. در اینجا می‌توان هر مهره را یک کبوتر و هر رنگ را یک لانه در نظر گرفت. این نوع مثال‌ها را می‌توان به تعداد زیاد مطرح کرد. نکته مهم آن است که معمولاً در اکثر موارد تعداد کبوترها از تعداد لانه‌ها بیشتر است.

نکته دیگری که در اصل لانه کبوتری می‌توان گفت آن است که ظرفیت هر لانه هر عددی می‌تواند باشد، یعنی هر لانه گنجایش هر تعداد کبوتر را دارد. حال با چند مثال ساده اصل لانه کبوتری را شرح می‌دهیم:



۲۱

شماره ۱۷۸ | زمستان ۱۴۰۵





برقرار نباشد، در این صورت، $(\exists x : P(x) \equiv \forall x : \sim P(x)) \sim$ به

این معنی خواهد بود که در تمام لانه‌ها تعداد کبوترها کمتر از

$$1 + \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor \text{ است؛ یعنی:}$$

$$\forall i : x_i \leq \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor + 1 \text{ (فرض خلف)}$$

حال نشان می‌دهیم به تناقض می‌رسیم:

$$n = x_1 + x_2 + \dots + x_k \leq k \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor \leq k \left(\frac{n-1}{k} \right) \leq n-1$$

(در نامساوی بالا از نکته $x \geq \lfloor x \rfloor$ استفاده شده است.)

هر x_i از ماکزیمم مقدار x_i ها، یعنی $\left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor$ ، کوچک‌تر یا با آن

مساوی است که به سادگی نتیجه می‌شود: $n \leq n-1$ و این یک تناقض آشکار است. بنابراین فرض خلف غلط و حکم قضیه درست است و بنابراین اثبات کامل می‌شود.

چند مثال کاربردی

۱. حداقل و حداکثر چند نفر در یک جمع حضور داشته باشند تا مطمئن شویم که ۵ نفر از آن‌ها ماه تولد یکسانی دارند؟

(۲، ۴۹، ۶۰)

(۱، ۴۸، ۶۱)

(۴، ۴۹، ۶۱)

(۳، ۴۸، ۶۰)

حل: در این سؤال تعداد ماه‌های سال، تعداد لانه‌ها، یعنی $k=12$



یکی از حالت‌های قرار گرفتن دو کبوتر باقی‌مانده از ۱۰ کبوتر در پراکنده‌ترین حالت ممکن

حال که مفهوم اصل لانه کبوتری روشن شد، به اثبات حالت کلی اصل لانه کبوتری (یا بهتر است گفته شود قضیه لانه کبوتری) می‌پردازیم. این اثبات توسط نگارنده سال‌ها پیش انجام شده و در یکی از مجله‌های ریاضی منتشر شده است.

صورت قضیه: اگر n کبوتر در k لانه قرار گیرند، به طوری که هر لانه گنجایش نامحدودی داشته باشد، آنگاه لانه‌ای یافت می‌شود که

$$\left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor + 1 \text{ کبوتر است. حداقل دارای}$$

اثبات (روش برهان خلف):

فرض می‌کنیم تعداد کبوترها در لانه i ام برابر x_i باشد که در آن: $1 \leq i \leq k$ و $0 \leq x_i \leq n$. در این صورت حکم مسئله معادل این

$$\exists i : x_i \geq \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor + 1 \text{ خواهد بود که ثابت کنیم:}$$

برای اثبات از برهان خلف استفاده می‌کنیم. می‌گوییم اگر حکم



۲۲

شماره ۱۳۴ زمستان ۱۴۰۳



تعداد افراد در جمع تعداد کبوترها، و عدد ۵ همان $\left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor + 1$

است. پس می‌توان نوشت:

$$\left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor + 1 = 5 \Rightarrow \left\lfloor \frac{n-1}{12} \right\rfloor = 4 \Rightarrow 4 \leq \frac{n-1}{12} < 5$$

$$\Rightarrow 48 \leq n-1 < 60$$

$$49 \leq n < 61 \Rightarrow n_{\min} = 49, \quad n_{\max} = 60$$

بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

۲. در یک مهمانی از بین هر ۵ نفر فقط ۲ نفر وجود دارند که در روزهای متفاوتی از هفته متولد شده‌اند. تعداد افراد حاضر در این مهمانی حداکثر چند نفر است؟

- | | |
|--------|--------|
| ۳۴ (۲) | ۳۵ (۱) |
| ۲۷ (۴) | ۲۸ (۳) |

حل: در این سؤال، تعداد روزهای هفته تعداد لانه‌ها، یعنی $k=7$.

تعداد افراد در مهمانی تعداد کبوترها، و عدد $\left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor + 1$ برابر ۴

است. زیرا از ۳ نفر باقی‌مانده حتماً باید هر سه نفر با یکی از این دو نفر در یک روز هفته متولد شده باشند. در غیر این صورت، فرض «فقط دو نفر» نقض می‌شود. پس نتیجه اخلاقی داستان این است که چهار نفر در یک روز هفته متولد شده‌اند! و می‌توان نوشت:

$$\left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor + 1 = 4 \Rightarrow \left\lfloor \frac{n-1}{7} \right\rfloor = 3 \Rightarrow 3 \leq \frac{n-1}{7} < 4$$

$$\Rightarrow 21 \leq n-1 < 28$$

$$22 \leq n < 29 \Rightarrow n_{\min} = 22, \quad n_{\max} = 28$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

۳. در یک گلدان ۱۰۰ مهره به رنگ‌های آبی، قرمز، سبز، قهوه‌ای، صورتی و سفید وجود دارد. بزرگ‌ترین عدد m که مطمئناً m مهره هم‌رنگ در گلدان وجود دارد، چند است؟

- | | |
|--------|--------|
| ۱۶ (۱) | ۱۷ (۲) |
| ۱۸ (۳) | ۱۹ (۴) |

در این مسئله، ۱۰۰ مهره ۱۰۰ کبوتر، ۶ رنگ ۶ لانه، و عدد m

همان $\left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor + 1$ پس می‌توان نوشت:

$$\left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor + 1 = m \Rightarrow \left\lfloor \frac{n-1}{6} \right\rfloor = m-1 \Rightarrow \frac{n-1}{6} < m$$

$$\Rightarrow m-1 \leq \frac{100-1}{6} < m$$

$$16 \frac{2}{3} \leq m < 17 \frac{1}{6} \Rightarrow n_{\max} = 17$$

۴. اگر ۷۰ سکه را به هر صورت بین k پسر بچه تقسیم کنیم، آن‌گاه حداقل ۶ سکه به یک پسر بچه می‌رسد. بزرگ‌ترین عدد k که گزاره فوق درست باشد، چند است؟

- | | |
|--------|--------|
| ۱۲ (۱) | ۱۳ (۲) |
| ۱۴ (۳) | ۱۵ (۴) |

حل: در این مسئله ۷۰ سکه ۷۰ کبوتر، k پسر بچه k لانه کبوتر

است و عدد ۶ هم $\left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor + 1$ است. پس می‌توان نوشت:

$$\left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor + 1 = 6 \Rightarrow \left\lfloor \frac{70-1}{k} \right\rfloor = 5 \Rightarrow 5 \leq \frac{69}{k} < 6$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6} < \frac{k}{69} \leq \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{69}{6} < k \leq \frac{69}{5} \Rightarrow 11 \frac{3}{5} < k < 13 \frac{4}{5}$$

با توجه به طبیعی بودن k :

$$\Rightarrow k_{\min} = 12, \quad k_{\max} = 13$$

یعنی گزینه ۲ صحیح است.



۲۳

شماره ۱۷۸ | زمستان ۱۴۰۴

اجسام افلاطونی و کاربردهای آن‌ها توپ‌های فوتبال

محمدرضا اسفندیاری

دکترای ریاضی گرایش نظریه عددها، دبیر ریاضی ناحیه یک کرمان



شکل ۲. مجسمه‌ها و تصویرهایی از اجسام افلاطونی

اجسام افلاطونی علاوه بر اینکه شکل‌های هندسی بسیار زیبا و متحصربه‌فردی هستند، کاربردهای زیادی در زندگی واقعی و صنعت دارند. نمونه‌های متنوعی از تاس‌های امروزی به شکل اجسام افلاطونی داریم، چرا که در این شکل‌ها شانس آمدن تمام وجه‌ها یکسان است (شکل ۳).



شکل ۳. انواع تاس‌های موجود بر اساس اجسام افلاطونی

از کاربردهای دیگر اجسام افلاطونی ساخت انواع بازی‌های روبیک، به‌ویژه مکعب روبیک است. امروزه نمونه‌های متفاوتی از بازی‌های روبیک وجود دارند که از بازی‌های مفید و پرتعداد محسوب می‌شوند (شکل ۴ را ببینید).



شکل ۴. برخی از شکل‌های روبیک بر پایه اجسام افلاطونی

برای مطالعه ویژگی‌ها و کاربردهای بیشتر اجسام افلاطونی خواننده علاقه‌مند را به منبع ۱ در فهرست منابع مقاله ارجاع می‌دهیم.

بیست‌وجهی منتظم و توپ‌های کلاسیک فوتبال

توپ از جمله ساده‌ترین ابزارهای است که حتی قبل از اختراع فوتبال، انسان‌ها به نوعی از آن استفاده می‌کردند. هم‌زمان با پیشرفت فوتبال، توپ‌های فوتبال نیز دچار دگرگونی و تغییرات زیادی شدند. در شکل ۵ برخی از توپ‌های دوره‌های متفاوت جام جهانی فوتبال را می‌بینید.

چکیده

در این نوشته نخست به معرفی اجسام افلاطونی می‌پردازیم و برخی از ویژگی‌ها و کاربردهای عمومی آن‌ها را بیان می‌کنیم. سپس ضمن اشاره کوتاهی به تاریخچه توپ‌های فوتبال، ساختار هندسی توپ‌های رایج در فوتبال را بررسی می‌کنیم. آنگاه با استفاده از فرمول مشخصه اویلر روی گراف‌ها، به انواع شکل‌های رایج روی سطح توپ فوتبال اشاره می‌کنیم و با استفاده از این فرمول تعداد پنج‌ضلعی و شش‌ضلعی‌های روی توپ‌های کلاسیک و رایج فوتبال را مشخص می‌سازیم.

اجسام افلاطونی

اجسام افلاطونی^۱ بعد از افلاطون، فیلسوف یونان باستان، نام‌گذاری شده‌اند که وی آن‌ها را حدود ۳۵۰ سال پیش از میلاد مسیح توصیف کرده است. جسم افلاطونی یک شکل صلب است که ویژگی‌های زیر را دارد:

- همه وجه‌های آن چندضلعی‌های منتظم هم‌نهشت باشند.
- تعداد پال‌هایی که از هر رأس آن خارج شده‌اند یکسان هستند.
- طول همه پال‌های آن دقیقاً یکسان است.

با هر شکلی می‌توان هرم یا منشور ساخت، ولی فقط پنج نوع جسم افلاطونی داریم. اجسام افلاطونی عبارت‌اند از: چهاروجهی (هرم)، مکعب (شش‌وجهی)، هشت‌وجهی، دوازده‌وجهی و بیست‌وجهی. فقط با مربع، مثلث و پنج‌ضلعی می‌توان اجسام افلاطونی ایجاد کرد. سؤالی که مطرح می‌شود این است: «چرا با سایر چندضلعی‌های منتظم، مثلاً شش‌ضلعی یا هفت‌ضلعی، نمی‌توان جسم افلاطونی ایجاد کرد؟» (سعی کنید پاسخی برای این سؤال بیابید). برخی اجسام افلاطونی را به دلایلی، به عناصر پنج‌گانه آفریتش (زمین، هوا، آب، آتش و کائنات) تشبیه می‌کنند.

به دلیل اهمیت و کاربردهای مهمی که اجسام افلاطونی دارند، امروزه تصویرها و مجسمه‌هایی از آن‌ها در برخی از پارک‌ها و فضاهای آموزشی در معرض دید عموم قرار گرفته‌اند (شکل‌های ۱ و ۲ را ببینید).



شکل ۱. مجسمه‌هایی از اجسام افلاطونی در پارک شهر اشفه‌فورت آلمان



شکل ۵

از جام جهانی ۱۹۷۰ به بعد توپ‌های رایج در فوتبال توپ‌هایی هستند که سطح آن‌ها از پنج ضلعی و شش ضلعی ساخته شده است (در این نوشته به این توپ‌ها، توپ‌های کلاسیک می‌گوییم). شرکت «آدیداس» که عهده‌دار ساخت و تهیه توپ‌های مسابقات جام جهانی است، ادعا کرد که توپ‌های ساخته‌شده از پنج ضلعی و شش ضلعی گردتر و دقیق‌تر هستند امروز نیز از این نمونه توپ‌ها استفاده می‌شود.



شکل ۶

در سال‌های اخیر نیز با پیشرفت فناوری تولید تجهیزات ورزشی (تقریباً از جام جهانی ۲۰۰۲ کره جنوبی و ژاپن به بعد)، روش ساخت توپ‌های فوتبال نیز دچار دگرگونی و تغییر شده است. امروزه به جای پنج ضلعی و شش ضلعی‌ها، بعضی از توپ‌های فوتبال از چند منحنی یکسان ساخته شده‌اند (شکل ۷ توپ سمت راست). در مطالب بعد به ساختار هندسی سایر توپ‌های فوتبال اشاره می‌کنیم.

بیست و جهی منتظم پنجمین جسم افلاطونی است که از بیست مثلث یکسان ایجاد شده است. بیست و جهی دوازده رأس دارد که در هر رأس آن ۵ یال به یکدیگر وصل شده‌اند. در شکل ۷ نمونه‌ای از بیست و جهی منتظم را می‌بینید که شما می‌توانید با ابزار ساده مانند خلال دندان و پاستیل آن را بسازید. برای اطلاعات بیشتر می‌توانید به منبع شماره ۴ در فهرست منابع مقاله رجوع کنید. توپ‌های کلاسیک فوتبال (توپ‌هایی شامل پنج ضلعی و شش ضلعی) در واقع از پنجمین جسم افلاطونی، یعنی بیست و جهی، ساخته شده‌اند.



شکل ۷ بیست و جهی منتظم

در ادامه مرحله‌ها و گام‌های ساخت توپ کلاسیک فوتبال با استفاده از بیست و جهی را بیان می‌کنیم:

- گام ۱.** یک بیست و جهی (پنجمین جسم افلاطونی) با ۲۰ وجه مثلثی و ۱۲ رأس بکشید (شکل ۸).
- گام ۲.** هر رأس را با یک صفحه برش دهید. در این صورت ۱۲

پنج ضلعی ایجاد می‌شود (شکل ۹).

گام ۳. وجه‌های باقی‌مانده به صورت شش ضلعی هستند (شکل ۱۰).



شکل ۸

شکل ۹

شکل ۱۰



شکل ۱۱

توپ‌های کلاسیک فوتبال به توپ ۳۲ تکه معروف هستند که از ۱۲ پنج ضلعی و ۲۰ شش ضلعی منتظم ساخته شده‌اند. توپ‌های فوتبال نمونه بسیار خوبی از گراف‌های مسطحه هستند. سطح توپ‌های کلاسیک فوتبال از پنج ضلعی‌های منتظم (به رنگ سیاه) و شش ضلعی‌های منتظم (به رنگ سفید) ساخته می‌شود (شکل ۱۱).

سؤالی که به‌طور طبیعی مطرح می‌شود، این است که سطح توپ را با چه شکل‌های هندسی و منحنی‌هایی می‌توان پوشاند. برای جواب‌دادن به این سؤال و سؤال‌های مشابه، نخست باید فرمول مشخصه اویلر را روی گراف‌ها مطالعه کرد که در قسمت بعد این نوشته به این موضوع می‌پردازیم و به صورت جبری نشان می‌دهیم که روی سطح توپ کلاسیک فوتبال تعداد پنج ضلعی‌ها ۱۲ تا و تعداد شش ضلعی‌ها ۲۰ تا است.



پی‌نوشت

1. Platonic solid

منابع

۱. ریپورت، ریکا ویودر، ج. (۱۴۰۱). آزمایشگاه ریاضی برای کودکان و نوجوانان، ترجمه محمد رضا اسفندیاری. انتشارات شبانگه. تهران.
2. S. Tanna, Amazing Math: Introduction to Platonic Solids, CreateSpace, 2014.
3. Richard J. Trudeau, Introduction to Graph Theory, Dover Publications, 1940.
4. <http://www.youtube.com/watch?v=WHjziETWtAt=310s>



۲۵

شماره ۱۷۸ | زمستان ۱۴۰۴

از مثلث متساوی الساقین بیشتر بدانیم!

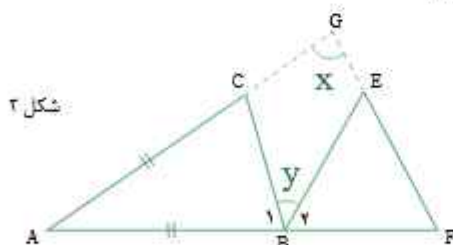
احسان یار محمدی

دبیر ریاضی، دکترای مدیریت صنعتی، شمالی

با توجه به اینکه $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ هر دو متساوی الساقین هستند و بنابر قضیه مجموع زاویه‌های داخلی مثلث، در $\triangle AFG$ داریم:

$$\begin{aligned}\hat{x} + \hat{A} + \hat{F} &= 180^\circ \Rightarrow \hat{x} + (180^\circ - 2\hat{B}) + (180^\circ - 2\hat{D}) = 180^\circ \\ \Rightarrow \hat{x} + 360^\circ - 2\hat{B} - 2\hat{D} &= 180^\circ \Rightarrow \\ \hat{x} + 180^\circ - 2(\hat{B} + \hat{D}) &= 0^\circ \Rightarrow \hat{x} + 180^\circ - 2\hat{y} = 0^\circ \\ \hat{x} + 180^\circ - 2(180^\circ - \hat{y}) &= 0^\circ \Rightarrow \hat{x} - 180^\circ + 2\hat{y} = 0^\circ \\ \Rightarrow 2\hat{y} &= 180^\circ - \hat{x} \Rightarrow \hat{y} = 90^\circ - \frac{\hat{x}}{2}\end{aligned}\quad (1)$$

حالت ۲. دو مثلث متساوی الساقین که یک ساقشان در امتداد یکدیگر است و ساق‌هایشان در یک نقطه به هم می‌رسند. مطابق شکل ۲، $\triangle ABC$ و $\triangle BEF$ به گونه‌ای در کنار یکدیگر قرار گرفته‌اند که ساق AB از $\triangle ABC$ در امتداد ساق BF از $\triangle DEF$ قرار دارد و این دو ساق در نقطه B به یکدیگر رسیده‌اند. از امتداد ساق AC در $\triangle ABC$ و امتداد ساق EF در $\triangle BEF$ زاویه $\hat{x}$ حاصل می‌شود. از برخورد قاعده BC از $\triangle ABC$ با قاعده BE از $\triangle DEF$ زاویه $\hat{y}$ به دست می‌آید. هدف تعیین اندازه زاویه $\hat{y}$ است.



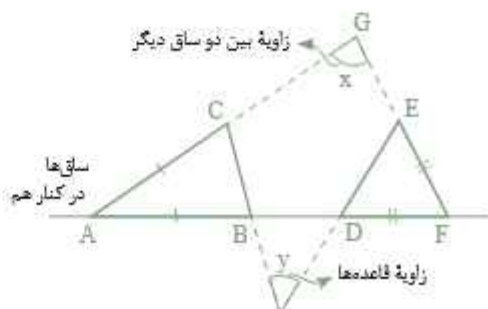
با توجه به اینکه $\triangle BEF$ و $\triangle ABC$ هر دو متساوی الساقین هستند و بنابر قضیه مجموع زاویه‌های داخلی مثلث، در $\triangle AFG$ داریم:

$$\begin{cases} \hat{A} = 180^\circ - 2\hat{C} = 180^\circ - 2\hat{B}_1 \\ \hat{F} = 180^\circ - 2\hat{E} = 180^\circ - 2\hat{B}_2 \\ \hat{x} + \hat{A} + \hat{F} = 180^\circ \end{cases}$$

مثلث متساوی الساقین ۱ و مفاهیم پیرامون آن از نخستین مباحث در ریاضیات مدرسه‌ای است که دانش‌پژوهان با آن آشنا می‌شوند. گاهی تصور محدود به تعریف و شکل‌های هندسی ۲ متناظر با مثلث متساوی الساقین باعث می‌شود کاربران از قضیه‌ها و مسئله‌های ارزشمندی که می‌توان با استفاده از این مفهوم به ارمان آورد، غافل شوند. به همین دلیل در این مقاله قصد داریم با بهره‌گیری از مفهوم مثلث متساوی الساقین به ارائه قضیه‌ای چشم‌نواز پیرامون این نوع مثلث بپردازیم و شما مخاطبان را با رویکردی نو در به کارگیری مفهوم مثلث متساوی الساقین برای خلق قضیه‌ای زیبا آشنا کنیم.

در این مقاله قصد داریم زاویه بین قاعده دو مثلث متساوی الساقین را تعیین کنیم که در کنار یکدیگر به صورتی قرار گرفته‌اند که یک ساق هر کدام از آن‌ها در امتداد یکدیگر باشند. برای نیل به مقصود باید سه حالت را برای قرار گرفتن دو مثلث متساوی الساقین در کنار یکدیگر که ساق‌هایشان در امتداد هم باشد، لحاظ کنیم. در ادامه هریک از این سه حالت را با رسم شکل مطرح و اثبات متناظر با هریک از آن‌ها را نیز بیان می‌کنیم. در انتها نیز از مقایسه نتایج هر سه حالت به ارائه قضیه‌ای شگفت‌انگیز می‌پردازیم.

حالت ۱. دو مثلث متساوی الساقین که یک ساقشان در امتداد یکدیگر است و با فاصله از یکدیگر قرار دارند. مطابق شکل ۱، $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ به گونه‌ای در کنار یکدیگر قرار گرفته‌اند که ساق AB از $\triangle ABC$ در امتداد ساق DF از $\triangle DEF$ قرار دارد. از امتداد ساق AC در $\triangle ABC$ و امتداد ساق EF در $\triangle DEF$ زاویه $\hat{x}$ حاصل می‌شود. از امتداد قاعده BC در $\triangle ABC$ و امتداد قاعده DE در $\triangle DEF$ زاویه $\hat{y}$ به دست می‌آید. هدف تعیین اندازه زاویه $\hat{y}$ است.

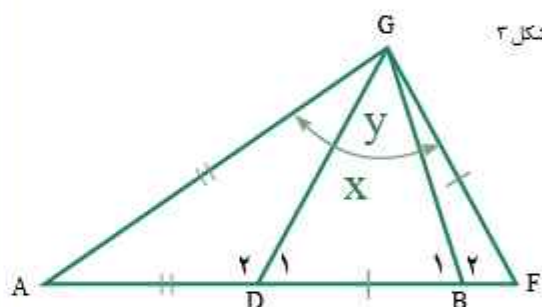


شکل ۱

و بنابراین:

$$\begin{aligned}\hat{x} + \hat{A} + \hat{F} &= 180^\circ \Rightarrow \hat{x} + 180^\circ - 2\hat{B}_1 + 180^\circ - 2\hat{B}_1 = 180^\circ \\ \Rightarrow \hat{x} + 180^\circ - 2(\hat{B}_1 + \hat{B}_1) &= 0^\circ \quad \hat{B}_1 + \hat{B}_1 = 180^\circ - \hat{x} \\ \hat{x} + 180^\circ - 2(180^\circ - \hat{y}) &= 0^\circ \Rightarrow \hat{x} - 180^\circ + 2\hat{y} = 0^\circ \\ \Rightarrow 2\hat{y} &= 180^\circ - \hat{x} \Rightarrow \hat{y} = 90^\circ - \frac{\hat{x}}{2}\end{aligned}\quad (2)$$

حالت ۳. دو مثلث متساوی الساقین که یک ساقشان در امتداد یکدیگر است و با یکدیگر تداخل دارند مطابق شکل ۳، $\triangle DFG$ و $\triangle ABG$ به گونه‌ای در کنار یکدیگر قرار گرفته‌اند که ساق AB از $\triangle ABG$ در امتداد ساق DF از $\triangle DFG$ قرار دارد و قسمت‌هایی از این دو ساق همدیگر را پوشش داده‌اند. ساق AG از $\triangle ABG$ و ساق FG از $\triangle DFG$ در نقطه G به یکدیگر می‌رسند. از برخورد قاعده BG از $\triangle ABG$ با قاعده DG از $\triangle DFG$ زاویه $\hat{y}$ به دست می‌آید. هدف تعیین اندازه زاویه $\hat{y}$ است.



چون $\triangle DFG$ و $\triangle ABG$ هر دو متساوی الساقین هستند، داریم:

$$\begin{cases} \hat{B}_1 = \hat{y} + \hat{G}_1 \\ \hat{D}_1 = \hat{y} + \hat{G}_2 \end{cases}$$

در ضمن بنا بر قضیه مجموع زاویه‌های داخلی مثلث، در $\triangle BDG$ داریم:

$$\hat{y} + \hat{B}_1 + \hat{D}_1 = 180^\circ$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}\hat{y} + \hat{B}_1 + \hat{D}_1 &= 180^\circ \Rightarrow \hat{y} + \hat{y} + \hat{G}_1 + \hat{y} + \hat{G}_2 = 180^\circ \\ \Rightarrow 3\hat{y} + \hat{G}_1 + \hat{G}_2 &= 180^\circ \quad \hat{G}_1 + \hat{G}_2 = \hat{x} - \hat{y} \\ 3\hat{y} + \hat{x} - \hat{y} &= 180^\circ \Rightarrow 2\hat{y} = 180^\circ - \hat{x} \\ \Rightarrow \hat{y} &= 90^\circ - \frac{\hat{x}}{2}\end{aligned}\quad (2)$$

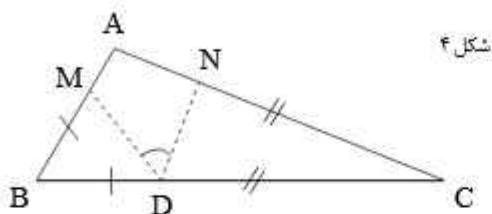
اکنون با استفاده از رابطه‌های ۱، ۲ و ۳ می‌توان قضیه زیر را بیان کرد:

قضیه: زاویه بین قاعده‌های دو مثلث متساوی الساقین که یک ساقشان در امتداد یکدیگر است، برابر است با:

زاویه بین دو ساق غیرامتداد یکدیگر $90^\circ - \frac{\text{زاویه بین قاعده‌ها}}{2}$

تمرین‌ها

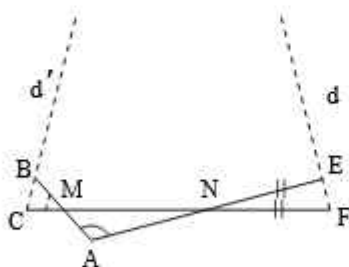
۱. در شکل ۴ اندازه زاویه $\hat{A}$ برابر با 120° و $\triangle CDN$ و $\triangle BDM$ هر دو متساوی الساقین هستند. اندازه زاویه $\angle MDN$ را تعیین کنید.



۲. در $\triangle ABC$ روی ضلع BC پاره‌خط‌های $BM=BA$ و $CN=CA$ را جدا می‌کنیم. اگر $\hat{A} = 72^\circ$ باشد، اندازه $\angle MAN$ را تعیین کنید.

۳. در $\triangle ABC$ داریم: $AB=AC$ و $\hat{A} = 80^\circ$. عمود منصف‌های دو ساق مثلث، قاعده BC را در M و N قطع می‌کنند. اندازه کوچک‌ترین زاویه $\triangle AMN$ را تعیین کنید.

۴. در شکل ۵، $\triangle MNC$ و $\triangle NEF$ هر دو متساوی الساقین هستند و اندازه زاویه $\hat{A}$ برابر با 100° است. دو خط d و d' با زاویه چند درجه متقاطع هستند؟



شکل ۵

پی‌نوشت‌ها

1. Isosceles Triangle
2. Geometric

منابع

۱. امیری، حمیدرضا و همکاران (۱۴۰۰). ریاضی ۲. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. تهران.
۲. امیری، حمیدرضا و همکاران (۱۴۰۰). هندسه ۲. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. تهران.
۳. خسروی، امیر و همکاران (۱۳۷۲). هندسه ۱. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. تهران.
۴. — (۱۳۷۴). هندسه ۲. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. تهران.
۵. مویا، زهرا و همکاران (۱۳۹۴). هندسه ۱. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. تهران.



۲۲

شماره ۱۷۸ | زمستان ۱۴۰۴



سید محمد رضا هاشمی موسوی
مدرس، مؤلف و محقق ریاضیات

اشاره

در داستان پیش با هدیه حاکم بزرگ سرزمین هند به مخترع شطرنج و مسئله محاسبه گندم‌های روی خانه‌های شطرنج و همچنین داستان پادشاه بزرگ حاکم و محاسبه تعداد ربع‌سکه‌های خزانه به میزان ۱۰۰ کیلوگرم و داستان خرید اسب توسط حاکم و روش پرداخت مبلغ کل میخ‌های نعل‌های اسب که پس از محاسبه به میزان حدود چهار هزار و هزار (۴ میلیون) ربع سکه شد و با این طریق پرداخت، شخص صاحب کل خزانه شد، آشنا شدید.

در این داستان که به مسئله «پنج کلاه» مشهور است، پس از حل آن خواهیم دید که گاهی دانش آموز پایه پنجم بهتر از دانش‌آموزان پایه‌های هشتم، نهم و دهم مسئله را حل می‌کند.

مسئله مشهور پنج کلاه

زننگ کلاس درس به صدا درآمد و بچه‌های حیاط مدرسه به کلاس‌های خود رفتند. یکی از کلاس‌های درس ریاضی خالی از معلم ماند. ناظم مدرسه که ریاضی هم تدریس می‌کرد، سر کلاس آمد و برای اینکه بچه‌های کلاس را مشغول کند، درس قبلی کلاس هم برایشان دوره شود و هم‌زمان یک بازی و سرگرمی هم داشته باشند، مسئله‌ای را مطرح می‌کند. او پنج کلاه با رنگ‌های متفاوت آورده بود که بین پنج دانش‌آموز باهوش کلاس تقسیم و این مسئله را مطرح کرد که: «بچه‌ها کلاه‌های خود را طوری عوض کنید که هرکسی کلاه دیگری را بر سر گذاشته باشد.»

حال این مسئله را مطرح می‌کند:

مسئله: به چند طریق می‌توان کلاه‌ها را عوض کرد؟

تبصره (مؤلف مقاله): این مسئله را می‌توان به کمک نظریه آنالیز ترکیبی حل کرد. ولی به جای اینکه صیر کنیم و در پایه‌های بالا به این نظریه برسیم، خودمان به کمک شما دانش‌آموزان عزیز دهم، یازدهم و دوازدهم (متوسطه ۲) می‌توانیم با روش‌های متفاوت و ساده‌ای، این مسئله سال‌های آخری دبیرستان را به کمک حساب حل کنیم. راه حل حسابی این مسئله، هم بسیار ساده و هم خیلی زیبا و شگفت‌انگیز است.

جدول ۱

A	۲	۲	۲	۳	۳	۳	۴	۴	۴
B	۳	۴	۱	۱	۴	۴	۱	۳	۳
C	۴	۱	۴	۴	۲	۱	۲	۲	۱
D	۱	۳	۳	۲	۱	۲	۳	۱	۲

X_n با اندیس کوچکتر از ۵ مربوط کنیم و به طور کلی رابطه‌ای پیدا کنیم که بستگی بین X_n را با X_{n-1} و X_{n-2} و به همین ترتیب رابطه X_{n-1} را با X_{n-2} و X_{n-3} و ... رابطه X_p را با X_p نشان دهد.

نکته: این روش حل مسئله که بتوانیم مسئله مربوط به n چیز را به مسئله‌ای با چیزهای کمتر تبدیل کنیم، در ریاضیات کاربرد فراوان دارد. این روش را روش **بازگشتی** (برگشتی) می‌گویند.

حال ما هم برای حل مسئله به دنبال رابطه‌ای هستیم که بتواند X_n را بر حسب X_{n-1} و X_{n-2} و ... و X_p را بر حسب X_p بیان کند. لازم به ذکر است، استدلالی را که برای بیان X_p به کار می‌بریم، می‌توان در حالت کلی، و برای بیان X_n هم به کار برد.

رابطه بازگشتی (برگشتی)

فرض می‌کنیم که بخواهیم ۴ کلاه ۱، ۲، ۳ و ۴ را بین دانش‌آموز A, B, C و D به تمام حالت‌های ممکن تقسیم کنیم. حالت‌ها را می‌توان به سادگی به دست آورد: (جدول ۲)

تذکره: واضح است که نمی‌توان حالتی را پیدا کرد که تنها سه دانش‌آموز صاحب کلاه خودشان باشند؛ زیرا در این صورت نفر چهارم هم صاحب کلاه خودش خواهد بود.

فعالیت ۱: در هر کدام از ۲۴ حالت، چهار کلاه ۱، ۲، ۳ و ۴ از نظر ردیفی که قرار گرفته‌اند، با هم تفاوت دارند. خودتان آزمایش کنید که غیر از ۲۴ حالتی که در اینجا آورده‌ایم، به هیچ ترتیب جدید دیگری نمی‌توان عددهای ۱، ۲، ۳ و ۴ را نوشت. به بیان دیگر، تنها ۲۴ ترتیب ممکن برای چهار عدد ۱، ۲، ۳ و ۴ وجود خواهد داشت.

پرسش: به جای چهار عدد می‌توان چهار شیء یا به بیان کلی‌تر، چهار عنصر انتخاب کرد؟

پاسخ این پرسش مثبت است و به جای چهار عدد هر شیء یا عنصر نیز می‌تواند باشد. چون فقط ترتیب این عددها یا اشیا و یا عنصرها مؤثر است.

حل زیبا و شگفت‌انگیز مسئله (روش حسابی)

ابتدا لازم است که ما نمادگذاری و برچسب‌هایی را به صورت اختیاری قرارداد کنیم. ابتدا پنج دانش‌آموز را به ترتیب به A, B, C, D و E و کلاه‌های آن‌ها را به ترتیب ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ نشانه‌گذاری می‌کنیم و تعداد حالت‌هایی را که n دانش‌آموز می‌توانند کلاه‌های خود را عوض کنند، چنان‌که هر کسی کلاه دیگری را بر سر داشته باشد، با X_n نشان می‌دهیم. حال با این قراردادها به حل مسئله می‌پردازیم. برای مثال، وقتی که ۴ دانش‌آموز باشند، تعداد حالت‌ها X_4 و وقتی ۵ دانش‌آموز در نظر بگیریم X_5 می‌شود و اگر k دانش‌آموز در نظر بگیریم، X_k حالت‌های ممکن این تعداد خواهد بود. با این مقدمه واضح است که: $X_p = 1$ زیرا ۲ دانش‌آموز تنها به یک طریق می‌توانند کلاه‌های خود را عوض کنند. حال اگر فرض کنیم ۳ دانش‌آموز بخواهند کلاه‌های خود را با هم عوض کنند؛ بدیهی است که تنها به دو طریق این کار ممکن است؛ زیرا:

A	B	A	B	C
۲	۱	۲	۳	۱
		۳	۱	۲

(شرط این است که هیچ کس صاحب کلاهی نباشد)

پس به روش عملی ثابت شد:

(حالت‌های ممکن تعویض) $X_p = 2$

$X_p = 1$ (حالت‌های ممکن تعویض)؛

حال فرض می‌کنیم ۴ دانش‌آموز باشند: (جدول ۱)

در اینجا به طور عملی تنها حالت‌های ممکن جابه‌جا کردن کلاه‌ها را نشان دادیم، به نحوی که هر کس کلاه دیگری را بر سر داشته باشد. بنابراین، برای ۴ دانش‌آموز ثابت شد: $X_p = 9$ تا اینجا ثابت شد که برای دانش‌آموزان به تعداد ۲ تا ۴، چند حالت ممکن وجود دارد:

$$X_p = 9 \text{ و } X_p = 2 \text{ و } X_p = 1$$

محاسبه مستقیم X_5 دیگر به این سادگی نیست. اگر از رابطه‌ای که X_p را به مقدارهای X_p و X_{p-1} و X_{p-2} مربوط می‌کند، آگاهی داشتیم، می‌توانستیم بدون محاسبه مستقیم، تمام حالت‌های ممکن را برای ۵ کلاه پیدا کنیم. پس برای حل مسئله باید بتوانیم X_p را به مقدارهای



جدول ۲

شماره ردیف	A	B	C	D	شماره ردیف	A	B	C	D
I	۱	۲	۳	۴	VII	$\begin{Bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ & ۱ \\ ۲ & ۴ & ۱ & ۳ \\ ۲ & ۱ & ۴ & ۳ \\ ۳ & ۱ & ۴ & ۲ \\ ۳ & ۴ & ۲ & ۱ \\ ۳ & ۴ & ۱ & ۲ \\ ۴ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۳ & ۲ & ۱ \\ ۴ & ۳ & ۱ & ۲ \end{Bmatrix}$			
هرکس کلاه خودش را بر سر دارد.									
II	$\begin{Bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{Bmatrix}$	۳	۴	۲					
اولی کلاه خودش و بقیه کلاه دیگران را بر سر دارند.									
III	$\begin{Bmatrix} ۳ \\ ۴ \end{Bmatrix}$	۲	۴	۱					
دومی کلاه خودش و بقیه کلاه دیگران را بر سر دارند.									
IV	$\begin{Bmatrix} ۲ \\ ۴ \end{Bmatrix}$	۴	۳	۱					
سومی کلاه خودش و بقیه کلاه دیگران را بر سر دارند.									
V	$\begin{Bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{Bmatrix}$	۳	۱	۴					
چهارمی کلاه خودش و بقیه کلاه دیگران را بر سر دارند.									
VI	$\begin{Bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \\ ۴ \\ ۳ \\ ۲ \end{Bmatrix}$	۲	۴	۳	نتیجه:				
دو دانش آموز کلاه خودشان را و دو تنی دیگر کلاه دیگری را بر سر دارند.					۱ حالتی که هرکس کلاه خودش بر سرش است.				
					$\begin{Bmatrix} ۲ \\ ۲ \\ ۲ \\ ۲ \end{Bmatrix} +$				
					۸ حالتی که یکی فقط کلاه خودش را بر سر دارد و بقیه کلاه دیگری بر سرشان است.				
					۶ حالتی که دو دانش آموز کلاه خودشان و دو دانش آموز هم کلاه دیگری بر سرشان است.				
					۹ حالتی که هرکس کلاه دیگری بر سرش است.				

بررسی تمام حالت های ۴ نفر با ۴ کلاه



مفهوم ترتیب و نه مفهوم فاکتوریل لازم نیست و همان طور که خواهیم دید، می‌توانیم رابطه مورد نظر را با استدلال ساده‌ای پیدا کنیم. به این منظور پرسشی را مطرح می‌کنیم:

پرسش ۱. اگر تعداد حالت‌هایی که چهار دانش‌آموز (یا به‌طور کلی n دانش‌آموز) می‌توانند کلاه‌های خود را طوری بین خود تقسیم کنند که هر کسی کلاه دیگری را به سر نداشته باشد، به X_p نشان دهیم (در حالت کلی به X_n نشان می‌دهیم)، آیا می‌توان عدد X_5 (و به‌طور کلی X_n) را بر حسب X_p و X_{n-p} (و به‌طور کلی X_{n-p}) بیان کرد؟

یادآور می‌شویم که همه حالت‌های ممکن تقسیم چهار کلاه بین چهار نفر ۲۴ حالت است و اثبات شد (به روش عملی و حسابی). حال اگر فرض کنیم به چهار نفر، نفر پنجم (E) را با کلاهش (۵) اضافه کنیم.

پرسش ۲. چگونه می‌توان برای پنج نفر، همه حالت‌های تقسیم کلاه‌ها را پیدا کرد، به نحوی که هیچ‌یک از آن‌ها، کلاه خودش بر سرش نباشد؟

پاسخ: با توجه به حساب‌های عددی معلوم شد که: $X_5 = 9$ طوری که هیچ‌یک از نفرات، صاحب کلاه خودش نباشد. نفر پنجم را به چهار نفر دیگر اضافه می‌کنیم. او می‌تواند کلاهش را با هر کدام از چهار نفر دیگر عوض کند. به این ترتیب، گروه‌های ۵ نفری به دست می‌آید که در هر کدام از آن‌ها هر کس کلاه دیگری را به سر گذاشته است. از هر کدام از ۹ حالت مربوط به چهار نفر، حالت پنج نفری پیدا می‌شود که در هریک از آن‌ها، هیچ نفری صاحب کلاه خود نیست. برای مثال، اگر این حالت را در نظر بگیریم:

تبصره ۱ (بیشتر بدانیم): برای اینکه به یک فرمول ساده برسیم چند تعریف ساده نیاز است که در اینجا آن‌ها را ارائه می‌کنیم:

تعریف ۱. تعداد ترتیب‌های ممکن از n عنصر یا شیء را با علامت P_n نشان می‌دهیم. در بررسی که انجام شد، برای مسئله ۵ کلاه داریم:

$$(Permutation) P_5 = 24 = 1 \times 2 \times 3 \times 4$$

تعریف ۲. در ریاضیات برای حاصل ضرب همه عددهای طبیعی از ۱ تا n می‌نویسیم:

$$1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n = n!$$

علامت یا نماد $n!$ را در نظر گرفته‌اند تا از حجم نوشتاری و تکرار ضرب پرهیز شود و آن را «فاکتوریل n » می‌نامند:

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times (n-1) \times n$$

پس:

$$P_5 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 4! = 24$$

تبصره ۲ (بیشتر بدانیم): در ریاضیات ثابت می‌کنند که تعداد ترتیب‌های n عنصر، برای هر مقدار n ، برابر با $n!$ است:

$$P_n = n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n$$

تذکر: همان طور که گفته شد، برای حل مسئله، یعنی پیدا کردن رابطه‌ای بین X_5 با X_p و X_{n-p} ، یا به‌طور کلی بین X_n با X_{n-p} و X_{n-p} نه



حالت اضافه کنیم، باز هم ۸ حالت جدید می‌تواند به وجود آید. زیرا کافی است کلاه نفر پنجم را با کلاه نفری که صاحب کلاه خودش است، عوض کرد و به حالت جدید دست یافت.

	A	B	C	D	E
نفر اول کلاهش را با نفر پنجم عوض کرد.	۵	۳	۴	۲	۱
نفر دوم کلاهش را با نفر پنجم عوض کرد.	۵	۴	۲	۳	۱
نفر سوم کلاهش را با نفر پنجم عوض کرد.	۴	۵	۱	۳	۲
نفر چهارم کلاهش را با نفر پنجم عوض کرد.	۲	۴	۵	۱	۳
نفر پنجم کلاهش را با نفر پنجم عوض کرد.	۴	۱	۵	۲	۳
نفر ششم کلاهش را با نفر پنجم عوض کرد.	۲	۳	۱	۵	۴
نفر هفتم کلاهش را با نفر پنجم عوض کرد.	۳	۱	۲	۵	۴

پس در اینجا ۸ حالت جدید هم به وجود آمد که به صورت 4×2 و یا 4×2 می‌توان آن را بیان کرد:

$$4 \times 2 = 8 \quad (3)$$

بنابراین تا اینجا همه حالت‌هایی که با اضافه شدن نفر پنجم به وجود می‌آید و با شرایط مسئله (هیچ یک نباید کلاه خودش بر سرش باشد) مطابقت می‌کند، بررسی شد و کافی است رابطه‌های (۱) و (۳) را با هم جمع کنیم:

کل حالت‌های ممکن مسئله مطابق با شرایط (هیچ کس کلاه خودش بر سرش نباشد):

$$4 \times 2 + 4 \times 2 = 4 \times 2 + 4 \times 2 = 26 + 8 = 44 \quad (4)$$

و برای حالت کلی با توجه به (۳) می‌توان نوشت:

نفر $(n+1)$ م کلاهش را با نفر صاحب کلاه عوض کند:

$$n \times x_{n+1} \quad (5)$$

بنابراین، تعداد کل حالت‌های ممکن مسئله برای $(n+1)$ دانش آموز، از حاصل جمع (۲) و (۵) به دست می‌آید که آن را به x_{n+1} نشان می‌دهیم:

$$x_{n+1} = n \times x_n + n \times x_{n-1} \quad \text{نفر } n+1 \text{ می‌تواند کلاه نفر } n \text{ یا نفر } n-1 \text{ را با کلاه خودش عوض کند.}$$

و یا:

فرمول کلی پیدا کردن حالت‌های ممکن

$$x_{n+1} = n(x_n + x_{n-1}) \quad (6)$$

با رابطه (۶)، هر مسئله‌ای مانند مسئله ۵ کلاه را می‌توان حل کرد. چون همیشه: $x_1 = 1$ و $x_2 = 2$ پس:

$$n = 3: x_3 = 2(x_2 + x_1) = 2(2 + 1) = 6$$

$$n = 4: x_4 = 3(x_3 + x_2) = 3(6 + 2) = 24$$

$$n = 5: x_5 = 4(x_4 + x_3) = 4(24 + 6) = 120$$

$$n = 6: x_6 = 5(x_5 + x_4) = 5(120 + 24) = 720$$

.....

$$n = k: x_k = k(x_{k-1} + x_{k-2})$$

بدیهی است که $x_0 = 1$ چون ۱ نفر تنها نمی‌تواند کلاهش را با کس دیگری عوض کند. حال x_1 را هم می‌توان محاسبه کرد:

A	B	C	D
۲	۳	۴	۱

۴ حالت زیر برای تقسیم ۵ کلاه بین پنج نفر به دست می‌آید:

A	B	C	D	E
۵	۳	۴	۱	۲
۲	۵	۴	۱	۳
۲	۳	۵	۱	۴
۲	۳	۴	۵	۱

در هریک از حالت‌های بالا، هیچ یک از ۵ نفر کلاه خودش را بر سر ندارد. به همین ترتیب، برای هر کدام از ۹ حالت مربوط به چهار نفر واضح است که چهار حالت متفاوت برای پنج نفر پیش می‌آید که در هریک از آن‌ها شرط مسئله صادق است.

پس تا اینجا به دست آوردیم:

$$4 \times 9 = 36 \quad (1)$$

در حالت کلی، برای $(n+1)$ نفر به دست می‌آید:

(۲) $n \times x_n$ (نفر $(n+1)$ م با یک نفر کلاهش را عوض کند.)

توجه: از وضع نخستین ۴ کلاه، وقتی که دو نفر یا همه آن‌ها صاحب کلاه خود باشند، نمی‌توان با اضافه کردن نفر پنجم، طوری تعویض کلاه را انجام داد تا به حالتی برسیم که هریک از پنج نفر، کلاه دیگری را بر سر داشته باشد. زیرا با شرایط مسئله نمی‌تواند تطبیق کند. (فعالیت: خودتان تجربه کنید.)

در حالتی که یک نفر کلاه خودش و بقیه کلاه دیگران را بر سر دارند هم به ۸ حالت ممکن رسیدیم که اگر نفر پنجم را به این ۸





$$x_p = 2(x_p + x_r) = 2(1+0) = 2$$

این روش حل مسئله را روش بازگشتی نامیدیم، به این مناسبت که بنا بر آن، پرسش مربوط به هر عددی، به همان پرسش دربارهٔ عددهای قبل از آن منجر می‌شود که کوچک‌تر هستند و حاصل آن‌ها را می‌دانیم. برای اینکه پاسخ خود را برای عدد داده‌شده n پیدا کنیم، باید پیش از آن پاسخ مورد نظر را دربارهٔ همهٔ عددهای طبیعی کوچک‌تر از n پیدا کنیم. این روش ممکن است طولانی و خسته‌کننده باشد، ولی در مورد بسیاری از مسئله‌ها نمی‌توان راه‌حل دیگری پیدا کرد.

نکته مهم: بنا بر تجربهٔ معلمی، بارها این مسئله برای دانش‌آموزان پایه‌های هفتم تا دهم حل شده است. البته در کلاس دهم، علاوه بر روش‌هایی که در اینجا آوردیم، به طریق آنالیز ترکیبی هم حل شده است. وقتی که حل مسئله تمام می‌شود، به‌طور معمول دانش‌آموزان می‌پرسند: «از این دو روشی که برای پیدا کردن رابطهٔ بازگشتی استفاده کردیم، کدام روش بهتر است؟»

در پاسخ به این پرسش، همیشه روش تجربی پیروز بوده است؛ زیرا روشی است که فهم و درک آن برای ما ساده‌تر است. ولی بهترین روش همیشه روشی است که توسط خود دانش‌آموزان ارائه شود؛ حتی اگر به پاسخ نهایی دست نیابند.

ادب ریاضی

پروفسور واسیلی پتروویچ یرماکوف (۱۹۲۲ - ۱۸۴۵) که در ریاضیات عالی مشهور و معروف است و تلاش‌های زیادی هم برای آموزش بهتر ریاضیات متوسطه به‌جا گذاشته است، روش خاصی برای مطالعهٔ کتاب‌های ریاضی داشت:

«او سطر اول کتاب را می‌خواند تا ببیند مؤلف چه مسئله‌ای را در برابر خود گذاشته است. سپس سطر آخر را می‌خواند تا بداند که مؤلف چه نتیجه‌ای گرفته است، بعد کتاب را می‌بست و بدون اینکه به حل مسئله نگاه کند، خودش به حل آن مسئله می‌پرداخت تا به نتیجهٔ مطلوب برسد. روشی که یرماکوف برای حل مسئله پیدا می‌کرد، غالباً با روش حل مؤلف کتاب فرق می‌کرد و در مواردی هم راه‌حل کوتاه‌تر و ساده‌تر از راه‌حل مؤلف کتاب به نتیجهٔ نهایی می‌رسید.»

نتیجه اینکه در واقع در این موارد است که دانش با روش‌های تازه‌ای غنی‌تر می‌شود.

چقدر خوب است که وقتی دانش‌آموزان با مسئله‌هایی که برای آن‌ها تازگی دارد، مواجه می‌شوند، از روش پروفسور یرماکوف استفاده کنند. خودشان راه‌حل مسئله را بیابند و چه بهتر که بتوانند روشی اختصاصی و نو برای حل مسئله کشف کنند. به‌تقریب می‌توان گفت که همهٔ ریاضی‌دانان بزرگ، کار خلاقیت و آفرینندگی خود را از همین جا آغاز کردند که خودشان به‌طور مستقل مسئله را حل کنند.

گورکی وارانوی، یکی از پرنیوغ‌ترین ریاضی‌دانان روس (۱۹۰۸ - ۱۸۶۸)، کارهای خلاقانهٔ خود را از همین راه، یعنی حل مستقل

مسئله‌های ساده در «مجلهٔ ریاضیات مقدماتی» که توسط یرماکوف برای دبیران و دانش‌آموز چاپ می‌شد، آغاز کرد. بسیاری از ریاضی‌دانان بزرگ دیگر هم، مثل **گراو**، **ایوانو**، **کاگان**، **چیستیا کورف** و دیگران، نخستین نوشته‌های دوران جوانی خود را در همین مجله انتشار دادند.

فعالیت (مسئلهٔ هندی): نارایانا، ریاضی‌دان هندی سدهٔ چهاردهم، این مسئله را طرح کرده است: «گاو ماده‌ای داریم که در آغاز هر سال یک گوساله ماده به دنیا می‌آورد. هر گوساله هم از آغاز سال چهارم زندگی خود، در آغاز هر سال، گوسالهٔ مادهٔ خود را می‌آورد. حالا شاگرد دانشمند من بگو که در ۲۰ سال، چند گاو خواهیم داشت؟»

راهنمایی: این مسئله را می‌توان به کمک جبر حل کرد، ولی آن را به کمک همان روش بازگشتی هم می‌توان حل کرد که از بسیاری جنبه‌ها، ساده‌تر از حل آن به کمک جبر است. واضح است که در سال اول ۱ گاو داریم و ۱ گوساله که روی هم ۲ گاو خواهیم داشت. در ابتدای سال دوم ۱ گوساله اضافه و روی هم ۳ گاو خواهیم داشت. در ابتدای سال سوم، باز هم ۱ گوساله اضافه و روی هم ۴ گاو خواهیم داشت. در ابتدای سال چهارم، به ۴ گاو و ۲ گوساله (۴+۲=۶) و سال پنجم (۶+۳=۹) و ...

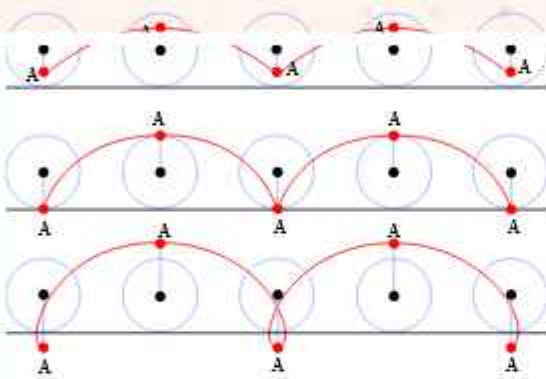
پاسخ از رابطهٔ بازگشتی محاسبه می‌شود: $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$
پاسخ نهایی: ۲۷۴۵



اسپیروگراف

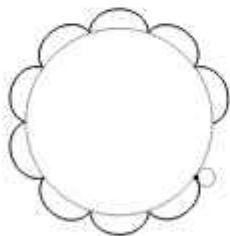
علیرضا پوئید

دبیر ریاضی ناحیه ۳ شیراز

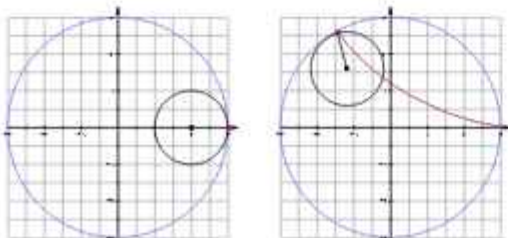


فکر کنید چه اتفاقی می افتد اگر دایره به جای مسیر راست روی دایره دیگری حرکت کند. دایره های همراه با یک نقطه ثابت (داخل، خارج یا روی آن) روی مسیر دایره های دیگر در حال حرکت است. مسیر این نقطه ثابت را در نظر بگیرید.

● اگر دایره های روی محیط دایره ثابت حرکت کنند، ریاضی دانان به مسیر ایجادشده در این حالت برون چرخزاد (هیپوسیکلوئید)^۵ می گویند.



● اگر دایره های در داخل دایره ثابت حرکت کنند، ریاضی دانان به مسیر ایجادشده در این حالت درون چرخزاد (هیپوسیکلوئید)^۵ می گویند.



تاکنون رسم های بسیاری به کمک قاعده های هندسی و ریاضی ایجاد شده اند که کاربردهای متفاوتی نیز دارند. در این مقاله قصد داریم یکی دیگر از رسم ها را که «اسپیروگراف» نام دارد و دارای زیبایی قابل توجهی است، معرفی و نحوه رسم آن را بررسی کنیم. لازم به ذکر است که با ترکیب این روش با روش های دیگر و یا تعمیم آن به دیگر شکل های هندسی شاید بتوان به رسم های نو و بی بدیلی دست یافت.

اسپیروگراف را در ایران با نام «دایره های اقلیدسی» می شناسند، هرچند ارتباط آن ها با اقلیدس برای ما مشخص نیست، اما می توان در این مورد تحقیق کرد. اسپیروگراف را سال ها بعد و بین سال های ۱۸۸۱ تا ۱۹۰۰ برونو آباکانویچ^۱ اختراع کرد و در سال ۱۹۶۵ دنیس فیشر^۲ آن را گسترش داد.

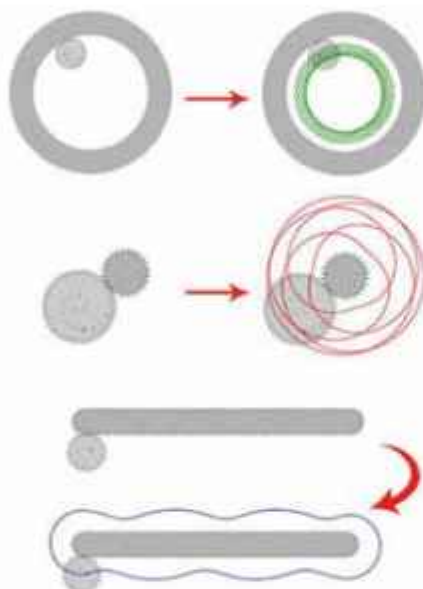


اسپیروگراف از دو کلمه «spiro» به معنای مارپیچ و «graph» به معنای نمودار تشکیل شده است که ترکیب این دو بیانگر پایه اولیه و اصلی تصویرهای پیچیده و زیبای اسپیروگراف است.

در درس هندسه با اوضاع نسبی نقطه و دایره آشنا شده ایم. یک نقطه می تواند داخل، روی یا خارج از دایره باشد. فرض کنیم A نقطه ثابتی نسبت به دایره باشد. اگر این دایره را روی خط راستی حرکت دهیم، مسیری را که نقطه A روی صفحه ایجاد می کند، مسیر «محوری»^۳ می گویند. مسیر حرکت شبتابی را روی رینگ دوچرخه در حال حرکتی در نظر بگیرید.

شکل دایره‌هایی دنداندار هستند. سه تای این دایره‌ها داخل و خارج آن‌ها دنداندار است که به این‌ها الگو می‌گویند. چهار تای دیگر آن فقط در قسمت خارجی دنداندار دارند.

داخل این چهار دایره سوراخ‌هایی وجود دارد. برای رسم تصاویرهای اسپیروگراف، یکی از چهار دایره را داخل یا خارج الگو قرار می‌دهیم؛ به طوری که چرخ‌دنده‌ها با هم درگیر شوند. با گذاشتن نوک خودکار داخل یکی از سوراخ‌ها و حرکت دادن چرخ‌دنده روی محیط دنداندار الگو، اثر جوهر روی کاغذ نقش می‌بندد و تصاویرهای زیبایی به وجود می‌آید.



نکته جالب این است که اسپیروگراف از مسئله‌های ساده فراتر می‌رود و نمونه‌های آن در خارج از جو زمین نیز در عرصهٔ مکتبی خودنمایی می‌کند.



یا ورود به این وبگاه:

<http://nathanfriend.io/inspire-web>

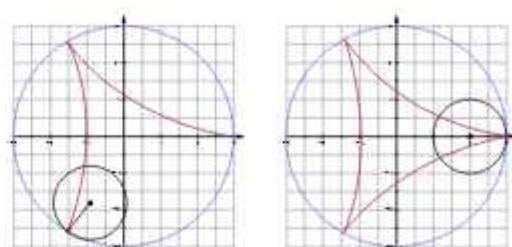
می‌توانید با اسپیروگراف مجازی شکل‌های متنوعی طراحی کنید.

پی‌نوشت‌ها:

1. Bruno Abakanowicz
2. Denys Fisher
3. Trochoid
4. Epicycloid
5. hypocycloid

<http://www.math.com>

منبع



مسیرهای رایج برون چرخ‌زاد و درون چرخ‌زاد را به اصطلاح اسپیروگراف می‌گویند. اسپیروگراف‌ها از میله‌های مارپیچ ساخته می‌شوند که این میله‌ها می‌پیچند و تصاویرهای شگفت‌انگیزی خلق می‌کنند.



یکی از روش‌هایی که می‌توان با آن ترسیم‌های بسیار زیبایی انجام داد و نقش‌های خارق‌العاده‌ای به کمک آن ایجاد کرد، استفاده از دایره به گونه‌ای خاص است. در این روش نقطه‌ای درون، بیرون یا روی دایره انتخاب می‌کنیم که این نقطه تا پایان کار نسبت به دایره ثابت می‌ماند. حال این دایره را روی محیط دایره دیگری می‌چرخانیم که این چرخش می‌تواند در درون یا بیرون دایره دوم اتفاق بیفتد. به همین سبک و با تغییر قطر دایره‌ها و یا تغییر مکان و فاصله نقطه انتخاب شده شکل‌های گوناگونی رسم می‌شوند. برای رسم اسپیروگراف می‌توان از نرم‌افزارهای رایانه‌ای و یا وسیله‌ای که به نام «دایره‌های جادویی اقلیدس» شهرت یافته است، استفاده کرد. از این رسم در معماری، تزئینات غذا در آشپزی، خیاطی، طراحی نقش‌های میدان‌ها و ... استفاده می‌کنند.

چگونه اسپیروگراف بکشیم؟

برای ترسیم از خط‌کش‌های مخصوصی که قریب به ۴۰ سال در میان لوازم‌التحریر و سرگرمی‌های کودکان به چشم می‌خورد، استفاده می‌کنیم.



کار با این خط‌کش‌ها بسیار جالب است و اگر با طرز کار آن‌ها آشنا شوید، از ترسیم اسپیروگراف خسته نمی‌شوید. این خط‌کش‌ها به

سرگرمی‌های عددی معمای سه تاس

عباس قلعه‌پور اقدم

پژوهشگر، کارشناس ارشد ریاضی

محاسبه حاصل ضرب‌ها و جمع کردن آن‌ها به عبارت جبری
 $ac + bd + ad + bc$ می‌رسیم. حال اجازه دهید مقدار این عبارت
را با فرض‌های $a + b = 7$ و $c + d = 7$ محاسبه کنیم:

$$ac + bd + ad + bc = c(a + b) + d(a + b) \\ = (a + b)(c + d)$$

اکنون دیگر حتماً متوجه موضوع شده‌اید: $7 \times 7 = 49$. حالا به سراغ
سه تاس می‌روم و معمای مشابهی را برایتان طرح و حل می‌کنم:

معمای سه تاس

سه عدد تاس پرتاب می‌کنیم. برای مثال فرض می‌کنیم در تاس
اول عدد ۳، در دومی عدد ۱ و در تاس سوم ۵ ظاهر شود. مشخص
است که عددهای پایینی تاس‌های اول تا سوم به ترتیب ۴، ۶ و ۲
هستند. حال مرحله‌های زیر را به اجرا درمی‌آوریم:

۱. تمامی عددهای بالایی تاس‌ها را در هم ضرب می‌کنیم:

$$3 \times 1 \times 5 = 15$$

۲. عددهای پایینی سه تاس را در هم ضرب می‌کنیم:

$$4 \times 6 \times 2 = 48$$

۳. عدد بالایی تاس اول را در عددهای پایینی تاس‌های دوم و سوم
ضرب می‌کنیم:

$$3 \times 6 \times 2 = 36$$

۴. عدد بالایی تاس دوم را در عددهای پایینی تاس‌های اول و سوم
ضرب می‌کنیم:

$$1 \times 4 \times 2 = 8$$

۵. عدد بالایی تاس سوم را در عددهای پایینی تاس‌های اول و دوم
ضرب می‌کنیم:

$$5 \times 4 \times 6 = 120$$

۶. عددهای بالایی تاس اول، پایینی تاس دوم و بالایی تاس سوم را
در هم ضرب می‌کنیم (بالا، پایین، بالا، یک در میان).

$$3 \times 6 \times 5 = 90$$

در پایان سرگرمی‌های عددی شماره ۱۲۳ مجله (صفحه ۴۷)،
معمایی را در مورد دو تاس مطرح کردم و انجام و رازگشایی از آن را
بر عهده شما عزیزان گذاشتم. حال با امید به آنکه به نتیجه مطلوب
رسیده باشید، راز آن را می‌گشایم و معمای دیگری را که این بار
مربوط به سه تاس است، می‌آورم.

یادآوری: معمای دو تاس از این قرار بود که دو تاس را یکی
در سمت راست و دیگری را در سمت چپ پرتاب می‌کنیم یا
به اصطلاح می‌ریزیم. سپس عددهای رو شده دو تاس را در هم
ضرب می‌کنیم. بعد عددهای پایینی را در هم ضرب می‌کنیم و
سپس عدد بالایی هر یک را در عدد پایینی دیگری ضرب می‌کنیم
و بالاخره حاصل ضرب‌ها را جمع می‌بندیم. ماجرا از این قرار است
که مجموع به دست آمده، در هر پرتابی که انجام می‌شود، یکسان
است. خب! شما در پرتاب‌های مکرری که انجام دادید، به چه عددی
می‌رسیدید؟ بله! درست است، حاصل همواره ۴۹ می‌شود.

راز این معما در نحوه شماره‌گذاری وجوه شش‌گانه تاس‌ها نهفته
است. تاس‌ها با عددهای ۱ تا ۶ طوری شماره‌گذاری می‌شوند
که مجموع عددهای دو وجه روبه‌رو همواره برابر ۷ است. مثلاً
وجه مقابل وجهی که عدد ۳ را به خود اختصاص داده است، یا
۴ شماره‌گذاری می‌شود. در واقع زوج مرتب (عدد پایینی و عدد
رو شده)، در هر پرتاب یکی از شش حالت (۱، ۶)، (۲، ۵)، (۳، ۴)،
(۴، ۳)، (۵، ۲) یا (۶، ۱) را می‌تواند اختیار بکند.

فرض کنیم برای یکی از تاس‌ها زوج (۲، ۵) و برای دیگری زوج
(۳، ۴) اتفاق بیفتد. در این صورت حاصل ضرب عددهای بالایی برابر
۶، پایینی برابر ۲۰، بالایی اولی در پایینی دومی ۸ و پایینی اولی
در بالایی دومی ۱۵ می‌شود. حاصل جمع عددهای ۶، ۲۰، ۸، ۱۵ و ۱۵
می‌شود ۴۹. ولی چرا ۴۹؟ برای پاسخ باید حالت کلی را بررسی
کنیم:

فرض کنیم عددهای بالایی و پایینی یکی از تاس‌ها به ترتیب
 a و b و عددهای بالایی و پایینی تاس دیگر c و d باشند. با



۷. عددهای بالایی تاس دوم، پایینی تاس اول و بالایی تاس سوم را در هم ضرب می‌کنیم:

$$1 \times 4 \times 5 = 20$$

۸. عددهای بالایی تاس اول، پایینی تاس سوم و بالایی تاس دوم را در هم ضرب می‌کنیم:

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

حال این هشت حاصل ضرب را جمع می‌کنیم. حاصل ۳۴۳ می‌شود. حالا شما هم چند بار تاس‌ها را پرتاب کنید و مرحله‌ها را به اجرا در آورید. حوصله کنید و مطمئن باشید به نتیجه خوبی خواهید رسید. درست فهمیده‌اید. جواب همیشه ۳۴۳ یا ۷ به توان ۳ است. اما چرا چنین می‌شود؟ چرا نتیجه مستقل از عددهای رو شده است؟

برای رسیدن به پاسخ پرسش‌های بالا، مسئله زیر را حل کنید:
اگر: $a + b = c + d = e + f = 7$ ، مقدار عددی عبارت جبری زیر را محاسبه کنید:

$$ace + bdf + adf + cbf + ebd + ade + cbe + afc$$

اگر با رویکرد ظاهر کردن سه عبارت $a+b$ ، $c+d$ و $e+f$ ، به تجزیه عبارت بالا اقدام کنید، خواهید دید که در واقع برابر حاصل ضرب همین سه دوجمله‌ای است. پس مقدار عددی‌اش $7 \times 7 \times 7$ یا ۳۴۳ می‌شود.

اگر می‌خواهید بدانید که چه رابطه‌ای بین این مسئله و رازگشایی از معمای سه تاس وجود دارد، کافی است عددهای بالایی و پایینی تاس‌های اول تا سوم را به ترتیب a, c, b, e, d, f در نظر بگیرید. این کار را بکنید تا متوجه موضوع شوید. تا سرگرمی عددی و معمایی دیگر خدا نگهدار.

چندجمله‌ای‌ها و عددهای مختلط

چندجمله‌ای‌های یک متغیره مختلط

قسمت دوم

آرش رستگار

دکترای ریاضی،

عضو هیئت علمی دانشگاه صنعتی شریف و

همکار دانشگاه پرینستون آمریکا

S حروف اول کلمه Sum به معنای «جمع» است. پس یعنی $a_k x^k$ ها را جمع می‌کنیم برای مقادیر مختلف k. کدام مقادیر؟ k را از صفر تا n تغییر می‌دهیم. فرض $a_n \neq 0$ به خاطر این است که مطمئن شویم چندجمله‌ای ما از درجه n می‌باشد. وگرنه ممکن است درجه چندجمله‌ای کمتر از n بشود. درجه چندجمله‌ای را با $\deg$ نمایش می‌دهیم. اگر چندجمله‌ای بالا را با $p(x)$ نمایش دهیم، می‌نویسیم $\deg(p(x)) = n$. می‌توان چندجمله‌ای را به

صورت نزولی نوشت یعنی $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ یا

گاهی نیز اندیس ضرایب را صعودی و توان‌های

x را نزولی می‌گیرند. مانند $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ که

در نمادگذاری خلاصه‌مان می‌شود $\sum_{k=0}^n a_k x^{n-k}$

حال برای اینکه با نمادگذاری آشناتر شویم چند نکته را بررسی می‌کنیم. برای مثال، اگر چندجمله‌ای $p(x)$ تابعی زوج باشد،

یعنی $p(x) = p(-x)$ آن گاه $\sum_{i=0}^n a_i x^i = \sum_{i=0}^n a_i (-1)^i x^i$

اما اگر دو چندجمله‌ای برابر باشند، ضرایب متناظرشان هم برابرند، یعنی برای هر i داریم $a_i = (-1)^i a_i$. برای لغای زوج این اطلاعاتی به ما نمی‌دهد، اما اگر i فرد باشد، $a_i = -a_i$ که یعنی ضرایب فرد صفر هستند. همین‌طور به دست می‌آید که اگر $p(x)$ تابعی فرد باشد ضرایب توان‌های زوج صفر هستند.

نکته‌ای دیگر اینکه برای $p(x)$ و $q(x)$ دو چندجمله‌ای از درجات m و n داریم:

$$\deg(p(x) + q(x)) \leq \max(\deg p(x), \deg q(x))$$

در قسمت اول از مجموعه مقالات «چندجمله‌ای‌ها و اعداد مختلط» با مفهوم عدد مختلط آشنا شدیم و آن را در فهم بهتر چندجمله‌ای‌های درجه دوم به کار بردیم. همچنین چندجمله‌ای‌های درجه دوم یا ضرایب عدد مختلط را بررسی کردیم. در اینجا به چندجمله‌ای‌های یک متغیره از درجه دلخواه خواهیم پرداخت و بحث درباره چندجمله‌ای‌های چندمتغیره را تا شماره بعد به تعویق خواهیم انداخت.

۱. مقدمه در باب دستگاه ضرایب چندجمله‌ای‌ها

البته روشن است که چندجمله‌ای‌ها نسبت به جمع و تفریق و ضرب بسته هستند و این‌ها خصلت از اینجا ناشی می‌شود که ضرایب چندجمله‌ای‌ها نسبت به جمع و تفریق و ضرب بسته هستند و این ما را کنجکاو می‌کند که برای انتخاب کردن ضرایب چندجمله‌ای‌ها چقدر دستانمان باز است. مثلاً مجموعه همه چندجمله‌ای‌ها با ضرایب در اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ برحسب متغیر x را با $\mathbb{Z}[x]$ نمایش می‌دهیم. اما می‌توان $\mathbb{R}[x]$ یا $\mathbb{C}[x]$ را هم در نظر گرفت و همه نسبت به جمع و تفریق و ضرب بسته خواهند بود. ضرایب لزومی ندارد از یک میدان آمده باشند. می‌توان در کنار $\mathbb{Z}[x]$ به جای $\mathbb{Z}$ حلقه اعداد صحیح گاوسی را هم گذاشت و $\mathbb{Z}[i][x]$ را در نظر گرفت که در آن ضرایب چندجمله‌ای اعدادی به شکل $a+bi$ هستند که در آن a و b عدد صحیح می‌باشند. حتی می‌توان با $\mathbb{Q}[i][x]$ هم کار کرد و a و b را گویا گرفت. با هر کدام از این دستگاه‌های ضرایب مفاهیم چندجمله‌ای‌ها قابل تعریف هستند. منظور از یک چندجمله‌ای از درجه n برحسب x عبارتی به شکل $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ است که در آن $a_n \neq 0$ و جمله $a_n x^n$ همان جمله ثابت a_n است، چون $x^0 = 1$. اما عبارت را این‌طور نوشتیم چون می‌خواهیم به شکل $\sum_{k=0}^n a_k x^k$ خلاصه کنیم. Σ همان حرف S بزرگ به زبان یونانی است و حرف

چندجمله‌ای

۳۸

شماره ۱۱۸ زمستان ۱۴۰۴

n می‌باشد و خودشان بین صفر تا n تغییر کنند. یک مجموع دیگر که در این مقاله نیاز داریم مجموع حاصل ضرب‌های r به r است. فرض کنید $x_1, \dots, x_n$ متغیرهای دوبعدی متمایز باشند. به ازای هر عدد صحیح r که $1 \leq r \leq n$ هر حاصل ضرب r عامل را از بین متغیرهای بالا یک حاصل ضرب r به r می‌نامیم. مجموع جمیع حاصل ضرب‌های r به r را با S_r نمایش می‌دهیم. S_1 را برابر ۱ می‌گیریم و S_1 همان $x_1 + \dots + x_n$ خواهد بود و S_n تنها یک جمله $x_1 \dots x_n$ را دارد. در حالت $n=3$ داریم:

$$S_1 = 1$$

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3$$

$$S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

$$S_3 = x_1x_2x_3$$

تعداد جمله‌های S_r که با هم جمع شده‌اند برابر $\binom{n}{r}$ خواهد بود.

برای دست‌گرمی نشان دهید اگر S_r برای متغیرهای $x_1, \dots, x_n$ تعریف شده باشد و S'_r برای $n+1$ متغیر $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ در این صورت: $S'_r = S_r + S_{r-1}x_{n+1}$

۳. تقسیم چندجمله‌ای بر حسب توان‌های نزولی

برای تقسیم چندجمله‌ای‌ها نیاز داریم ضرایب از یک میدان آمده باشند. مثلاً ضرایب را از $\mathbb{Q}$ ، $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ بگیریم. برای چندجمله‌ای‌های با ضرایب در $\mathbb{Z}$ تقسیم همیشه قابل تعریف نیست. قضیه تقسیم چندجمله‌ای‌ها مانند قضیه تقسیم اعداد صحیح است. اگر چندجمله‌ای‌های $p(x)$ و $Q(x)$ با ضرایب در یک میدان F مانند $\mathbb{Q}$ ، $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ داده شده باشند زوج چندجمله‌ای‌های یگانه $s(x)$ و $r(x)$ وجود دارند که $P(x) = Q(x)s(x) + r(x)$ که در آن $r(x) \equiv 0$ یا $\deg r(x) < \deg Q(x)$.

$Q(x)$ را مقسوم‌علیه و $p(x)$ را مقسوم و $s(x)$ را خارج قسمت و $r(x)$ را باقی‌مانده می‌نامند. با دانستن قضیه تقسیم نتایج جالبی به دست می‌آید. مثلاً $p(x)$ را بر $bx - c$ تقسیم کنید که در آن $b \neq 0$. باقی‌مانده یک عدد خواهد بود. چون درجه آن از درجه $bx - c$ کمتر است. می‌دانید باقی‌مانده دقیقاً برابر $P(\frac{c}{b})$ است. کافی است در عبارت $p(x) = (bx - c)s(x) + r(x)$ به جای x مقدار $\frac{c}{b}$ را قرار دهید تا آنچه می‌خواهید به دست آورید.

بنابراین تقسیم $p(x)$ بر $bx - c$ باقی‌مانده $p(\frac{c}{b})$ را خواهد داشت. از نتایج قضیه تقسیم این است که با استقراء می‌توان ثابت کرد: اگر $a_1, a_2, \dots$ دنباله‌ای از اعضای میدان F باشند چندجمله‌ای $p(x)$ را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$p(x) = \lambda_0 + \lambda_1(x - a_1) + \lambda_2(x - a_1)(x - a_2) + \dots + \lambda_n(x - a_1) \dots (x - a_n)$$

و در حالتی که $\deg p(x) \neq \deg q(x)$ حتماً حالت تساوی رخ می‌دهد. مشکل اینجاست که در حالت $\deg p(x) = \deg q(x)$ ممکن است ضرایب بزرگ‌ترین توان x همدیگر را حذف کنند. نکته دیگر اینکه $\deg(p(x)q(x)) = \deg p(x) + \deg q(x)$ چون ضرایب بزرگ‌ترین توان چندجمله‌ای $p(x)Q(x)$ برابر حاصل ضرب‌های ضرایب بزرگ‌ترین توان‌ها در $p(x)$ و $Q(x)$ است. نکته‌ای دیگر اینکه اگر $p(x)$ و $Q(x)$ چندجمله‌ای‌های ناصفر باشند $p(Q(x))$ ترکیب آن‌ها نیز ناصفر است. اگر $a_n x^n$ جمله پیش روی $p(x)$ و $b_m x^m$ جمله پیش روی $Q(x)$ باشد. جمله پیش روی $p(Q(x))$ برابر $a_n b_m^n x^{mn}$ خواهد بود. چون $a_n \neq 0$ و $b_m \neq 0$ چندجمله $p(Q(x))$ از درجه mn خواهد بود. از همین‌جا روشن است که در حالت کلی $p(q(x)) \neq q(p(x))$ چون ضرایب پیش روی $q(p(x))$ برابر $b_m a_n^m x^{mn}$ خواهد بود. لااقل می‌دانیم $\deg(p(q(x))) = \deg(q(p(x)))$.

۲. جبر چندجمله‌ای‌های یک متغیره

برای ضرب چندجمله‌ای‌ها می‌توانید از مدل زیر کمک بگیرید.

$a.$	$+ a_1 x$	$+ a_r x^r$	$+ \dots$
$b.$	$+ b_1 x$	$+ b_r x^r$	$+ \dots$
$a.b.$	$+ a_1 b_1$	$+ a_1 b_r x^r$	$+ \dots$
	$+ a_r b_1$	$+ a_r b_r$	

اگر ضرایب x^n در $p(x)q(x)$ را با c_n نمایش دهیم. چنانکه دیده می‌شود

$$c_0 = a_0 b_0, \quad c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, \quad c_r = a_0 b_r + a_1 b_{r-1} + \dots + a_{r-1} b_1 + a_r b_0$$

$$c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} = \sum_{i=0}^n a_{n-i} b_i$$

یا با نماد کوتاهی‌مان می‌توانستیم هم بنویسیم:

$$c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$$

این نماد کار را بسیار راحت می‌کند. چون اگر $r(x) = d_r x^r + d_{r-1} x^{r-1} + \dots + d_1 x + d_0$ آن‌گاه ضرب x^n در $p(x)Q(x)R(x)$ برابر خواهد بود با

$$e_n = \sum_{\substack{i,j,k=0 \\ i+j+k=n}} a_i b_j d_k$$

یعنی فقط a و b و d های k هایی را در نظر بگیریم که مجموع آن‌ها برابر

$p(x)$ و $Q(x)$ در میدان کوچک‌تر F باشند، اگر $Q(x)$ یک مقسوم‌علیه $p(x)$ در میدان بزرگ‌تر F_1 باشد، در میدان F نیز مقسوم‌علیه $P(x)$ خواهد بود. به این مثال توجه کنید:

عبارت $x \pm \sqrt{2}$ مقسوم‌علیه $x^2 - 2$ در میدان $\mathbb{R}$ هستند، اما در میدان $\mathbb{Q}$ مقسوم‌علیه $x^2 - 2$ نمی‌باشند. چندجمله‌ای $p(x)$ با ضرایب در F را روی F تحویل‌ناپذیر می‌گوییم هرگاه مقسوم‌علیه‌های آن با ضریب در F باشند یا ثابت باشند. یعنی $p(x)$ در F مقسوم‌علیه ناپذیری نداشته باشد. معادل $p(x)$ مقسوم‌علیه‌ی روی F از درجه کمتر ولی مثبت نداشته باشد. پس تحویل‌پذیری با تحویل‌ناپذیری $P(x)$ بستگی تام به میدانی دارد که به‌عنوان میدان ضرایب آن انتخاب شده است.

۵. مشتق چندجمله‌ای‌ها

مشتق چندجمله $P(x)$ را با $P'(x)$ نمایش می‌دهیم. اگر $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ تعریف می‌کنیم $P'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1}$. مشتق مرتبه r -ام با $P^{(r)}(x)$ نمایش داده می‌شود و به‌طور استقرایی تعریف می‌گردد.

$$P^{(r)}(x) = (P^{(r-1)}(x))'$$

مشتقات دوم و سوم با $P''(x)$ و $P'''(x)$ هم نمایش داده می‌شوند. همان‌طور که با قواعد مشتق توابع آشنا هستید می‌دانیم:

$$1. (P_1(x) + \dots + P_n(x))' = P_1'(x) + \dots + P_n'(x)$$

$$2. (cP(x))' = cP'(x)$$

$$3. (P(x)Q(x))' = P'(x)Q(x) + P(x)Q'(x)$$

$$4. (P^r(x))' = rP^{r-1}(x)P'(x)$$

بسط تیلور برای چندجمله‌ای‌ها به شکل یک تساوی است.

$$\begin{aligned} p(x+y) &= p(x) + \frac{1}{1!} p'(x)y + \frac{1}{2!} p''(x)y^2 + \dots \\ &+ \frac{1}{k!} p^{(k)}(x)y^k + \dots + \frac{1}{m!} p^{(m)}(x)y^m \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} p^{(k)}(x)y^k \end{aligned}$$

با مفهوم بسط تیلور در حساب دیفرانسیل و انتگرال دانشگاهی آشنا خواهید شد.

دو حالت خاص از بسط تیلور مشهورند. اگر به جای x و y قرار دهیم h و $x-h$ خواهیم داشت:

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} P^{(k)}(h)(x-h)^k$$

که در آن h در همان میدان F زندگی می‌کنند. نکته جالب این است که این نمایش یکتاست. در حالت خاص، اگر دنباله a_i دنباله ثابت با مقدار c باشد، یعنی $p(x)$ را به‌طور یگانه‌ای می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$p(x) = \lambda_0 + \lambda_1(x-c) + \lambda_2(x-c)^2 + \dots + \lambda_n(x-c)^n$$

این نمایش را بسط $p(x)$ بر حسب توان‌های $x-c$ می‌نامند. روش تقسیم هورنر برای محاسبه تقسیم $p(x)$ بر $x-c$ در نمودار زیر نمایش داده شده است. آیا می‌توانید از روی نمودار روش هورنر را حدس بزنید؟

c	a_0	a_1	a_2	$\dots$	a_n
	b_0	b_1	b_2	$\dots$	b_n

در اینجا $a_0 = b_0$ و $b_1 = a_1 + cb_0$ خارج‌قسمت و باقی‌مانده برابر b_n خواهد بود.

۴. قابلیت تقسیم در چندجمله‌ای‌ها و قواعدی برای محاسبه باقی‌مانده

اگر $p(x) \neq 0$ و $Q(x) \neq 0$ دو چندجمله‌ای باشند و $S(x)$ چندجمله‌ای دلخواهی باشد باقی‌مانده‌های تقسیم $p(x)$ و $Q(x)$ بر $S(x)$ یکسان خواهد بود. همچنین اگر $p(x) = p_1(x) + \dots + p_n(x)$ و باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر $Q(x)$ برابر $r_1(x)$ باشد، باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر $Q(x)$ برابر $r_1(x) + \dots + r_n(x)$ خواهد بود.

قاعده ۱. اگر $q(x) = x^m + q_1(x)$ که در آن $q_1(x)$ از درجه کوچک‌تر از m است و $\deg(p(x)) = n$ و $n \geq m$ برای یافتن باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر $Q(x)$ کافی است در جمله‌هایی که درجه آن‌ها بزرگ‌تر یا مساوی m است، عامل x^m را به دفعات کافی به $q_1(x)$ تبدیل کنیم تا به یک چندجمله‌ای با درجه کمتر از m برسیم.

برای مثال، برای محاسبه باقی‌مانده $p(x)$ بر $x^m - x$ ($n \geq m > 1$) در اینجا $q_1(x) = x$ پس کافی است به دفعات کافی عامل x^m را به x تبدیل کنیم.

مثال دیگر، برای محاسبه باقی‌مانده $p(x)$ بر $x^m - c$ ($n \geq m$) به ازای هر جمله $p(x)$ مانند $a_k x^k$ که در آن $k \geq m$ ، اگر $k = qm + r$ نمایش داده تقسیم k بر m باشد، عامل $a_k x^k$ را با $a_k c^q x^r$ جایگزین کنید. چندجمله‌ای حاصل همان باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر $x^m - c$ خواهد بود.

در تقسیم $p(x)$ بر $Q(x)$ اگر باقی‌مانده صفر باشد، می‌گوییم $p(x)$ بر $Q(x)$ بخش‌پذیر است یا می‌گوییم $Q(x)$ یک مقسوم‌علیه $p(x)$ می‌باشد و می‌نویسیم $Q(x) | P(x)$.

نکته جالب اینجاست که اگر $F \leq F_1$ دو میدان باشند و ضرایب



و اگر در دستور بالا قرار دهیم $h=0$ خواهیم داشت:

$$p(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} p^{(k)}(0) x^k$$

این دستور آخر را «دستور ماکلورن برای چندجمله‌ای‌ها»

نامیده‌اند. قبلاً گفتیم که هر چندجمله‌ای $p(x)$ را فقط به یک

طریق می‌توان به شکل $p(x) = \sum_{k=0}^n \lambda_k (x-h)^k$ نوشت. در

اینجا فهمیدیم که $\lambda_k = \frac{p^{(k)}(h)}{k!}$ در عمل محاسبه ضرایب بسط

$p(x)$ بر حسب توان‌های $x-h$ به وسیله تقسیم‌های متوالی به روش هورنر آسان‌تر است.

۶. ریشه‌های چندجمله‌ای‌ها

در اینجا بحث بر سر ریشه‌های حقیقی یا مختلط چندجمله‌ای‌ها با ضرایب در $\mathbb{R}$ یا در $\mathbb{C}$ است. بنابراین باید با مفهوم مزدوج مختلط یک چندجمله‌ای با ضرایب مختلط آشنا شویم. اگر $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ که در آن $a_i \in \mathbb{C}$ ، آن‌گاه مزدوج مختلط این چندجمله‌ای به صورت زیر تعریف می‌شود: $\bar{P}(x) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 x + \dots + \bar{a}_n x^n$ که در آن $\bar{a}_i \in \mathbb{C}$ مزدوج مختلط $a_i \in \mathbb{C}$ می‌باشد. اگر $a_i \in \mathbb{R}$ برای هر i برقرار باشد، یعنی اگر $p(x)$ ضرایب در $\mathbb{R}$ باشند، خواهیم داشت $p(x) = \bar{p}(x)$. به سادگی می‌توان دید برای چندجمله‌ای $p(x)$ با ضرایب حقیقی و عدد مختلط C مقادیر $P(x)$ و $\bar{P}(x)$ مزدوج یکدیگرند.

به عبارت دیگر $\overline{p(c)} = p(\bar{c})$ عدد $c \in \mathbb{C}$ را ریشه $p(x)$ می‌خوانند اگر $P(c) = 0$ اگر c در میدان $\mathbb{Q}$ ، $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد، آن را ریشه گویا، ریشه حقیقی یا ریشه مختلط می‌نامند. گاهی به جای ریشه چندجمله‌ای لفظ صفر چندجمله‌ای نیز استفاده می‌شود. از آنجا که باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر $x-c$ برابر $p(x)$ است، می‌دانیم c ریشه $p(x)$ است اگر و تنها اگر $(x-c) \mid p(x)$. نماد $(x-c) \mid p(x)$ یعنی $(x-c)^h \mid p(x)$ ولی $(x-c)^{h+1} \nmid p(x)$. یعنی h بزرگ‌ترین توان $x-c$ است که $p(x)$ بر آن بخش‌پذیر است. معادله $p(x) = (x-c)^h Q(x)$ که در آن c ریشه $Q(x)$ نیست، h را مرتبه تکرار ریشه c در چندجمله‌ای $p(x)$ می‌خوانند. اگر $h=2$ می‌گویند ریشه مضاعف است. اگر $p(x)$ دارای ریشه‌های متمایز $c_1, c_2, \dots, c_r$ با مرتبه تکرار به ترتیب $h_1, h_2, \dots, h_r$ باشد، در این صورت چندجمله‌ای $Q(x)$ وجود دارد که $P(x) = (x-c_1)^{h_1} \dots (x-c_r)^{h_r} Q(x)$.

به طوری که میدان ضرایب $Q(x)$ همان میدان ضرایب $p(x)$ است و هیچ کدام از c_i ها ریشه $Q(x)$ نیستند. پس اگر $\deg p(x) = n$ تعداد ریشه‌های متمایز $p(x)$ حداکثر همان n می‌باشد.

نتایج آنچه گفتیم چنین است:

۱. اگر $\deg p(x) = n$ چندجمله‌ای $p(x)$ حداکثر به ازای n مقدار متمایز از x برابر با $\lambda \in \mathbb{C}$ می‌شود.

۲. اگر $\log Q(x) < \deg p(x) = n$ و مقادیر $p(x)$ و $Q(x)$ برای بیش از n مقدار متمایز x با هم برابر باشند، در این صورت حتماً $p(x) = Q(x)$

۳. اگر برای نامتناهی عدد λ داشته باشیم $p(\lambda) = q(\lambda)$ در این صورت لزوماً $p(x) = Q(x)$

۴. مرتبه تکرار ریشه c در $p'(x)$ یکی کمتر از مرتبه تکرار ریشه c در $p(x)$ است.

نکته مهم درباره ریشه این است که برای یک چندجمله‌ای $p(x)$ با ضرایب حقیقی اگر c ریشه $p(x)$ باشد یعنی $p(c) = 0$ آن‌گاه مزدوج مختلط آن یعنی $\bar{c}$ نیز ریشه $p(x)$ است. یعنی $p(\bar{c}) = 0$.

۷. قضیه اساسی جبر اعداد مختلط

اینکه هر چندجمله‌ای مختلط حتماً یک ریشه مختلط دارد، تلویحاً در بین ریاضی‌دانان ایتالیایی قرن شانزدهم رواج داشت. اولین کسی که این حکم را در کتاب خود نوشت ریاضی‌دانی آلمانی به نام پیتر روٹ بود که در ۱۶۰۸ چاپ شد. در ۱۶۲۹ ریاضی‌دان مشهورتری با نام آلبر ژیرار عنوان کرد که یک چندجمله‌ای درجه n دارای n ریشه می‌باشد. در ۱۶۲۷ دکارت علی‌رغم وحشتی که از اعداد مختلط داشت این حکم را با تمیز دادن بین ریشه‌های حقیقی و مختلط و مثبت و منفی بیان نمود. در قرن هفدهم ریاضی‌دانان اعدادی را که دکارت با نام موهومی به کار می‌برد با احتیاط به کار می‌بردند اما اوایل در قرن هجدهم به ریاضی‌دانان جرئت و قوت قلب بیشتری داد. دالامیر در ۱۷۴۶ برای اثبات این حکم کوشید. اوایل و لاگرانژ هم در این جهت قدم برداشتند اما در نهایت این گاوس بود که در سال ۱۷۹۹ در تز دکترای خود برای اولین بار اثبات صحیح و کاملی از آن ارائه داد. او در طول عمر طولانی خود چند اثبات دیگر نیز از این قضیه ارائه کرد. تمام اثبات‌هایی که تاکنون برای این حکم ارائه شده است از تکنیک‌های آنالیز کمک می‌گیرند و تاکنون کسی اثباتی کاملاً جبری ارائه نکرده است.

قضیه اساسی جبر اعداد مختلط: هر چندجمله‌ای غیر ثابت با ضرایب در $\mathbb{C}$ حداقل یک ریشه مختلط دارد.

با تقسیم بر $x-c$ که $p(c) = 0$ می‌توان نشان داد اگر a_n ضریب پیش رو $p(x)$ باشد آن‌گاه $p(x)$ نمایشی یکتا به شکل زیر دارد که در آن c_i ها ریشه‌های متمایز $p(x)$ با تکرار h_i هستند.

$$p(x) = a_n (x-c_1)^{h_1} \dots (x-c_r)^{h_r}$$

اگر ریشه‌ها را $c_1, \dots, c_n$ بنامیم و اجازه دهیم بعضی با هم برابر باشند و S_k مجموع حاصل ضرب‌های k از این ریشه باشند، به سادگی می‌توان دید:



$$\begin{array}{r|l}
 1-x & 1-x^2-x^2 \\
 -1 & +x^2-x^2 \\
 \hline
 & -x-x^2-x^2 \\
 & +x-x^2-x^2 \\
 \hline
 & x^2-x^2-x^2-x^2 \\
 & -x^2-x^2-x^2 \\
 \hline
 & -x^2-x^2-x^2
 \end{array}$$

بنابراین

$1-x = (1-x^2+x^2)(1-x+x^2) + x^2(-1+x^2-x^2)$
 در تقسیم $p(x)$ بر $Q(x)$ برحسب توان‌های صعودی تا مرتبه k فقط اجزای از $p(x)$ و $Q(x)$ که درجه آن‌ها کوچکتر از k است اهمیت دارند.

چون اگر $p_k(x)$ و $Q_k(x)$ اجزای مذکور باشند، می‌توان نوشت:

$$p(x) = p_k(x) + x^{k+1} u(x)$$

$$Q(x) = Q_k(x) + x^{k+1} v(x)$$

فرض کنید

$$P_k(x) = Q_k(x)s(x) + x^{k+1}r(x)$$

تقسیم برحسب توان‌های صعودی تا مرتبه k باشد آن‌گاه

$$p_k(x) = Q_k(x)s(x) + x^{k+1}(u(x) - s(x)v(x) + r(x))$$

فرض کنید $p(x) = Q(x)t(x)$ و قرار دهید $Q(x) | p(x)$ اگر درجات $P(x)$ و $Q(x)$ به ترتیب n و m باشند، درجه $t(x)$ برابر $v = n - m$ خواهد بود. پس بنا بر قضیه تقسیم برحسب توان‌های صعودی $t(x)$ فقط و فقط وقتی خارج قسمت $p(x)$ تا مرتبه k است که $k \geq n - m$ اگر $k < n - m$ با کمک $t(x)$ می‌توان خارج قسمت $p(x)$ بر $Q(x)$ تا مرتبه k را به دست آورد.

زیرا در این حالت

$$t(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_kx^k + c_{k+1}x^{k+1} + \dots + c_vx^v$$

بنابر تساوی $p(x) = Q(x)t(x)$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
 p(x) &= (c_0 + \dots + c_kx^k)Q(x) + \\
 &+ x^{k+1}(c_{k+1}x^{k+1} + \dots + c_vx^{v-k-1})Q(x)
 \end{aligned}$$

که خواسته ما را برآورده می‌کند.

$$S_1 = \frac{-a_1}{a_0}$$

$$S_2 = \frac{a_1}{a_0}$$

$$S_k = (-1)^k \frac{a_k}{a_0}$$

$$S_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$$

در حالت چندجمله‌ای‌های با ضرایب حقیقی اگر $c_1, \dots, c_k$ مجموعه ریشه‌های حقیقی باشند $w_1, \dots, w_s$ و مزدوج‌های آن‌ها مجموعه ریشه‌های غیرحقیقی باشند، آن‌گاه:

$$p(x) = a_n(x-c_1)^{h_1} \dots (x-c_k)^{h_k} (x-w_1)^{l_1}$$

$$(x-\bar{w}_1)^{l_1} \dots (x-w_s)^{l_s} (x-\bar{w}_s)^{l_s}$$

که در آن $h_1 + \dots + h_r + z(t_1 + \dots + t_s) = n$

پس می‌توان نشان داد هر چندجمله‌ای به ضرایب حقیقی به حاصل ضرب چندجمله‌ای‌های حقیقی درجه اول $(x-c_i)$ و چندجمله‌ای‌های حقیقی درجه دوم $(x-w_i)(x-\bar{w}_i)$ قابل تجزیه است. با این وصف، هر چندجمله‌ای درجه فرد با ضرایب حقیقی حتماً یک ریشه حقیقی خواهد داشت. توجه کنید که چندجمله‌ای‌های درجه دوم با ضرایب حقیقی که در $\mathbb{R}$ تجزیه نمی‌شوند مبین منقی دارند.

۸. تقسیم چندجمله‌ای‌ها برحسب توان‌های صعودی

این قضیه بسیار شبیه قضیه تقسیم معمولی است. اما ایده آن این است که $p(x) - Q(x)s(x)sr(x)$ که قبلاً قرار بود از درجه کوچک‌تر از درجه $Q(x)$ باشد اینجا باید بر x^{k+1} بخش پذیر باشد. فرض کنید $p(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای با ضرایب در F باشد و $k \geq 0$ عددی صحیح باشد. در این صورت چندجمله‌ای‌های $s(x)$ و $r(x)$ به‌طور یگانه وجود دارند که $p(x) = Q(x)s(x) + x^{k+1}r(x)$ و $s(x) \equiv 0$ یا $\deg(s) \leq k$ این شرط روی درجه $s(x)$ است که باعث می‌شود جواب ما یگانه باشد. همان‌طور که در قضیه تقسیم معمولی این شرط روی درجه باقی‌مانده $r(x)$ است که باعث می‌شود خارج قسمت و باقی‌مانده یگانه باشند. یک مثال از محاسبه این تقسیم در اینجا آورده می‌شود. سعی کنید خودتان آن را رمزگشایی کنید.



۴۲

شماره ۱۳۹ زمستان ۱۴۰۳

غلط اندازها هر مثلث دلخواه متساوی الاضلاع است!!!

یهنام آیتی پور

دبیر ریاضی مدارس دزفول و مدرس دانشگاه



$$D \in AD \Rightarrow ND = MD$$

$$D \in DH \Rightarrow DB = DC$$

حالت دو مثلث قائم الزاویه $\triangle ADM$ و $\triangle ADN$ به حالت وتر و یک ضلع زاویه قائمه قابل انطباق هستند، پس:

$$(1) \quad AM = AN$$

همچنین داریم: $\triangle DBN \cong \triangle DCM$ (به حالت وتر و یک ضلع زاویه قائمه)

پس:

$$(2) \quad MC = NB$$

نتیجه اینکه:

$$(1), (2) \Rightarrow AB = AC$$

به همین ترتیب، با رسم نیمساز زاویه $\hat{B}$ و عمود منصف ضلع AC می توان ثابت کرد: $AB = BC$

پس:

$$AB = AC = BC$$

قبل از اینکه رمزینه را ببینید، تحقیق کنید و ببینید چه مغالطه‌ای در این استدلال صورت گرفته که هر مثلث دلخواه مثلث متساوی الاضلاع می شود!!!

در ضمن شما می توانید مغالطه های ریاضی جذاب را برای ما بفرستید تا در شماره های بعدی آن را ارائه دهیم.



مغالطه

یکی از هدف های مهم نظام های آموزشی پیشرو در دنیای امروز، آموزش مهارت های زندگی شهروندی به دانش آموزان است. هدف این است که شهروندانی ماهر در زندگی اجتماعی تربیت شوند. مدرسه های امروز مدرسه هایی هستند که دانش آموزان را برای زندگی پشت دیوارهای مدرسه آماده می کنند.

یکی از مهم ترین این مهارت ها، مهارت تفکر انتقادی است. یعنی اینکه هر حرفی را به سادگی نپذیریم. از هر اندیشه ای چشم بسته پیروی نکنیم. مطالبی را که می شنویم یا می خوانیم قبل از پذیرش به بوته نقد، آزمایش و بررسی بگذاریم.

ابوعلی سینا جمله مشهوری دارد به این مضمون که: «اگر آدمی عادت کند که هر چیزی را به سادگی بپذیرد، به تدریج انسانیت خود را از دست می دهد.»

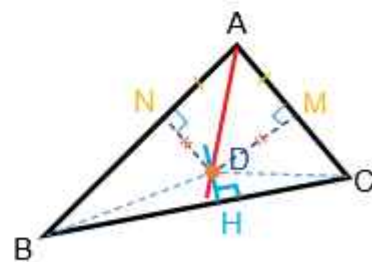
بستر ریاضی جایگاهی است که به روشن ترین شکل ممکن می تواند تفکر انتقادی را پرورش دهد. با تفکر و تمرین می توان بسیاری از مغالطه ها را در استدلال های نادرست شناسایی کرد.

در این مقاله یک استدلال نادرست را مطرح می کنیم تا شما علاقه مندان با دقت و توجه اشکال های استدلال را بیابید و بدین ترتیب مهارت خودتان را پرورش دهید.

این مغالطه را تصحیح کنید:

هر مثلث دلخواه متساوی الاضلاع است!

مثلث دلخواه $\triangle ABC$ را در نظر می گیریم.



AD نیمساز زاویه $\hat{A}$ و HD عمود منصف ضلع BC را رسم می کنیم.

طبق خاصیت های نیمساز و عمود منصف واضح است که:



۴۳

شماره ۱۷۸ | زمستان ۱۴۰۴

لطایف الحساب قطب الدین الذهبی
(قسمت ششم)

باغ سیب

جعفر زیدی

کارشناس ارشد تاریخ علم و دبیر ریاضی

مقاله دوم از کتاب لطایف الحساب
در بیان استعمال انواع مجهولات
عددی از معلومات عددیه
و این مشتمل است بر لطایف
که شامل چهل و سه لطیفه است.
در اینجا به یک لطیفه از آن
پرداخته ایم.

لطیفه پانزدهم به زبان ساده: برای یافتن مجموع اعداد فرد متوالی شروع از یک کافی است نصف عدد یک را با نصف عدد آخر جمع کنیم و حاصل را در تعداد اعداد ضرب کنیم. مثال در باغ تعداد سیب‌های چیده شده توسط افراد، همان مجموع اعداد فرد دنباله اعداد ۱، ۳، ۵، ۷، ۹، ۱۱ است که به روش بیان متن، آن است که نصف یک و نصف یازده می‌شود شش و عدد شش را در تعداد اعداد دنباله که شش تا است ضرب کنیم. حاصل ۳۶ است که همان تعداد سیب‌ها است. و البته تعداد اعداد و مجموع اعداد را می‌توانید از فرمول‌های زیر به دست آورید:

(کوچک‌ترین عدد فرد - بزرگ‌ترین عدد فرد) × تعداد اعداد فرد = N
+ ۱

$$N \times \frac{(X + Y)}{2} = \text{مجموع اعداد دنباله}$$

لطیفه پانزدهم: در بیان آنکه چند باشد [مجموع] اعداد فرد متوالیه از یکی که اول افراد [است] تا فردی معین دیگر.
بیانش آن است که نیمه فرد آخر را بگیرند و بر او افزایند نیمه یکی و حاصل را ضرب کنند در مثل خود آنچه حاصل آید مجموع اعداد فرد باشد.

مثلاً پرسیدند که جماعتی به باغی رفتند و سیبی چند چیدند بر این نهج^۱ که اولین یک سیب چید و دومی سه سیب و سومی پنج و چهارمین هفت و همچنین تا یازده. پس مجموع سیب‌ها چند باشد؟

نیمه یازده را که پنج و نیم است گرفتیم و بر او افزودیم نیمه یکی را شش شد. وی را ضرب کردیم در نفس وی^۲ که شش است حاصل آمد سی و شش و این مجموع اعداد سیب که خورده باشند جواب سؤال است.

پی‌نوشت‌ها

۱. الگو یا روش یا راه
۲. تعداد آن‌ها

پایه دهم

۴۴

شماره ۱۳۹ | زمستان ۱۴۰۳

بازی عددی

طیبه خاکی نژاد
کارشناس ریاضی

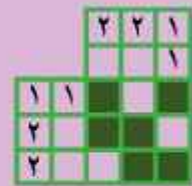


برای مشاهده
پاسخ رمزیننه را
پوش کنید

نقاشی با عددها <<

روش بازی:

عددهای بیرون هر سطر و ستون، تعداد ردیف‌های مربع سیاه را که در آن سطر یا ستون وجود دارند، نشان می‌دهند. برای مثال ۴، ۵، ۹ و ۲ نمایش ۴ ردیف مربع سیاه ۴، ۵، ۹ و ۲ تایی است. در واقع عددهای جدا نمایش دهنده حداقل یک فضای خالی بین آن‌ها هستند.



جدول راهنما

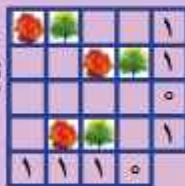
۱	۱	۲	۱	۲	۲	۱	۲	۱	۱
		۵	۴	۱	۲	۲	۱	۴	۵
		۱		۲	۱	۱	۲		۱
۱	۱								
۶									
۲	۲	۲							
۱	۱								
۲	۲	۲							
۸									
۲	۲								
۲	۲								
۱	۴	۱							
۱	۱								

>> پارک

روش بازی:

گل‌ها را در بالا، پایین یا طرفین درخت‌ها قرار دهید. گل‌ها نباید به صورت سطری، ستونی یا قطری کنار یکدیگر قرار گیرند. تعداد گل‌های هر سطر و ستون بیرون از جدول نشان داده شده است. هر درخت فقط به یک گل وصل می‌شود.

جدول راهنما



۳									
۱									
۰									
۰									
۵									
۰									
۲									
۰									
۲									
۱									
۲	۱	۲	۰	۲	۱	۲	۱	۲	۱

<< الماس

روش بازی:

عددهای بیرون جدول تعداد الماس موجود در هر سطر و ستون را نشان می‌دهند. هر پیکانه (فلش)

نشان دهنده راستای قرارگیری یک یا چند الماس را نشان می‌دهد و داخل خانه پیکانه، الماسی وجود ندارد. ممکن است الماس بلافاصله بعد از پیکانه یا با فاصله از آن قرار گیرد و ممکن است تمامی الماس‌ها پیکانه وجود نداشته باشد. لذا ممکن است قبل از پیکانه هم الماس‌هایی موجود باشند.



جدول راهنما

	۲	۱	۲	۲	۱	۱	۳	۱
۲								
۱								
۲								
۲								
۲								
۱								
۱								
۲								



۴۵

شماره ۱۳۸ | زمستان ۱۴۰۴

تو یاد دادی مرا

فریبا پولادی باغبادرانی

دبیر ریاضی، اصفهان



محفل گرم کلاسمان فرصت تازه‌ای بود
تا ساعتی از دید شما به حقیقت بنگرم
و از دریچه نگاهتان به تک‌تک عضوهای خلقت
ارزش وجودی مخلوق داده و شکر نعمت کنم
بارها در عمل دیدم
ممکن نیست که بدون وجود یکتای واحد
ارزش وجودی کوچک‌ترین عضو جهان میسر باشد
چرا که بدون هستی‌بخش عالم

تو یاد دادی مرا
که در تساوی عبارات عواطف و احساسم
از باور منفی چه راحت فاکتورگیری کنم
و در تمام صحنه‌های سخت روزگار
از تمام اعضای مجموعه توانی‌ام بهره بگیرم.
تو یاد دادی مرا
که انحنای نقطه عطف لبخند در کمان صورت
همیشه مماس بر خطوط باور توست
و چگونه در عرصه‌های تناقض‌گونه مسائل هستی
با برهانی مستدل برای انکار ناحق تلاش کنم.
چه نیک با قوه تدبیر در کلاس برای هم معنی کردیم
یاد گرفتیم که همواره از تمام حقایق هستی
تکیه بر خدا نموده و برهان تازه‌ای رقم زنیم.





مجموعه توانی خلقت، تهی از عضو خواهد بود.

یاد گرفتم از صداقت کلامت

که اختفای سور وجود، تحقیر نیست

باور کنم صفر، هیچ کجایی ارزش نیست

گاهی هزاران صفر در کنار یک، چه با ارزش می شود!

و این چنین نتیجه را با هم تکرار کردیم.

بارها برابیم باز خواندی این حقیقت را

رابطه بشر با خدا، از دیرباز، میل به بی نهایت دارد

و لیکن تمایلات بشر، مجهولاتش روزافزون است

و یاد خدا در اذهان جاهلان تهی شده.

تو یاد دادی مرا

که وجود خدا در جهان همچو انعکاس آفتاب است.

تقارن تمام احساس بشر، میل به یک نقطه حدی دارد

و اوست خالق که مجموعه حقیقی ذاتش

به مثل، مشتق محض تمام خوبی هاست.

و چه زیبا برابیم اثبات کردی

که در قضیه هستی

اصل رسیدن به حکم حقیقی است

و همه چیز فرض و اتحادی دیگر

برای رسیدن به نهایت غایت اوست.

نیکو و گفتمی که چگونه با تابع خطی

احساسم آشنا باشم

و در برابر متغیرهای زودگذر تسلیم نباشم.

یاد گرفتیم در چار دیواری کلاس

چگونه متغیرهای ثابت را

در توابع انتگرالی باورها به کار بندیم

و در برابر غرضه هایی

که دلتای وجودمان ناخواسته منفی است

ریشه های پوچی و دلزدگی را

با حدگیری مجدد، یکباره حذف کنیم.

لحظه ها ستایشگر نوای معلم اند

این کلام حقیقی دانش آموزانی است

که در دنباله یک نوای کلام، هم گرای وصف معلم اند.

و تو ای معلم عزیزم

تو میل دادی هم گرایی دنباله ذهنم را به سوی مبدأ هستی

تا درست دریابم

که تساوی هر دو قسمت مغزم میل به سوی خدا دارد.

تو یاد دادی که همیشه از توابع وجودم انتگرال بگیرم

ولی نه برای توابعی که نیازمند اجتماع و اتحاد دیگرند.

از همین جا بود که دریافتم

خطی بین عقل و احساس خود بکشم

و دریابم که در عالم هستی

از همه عامل های مشترک

نمی توان فاکتور گیری کرد.

تو یاد دادی مرا

که سور عمومی یک راه حل درست

در معادله زندگی همیشه وجود دارد

و اگر در سهمی گیرودار حوادث

دلتای صبر، ناباورانه به صفر رسید،

با ریشه تکرار و توانی مضاعف، دوباره از سر بگیرم.

این چنین بود که فهمیدم

تمام زندگی جمع و ضرب و تقسیم است

تفریق بدی و حذف کاستی هاست

اتحاد بشر برای رسیدن به خداست

این کمال بشر هم گرایی به سوی خداست



۴۷

شماره ۱۷۸ | زمستان ۱۴۰۴

مسائل مسابقه‌ای

و جایزه‌دار

(قسمت دوم)

سید محمد رضا هاشمی موسوی
مدرس، مؤلف و محقق ریاضیات



برای مشاهده
پاسخ قسمت قبل،
رمزیننه را بویش
کنید

۱. با استفاده از اتحاد مثلثاتی زیر:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 2\cos \alpha$$

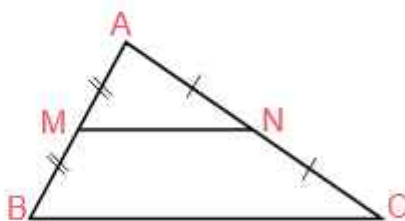
معادله درجه سوم کامل زیر را در حالتی که سه ریشه حقیقی داشته باشد حل کنید:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

۲. حاصل عبارت رادیکالی زیر را حساب کنید:

$$A = \sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

۳. به روش برداری، نشان دهید هرگاه خطی وسط دو ضلع یک مثلث را به هم وصل کند، موازی با ضلع سوم و برابر با نصف آن است:



$$\overline{MA} + \overline{AN} = \overline{MN}$$

۴. مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع a مفروض است. اگر نقطه‌های وسط ضلع‌های این مثلث را به هم وصل کنیم، مثلث متساوی الاضلاع بعدی به ضلع $\frac{a}{4}$ حاصل می‌شود.

اگر همین کار را تکرار کنیم، مثلث جدیدتری به ضلع $\frac{a}{4}$ به دست خواهد آمد. اگر این عمل را بی‌نهایت بار تکرار کنیم، بی‌نهایت مثلث متساوی الاضلاع به دست می‌آید. مجموع محیط‌ها و مجموع مساحت‌های همه این مثلث‌ها را به دست آورید.

مسئله جایزه‌دار ۱۲۸ با جایزه نقدی

۱. ثابت کنید به ازای هر n طبیعی نابرابری زیر برقرار است:

$$n(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}) < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} < n(\sqrt[n]{n+1} - 1) \quad (*)$$

الف. با استفاده از نابرابری ثابت شده $(*)$ مقدار سری هارمونیک

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ را با ۳ رقم اعشار درست تخمین بزنید و نشان دهید:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \approx 13/815$$

ب. با استفاده از حد در بی‌نهایت (وقتی $n \rightarrow \infty$) ثابت کنید سری هارمونیک واگراست.

۲. به روش ترسیمی - تقریبی، مربع دایره را انجام دهید

$$(\pi \approx 3/1415)$$

ابزار مورد استفاده: فقط خط‌کش و پرگار



۴۸

شماره ۱۳۹۸ زمستان ۱۳۹۸

غزل دربارهٔ امام زمان (عج)

دیری است که در کوی تو خورشید نهان است
در غیبت تو تیره و تاریک جهان است

ای روح بهاری تو کجایی که ز هجرت
هر روز شبی تیره و هر فصل خزان است

آبی بده از جام گوارای وصال
صحرائی عطش سوخته از اشک روان است

زنجیر ز پای دل هر کس که گشودند
دیوانه به دنبال تو چون صید دوان است

ای باد مزن دم ز سر پردهٔ حسنش
آن را که عیان است چه حاجت به بیان است

بر چهرهٔ تو ای گل زیبای شقایق
چشمان رمق دیدهٔ نرگس نگران ست

باز آی که با آمدنت ای گل والفجر
تا روز قیامت همه جا امن و امان است

مهدی برگزی، دبیر ریاضی، بشرویه، خراسان جنوبی



ریاضی و قطب

احسان یار محمدی

۲

در اینجا قصد داریم نمادی دیگر برای ناحیه‌های قطب شمال و قطب جنوب معرفی کنیم که با ریاضی مرتبط است. ریاضی‌دان، فیلسوف و دانشمند فرانسوی، **رنه دکارت** (۱۶۵۰ - ۱۵۹۶) اولین کسی بود که از پیوند **جبر و هندسه**،

دستگاه مختصات دکارتی را ابداع کرد. تقریباً هم‌زمان با دکارت، ریاضی‌دان بلژیکی، **گریگوری دو سنت - وینسنت** (۱۶۶۷ - ۱۵۸۴)، و ریاضی‌دان ایتالیایی، **بوناونتورا کاوالیری** (۱۶۴۷ - ۱۵۹۸)، با استفاده از مفاهیم حرکت‌های دایره‌ای و مداری، به دنبال ایجاد یک دستگاه مختصات جدید بودند. بعدها ریاضی‌دان ایتالیایی، **گریگوریو فوتاتانا** (۱۸۰۳ - ۱۷۳۵)، مفهوم **دستگاه مختصات قطبی** را وارد جهان ریاضیات کرد.

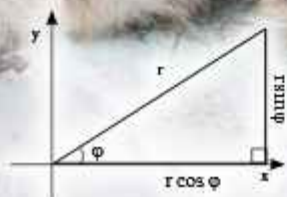
۴

از آنجا که وجه تمایز دستگاه مختصات قطبی با دستگاه مختصات دکارتی در مفهوم زاویه نهفته است، پرتوی در جهت مبدأ (قطب) را **محور قطبی** می‌نامیم. بنابراین، زاویه بین محور قطبی و شعاع، همان زاویه قطبی نقطه مفروض در دستگاه مختصات قطبی است.

۵

با استفاده از مفاهیم توابع مثلثاتی سینوس و کسینوس می‌توان مختصات قطبی را با مختصات دکارتی پیوند داد. بنابراین، با توجه به شکل زیر خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad \text{و} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$



۱

فصل زمستان همواره یادآور سوز، سرما و یخبندان است ولی در **قطب شمال** و **قطب جنوب**^۱ همیشه زمستان است. وجود حیواناتی مانند **خرس قطبی** یادآور قطب شمال و حیات جانورانی مانند **پنگوئن** از نشانه‌های ویژه قطب جنوب هستند.

۳

برای انطباق تعبیر ریاضی دستگاه مختصات قطبی با ماهیت کره زمین، یکی از دو ناحیه قطب شمال یا قطب جنوب را به‌عنوان مبدأ در نظر می‌گیریم و سپس با استفاده از مفهوم **عرض جغرافیایی**^۲، **دایره‌های عرض جغرافیایی**^۳ (خطوط عرض جغرافیایی^۴) را پیرامون آن لحاظ می‌کنیم. اگر نگاره حاصل از این رویکرد را در صفحه رسم کنیم، خواهیم دید که مرکز قطب شمال (قطب جنوب) به‌عنوان مبدأ دستگاه مختصات قطبی لحاظ شده است. از سوی دیگر، هر نقطه روی صفحه از مبدأ (قطب) یک فاصله دارد که آن را شعاع می‌نامیم.

پی‌نوشت‌ها

1. North Pole
2. South Pole
3. Latitude
4. Circles of Latitude
5. Lines of Latitude

«طرح و مطلب صفحه ۳ جلد شماره ۱۲۷ نیز از آقای احسان یار محمدی بوده است.»