

وزارت آموزش و پرورش / سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی /
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی
ماهنامه آموزشی و تربیتی برای دانش‌آموزان دوره اول متوسطه
www.roshdmag.ir / دوره بیست و نهم / شماره ۱۴۶
۴۰ صفحه / اردیبهشت ۱۴۰۳ / پیاک: ۱۲۰۸۹۹۵۱۳ / ۳۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ / ISSN: 1735-4943



شرح روی جلد

۸

پایه هشتم

روشن

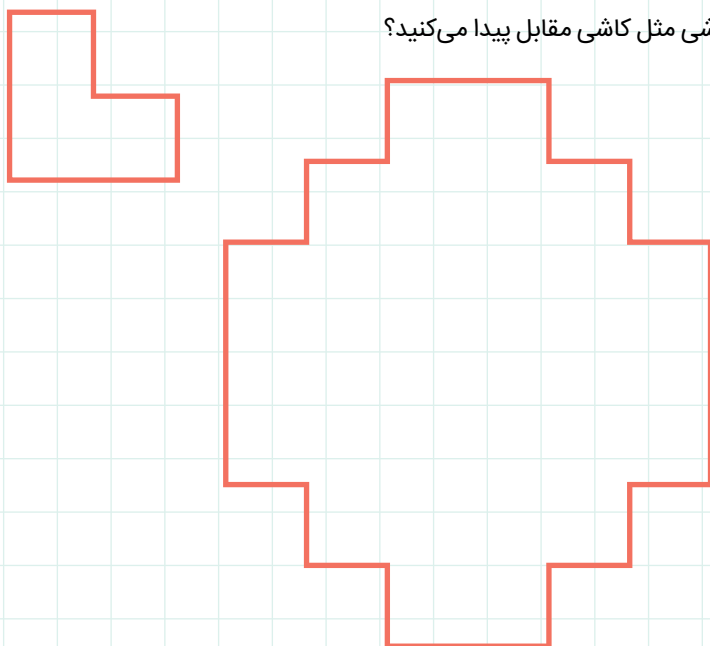


معماي تصويري

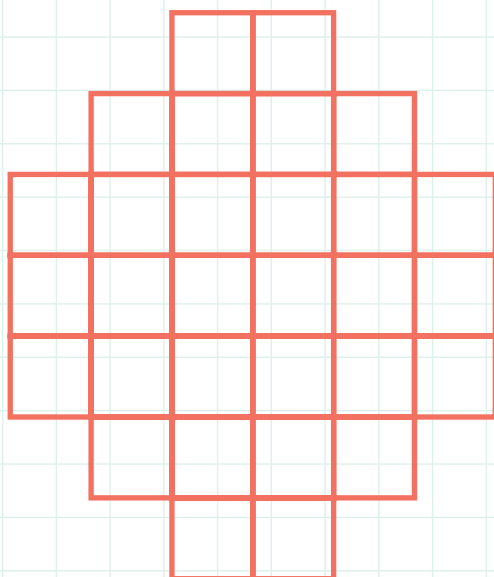


برای مشاهده پاسخ،
رمزینه را پویش کنید.

در تصویر سایه‌ای زیر، چند کاشی مثل کاشی مقابل پیدا می‌کنید؟



راهنمایی: می‌توانید از صفحه شطرنجی زیر کمک بگیرید و کاشی‌ها را با رنگ‌های متفاوت روی آن مشخص کنید.





وزارت آموزش و پرورش سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی www.roshdmag.ir
دوره بیست و نهم / شماره پی در پی ۱۴۶ / اردیبهشت ۱۴۰۳
ماهنامه آموزشی و تربیتی برای دانش آموزان دوره اول متوسطه
ISSN: 1735-4943 / پیامک: ۰۳۰۰۰۸۹۹۵۱۲ / صفحه ۴۰

مدیر مسئول: محمد صالح مدنی / سردبیر: حسین نامی ساعی / مدیر داخلی: پری حاجی خانی
هیئت تحریریه: محرم ایرد موسی، مریم جعفر آبادی، مجید حکمت، روح الله خلیلی بروجنی،
خسرو داودی، محمدرضا سید صالحی، مرتضی مرتضوی، محمود نصیری
ویراستار: بهروز راستانی / مدیر هنری: کوروش پارسائزاد / طراح گرافیک: حسین یوزباشی
تصویرگر: حسین یوزباشی

در این ماه، اردیبهشت ۱۴۰۳: اول: روز سعدی / سوم: روز بزرگداشت شیخ بهایی



دهم: روز ملی خلیج فارس / دوازدهم: شهادت استاد مرتضی مطهری،
روز معلم و روز جهانی کارگر / پانزدهم: شهادت امام جعفر صادق (ع)
بیست و یکم: ولادت حضرت معصومه (س)، روز دختر / بیست و پنجم:
روز بزرگداشت فردوسی / بیست و هشتم: روز بزرگداشت حکیم عمر
خیام، روز ملی ریاضیات / سی ام: روز ملی جمعیت / سی و یکم: ولادت
امام رضا (ع)
شرح مناسبت های ماه را با پویش رمزینه ببینید.

سخن سردبیر

تابستان جهت دار / حسین نامی ساعی / ۲

ریاضی و مدرسه

مفهوم های هندسی و حل مسئله / محمود نصیری / ۳

یک مسئله و چند راه حل / محسن کیخانی / ۶

در کلاس درس / محمد تقی طاهری تنجانی / ۲۷

خطاهای فراگیر در محاسبات ریاضی / افشین خاصه خان / ۴۰

ریاضی و استدلال

مدرسه را کجا باید ساخت؟ / به انتخاب آرش رستگار / ۸

گفت و گو

ریاضیات ابزاری قدرتمند برای درک بهتر جهان / گفت و گو با روح الله خلیلی بروجنی،

پژوهشگر، مؤلف و نویسنده مجله رشد ریاضی برهان متوسطه اول / محمد حسین دیزجی / ۱۰

جذاییت از تلاش می آید / گفت و گو با فاطمه محبی، دانش آموز سازنده کلیپ آموزشی

مجموعه های ریاضی، از کوه دشت لرستان / مهدیه مسیبی / ۳۲

ریاضی و کاربرد

مالیات و ریاضی / ژما جواهری پور / ۱۳

بیا یاد کمی فکر کنیم! چقدر بنزین مصرف می کنیم؟ / خسرو داودی / ۱۴

اندازه گیری محیط زمین برای نخستین بار / روح الله خلیلی بروجنی / ۱۶

ریاضی و نشانی (قسمت هشتم) / سراره تقی دستجردی، صبا قاسمی / ۱۸

معمای عبور از رودخانه / گردآوری: مریم جعفر آبادی / ۳۰

چگونه رسم می شود؟ / عباس قلعه پور اقدم / ۳۶

ریاضی و تاریخ

از مزرعه تا ریاضی / بهزاد منوچهریان / ۲۰

ریاضی و مسئله

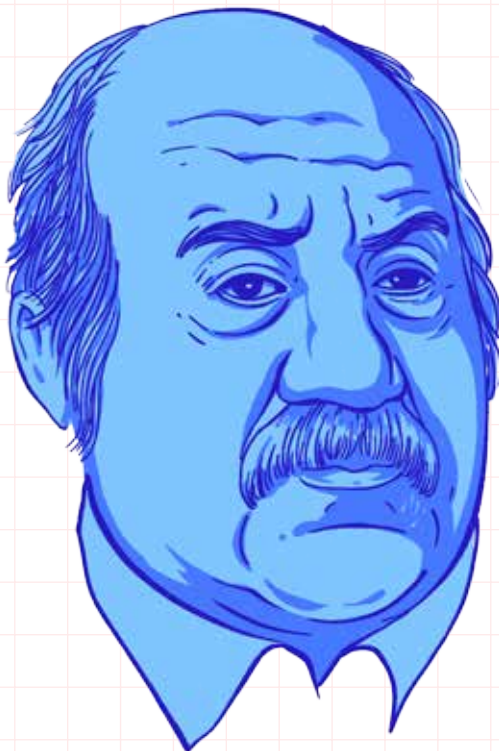
یک کشاورز ریاضی خوان چقدر زمین نیاز دارد؟ (قسمت دوم) / محرم ایرد موسی / ۲۲

چور دیگر باید دید / خسرو داودی، آرش رستگار / ۲۴

همه جا ریاضی / جعفر ربانی / ۳۸

ریاضی و برنامه نویسی

مقدمه ای بر زبان های برنامه نویسی / آریان خلیلی / ۳۴



در سال ۱۳۱۸ در محله «نوبر» تبریز به دنیا آمد. در دوران کودکی او
تبریز تحت اشغال متفقین بود و دائماً تانک ها در خیابان ها رفت و آمد
می کردند. روس ها در سال ۱۳۲۰ به ایران حمله کردند و ...
صفحه های ۲۰ و ۲۱ را بخوانید.

قیمت: ۱۱۰۰۰۰ ریال

خانواده مجلات رشد همه تلاش خود را کرده است تا این مجله
در دسترس عموم دانش آموزان قرار گیرد و همه کودکان و
نوجوانان میهن عزیز اسلامی مان امکان تهیه آن را داشته باشند.
برای مشاهده شرایط ارسال مطلب و همکاری با ماهنامه
رشد ریاضی برهان متوسطه اول، رمزینه را پویش کنید.



nazar.roshdmag.ir



نشانی کانال مجله رشد
ریاضی برهان متوسطه اول
در پیام رسان شاد:

@roshd_borhan1



تابستان جهت دار

بسیار تلخ، غمگین و قابل تأمل

از ابتدای جنگ ظالمانه غزه تاکنون نزدیک به ۱۳۰۰۰ کودک بی گناه و بی پناه جان خود را از دست داده اند و اما سرنوشت دیگر کودکان زنده مانده:

آن ها یا پدر و مادر و خانواده خود را از دست داده اند و یا با زخم های معلولیت های جسمی، روحی و روانی ناشی از جنگ به زندگی خود ادامه می دهند.

حالا شما در خصوص رژیم غاصب صهیونیست قضاوت کنید.

دوستان خوبم، سلام. دیگر به امتحانات خرداد و پایان سال تحصیلی چیزی نمانده و کم کم به تعطیلات تابستانی نزدیک می شویم. امسال را هم با تلاش و پشتکار خود پشت سر گذاشتید؛ خسته نباشید! حالا وقت آن رسیده که از تابستان لذت ببرید و استفاده کنید. تابستان فرصتی است برای آنکه خودتان را به روز و سر حال کنید. تابستان زمانی است برای کشف علاقه ها و استعدادهایتان، معاشرت با دوستان، خانواده و اقوام، و همچنین آماده شدن برای سال تحصیلی آینده و انجام خیلی از کارهای دیگر مورد علاقه تان. توصیه ما به شما همراهان خوبمان این است که اگر می خواهید از تابستان بهترین استفاده را ببرید برنامه ریزی کنید. اگر از ما بپرسید که چه برنامه و پیشنهادی برای گذراندن تابستان دارید پاسخ ما این است:

هم تفریح کنید و هم مطالعه، ولی حتماً تعادل را حفظ کنید.

کتاب های دلخواه خود را مطالعه کنید، فیلم های خوب ببینید، بازی و ورزش کنید،

سفر بروید و برای انجام بسیاری از کارهای خوب دیگر برنامه ریزی کنید. این ها باعث افزایش خلاقیت و توان شما می شوند و اضطراب و خستگی ای را که در طول سال تحصیلی داشته اید، کاهش می دهند. حتماً توجه داشته باشید، طوری برنامه ریزی نکنید که فقط تفریح کنید و مطالعه را کنار بگذارید و یا برعکس فقط مطالعه کنید و تفریح و سرگرمی نداشته باشید. مطالعه و تفریح هر دو از کارهای مفیدی هستند که می توانند به شما کمک کنند دانش و مهارت های خود را بهبود و افزایش دهید، اعتماد به نفس خود را بالا ببرید و برای سال تحصیلی آینده آماده شوید. فقط فراموش نکنید که حتماً تعادل بین تفریح و مطالعه را حفظ کنید.

پیشنهاد دیگر اینکه در تابستان ریاضی را با نگاهی دیگر مطالعه کنید.

ریاضی را با علاقه مطالعه کنید و از کاربردهای آن آگاه باشید. یعنی اینکه به ریاضیات فقط به عنوان یک سلسله قاعده و فرمول نگاه نکنید، بلکه نگاهتان به ریاضیات:

۱. به عنوان زبانی برای بیان تفکراتان از آنچه مشاهده می کنید، باشد؛

۲. به عنوان کلیدی برای حل مسائل واقعی پیرامونتان باشد.

به غیر از این ها در نظر داشته باشید که ریاضیات منطق، استدلال و قدرت حل مسئله تان را افزایش می دهد و به شما کمک می کند روابط بین عددها، شکل ها و پدیده ها را کشف، الگویابی

و مدل سازی کنید. همچنین فراموش نکنید ریاضی درس مهمی است که شما برای ادامه تحصیل در دانشگاه و انتخاب شغل آینده تان بسیار به آن نیاز دارید.

سومین پیشنهاد ما این است که مروری بر کتاب های درسی ریاضی سال های گذشته و آینده داشته باشید و از دیگر کتاب ها و مجله های ریاضی هم استفاده کنید.

یعنی به کارهایی از این دست بپردازید:

- برطرف کردن مشکلات و مسائل کتاب های درسی سال گذشته خود؛
- مطالعه اجمالی مطالب ریاضی سال آینده؛
- انتخاب و مطالعه منابع متنوع و مختلف ریاضی؛

- مطالعه مجلات ریاضی از جمله مجله رشد ریاضی برهان دوره اول متوسطه؛
- استفاده از وبگاه های (سایت های) معتبر و خوب ریاضی، مثل وبگاه مجلات رشد به نشانی roshdmag.ir که هم مجلات را آنجا می بینید و هم از دیگر مطالب خوب آن می توانید استفاده کنید؛

- استفاده از منابعی که ریاضی را با مثال ها و کاربردهای جالب و متنوع نشان می دهند؛

- دریافت کتاب های خوب ریاضیات از کتابخانه ها، و منابع دیگر و مطالعه آن ها؛
- یافتن مسئله های دشوار و چالش برانگیز ریاضیات و کوشش برای حل آن ها (حل این مسائل به تقویت مهارت های تفکر و حل مسئله شما کمک می کند)؛
- انجام فعالیت ها و کارهای خوب دیگر تابستانی.

خرداد و تابستان خوبی داشته باشید.

مفاهیم هندسی و حل مسئله

روش‌های اثبات (حل مسئله)

● محمود نصیری

از ابتدای اولین مقاله‌های این مجموعه بیشتر کوشیدیم اطلاعاتی را از مفاهیم‌های اولیه و اساسی هندسه در اختیار شما عزیزان قرار دهیم. از نقطه و خط و فاصله شروع کردیم، به تعریف پاره‌خط، زاویه و مثلث رسیدیم، سپس بخش مهمی از هندسه را که «تبدیلات هندسی» نامیده می‌شود تا حدودی توضیح دادیم و مشاهده کردیم که تبدیلات علاوه بر کاربردهایشان، اساس هم‌نهشتی‌ها در هندسه نیز هستند. به همین صورت که جلو آمدیم، سعی کردیم شما را با روش‌های حل مسئله که یکی از هدف‌های ما در این سلسله مقاله‌ها بوده است، آشنا کنیم.

از زمانی که هم‌نهشتی مثلث‌ها را بیان کردیم، توانستیم مسئله‌های بیشتری را حل و اثبات کنیم. در واقع به‌طور غیرمستقیم وارد اثبات‌های هندسی شدیم. حتی در بخش قبلی با روشی از اثبات که آن را تناقض یا «برهان خلف» نامیدیم تا حدودی آشنا شدیم. اکنون در این بخش می‌خواهیم اثبات‌ها و انواعی از آن‌ها را تا آنجا که امکان داشته باشد، بررسی کنیم.

شما در دوره ابتدایی و حتی سال‌های اولیه دوره متوسطه تا حد خوبی با ریاضیات آشنا می‌شوید و مفاهیم‌هایی از حساب و هندسه را یاد می‌گیرید، بدون آنکه بدانید چگونه قانون‌های حساب یا بعضی قضیه‌های هندسه ثابت می‌شوند. سرچشمه ریاضیات از زمان‌های دور در فرهنگ‌های مختلف و حتی قبل از مفهوم اثبات وجود داشته است. بیشترین سهم در اثبات به یونانیان باستان برمی‌گردد. اولین اثبات‌ها در حدود ۳۰۰ سال قبل از میلاد

توسط اقلیدس بیان شدند. او برای اولین بار ایده اثبات را در مورد هندسه بیان داشت و همچنین مختصری در مورد نظریه اعداد اثبات را مطرح کرد. امروزه در تمام شاخه‌های ریاضی اثبات وجود دارد و برای دانش‌آموزان نیز از دوره‌های متوسطه تا حدودی اثبات‌ها شروع می‌شوند. هر چند که در شهود، آزمایش و حتی بازی‌ها اثباتی بیان نمی‌شود، اما در ریاضی امروزی این‌ها نیز نقشی کمتر از دقت و اثبات ندارند. این شهود است که به ما کمک می‌کند در مورد چگونگی اثبات نتیجه‌های جدید تصمیم بگیریم.

رسم خطی موازی با یک خط یا رسم خطی عمود بر یک خط، به‌طور شهودی زمینه را برای اثبات‌ها آماده می‌کند. وقتی به‌طور شهودی مثلثی را روی صفحه رسم و با زاویه‌های آن، سه قسمت را از آن جدا می‌کنیم و با قرار دادن این سه زاویه در کنار هم مشاهده می‌کنیم که مجموع اندازه‌های زاویه‌های درونی مثلث برابر 180° است، دانش‌آموز به‌طور شهودی به دنبال این موضوع می‌رود که ثابت کند مجموع اندازه‌های زاویه‌های درونی مثلث 180° است و به دنبال عدد دیگری نمی‌رود. بنابراین رابطه بین شهود و اثبات‌های رسمی، موضوعی بااهمیت است و نباید آن را نادیده بگیریم.

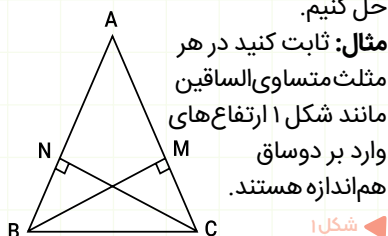
ریاضیات در طول زمان در جهت دقت بیشتر حرکت کرده است. برای چگونگی این رخداد، از آنچه از دیرباز تا کنون مشاهده می‌کنیم مرتباً اثبات‌ها دقیق‌تر می‌شوند و لزوم ارائه اثبات بیشتر مورد توجه قرار می‌گیرد. البته اصلی‌ترین دلیل این است که باید از درستی آنچه که می‌گوییم مطمئن باشیم. یکی از مهم‌ترین دلیل‌های اثبات در ریاضی دلیل آموزشی آن است. دانش‌آموز ممکن است احساس کند که مفهوم جدیدی را درک می‌کند، اما غالباً تنها زمانی که تلاش می‌کند اثباتی برای آن بیابد، درک بهتری از این مفهوم به دست می‌آورد. تلاش برای اثبات حتی اگر

هم به نتیجه نرسد مفید است. معمولاً مهم‌ترین بخش ریاضی این است که هر چه را ادعا می‌کنیم باید ثابت کنیم. به عبارت دیگر، باید بتوانیم بحثی منطقی انجام دهیم، به‌طوری که کسی نتواند به آن ایراد بگیرد یا آن را رد کند. در واقع اثبات‌های ریاضی توضیح‌های متقاعدکننده‌ای هستند برای درستی هر آنچه که بیان می‌کنیم.

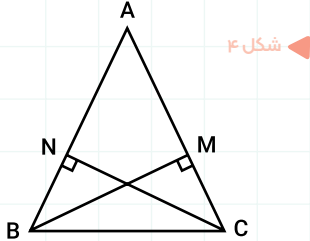
در ریاضی به جمله‌های خبری که یا درست هستند یا نادرست، و نه هر دو، «گزاره» می‌گویند. بنابراین برای تعیین درست بودن یا درست نبودن گزاره‌ها به اثبات نیاز داریم. پس می‌توان اثبات را این گونه تعبیر کرد: **اثبات در ریاضی شامل یک سلسله مرحله‌های منطقی است که از فرض یا فرض‌هایی به نتیجه‌ای برسیم.**

در اثبات‌ها معمولاً از «فرض مسئله»، یعنی آنچه مسئله به‌عنوان معلوم به ما داده است، و تعریف‌ها و قضیه‌های قبلی، یا هر آنچه که قبلاً آن‌ها را پذیرفته‌ایم، استفاده می‌کنیم. همچنین اثبات‌ها به روش‌های متنوعی انجام می‌شوند که در اینجا نمی‌توانیم همه انواع آن را بیان کنیم. زیرا قوانینی به نام «قوانین منطق» داریم که در این مرحله قابل بیان نیستند. اما تا آنجا که قابل فهم باشد، روش‌هایی را بیان می‌کنیم و می‌کوشیم مثال‌هایی را در مورد آن‌ها ثابت کنیم.

مهم‌ترین روش اثبات، روش «اثبات مستقیم» است؛ روشی که برای اکثر مسئله‌هایی که تاکنون حل کرده‌ایم، به کار برده شده است. در این روش با استفاده از فرض یا فرض‌های مسئله و آنچه را که درستی آن بر ما ثابت شده است، به «حکم مسئله»، یعنی آنچه باید نتیجه شود می‌رسیم. مثال‌ها و مسئله‌های زیادی را تاکنون بدون آنکه نامی از روش اثبات به کار رفته ببریم، حل و ثابت کرده‌ایم. اکنون سعی می‌کنیم چند مثال دیگر در این مورد حل کنیم.



می‌دانید کدام دو مثلث را در نظر بگیرید. باید مثلث‌هایی را در نظر بگیریم که اجزای هم‌نهشتی در آن‌ها وجود داشته باشد که شامل یکی از حالت‌های هم‌نهشتی مثلث‌ها باشد. در ضمن این مثلث‌ها شامل اجزایی نیز باشند که می‌خواهیم هم‌نهشتی آن‌ها را ثابت کنیم.



آیا دو مثلث AMB و ANC (شکل ۴) می‌توانند به حل مسئله منجر شوند؟ اگر به دقت این دو مثلث را بررسی کنید، درست است که هر دو شامل دو ضلع AB و AC هستند که می‌خواهیم هم‌نهشتی آن‌ها را ثابت کنیم، اما در این دو مثلث شرط اولیه، یعنی داشتن اجزای هم‌نهشتی که به هم‌نهشتی دو مثلث منجر شوند، وجود ندارد. زیرا دو مثلث قائم‌الزاویه هستند که فقط یک ضلع از یکی با نظیرش از دیگری هم‌اندازه است، آن هم $CN=MB$ و هیچ دو جزء هم‌نهشت دیگری نداریم.

بنابراین به دنبال دو مثلث دیگر می‌رویم. $\triangle MBC \cong \triangle NCB$ چرا این دو مثلث هم‌نهشت هستند؟

با کمی جست‌وجو مشاهده می‌کنید که $BM=CN$ و $BC=CB$. یعنی دو مثلث قائم‌الزاویه بنا به حالت وتر و یک ضلع زاویه قائمه هم‌نهشت هستند. در نتیجه: $\angle NBC \cong \angle MCB$ و این یعنی مثلث ABC متساوی‌الساقین است و نیز نتیجه می‌شود: $AB=AC$.

با نمونه‌هایی از اثبات‌هایی که مستقیماً از فرض مسئله به نتیجه یا حکم می‌رسیم آشنا شدید. اما چنانچه در بخش قبلی اشاره‌ای شد، اثباتی را به کار بردیم که آن را اثبات به روش تناقض یا برهان خلف نامیده‌اند. اکنون می‌خواهیم در مورد این اثبات توضیح بیشتری بدهیم و سعی کنیم مسئله‌هایی را به این روش حل کنیم. توضیح دادیم که در ریاضی هر جمله خبری را که درست باشد یا نادرست باشد و نه هر دو، گزاره می‌نامیم. پس

پس: $BC=CB$ و $\angle ABC \cong \angle ACB$. در مثلث متساوی‌الساقین زاویه‌های مقابل به دو ساق هم‌اندازه یا هم‌نهشت هستند. پس این بار نیز بنا به حالت وتر و یک زاویه حاده داریم: $\triangle BCM \cong \triangle CBN$ و دوباره نتیجه می‌گیریم: $BM=CN$.

مشاهده کردید که فرض $AB \cong AC$ و فرض $\angle ABC \cong \angle ACB$ در اساس یکی هستند، زیرا قبلاً ثابت کرده‌ایم که در هر $\triangle ABC$ ، اگر: $AB \cong AC$ آنگاه: $\angle ABC \cong \angle ACB$ (ویژگی مثلث متساوی‌الساقین). روش اثباتی را که انجام دادیم یک روش اثبات مستقیم است.

از فرض مساوی بودن اندازه‌های دو ضلع یا مساوی بودن اندازه‌های دو زاویه و استفاده از قضیه‌ای که قبلاً درستی آن را می‌دانیم، استفاده کردیم و حکم یا نتیجه مسئله را که «هم‌اندازه بودن دو ارتفاع» است ثابت کردیم.

مسئله عکس

اکنون فرض کنید جای فرض و حکم یا نتیجه مسئله را عوض کنیم. در این صورت به مسئله دیگری می‌رسیم که عکس مسئله قبلی نام دارد. چگونه آن را بیان می‌کنید؟

حتماً موفق شده‌اید آن را بنویسید.

مسئله. در $\triangle ABC$ ، دو ارتفاع هم‌اندازه یا هم‌نهشت‌اند. ثابت کنید $\triangle ABC$ متساوی‌الساقین است. به زبان نمادهای ریاضی فرض و نتیجه به صورت زیر هستند:

فرض	در $\triangle ABC$ ، BM و CN دو ارتفاع‌اند و: $BM \cong CN$
نتیجه یا حکم	$\triangle ABC$ متساوی‌الساقین است، یعنی: $AB \cong AC$ یا $\angle B \cong \angle C$

بنابراین، هر یک از $AB \cong AC$ یا $\angle B \cong \angle C$ را که ثابت کنیم، دیگری نیز ثابت شده است.

اثبات: باز هم یک اثبات مستقیم و سراسر داریم. می‌خواهیم هم‌اندازه بودن دو ضلع یا دو زاویه را ثابت کنیم، پس باید دو مثلث هم‌نهشت را در نظر بگیریم. حتماً

پاسخ: فرض و حکم مسئله را به زبان نوشتاری و به زبان ریاضی می‌نویسیم.

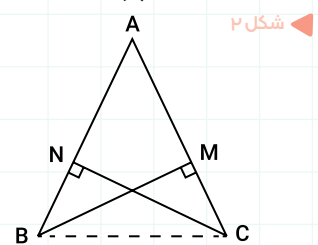
فرض	مثلث متساوی‌الساقین است
حکم	ارتفاع‌های نظیر دو ساق هم‌اندازه‌اند
فرض	در مثلث ABC داریم: $BM \perp AC$ ، $AB=AC$ و $CN \perp AB$
حکم	$CN=BM$

وقتی در هندسه می‌خواهیم مساوی بودن اندازه‌های دو پاره‌خط را ثابت کنیم، می‌کوشیم دو مثلث هم‌نهشت پیدا کنیم که این دو پاره‌خط دو ضلع از این دو مثلث باشند. با کمی دقت مشاهده می‌کنید که دو نوع مثلث می‌توانید پیدا کنید که این دو پاره‌خط ضلع‌های آن‌ها باشند. آیا می‌توانید آن‌ها را نام ببرید؟

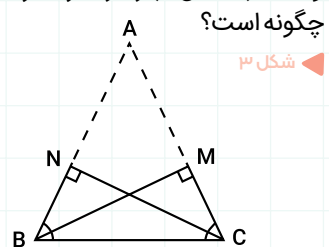
آیا مثلث‌های AMB و ANC (شکل ۲) مناسب هستند؟ مثلث‌های CBM و BCN چطور؟

می‌دانید که تمام این مثلث‌ها قائم‌الزاویه‌اند. چرا؟

پس می‌توانید از حالت‌های هم‌نهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه نیز استفاده کنید. $\triangle AMB \cong \triangle ANC$ چرا؟



بنا به فرض داریم: $AB=AC$ و $\angle BAC \cong \angle CAB$ در واقع $\angle BAC$ یا $\angle CAB$ تفاوتی ندارد و در هر دو مشترک است. در نتیجه بنا به حالت وتر و یک زاویه حاده، این دو مثلث هم‌نهشت‌اند، پس تمام اجزای نظیر به نظیر نیز هم‌نهشت‌اند؛ یعنی: $BM=CN$ و اثبات کامل است. اگر دو مثلث BMC و CNB (شکل ۳) را در نظر بگیرید اثبات چگونه است؟



این بار ضلع BC در هر دو مشترک است،



گویا می‌نامند؛ مانند: $\frac{2}{3}$ ، $\frac{3}{5}$ و $\frac{4}{8}$. اما معمولاً در این نمایش کسر را تا حد امکان ساده می‌کنیم؛ پس: $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. اگر در یک مثلث قائم‌الزاویه، اندازه‌های دو ضلع زاویه قائمه واحد باشد، آنگاه بنابر قضیه فیثاغورس، اندازه وتر برابر $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ است. عدد $\sqrt{2}$ را هرگز نمی‌توانیم به صورت $\frac{p}{q}$ که p و q عددهایی صحیح باشند، بنویسیم.

اکنون می‌خواهیم به روش تناقض آن را ثابت کنیم:

اثبات: فرض کنیم $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ که p و q به ساده‌ترین حالت نوشته شده‌اند؛ یعنی هیچ عامل مشترکی به غیر از ۱ ندارند. مانند $\frac{6}{8}$ که آن چنان ساده شده است که در $\frac{3}{4}$ صورت و مخرج آن به هیچ عددی به جز ۱ قابل قسمت نیستند. پس فرض خلف این است که فرض کرده‌ایم $\sqrt{2}$ را به صورت $\frac{p}{q}$ که p و q عددهای صحیحی هستند که هیچ عامل مشترکی ندارند نوشته‌ایم. یعنی p و q کوچک‌ترین عددهای صحیحی هستند که: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

اکنون از $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ داریم: $\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow p = q\sqrt{2}$. دو طرف این رابطه را به توان ۲ می‌رسانیم: $p^2 = 2q^2$. $2q^2$ عددی زوج است، پس p^2 نیز باید زوج باشد. اما می‌دانیم توان دوم هر عدد فرد یک عدد فرد است. چرا؟

هر عدد فرد را می‌توانیم به صورت $2k+1$ بنویسیم؛ پس:

$$(2k+1)^2 = (2k+1)(2k+1) = 4k^2 + 4k + 1$$

که فرد است. چرا؟

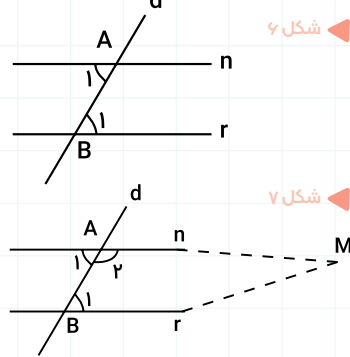
پس چون p^2 زوج است، در نتیجه p نیز زوج است و داریم: $2k = p$. با جای‌گذاری در رابطه $p^2 = 2q^2$ داریم:

$$4k^2 = 2q^2 \Rightarrow 2k^2 = q^2$$

یا: $q^2 = 2k^2$. مشابه استدلال قبلی از این رابطه هم نتیجه می‌گیریم که q باید زوج باشد. پس اگر: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ ، آنگاه باید p و q هر دو زوج باشند. یعنی این p و q دارای عامل مشترک اول ۲ هستند. اما این متناقض با فرض ماست که p و q هیچ عامل مشترکی ندارند. بنابراین خلاف فرض ما نادرست و در نتیجه خود فرض ما درست است. یعنی $\sqrt{2}$ را نمی‌توانیم به صورت عدد $\frac{p}{q}$ که p و q عددهای صحیحی هستند بنویسیم. در این صورت می‌گوییم $\sqrt{2}$ عددی «گنگ» یا «اصم» است.

مسئله دیگری را با همین فرض حل می‌کنیم:

مسئله: فرض کنیم می‌دانیم مجموع اندازه‌های زاویه‌های درونی هر مثلث برابر 180° است. فرض کنیم مطابق شکل ۶ در یک صفحه خط d دو خط n و r را چنان قطع کرده باشد که زاویه‌های $\angle A_1$ و $\angle B_1$ هم‌اندازه باشند. ثابت کنید در این صورت خط‌های n و r موازی هستند.



اثبات: باز به روش تناقض آن را ثابت می‌کنیم. خلاف فرض این است که فرض کنیم n و r موازی نباشند (شکل ۷). پس این دو خط یکدیگر را در نقطه‌ای مانند M قطع می‌کنند. در این صورت $\triangle MAB$ را داریم. بنا به فرض دو زاویه $\angle A_1$ و $\angle B_1$ هم‌اندازه‌اند، یعنی: $m\angle A_1 = m\angle B_1$. اما دو زاویه $\angle A_2$ و $\angle A_3$ مکمل هستند، در نتیجه: $m\angle A_2 + m\angle A_3 = 180^\circ$.

بنابراین: $m\angle B_1 + m\angle A_3 = 180^\circ$. یعنی در $\triangle MAB$ مجموع اندازه دو زاویه برابر 180° و در نتیجه مجموع اندازه‌های زاویه‌های درونی آن از 180° بزرگ‌تر است که این یک تناقض است. زیرا ما قبول کرده‌ایم که مجموع اندازه‌های زاویه‌های درونی هر مثلث برابر 180° است. پس فرض خلف یا همان خلاف فرض نادرست است. در نتیجه فرض خود ما درست بوده است.

اکنون مثالی از حساب بیان می‌کنیم: **مسئله:** با عددهای گویا آشنایی دارید. هر عددی را که بتوانیم به صورت $\frac{p}{q}$ بنویسیم که p و q عددهایی صحیح و q مخالف صفر باشد، «عدد

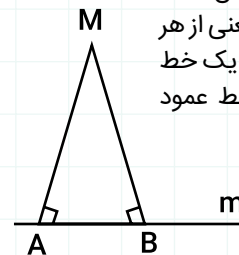
در ریاضی هر جمله یا درست است یا نادرست است و چیزی بین آن دو وجود ندارد. $2 < 4$ درست، اما $\frac{1}{2} < \frac{1}{4}$ نادرست است. با استفاده از این ویژگی می‌توانیم روشی را در اثبات‌ها ارائه دهیم.

این روش، به روش تناقض یا برهان خلف معروف است. از این نظر آن را تناقض می‌گوییم که نتیجه به دست آمده متناقض با فرض مسئله است یا متناقض با چیزی است که ما درستی آن را می‌دانیم. نام برهان خلف را نیز به این دلیل برای آن انتخاب کرده‌اند که فرض کرده‌ایم گزاره ما نادرست است و سپس ثابت کرده‌ایم که این نادرست در نظر گرفتن آن، متناقض با یک واقعیت یا حقیقت دیگری است، پس ما نتیجه می‌گیریم که «فرض اول» ما درست بوده است و نباید آن را نادرست در نظر می‌گرفتیم. برهان خلف یا روش تناقض نه تنها در هندسه بلکه در تمام زمینه‌های دیگر ریاضی به کار می‌رود. در ادامه مثال‌هایی از هندسه بیان می‌کنیم:

مسئله: فرض کنیم می‌دانیم مجموع اندازه‌های زاویه‌های درونی هر مثلث برابر 180° است. اکنون چگونه ثابت کنیم که از هر نقطه غیرواقع بر یک خط، یک و فقط یک خط عمود بر آن می‌توان رسم کرد.

اثبات: به روش تناقض آن را ثابت می‌کنیم. فرض کنیم از نقطه M غیرواقع بر خط m دو خط عمود MA و MB بر خط m رسم شده باشد (شکل ۵). پس مثلث MAB پدید می‌آید. می‌دانیم خطی بر خط دیگر عمود است هرگاه اندازه یکی از زاویه‌های بین آن دو خط برابر 90° باشد. پس اندازه‌های هر یک از زاویه‌های MAD و MBA برابر 90° است. در این صورت مجموع اندازه‌های زاویه‌های مثلث MAB از 180° بیشتر می‌شود که این متناقض است با اینکه مجموع اندازه‌های زاویه‌های درونی هر مثلث برابر 180° است. پس فرض خلف

ما باطل است، یعنی از هر نقطه غیرواقع بر یک خط نمی‌توانیم دو خط عمود بر آن رسم کنیم.



شکل ۵

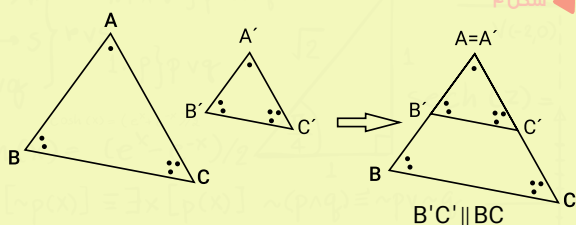
محسن کیخانی

یک مسئله و چند راه حل

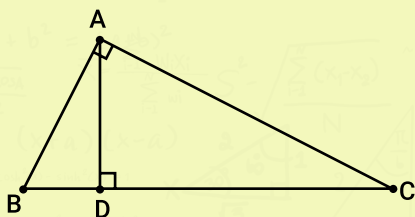
همچنین اگر: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ داریم: $\angle B = \angle B'$, $\angle A = \angle A'$ و $\angle C = \angle C'$.

و برعکس، یعنی اگر در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ داشته باشیم $\angle B = \angle B'$ و $\angle A = \angle A'$ می‌توان نتیجه گرفت: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ می‌دهیم (شکل ۴).

(با توجه به اینکه مجموع اندازه‌های زاویه‌های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است، به وضوح داریم: $\angle C = \angle C'$).



۵. اگر در یک مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر را رسم کنیم، دو مثلث پدید می‌آیند که با مثلث اصلی متشابه‌اند (شکل ۵). بنابراین می‌توان نتیجه گرفت: $\Delta ABC \sim \Delta DBA \sim \Delta DAC$

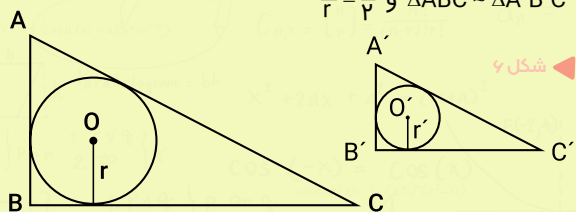


تمرین ۱. دلایل درستی نکته قبل را بیان کنید.

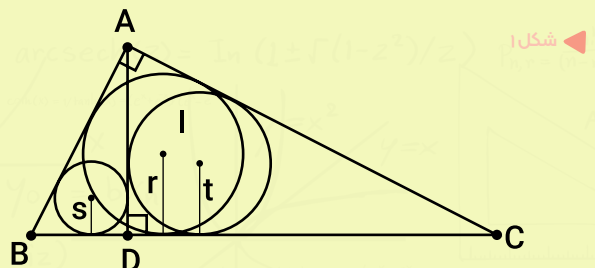
۶. اگر دو مثلث متشابه باشند، نسبت هر دو جزء خطی نظیر در دو مثلث، برابر نسبت تشابه است. مثلاً نسبت اندازه ارتفاع‌های نظیر در دو مثلث متشابه برابر نسبت تشابه است.

و مورد مهمی که در ادامه از آن استفاده خواهیم کرد، چنین است: اگر دو مثلث متشابه باشند، نسبت شعاع دایره‌های محاطی این دو مثلث، با نسبت تشابه برابر است.

مثال ۱. در شکل ۶ داریم: $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{1}{\lambda}$ ، بنابراین: $\frac{r'}{r} = \frac{1}{\lambda}$ و $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$



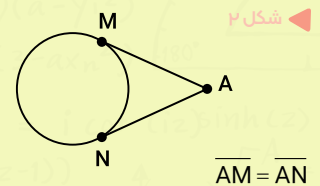
مسئله: در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\angle A = 90^\circ$) ارتفاع وارد بر وتر BC را AD در نظر می‌گیریم و دایره‌های محاطی هر یک از مثلث‌های ADB ، ADC و ABC را رسم می‌کنیم (شکل ۱). اگر اندازه شعاع این دایره‌های محاطی به ترتیب s ، t و r باشد، ثابت کنید: $r + s + t = AD$



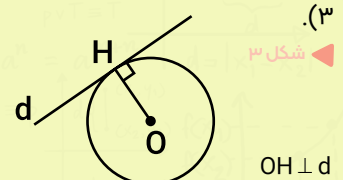
چند نکته و مثال

۱. منظور از دایره محاطی مثلث دایره‌ای است که داخل مثلث و مماس بر اضلاع آن است.

۲. اگر از نقطه‌ای خارج از دایره دو مماس بر آن رسم کنیم، طول این مماس‌ها برابر است (شکل ۲).



۳. شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است (شکل ۳).



۴. در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ (که ضلع‌های AB ، BC و CA به ترتیب متناظر با ضلع‌های $A'B'$ ، $B'C'$ و $C'A'$ هستند) اگر نسبت اندازه ضلع‌های متناظر برابر و مقداری ثابت باشد، یعنی داشته باشیم:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k$$

این دو مثلث را متشابه می‌گوییم و به صورت $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ نمایش می‌دهیم و k را نسبت تشابه دو مثلث می‌نامیم و برعکس، یعنی اگر $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ (با نسبت تشابه k) نتیجه می‌شود:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k$$

زیر حاصل می‌شوند:

$$(1) \begin{cases} \triangle BAC \sim \triangle BDA \Rightarrow \frac{r}{AC} = \frac{s}{AD} \\ \triangle BAC \sim \triangle CDA \Rightarrow \frac{r}{AB} = \frac{t}{AD} \end{cases}$$

و رابطه‌ای را که قرار است اثبات کنیم، می‌توان به صورت زیر نوشت:

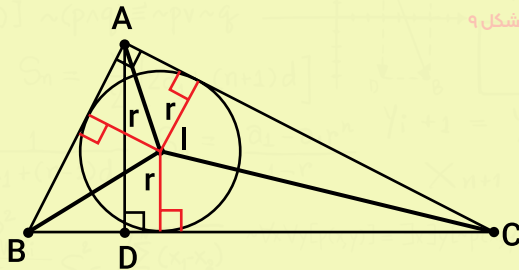
$$r + s + t = \overline{AD} \Rightarrow \frac{r}{AD} + \frac{s}{AD} + \frac{t}{AD} = 1 \quad (2)$$

انکون از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\frac{r}{AD} + \frac{r}{AC} + \frac{r}{AB} = 1$$

بنابراین با اثبات رابطه $\frac{r}{AD} + \frac{r}{AC} + \frac{r}{AB} = 1$ در واقع رابطه مورد نظر در مسئله را اثبات کرده‌ایم. با در نظر گرفتن شکل ۹ داریم:

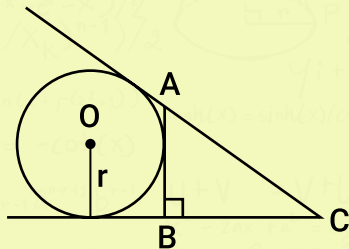
$$\begin{aligned} 1 &= \frac{S_{BIC} + S_{AIB} + S_{CIA}}{S_{ABC}} = \frac{S_{BIC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{AIB}}{S_{ABC}} + \frac{S_{CIA}}{S_{ABC}} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \overline{BC} \times r}{\frac{1}{2} \overline{BC} \times \overline{AD}} + \frac{\frac{1}{2} \overline{AB} \times r}{\frac{1}{2} \overline{AB} \times \overline{AC}} + \frac{\frac{1}{2} \overline{AC} \times r}{\frac{1}{2} \overline{AC} \times \overline{AB}} = \frac{r}{\overline{AD}} + \frac{r}{\overline{AC}} + \frac{r}{\overline{AB}} \\ &= \frac{r}{\overline{AD}} + \frac{s}{\overline{AD}} + \frac{t}{\overline{AD}} \end{aligned}$$



شکل ۹

تمرین ۳. در شکل ۱۰، مثلث ABC قائم‌الزاویه است و دایره به مرکز O و شعاع r بر ضلع AB و امتداد اضلاع AC و BC مماس است. با در نظر گرفتن $AB=c$ ، $BC=a$ و $AC=b$ ثابت کنید:

$$r = \frac{b+c-a}{2}$$



شکل ۱۰

منابع

۱. نصیری، محمود (۱۳۹۹). مبانی هندسه. انتشارات مبتکران. تهران.
2. 106 Geometry Problems from the Awesome Math Summer Program, T.Andreescu, M.Rolinek, J.Tkadlek, XYZ Press, 2013.
3. Advanced High-School Mathematics, David B. Surowski, Kansas State University, 2011.

مثال ۲. با در نظر گرفتن شکل ۶ و اینکه: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ، ثابت کنید:

$$\frac{r}{BC} = \frac{r'}{B'C'}$$

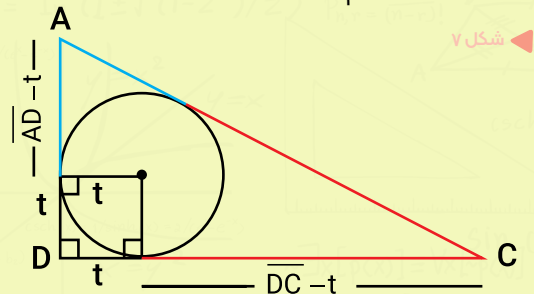
پاسخ: با توجه به اینکه: $\frac{B'C'}{BC} = \frac{r'}{r}$ نتیجه می‌شود:

$$\frac{r}{BC} = \frac{r'}{B'C'}$$

اثبات مسئله:

روش اول: شکل ۱ را در نظر بگیرید. با استفاده از نکته ۲ برای مثلث ADC (شکل ۷) داریم:

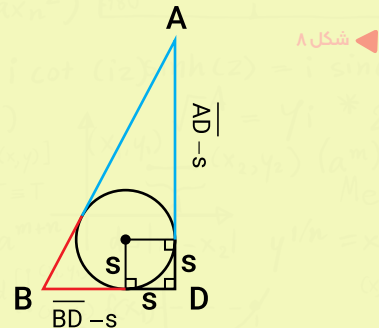
$$\begin{aligned} \overline{AC} &= \overline{AD} - t + \overline{DC} - t \Rightarrow 2t = \overline{AD} + \overline{DC} - \overline{AC} \\ \Rightarrow t &= \frac{\overline{AD} + \overline{DC} - \overline{AC}}{2} \end{aligned}$$



شکل ۷

و برای مثلث ADB (شکل ۸) هم داریم:

$$\overline{AB} = \overline{AD} - s + \overline{BD} - s \Rightarrow s = \frac{\overline{AD} + \overline{BD} - \overline{AB}}{2}$$



شکل ۸

همچنین برای مثلث ABC که شعاع دایره محاطی آن r است، نتیجه می‌شود:

$$r = \frac{\overline{AB} + \overline{AC} - \overline{BC}}{2}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} r + s + t &= \frac{\overline{AB} + \overline{AC} - \overline{BC}}{2} + \frac{\overline{AD} + \overline{BD} - \overline{AB}}{2} + \frac{\overline{AD} + \overline{DC} - \overline{AC}}{2} \\ &= \frac{2\overline{AD} - \overline{BC} + \overline{BD} + \overline{DC}}{2} = \frac{\overline{BC} - \overline{BD} + \overline{DC}}{2} \Rightarrow r + s + t = \overline{AD} \end{aligned}$$

تمرین ۲. ثابت کنید: $r = \frac{\overline{AB} + \overline{AC} - \overline{BC}}{2}$.

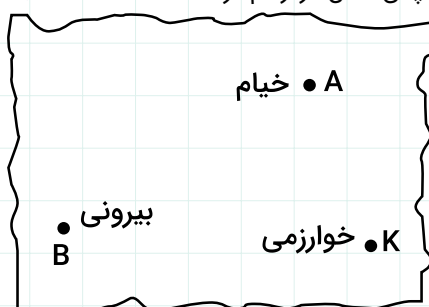
روش دوم: به کمک نکات ابتدایی و مثال‌های ۱ و ۲ نتایج



مدرسه را کجا باید ساخت؟

شکل ۱

دریا سپس شکل ۱ را رسم کرد:

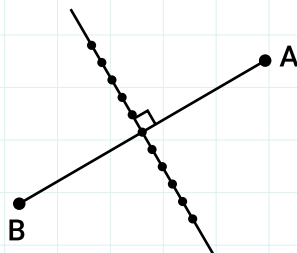


اکنون مسئله از ما می‌خواهد نقطه‌ای را پیدا کنیم که نسبت به این سه دهکده فاصله‌ای برابر داشته باشد. **ساحل:** من فکر می‌کنم اول باید نقطه‌ای را پیدا کنیم که از دو دهکده به یک فاصله باشد. فکر می‌کنم این مسئله ساده‌تر است.

دریا: درست است. بنابراین مسئله جدید ما این است که چه نقطه‌هایی از دو دهکده خیام و بیرونی فاصله‌ای برابر دارند؟

ساحل: فهمیدم. ما می‌توانیم این دو نقطه را دو سر یک پاره‌خط فرض کنیم. در این صورت، تمام نقطه‌هایی که روی عمودمنصف این پاره‌خط قرار دارند، جواب مسئله هستند. او سپس عمود منصف BA را رسم کرد (شکل ۲).

شکل ۲



دهکده‌های خیام، خوارزمی و بیرونی در دشت سرسبز و حاصلخیزی قرار دارند. این سه دهکده روی یک مسیر مستقیم نیستند. چون هر دهکده تعداد اندکی دانش‌آموز دارد، ریش‌سفیدان سه دهکده تصمیم گرفته‌اند که یک مدرسه برای سه دهکده بسازند. آن‌ها می‌خواهند محل ساختمان مدرسه را طوری انتخاب کنند که طول مسیر رفت و آمد بچه‌های هر سه دهکده یکسان باشد. به آن‌ها کمک کنید!

روحیه مبارزه‌طلبی خود را هنگام حل مسئله تقویت کنید: ابتدا برای حل مسئله تلاش کنید، بعد بحث را پی‌گیرید. **دریا و ساحل** با مشارکت یکدیگر این مسئله را حل کرده‌اند. بحث‌ها و روند کار آن‌ها را بررسی می‌کنیم.

ساحل: دریا، تو هم مثل من فکر می‌کنی؟ به نظر من این مسئله شبیه مسئله‌های ریاضی نیست.

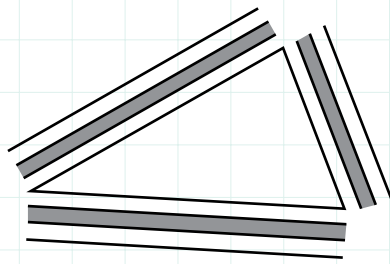
دریا: ما قبلاً هم مسئله‌هایی را حل کرده‌ایم که در نگاه اول مسئله ریاضی نبودند، ولی هرچه بیشتر دقت می‌کردیم ارتباط آن‌ها را با ریاضی بیشتر متوجه می‌شدیم.

ساحل: اتفاقاً اولین چیزی که از این مسئله به ذهنم رسید مثلث بود، زیرا خانه پدر بزرگ من در روستایی است که دو روستای دیگر هم نزدیک آن قرار دارند. وقتی بالای کوه پشت روستا می‌رویم، سه تا روستا و جاده‌های بین آن‌ها شکلی شبیه مثلث می‌سازند! اما بعداً خیال کردم که این موضوع هیچ ربطی به مسئله ما ندارد.

دریا: جالب است چون در صورت مسئله گفته شده که سه دهکده روی یک مسیر مستقیم نیستند.

ساحل: خوب حالا باید چه کار کرد؟

دریا: بیا شکلی رسم کنیم و محل دهکده‌ها را با نقطه نشان دهیم.



شکل ۴

پروانه: بعدش باید چه کار کنیم؟

نیلوفر: واضح است که محل کارخانه باید داخل این مثلث باشد.

پروانه: روی ضلع‌ها چطور؟

نیلوفر: نمی‌دانم باید یک بار دیگر صورت مسئله را با دقت بخوانیم. در صورت مسئله گفته شده است که فاصله از سه بزرگراه برابر باشد؛ بنابراین محل کارخانه نمی‌تواند روی ضلع باشد.

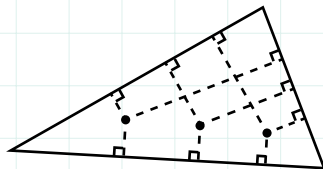
پروانه: فاصله از بزرگراه برای من واضح نیست.

نیلوفر: در حالت کلی فاصله یک نقطه از یک خط یعنی اندازه عمودی که از آن نقطه بر خط رسم شود.

پروانه: یک بار دیگر صورت مسئله را با هم مرور می‌کنیم. ما باید نقطه‌ای را پیدا کنیم که از سه ضلع به یک فاصله باشد.

بهتر است روش حدس و آزمایش را در پیش بگیریم.

نیلوفر: باید جایی وسط شکل ۵ باشد.

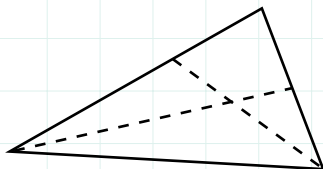


شکل ۵

پروانه: با این روش به جایی نمی‌رسیم. من فکر می‌کنم راهکار زیر به حل مسئله‌ها کمک می‌کند.

نیلوفر: فهمیدم! اگر یک نقطه از سه ضلع به یک فاصله باشد، باید از دو ضلع هم به یک فاصله باشد. بنابراین باید روی نیمساز زاویه بین آن دو ضلع باشد.

پروانه: احساس من هم این بود که این مسئله به نیمسازها مربوط است. بهتر است نیمسازها را رسم کنیم ببینیم چه اتفاقی می‌افتد (مثلث و دو نیمساز را دوباره مانند شکل ۶ رسم کرد).



شکل ۶

نیلوفر: مسئله حل شده است.

منبع

تابش، یحیی؛ حاجی‌بابایی، جواد؛ رستگار، آرش (۱۳۷۹). آموزش هنر حل مسئله. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش. تهران.

دریا: اما این که بی‌نهایت نقطه به دست می‌دهد!

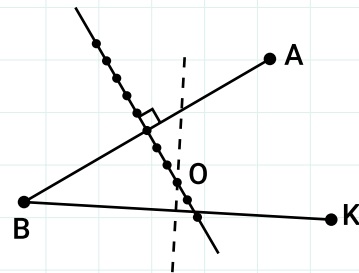
ساحل: من همیشه از بی‌نهایت می‌ترسیدم!

دریا: ما به دنبال نقطه‌ای هستیم که از دهکده سوم هم همان فاصله را داشته باشد.

ساحل: خب عمودمنصف BK را هم رسم می‌کنیم، چون نقاط آن از دو نقطه B و K به یک فاصله است.

او سپس عمود منصف BK را رسم کرد (شکل ۳).

شکل ۳



دریا: چه اتفاق جالبی! کار تمام است! چون محل برخورد دو عمودمنصف، در واقع از سه رأس به یک فاصله است؛ یعنی عمودمنصف BK نیز از نقطه O می‌گذرد.

دریا و ساحل مسئله را حل کردند اما از نظر دقت ریاضی یک نکته بسیار ظریف پنهان مانده است. این استدلال وقتی کاملاً دقیق است که به این سؤال پاسخ داده باشیم: «اگر شکل طوری باشد که دو عمودمنصف یکدیگر را قطع نکنند، پاسخ مسئله چگونه خواهد بود؟ آیا اساساً چنین وضعی می‌تواند اتفاق بیفتد؟»

مسئله: اکنون که نقطه‌ای پیدا کرده‌ایم که از سه دهکده فاصله برابر دارند، آیا مجموع فاصله‌های این نقطه تا دهکده‌ها کمترین مقدار ممکن (کوتاه‌ترین) است؟

بزرگراه‌ها

سه بزرگراه با یکدیگر تلاقی دارند؛ به طوری که زمین مثلث شکلی بین آن‌ها ایجاد شده است. قرار است کارخانه‌ای در این زمین احداث شود. از نظر اقتصادی بهترین مکان احداث کارخانه جایی است که از نظر دسترسی کارخانه به بزرگراه‌ها یکسان باشد؛ یعنی فاصله کارخانه تا بزرگراه‌ها برابر و کمترین مقدار ممکن باشد. بهترین مکان احداث کارخانه را پیدا کنید.

مسئله‌ها را به مبارزه بطلبید. این مبارزه‌های فکری باعث شکوفایی توانایی‌های ذهنی می‌شوند. این فرصت‌ها را به خود اختصاص دهید. **نیلوفر و پروانه** روی این مسئله کار کردند و پس از پایان کار، جریان فکری خودشان را به صورت زیر گزارش دادند: **نیلوفر:** فکر می‌کنم رسم یک شکل به درک مسئله و وضعیت بزرگراه‌ها و کارخانه کمک می‌کند.

پروانه: من هم موافقم. سپس شکل تقریبی ۴ را برای مسئله رسم کرد.

نیلوفر: خیلی خوب شد. به نظر می‌رسد همان مثلث داخلی شکل، برای ما بس باشد.



گفت‌وگو با دکتر روح‌الله خلیلی بروجنی
پژوهشگر، مؤلف و نویسندهٔ مجلهٔ
رشد ریاضی برهان متوسطهٔ اول

ریاضیات ابزاری قدرتمند برای درک بهتر جهان

فراتر از دو دهه است که در زمینهٔ برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های فیزیک و کتاب‌های علوم تجربی دورهٔ اول متوسطه فعالیت می‌کند. در یکی دو سال اخیر نیز مسئولیت گروهی را به عهده داشته است که قصد دارد کتاب‌های کار و فناوری را که در حال حاضر از پایه‌های ششم تا نهم ارائه می‌شوند، بر اساس نیاز واقعی دانش‌آموزان و با استانداردهای امروزی آموزش، برنامه‌ریزی و تألیف کند. خوشبختانه این پروژه برای پایه‌های ششم و هفتم به سرانجام رسیده و در سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ در برخی از مدرسه‌های هشت استان کشور در حال اجرای آزمایشی است. وی از همان دوران دانش‌آموزی همواره از مواجهه با مسئله‌های ریاضی و حل آن‌ها لذت می‌برد. حتی به یاد دارد در دوران دانشجویی، هنگامی که درس ریاضی عمومی ۲ را می‌گذراند، مسئله‌ای را که راه‌حلی طولانی و چند صفحه‌ای داشت، به روشی خلاقانه و تنها با چند خط حل کرد و بسیار مورد تشویق استاد درس قرار گرفت. از آنجا که تحصیلات ایشان در زمینهٔ فیزیک بود، در تمام دوران تحصیل ارتباط تنگاتنگی با ریاضیات داشت. خودش می‌گوید: «همهٔ ما می‌دانیم که ریاضیات و فیزیک رابطهٔ نزدیکی با هم دارند. ریاضیات ابزار و زبان توصیف و درک پدیده‌های فیزیکی است.» از سال ۱۴۰۰ نیز با مجلهٔ رشد ریاضی برهان متوسطهٔ اول همکاری می‌کند و مجموعه مقاله‌های کوتاهی را که دربرگیرندهٔ موضوع‌های متنوعی در زمینهٔ ارتباط ریاضیات با علوم هستند، برای شما تألیف می‌کند. با هم گفت‌وگو با دکتر روح‌الله خلیلی بروجنی را می‌خوانیم.

و با ریاضی‌دانان و علاقه‌مندان به ریاضیات ارتباط بگیریم.

● **لطفاً چند مثال از این زیبایی‌ها را به مخاطبان خوب مجله ارائه بفرمایید.**

○ به چند نمونه از زیبایی‌های ریاضیات اشاره می‌کنم:
◆ دنبالهٔ فیبوناچی مجموعه‌ای از عددهاست که هر جملهٔ آن برابر مجموع دو جملهٔ قبلی است (مانند ۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، ...). این دنباله غالباً در طبیعت ظاهر می‌شود؛ مانند چیدمان گلبرگ‌ها، دانه‌ها، برگ‌ها و مارپیچ‌ها و حتی کاشی‌کاری‌های برخی از بناهای تاریخی و مسجدها.



● **بارها شنیده‌ایم و خوانده‌ایم که ریاضیات دانشی زیباست. می‌خواهیم از زبان شما بشنویم این زیبایی کجاست و ما چگونه می‌توانیم آن را ببینیم؟**

○ ابتدا خوب است اشاره کنم که زیبایی ریاضیات مفهومی فلسفی و هنری است که برای توصیف جنبه‌های زیبایی در ریاضیات به کار می‌رود. از طرف دیگر، زیبایی ریاضیات را می‌توانیم در الگوها، ساختارها و تقارن‌های پیدا و پنهان دنیای فیزیکی و انتزاعی ببینیم. ریاضیات همچنین می‌تواند ایده‌های پیچیده را به روش‌های ساده و ظریف بیان کند و حتی بین حوزه‌های به‌ظاهر نامرتب ارتباط ایجاد کند. زیبایی ریاضیات می‌تواند به ما کمک کند که ریاضیات را بهتر درک کنیم، از آن لذت ببریم و انگیزه‌ای برای یادگیری آن پیدا کنیم. برای دیدن زیبایی ریاضیات، ما باید با ریاضیات آشنا شویم، با مثال‌ها و تمرین‌ها توانایی‌های خود را افزایش دهیم

همچنین می‌تواند به ما در برقراری ارتباط، استدلال و استدلال منطقی و دقیق کمک کند.

● **برخی معتقدند که ریاضیات می‌تواند ابزاری برای پرورش خلاقیت و رشد تفکر منطقی باشد. به نظر شما چطور می‌توان از ریاضیات برای پرورش خلاقیت و رشد تفکر منطقی استفاده کرد؟**

○ به مورد خوبی اشاره کردید. بنده می‌خواهم به فراتر از این هم اشاره کنم. برخی ریاضی‌دانان بر این باورند که ریاضیات هنری خلاقانه و حتی نوعی فرهنگ است که با شعر و موسیقی مشابیه‌های فراوانی دارد. آن‌ها از صفتهایی مانند ظریف، زیرکانه، شگفت‌انگیز، ساده و کامل برای توصیف روش‌ها و نتایج ریاضی استفاده می‌کنند. ریاضیات یک زبان ارتباطی نیز هست که می‌تواند به ما کمک کند با دیگران ارتباط برقرار کنیم.

ریاضیات می‌تواند به ما کمک کند که خلاقیت و تفکر انتقادی خود را تقویت کنیم. با حل مسئله‌های ریاضی، ما می‌توانیم راه‌حل‌های جدید و متفاوت را امتحان کنیم، استدلال‌های منطقی خود را سامان و سازمان دهیم و آن‌ها را بررسی کنیم. همچنین اشتباهات و تناقضات را شناسایی و اصلاح کنیم و از نظریه‌ها و مفاهیم ریاضی الهام بگیریم.

در مجموع می‌توان گفت ریاضیات می‌تواند با ارائهٔ ابزارها، روش‌ها و فرصتهایی برای تفکر، و ایجاد و برقراری ارتباط به روش‌های جدید و هیجان‌انگیز به ما کمک کند خلاقیت خود را توسعه دهیم.

● **به نظر شما چگونه می‌توان فرصتی را برای دانش‌آموزان فراهم کرد تا آنان بتوانند مهارت‌های ریاضی خود را تقویت کنند، به چالش بکشند و با هم در این زمینه رقابت سالمی داشته باشند؟**

○ به نظر من راه‌های زیادی برای این کار وجود دارند. شاید یکی از محبوب‌ترین و مؤثرترین راه‌ها شرکت در مسابقه‌های ریاضی باشد. مسابقه‌های ریاضی در هر سطحی که باشند می‌توانند تفکر منطقی، مهارت حل مسئله و خلاقیت دانش‌آموزان را توسعه دهند. همچنین مفهوم‌ها و فن‌های (تکنیک‌های) جدیدی را که در برنامهٔ درسی معمولی پوشش داده نشده‌اند، بیاموزند، در یادگیری و حل مسئله‌های ریاضی اعتماد به نفس و انگیزه کسب کنند، و با دانش‌آموزان دیگری که در ریاضیات علاقه و اشتیاق مشابهی دارند تعامل داشته باشند.

● **ریاضیات چگونه می‌تواند در حل مسئله‌های واقعی زندگی به ما کمک کند؟**

○ ریاضیات ابزار قدرتمندی است که در همه جا وجود دارد و

◆ **اتحاد اویلر** که ممکن است در نگاه اول کمی نامفهوم و عجیب به نظر شما برسد، در واقع فرمولی است که پنج ثابت بنیادی ریاضی را به هم مرتبط می‌کند: $e^{i\pi} + 1 = 0$ و در آن e عدد اویلر و برابر $2/71828$ است. i نمادی است که مجذور (توان دوم) آن برابر -1 است و «عدد پی» همان ثابت نسبت محیط دایره به قطر آن است. این فرمول از نظر بسیاری از ریاضی‌دانان به عنوان یکی از زیباترین، ظریف‌ترین و عمیق‌ترین معادله‌ها در ریاضیات شناخته می‌شود.

● **آیا این زیبایی فقط در شکل‌های هندسی ریاضیات وجود دارد یا آن را می‌توان در بخش‌های دیگر این دانش هم دید؟ لطفاً مثال بزنید.**

○ نه تنها در تمامی بخش‌های دانش ریاضیات و دیگر دانش‌های بنیادی مانند فیزیک این زیبایی‌ها وجود دارند، بلکه همان‌طور که در جواب پرسش قبل اشاره کردم، ریاضیات حتی می‌تواند بین حوزه‌های به ظاهر نامرتبط ارتباط ایجاد کند و با کمی دقت به زیبایی‌های آشکار و پنهان آن نیز پی برد. برای مثال وقتی به گل آفتابگردان نگاه می‌کنیم، همهٔ زیبایی‌های آن به نوعی مرتبط با مجموعهٔ فیبوناچی است که جلوه‌های فراوانی در طبیعت دارد.



● **می‌گویند ریاضیات باعث می‌شود ما درک بهتری از جهان اطرافمان پیدا کنیم. چنین چیزی چطور می‌تواند اتفاق بیفتد؟**

○ ریاضیات ابزاری قدرتمند است که به ما کمک می‌کند درک بهتری از جهان اطرافمان پیدا کنیم. جهان پیرامون ما مملو از پدیده‌های فیزیکی و زیستی گوناگون و شگفت‌انگیزی است که برای شناخت و بررسی عمیق آن‌ها ناگزیریم سراغ ریاضیات برویم. با استفاده از ریاضیات می‌توانیم نظریه‌ها و مدل‌هایی بسازیم که به ما کمک می‌کنند جنبه‌های متفاوت این پدیده‌ها را بهتر و عمیق‌تر بفهمیم، و رفتار آن‌ها را پیش‌بینی و پایش کنیم.

مدل‌ها و نظریه‌هایی که به کمک ریاضیات برای درک پدیده‌های مختلف می‌سازیم می‌توانند به ما بگویند که چه چیزهایی ممکن و چه چیزهایی ناممکن هستند.

افزون بر پدیده‌های فیزیکی و زیستی که به آن اشاره کردیم، ریاضیات در بسیاری از علوم دیگر و فناوری‌ها کاربرد دارد. برای مثال، ریاضیات در رمزنگاری، هوش مصنوعی، رباتیک، مهندسی، اقتصاد و آمار نیز کاربرد فراوانی دارد. ریاضیات

می‌تواند به ما در حل مسئله‌های زندگی واقعی در حوزه‌های گوناگون مانند علوم، مهندسی، کسب و کار، سلامت، هنر و غیره کمک کند. به عبارت دیگر، ریاضیات تقریباً در هر موقعیتی که مستلزم منطق، استدلال و حل مسئله است، قابل استفاده است. در اینجا چند نمونه از اینکه چگونه ریاضیات می‌تواند به ما در حل مسئله‌های زندگی واقعی کمک کند، آورده شده است:

- **آشپزی:** ریاضیات می‌تواند به ما در اندازه‌گیری مواد، تبدیل یکاها، تنظیم دستور پخت، محاسبه زمان پخت و غیره کمک کند. برای مثال، اگر بخواهیم کیک برای شش نفر درست کنیم، اما دستور تهیه آن برای چهار نفر است، می‌توانیم مقدار مواد مورد نیاز را در $\frac{1}{5}$ ضرب کنیم. یا اگر دستور پخت برحسب درجه سانتی‌گراد است، اما تنظیمات فر ما برحسب درجه فارنهایت است، می‌توانیم از یک فرمول ساده ریاضیاتی برای تبدیل دما استفاده کنیم.

- **خرید:** ریاضیات می‌تواند به ما در مقایسه قیمت‌ها، محاسبه تخفیف‌ها، بودجه‌بندی هزینه‌هایمان، تخمین مالیات و غیره کمک کند.

- **سفر:** ریاضیات می‌تواند به ما در برنامه‌ریزی سفرها، یافتن بهترین مسیرها، تبدیل ارز، محاسبه مسافت و غیره کمک کند.

- **بازی:** ریاضیات می‌تواند به ما در شناخت و انجام بازی‌های گوناگون کمک کند. برای مثال، اگر بخواهیم یک جدول سودوکو را حل کنیم، می‌توانیم از منطق ریاضیاتی برای حذف عددهای ممکن در هر خانه استفاده کنیم.

• یکی از وظایف مدرسه آموزش مهارت‌های زندگی به دانش‌آموزان است. به نظر شما ریاضی در این زمینه چطور می‌تواند کمک‌کننده و مؤثر باشد؟

○ به سؤال بسیار خوبی اشاره کردید. به طور کلی مهارت‌های زندگی توانایی‌ها و دانش‌هایی هستند که ما را قادر می‌سازند به طور مؤثر با چالش‌ها و فرصت‌های زندگی روزمره روبه‌رو شویم. ریاضیات می‌تواند در این زمینه از بسیاری جنبه‌ها مفید و مؤثر باشد. برای روشن‌تر شدن موضوع در ادامه به چند نمونه اشاره می‌کنم:

- ریاضیات می‌تواند به ما کمک کند مهارت‌های حسابداری خود را توسعه دهیم. این مهارت‌ها برای درک و استفاده از عددها، داده‌ها و اندازه‌گیری‌ها در زمینه‌های متفاوت، مانند امور مالی، بهداشت، کار و اوقات فراغت ضروری است. مهارت‌های عددی می‌تواند به ما در مدیریت پول، برنامه‌ریزی زمان، مقایسه گزینه‌ها و تصمیم‌گیری آگاهانه کمک کند.

- ریاضیات می‌تواند به ما کمک کند مهارت‌های منطقی

خود را که برای تفکر انتقادی، تحلیلی و خلاقانه مهم است، توسعه دهیم. مهارت‌های منطقی می‌تواند به ما در حل مسئله‌ها، استدلال و برقراری ارتباط مؤثر کمک کند. - ریاضیات می‌تواند به ما کمک کند مهارت‌های تجسم فضایی خود را توسعه دهیم؛ مهارتی که برای تجسم و دستکاری شکل‌ها، شیء‌ها و الگوها، در دو و سه بعد، مفید است. مهارت‌های تجسم فضایی همچنین می‌تواند به ما در جهت‌یابی، طراحی و تولید محصولات گوناگون یاری رساند.

- ریاضیات می‌تواند به ما کمک کند تا مهارت‌های بین فردی خود را که برای کار و همکاری با دیگران مورد نیاز است، توسعه دهیم. مهارت‌های بین فردی به ما در برقراری ارتباط، همکاری و گفت‌وگو یاری می‌دهد.

• آیا می‌توانید راهکارهایی برای ترغیب دانش‌آموزان به فعالیت و مشارکت بیشتر در کلاس‌های ریاضی پیشنهاد دهید؟

○ به نظرم پاسخ به این پرسش جنبه‌های گوناگونی دارد که سعی می‌کنم به برخی از آن‌ها اشاره کنم:

- ایجاد جو پرشور و جذاب در کلاس‌های ریاضی با استفاده از روش‌های تدریس فعال؛ مانند اکتشافی، استقرایی، حل مسئله و بارش فکری.

- تشویق دانش‌آموزان به مشارکت در تصمیم‌گیری‌های کلاس.

- ایجاد رقابت‌های سالم و مفید در کلاس‌های ریاضی. - تشویق دانش‌آموزان به حل مسائل ریاضی در خانه و به اشتراک گذاشتن راه‌حل‌های خود با دیگران.

- استفاده از بازخوردهای مثبت و منفی به منظور بهبود عملکرد دانش‌آموزان.

- استفاده از فناوری‌های نوین و جذاب مانند پویانمایی (انیمیشن)، دست‌سازه و محتوای الکترونیکی به منظور جذب توجه دانش‌آموزان.

- ارائه آموزش‌ها و فعالیت‌های متمایزی که نیازها و علاقه‌های متنوع دانش‌آموزان را برآورده سازند. این امر می‌تواند به دانش‌آموزان کمک کند متناسب با سطح خود یاد بگیرند.

- توجه به بازی‌های ریاضی و «جورچین‌هایی» (پازل‌هایی) که سرگرم‌کننده و چالش‌برانگیز هستند. این کار به دانش‌آموزان کمک می‌کند مهارت‌های ریاضی خود را تمرین کنند، به ایده‌های جدیدی دست یابند و از ریاضی به عنوان فعالیتی سرگرم‌کننده لذت ببرند.

• با سپاس از شما.



مالیات و ریاضی!

مشمول مالیات نرخ ۲۰ درصد.

● باقی‌مانده درآمد مشمول مالیات با نرخ ۲۵ درصد.

با یک مثال نحوه محاسبه مالیات را دقیق‌تر شرح می‌دهیم. فرض کنید پدر شما یک فروشگاه لباس فروشی دارد و درآمدش در یک سال ۱۵۰۰۰۰۰۰۰ تومان باشد. اگر هزینه‌هایش را، مثل هزینه آب، برق، گاز، مخبرات و همچنین بیمه، دستمزد کارکنان و اجاره فروشگاه را کم کنیم، سود خالص ۹۰۰۰۰۰۰۰ تومان شود.

$200000000 + 200000000 + 500000000 = 900000000$

۲۰۰ میلیون تومان اول از سود شما با نرخ ۱۵ درصد که می‌شود ۳۰ میلیون تومان

۲۰۰ میلیون تومان دیگر با نرخ ۲۰ درصد که می‌شود ۴۰ میلیون تومان

۵۰۰ میلیون تومان با نرخ ۲۵ درصد که می‌شود ۱۲۵ میلیون تومان

و مجموع مالیات بر سودی که باید پرداخت شود ۱۹۵ میلیون تومان است.

این یک مثال از نحوه محاسبه یکی از انواع مالیات است. درآمدهای مالیاتی دولت‌ها نقش مهمی در ارائه خدمات دارند. اگر در آینده بخواهید اطلاعات بیشتری در خصوص انواع مالیات و چگونگی محاسبه آن داشته باشید، باید دانش ریاضی خود را رشد دهید.

ماده ۹۳ قانون مالیات‌های مستقیم تأکید می‌کند: «درآمدی که شخص حقیقی از طریق اشتغال به مشاغل یا به عناوین دیگر غیر از موارد مذکور در سایر فصل‌های این قانون در ایران تحصیل کند، پس از کسر معافیت‌های مقرر در این قانون، مشمول مالیات بر درآمد مشاغل است.»

شاید برای شما این سؤال مطرح شود که معافیت مالیاتی چیست؟ در قوانین شرایطی پیش‌بینی شده است که فرد از پرداخت بخشی از مالیات معاف می‌شود. برای مثال اگر درآمدش از عدد مشخصی پایین‌تر باشد و یا صاحب کسب‌وکار، بخشی از درآمدش را در کارهای آموزشی و یا محب‌زیستی صرف کرده باشد، مشمول معافیت مالیاتی می‌شود.

نحوه محاسبه مالیات بر درآمد مشاغل به صورت پلکانی است و مطابق زیر محاسبه می‌شود:

● تا ۴۷ میلیون و ۵۰۰ هزار تومان از سود سالیانه از معافیت مالیاتی برخوردار است.

● تا ۲۰۰ میلیون تومان اول درآمد مشمول مالیات نرخ ۱۵ درصد.

● تا ۲۰۰ میلیون تومان دوم درآمد

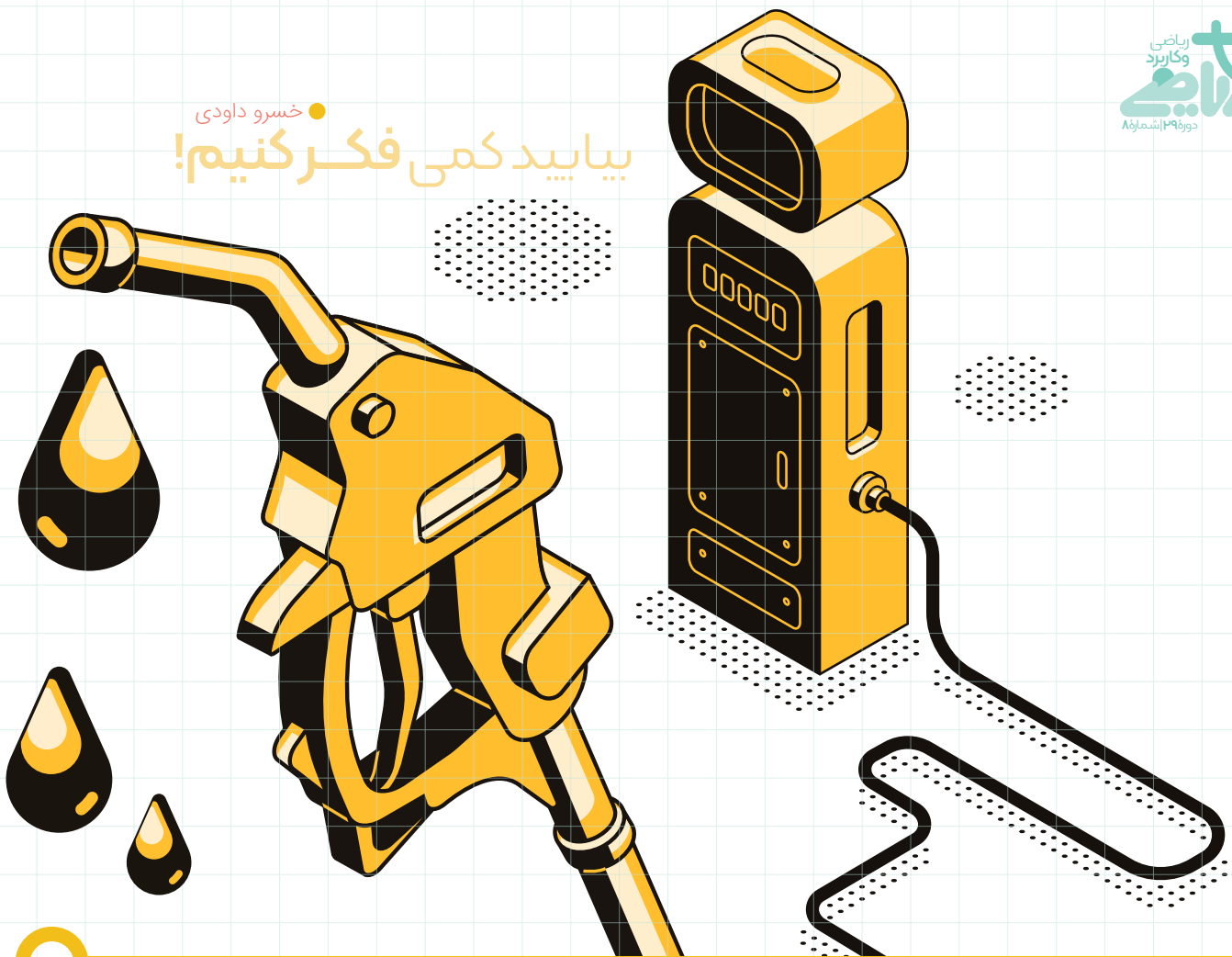
امروز می‌خواهیم درباره مفهومی در اقتصاد صحبت کنیم که همه افراد صاحب درآمد با آن سروکار دارند. اگر منبع درآمد خانواده شما حقوق دولتی باشد و یا اگر درآمدی از شغل‌های آزاد و غیردولتی دارید، باید با مفهوم «مالیات» آشنایی داشته باشید. مالیات در اقتصاد انواع گوناگون دارد؛ مثل مالیات بر درآمد، مالیات بر ارزش افزوده، مالیات بر ارزش افزوده.

مالیات به زبان ساده یک هزینه اجباری است که توسط هر دولت از یک فرد یا شرکت دریافت می‌شود. دولت‌ها با جمع‌آوری این درآمد که از مالیات به‌دست می‌آید، کارهای عمومی و خدمات به جامعه ارائه می‌دهند. بخشی از منابع مالی خدمات آموزش رایگان، خدمات بهداشت و سلامت، خدمات راه‌سازی و شهرسازی و سایر خدمات عمومی که دولت موظف به انجام آن است، از منابع درآمدهای مالیاتی تأمین می‌شود.

سهم درآمد مالیات از کل منابع دولت در کشورهای مختلف، متفاوت است و تابع قوانین و مقررات همان کشور است. به‌طور کلی دو دسته مالیات وجود دارد: مالیات مستقیم و مالیات غیرمستقیم.

مالیات مستقیم در یک دسته‌بندی کلی به دو بخش مالیات بر دارایی و مالیات بر درآمد تقسیم می‌شود. مالیات بر درآمد هم انواع متفاوتی دارد که یکی از آن‌ها مالیات بر درآمد مشاغل است. هر فردی که صاحب شغل باشد مشمول این مالیات می‌شود.

● خسرو داودی
بیایید کمی فکر کنیم!



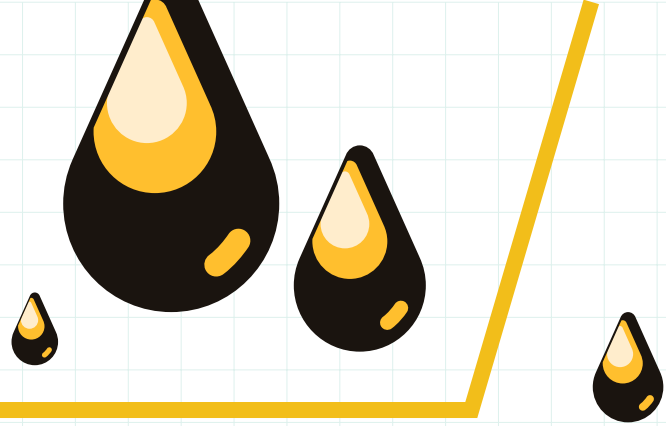
چقدر بنزین مصرف می‌کنیم؟

کمی فکر کنیم

هر روز به تعداد خودروها در سطح شهر اضافه می‌شود. اما به همان تعداد که خودروی نو اضافه می‌شود، خودروهای کهنه و قدیمی از رده خارج نمی‌شوند. به همین دلیل تعداد خودروهای سواری روز به روز بیشتر می‌شود و «شدآمدی» (ترافیک‌های) سنگین در سطح شهرها ایجاد می‌کند. یکی از نتایج مهم این حجم خودروهای در حال حرکت و مانده در شدآمدی، آلودگی شدید هواست. در کشور ما تمام خودروهای سواری با سوخت بنزین کار می‌کنند. آیا تا به حال فکر کرده‌اید که این تعداد خودرو چه مقدار بنزین مصرف می‌کنند. به این خبر توجه کنید: «معاون مدیر عامل شرکت ملی پالایش و پخش فرآورده‌های نفتی از افزایش ۲۰ درصدی مصرف بنزین در تیرماه سال ۱۴۰۲ نسبت به سال قبل خبر داد. ایشان با اشاره به ۱۲۴ میلیون لیتر مصرف روزانه بنزین در ایران گفت: در حالی که پالایشگاه‌های کشور تنها ۱۰۷ میلیون لیتر بنزین تولید کردند، ۱۳ میلیون لیتر از روی اجبار از ذخایر سوخت برداشت شده است.»

ناظران یکی از دلایل اصلی افزایش مصرف را ورود بیش از یک میلیون خودروی تولید داخل به بازار می‌دانند. برای اطلاع شما، تعداد خودروهای موجود در کشور ۲۴ میلیون دستگاه است و با فرض جمعیت ۸۵ میلیون نفری، به ازای هر ۳/۵ نفر یک دستگاه خودرو وجود دارد. جالب است بدانید که ۵۰ درصد جمعیت کشورمان فاقد خودرو هستند. طبق آمار سال ۱۴۰۱ که هر خانواده در کشور به طور متوسط ۳/۱ نفر هستند، می‌توان نتیجه گرفت که ۵۵ میلیون نفر از جمعیت ایران خودرو ندارند.





محاسبه کنیم

با فرض ۲۴ میلیون دستگاه خودروی فعال در کشور، مقدار مصرف هر خودرو را به طور متوسط به دست می آوریم:

$$۱۲۴۰۰۰۰۰۰ \div ۲۴۰۰۰۰۰۰ = ۵/۲$$
 مقدار مصرف بنزین هر خودرو
 اگر با فرض سهمیه ۶۰ لیتری بنزین که برای خودروها در نظر گرفته شده است، پیش برویم، هر خودرو در روز باید دو لیتر بنزین مصرف کند.

هر ماه را ۳۰ روز فرض کردیم (لیتر) $۶۰ \div ۳۰ = ۲$
 اما بسیاری از خودروها بیشتر از ۶۰ لیتر در ماه بنزین مصرف می کنند. هر باکی به طور متوسط ۳۰ لیتر بنزین در ماه مصرف می کند. همچنین مصرف های دیگری، از جمله موتورهای تولیدکننده برق نیز وجود دارند. با توجه به قیمت پایین بنزین در ایران مقدار زیادی سوخت نیز قاچاق می شود.

رئیس «گروه پژوهش فناوری مؤسسه مطالعات و پژوهش های بازرگانی» در حاشیه نشست «توسعه حمل و نقل خودروهای برقی در کشور: بایدها و سیاست ها» اظهار داشت: «در کشور ما به طور متوسط یک خودرو در طول سال حدود ۱۶ هزار و ۵۰۰ کیلومتر طی می کند که هزینه مصرف بنزین آن بر اساس قیمت بنزین در خلیج فارس در سال ۶۰ میلیون تومان می شود. از این رقم ۳ میلیون و ۵۰۰ هزار تومان آن را صاحب خودرو و بقیه هزینه را دولت در قالب یارانه می پردازد.

همچنین باید توجه کرد که تعدادی از خودروها نیز گازسوز هستند و بنزین کمی مصرف می کنند. به همین دلیل همه محاسبه های بالا تقریبی و به طور متوسط است.

نکته مهم این است که معاون مدیر عامل شرکت ملی پالایش و پخش فرآورده های نفتی اعلام کرد که مصرف بنزین در ایران سه برابر معیارهای رایج مصرف سوخت در جهان است که دلیل عمده آن خودروهای بی کیفیت و پرمصرف است. یعنی اگر مصرف بنزین را به معیارهای جهانی برسانیم خواهیم داشت:

$$۱۲۴۰۰۰۰۰۰ \div ۳ = ۴۱۰۰۰۰۰۰ \quad \text{مصرف روزانه (لیتر)}$$

$$۱۰۷۰۰۰۰۰۰ - ۳۱۰۰۰۰۰۰ = ۷۶۰۰۰۰۰۰ \quad \text{مازاد تولید (لیتر)}$$

یعنی ما می توانستیم روزانه ۶۷ میلیون لیتر را صادر کنیم. پس در یک سال صادرات بنزین برابر می شود با:

$$۳۶۵ \times ۶۷۰۰۰۰۰۰ = ۲۴۴۵۵۰۰۰۰۰ \quad \text{صادرات سالانه (لیتر)}$$

یعنی حدود ۲۴/۵ میلیارد لیتر در سال که ارزش آن از نفتی که به طور خام صادر می کنیم بسیار بیشتر است.

بیشتر فکر کنیم

مصرف زیاد بنزین را می توان به روش های متفاوت کاهش داد. برای مثال گازسوزکردن خودرو یکی از این روش ها بود که در سال های گذشته انجام شد. همچنین با افزایش کیفیت خودروها می توان از مصرف بنزین کاست. برای مثال، خودروی من هر ۱۰۰ کیلومتر ۱۲/۵ لیتر بنزین مصرف می کند. در حالی که خودروهای باکیفیت دنیا کم مصرف هستند و در هر ۱۰۰ کیلومتر حدود ۷ تا ۸ لیتر بنزین مصرف می کنند. علاوه بر این می توان جلوی قاچاق سوخت را گرفت. با توجه به ارزان بودن قیمت بنزین در ایران، قاچاق سوخت مقرون به صرفه است و سود زیادی برای قاچاقچیان دارد. در کنار این موارد باید به خودروهای برقی فکر کرد: هم مصرف بنزین را کاهش می دهند و هم برای هوا و محیط زیست آلودگی ندارند. اکنون که در حال نوشتن این متن هستیم، در زیرنویس خبرهای شبکه خبر سیما دیدم که قرار است به تدریج در طول یک سال آینده ۱۰۰ هزار تاکسی برقی در شهرهای بزرگ جایگزین تاکسی های پرمصرف بنزینی فعلی شوند. امیدواریم این اتفاق ها زودتر بیفتد تا از شر آلودگی هوا خلاص شویم.



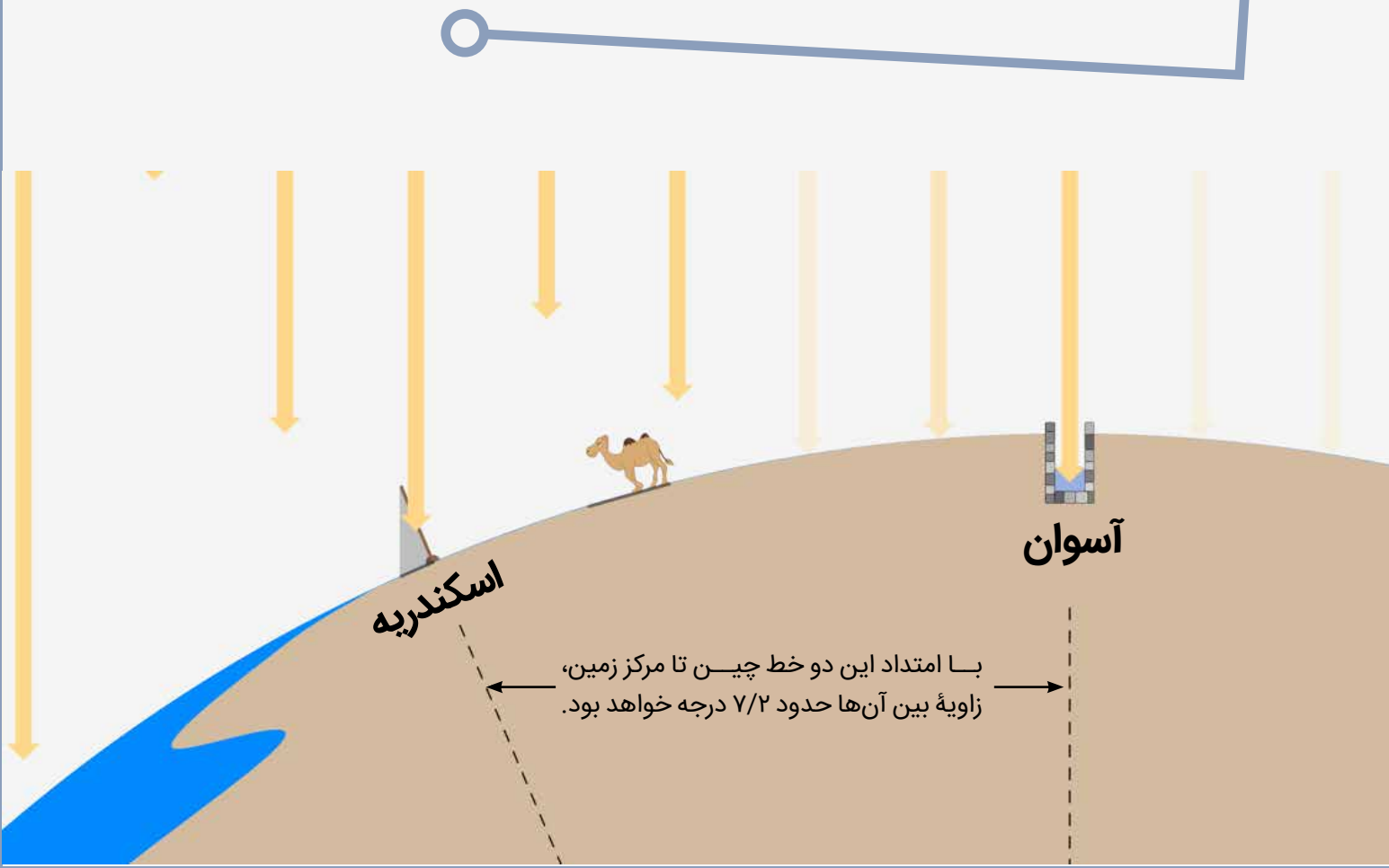
روح‌الله خلیلی بروجنی

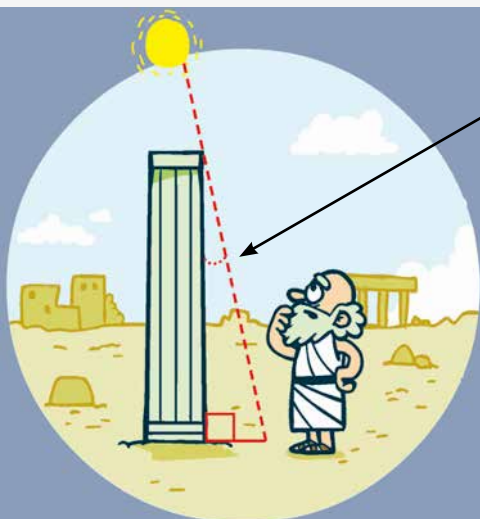
اندازه‌گیری محیط زمین برای نخستین بار

مقدمه

نزدیک به ۲۳۰۰ سال پیش، **اراتوستن**، ریاضی‌دان و ستاره‌شناس یونان باستان، برای نخستین بار محیط زمین را با روشی خلاقانه اندازه‌گیری کرد. جالب است بدانید مقداری که اراتوستن به دست آورد با تقریب خوبی به مقدار امروزی آن نزدیک است. در ادامه شیوه انجام کار او آمده است، اما خوب است قبل از دیدن روش اراتوستن، کمی فکر کنید و راه‌حل خودتان را برای اندازه‌گیری محیط زمین ارائه دهید.

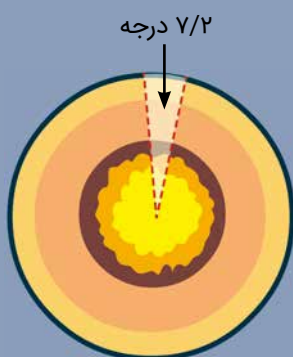
مطابق آنچه در برخی از کتاب‌های تاریخ علم از جمله «تاریخ علم کمریج»، نوشته کالین ا. رنان (۱۳۶۶) آمده است، نخستین اندازه‌گیری و برآورد محیط زمین را در حدود ۲۶۰ سال پیش از میلاد مسیح، دانشمندی برجسته به نام اراتوستن، مدیر کتابخانه اسکندریه، انجام داد. در ظهر اعتدال بهاری، یعنی روز اول تابستان، در شهر «آسوان» (نام باستانی: سوئنه) خورشید درست بالای سر (سمت الرأس) قرار داشت؛ به‌طوری که اشیای دارای سایه نبودند و می‌شد ته چاه عمیقی را مشاهده کرد که در آن شهر واقع بود (شکل الف). ولی در همان موقع از روز، در شهر اسکندریه خورشید در بالای سر نبود و اشیای سایه داشتند (شکل ب). همین موضوع اراتوستن را به فکر واداشت. او با پذیرفتن نظر دانشمندان قبل از خود مبنی بر کروی بودن زمین، در پی آن شد که محیط کره زمین را اندازه‌گیری کند.





اراتوستن با اندازه‌گیری زاویهٔ پرتوهای خورشید با راستای برجی که در اسکندریه بود، مقدار $7/2$ درجه را به دست آورد.

(شکل ب) شهر اسکندریه



(شکل پ) نمایی از مقطع زمین



(شکل الف) شهر آسوان

اراتوستن با اندازه‌گیری زاویهٔ پرتوهای خورشید با راستای برجی که در اسکندریه بود، مقدار $7/2$ درجه را به دست آورد که این مقدار معادل $\frac{1}{50}$ محیط دایره، یعنی 360 درجه است (شکل پ).

اراتوستن گروهی را مأمور اندازه‌گیری فاصله بین اسکندریه و آسوان کرد. این گروه پس از انجام این کار عدد 5000 استادیوم را برای فاصلهٔ بین این دو شهر به دست آوردند. اراتوستن با ضرب عدد 50 در 5000 مقدار 250000 استادیوم را برای محیط زمین به دست آورد. استادیوم یکی از یکاهای قدیمی است که در یونان باستان از آن استفاده می‌شد. هر استادیوم تقریباً برابر 170 متر است. بنابراین اراتوستن محیط کرهٔ زمین را 42500 کیلومتر به دست آورد^۲ که خیلی نزدیک به مقداری است که امروزه برای محیط زمین (4075 کیلومتر) به دست آمده است.

پی‌نوشت‌ها

۱. ارسطو، دانشمند یونان باستان، حدود 300 سال پیش از میلاد، هنگام گرفتگی ماه (خسوف) مشاهده کرد سایهٔ زمین روی ماه به شکل منحنی است. ارسطو از این مشاهده نتیجه گرفت که زمین باید کروی باشد.

۲. مقداری که اراتوستن برای محیط زمین به دست آورد در زمان حیات خودش مورد پذیرش قرار نگرفت. حدود 150 سال پس از اراتوستن، اخترشناس دیگر یونانی، به نام **پوزیدونیوس**، کار اراتوستن را تکرار کرد، اما نتیجه‌ای که به دست آورد (برحسب یکای امروزی کیلومتر)، در حدود 39000 کیلومتر بود. جالب است بدانید نتیجهٔ اندازه‌گیری پوزیدونیوس توسط **بطلمیوس** مورد استفاده قرار گرفت. در سراسر قرون وسطی نیز همین رقم پذیرفته شد. در سال‌های $1521-1523$ میلادی ناوگان **ماژلان** با دورزدن زمین، اندازه‌ای را تأیید کرد که اراتوستن برای محیط زمین به دست آورده بود.

همچنین، قوانین جمع بردارها و ضرب یک عدد در بردار نیز همان طور تعریف می شود که در صفحه مختصات. پس طبیعی است در این دستگاه نیز بیرسیم: «آیا با یک مجموعه از بردارها می توان حرکت از هر نقطه از دستگاه مختصات را به نقطه دیگری تعریف کرد؟»

اکنون نوبت شماست!
الف) نشان دهید مجموعه بردارهای $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ هر بردار انتقال دلخواه $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ را پدید می آورد.

ب) بررسی کنید آیا مجموعه بردارهای $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ بردار انتقال $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$ را پدید می آورد؟

پ) سه بردار مثال بزنید که بتواند هر بردار انتقال دلخواه را پدید آورد؟
ت) آیا می توان با دو بردار، هر بردار دلخواه مانند $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ را پدید آورد؟

پیش از آنکه بیشتر پیش برویم، اجازه دهید برای تمرین ب کمی راهنمایی کنیم. باید ضرایبی مانند r, s, t پیدا کنیم که رابطه زیر برقرار باشد:

$$r \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

از قوانین ضرب و جمع برای بردارها می توانیم به رابطه زیر برسیم:

$$\begin{bmatrix} r \\ 2r+s \\ -s+t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

پس پاسخ پرسش ب مثبت است، اگر دستگاه سه معادله و سه مجهول زیر جواب داشته باشد:

$$\begin{cases} r=1 \\ 2r+s=2 \\ -s+t=-4 \end{cases}$$

با این راهنمایی، اکنون می توانید پاسخ پرسش ب و سایر پرسش های بالا را بیابید.

حال که با این دستگاه نیز آشنا شدید، اجازه دهید ناحیه ای را که می خواهیم برای نشانی دادن بررسی کنیم بزرگتر کنیم. بیایید این بار به کره زمین فکر کنیم. پس در این حالت باید به نحو دیگری نشانی دادن هایمان را مدل کنیم.

دستگاهی که برای کره زمین استفاده می کنیم، «دستگاه جغرافیایی» نامیده می شود. برای آنکه موقعیت یک نقطه را

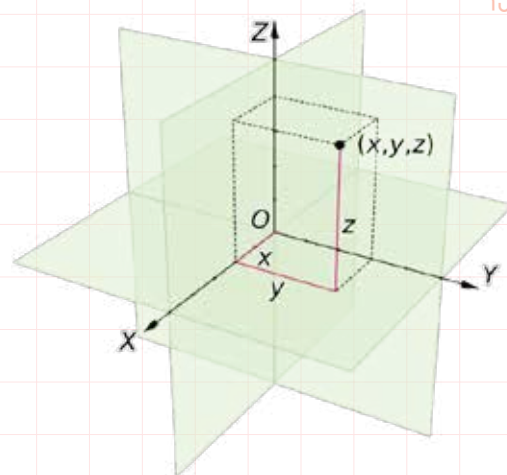
در هفت شماره قبل، ویژگی بردارها را در «صفحه مختصات محدود شده به نقطه های صحیح» بررسی کردیم. همچنین تحقیق کردیم که تحت چه شرایطی، مجموعه ای از بردارها می تواند ما را از هر نقطه از صفحه به نقطه دیگری منتقل کند.

سپس با هم بررسی کردیم که دو بردار (واحد) $i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $j = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ خاصیت بالا را دارد؛ زیرا مجموع ضربی از این بردارها، بردار انتقال دلخواه $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ را پدید می آورند:

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$$

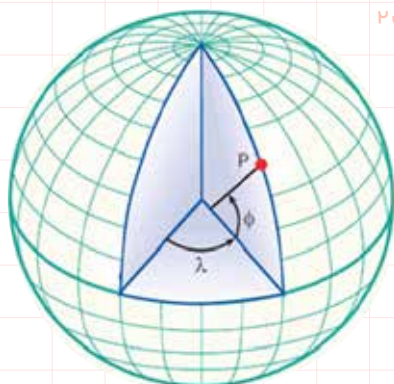
اکنون می خواهیم فضایی را که تا به حال با بردارها در آن حرکت می کردیم، کمی تغییر دهیم. اگر به یاد داشته باشید، از ابتدا بردارها را به دلیل نیازمان برای مدل کردن «نشانی دادن» بررسی کردیم. گفتیم، اگر خودمان را به ناحیه های کوچکی محدود کنیم، می توانیم فرض کنیم در یک صفحه زندگی می کنیم. اما ممکن است ارتفاع ما از آن سطح نیز مورد توجه باشد. پس می توان با لحاظ کردن یک مختص دیگر برای ارتفاع، موقعیت هر نقطه را با سه عدد نشان داد. در این صورت، دستگاه مختصات از سه محور عمود بر هم ایجاد می شود که هر کدام از آن دو محور، صفحه ای را مشخص می کنند که بر محور دیگری عمود است. در شکل ۱ یک دستگاه مختصات فضایی و موقعیت یک نقطه با مختصات (x, y, z) نشان داده شده است.

شکل ۱



مانند قبل، در اینجا هم حرکت از یک نقطه به نقطه ای دیگر را می توان با یک بردار نشان داد. برای مثال، بردار حرکت از نقطه مبدأ مختصات به نقطه (x, y, z) ، همان بردار (x, y, z) است.

نشان روش مهم تر از جواب



شکل ۲

به کمک وبگاه‌ها (سایت‌ها) و برنامه‌هایی مثل نقشه گوگل می‌توانید مختصات جغرافیایی یک نقطه را بیابید. ما برای پیدا کردن مختصات بالا از وبگاه زیر استفاده کردیم. شما هم می‌توانید در این وبگاه طول، عرض و ارتفاع محل سکونت خود یا هر جایی از ایران را که خواستید بیابید:

<https://www.baheSab.ir/map/geographic/>

در مختصات بالا، طول و عرض هر دو مثبت هستند، زیرا شیراز در بالای مدار استوا و سمت راست مدار گرینویچ قرار دارد. اما اگر نقطه مورد نظر زیر خط استوا باشد، آنگاه مختص عرض منفی می‌شود. همچنین، مختص طول نقطه‌ای که در سمت غرب مدار گرینویچ باشد نیز منفی است.

باز هم نوبت شماس!

حدس می‌زنید علامت مختصات طول و عرض هر یک از

مکان‌های زیر مثبت است یا منفی؟

(الف) قله کوه فوجی در ژاپن

(ب) ورزشگاه ملبورن در استرالیا

(پ) پارک ملی بنف در کانادا

(ت) برج پیزا در ایتالیا

(ث) آبشار ایگواسو در مرز بین آرژانتین و برزیل

(ج) دانشگاه آکسفورد در انگلیس

برای اینکه حدستان را بررسی کنید، هر یک از مکان‌های

بالا را در اینترنت جست‌وجو کنید و مختصات جغرافیایی

آن‌ها را بیابید.

روی کره زمین مشخص کنیم، مانند دستگاه مختصات به یک مبدأ نیاز داریم. با اختصاص دادن دو یا سه عدد نسبت به این مبدأ، موقعیت هر نقطه از کره زمین را نشان می‌دهیم. عدد اول نظیر به طول جغرافیایی، عدد دوم نظیر به عرض جغرافیایی است. عدد سوم که می‌تواند در نظر گرفته شود یا نشود، مربوط به ارتفاع آن نقطه از سطح زمین است. در واقع، گاهی برای ما ارتفاع مهم خواهد بود و گاهی نه. برای سادگی اجازه دهید ابتدا از ارتفاع صرف نظر کنیم.

برای اینکه ببینیم طول و عرض جغرافیایی چطور تعریف می‌شوند، ابتدا باید کره زمین را با مدارهایی ناحیه‌بندی کنیم (این مدارها نقش همان صفحه مربعی‌شده را دارند که در دستگاه مختصات با آن آشنا شده‌اید). در شکل زیر، این مدارها را مشاهده می‌کنید. برخی از این مدارها دایره‌های بزرگی هستند که از قطب شمال و قطب جنوب می‌گذرند و مرکز همه آن‌ها همان مرکز کره است. اما برخی دیگر از این مدارها، دایره‌هایی موازی با مدار استوا هستند که هر چه به سمت قطب شمال یا قطب جنوب می‌رویم، کوچک‌تر می‌شوند. در دستگاه جغرافیایی چنین قرارداد شده است که مدار افقی استوا و مدار عمودی‌ای که از دهکده گرینویچ در نزدیکی شهر لندن در انگلیس می‌گذرد، به عنوان مدارهای اصلی (محورهای مبدأ ما) در نظر گرفته شوند. همان‌طور که در شکل ۲ می‌بینید، مرکز این دو مدار همان مرکز کره زمین است. حال بر خلاف دستگاه مختصات که ما از فاصله نقطه‌ها تا محور مختصات برای نشان دادن مکان آن‌ها استفاده می‌کردیم این بار از زاویه استفاده می‌کنیم. اگر از نقطه مورد نظر خطی به مرکز کره زمین وصل کنیم، این خط با صفحه‌ای که از مدار استوا (مدار مبدأ عرض) می‌گذرد، زاویه‌ای می‌سازد که به آن «عرض جغرافیایی» می‌گویند و آن را با حرف یونانی φ (یخوانید فی) نشان می‌دهند. طول جغرافیایی که آن را با حرف یونانی λ (یخوانید لاندای) نشان می‌دهند، زاویه‌ای است که مدار عمودی‌گذرنده از آن نقطه با مدار گرینویچ (مدار مبدأ طول) دارد. در نتیجه در مختصات جغرافیایی مختصات در واقع بر اساس درجه بیان می‌شوند.

برای مثال موقعیت آرامگاه حافظ در شیراز چنین است:

طول: $52/55847607$ درجه

عرض: $29/62584356$ درجه

ارتفاع: ۱۵۴۹ متر

از مزرعه تا ریاضی

داستان مهندس کشاورزی که ریاضی دان شد

ریاضی دان معاصر: دکتر غلامرضا خسروشاهی



در سال ۱۳۱۸ در محله «نوبر» تبریز به دنیا آمد. در دوران کودکی او تبریز تحت اشغال متفقین بود و دائماً تانک‌ها در خیابان‌ها رفت‌وآمد می‌کردند. روس‌ها در سال ۱۳۲۰ به ایران حمله کردند. سال ۱۳۲۳ همراه خانواده به تهران رفت و در محله‌ای به نام «باغ ایلچی» در انتهای بازار ساکن شدند. تا کلاس چهارم دبستان را در تهران خواند و در سال ۱۳۲۸ همراه خانواده به تبریز بازگشت.

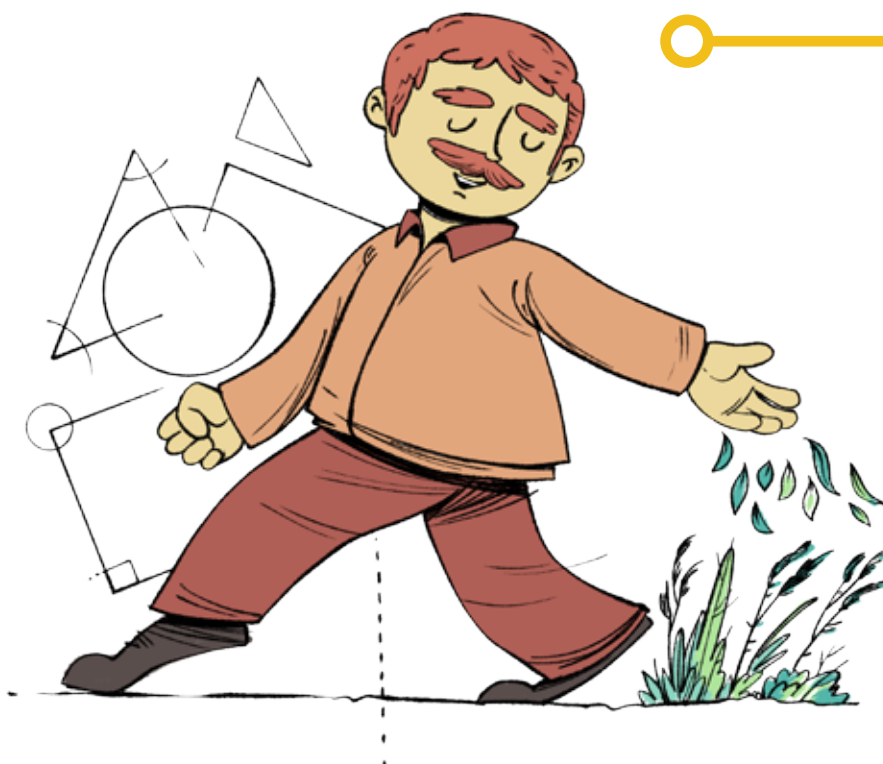
وقتی کلاس دهم بود، آقای حسینی، معلم هندسه، به دانش‌آموزان مسئله‌ای پیچیده داد و غیر از او هیچ‌یک از دانش‌آموزان کلاس نتوانستند آن را حل کنند. آقای حسینی هم او را تشویق کرد و این رفتار سبب شد که علاقه او به ریاضیات افزون شود؛ هرچند در کلاس یازدهم پس از مشورت با معلمش رشته طبیعی را انتخاب کرد.

کلاس دوازدهم را در دبیرستان معروف «فردوسی» درس خواند. جالب اینکه در سال ۱۳۹۹ در همان دبیرستان برایش جشن تولد گرفتند! پس از گرفتن دیپلم به تهران آمد و سپس در دانشکده کشاورزی کرج (از دانشکده‌های دانشگاه تهران) مشغول تحصیل شد و در رشته مهندسی آبیاری مدرک کارشناسی ارشد گرفت. بعد هم به عنوان مربی در همان دانشکده استخدام شد. آن زمان دانشجویان می‌توانستند پس از چهار سال درس خواندن در آن دانشکده، با مدرک کارشناسی ارشد فارغ‌التحصیل شوند.



پس از مدتی، برای ادامه تحصیل در دوره دکترا از دانشگاه گرنل پذیرش گرفت. دانشگاه کرنل در رشته‌های کشاورزی بسیار معروف بود. او در رشته مهندسی زراعی تحصیل می‌کرد و در همه درس‌ها نمره الف می‌گرفت. در اواسط تحصیل، وقتی متوجه شد بعضی از دانشجویان از کشاورزی تغییر رشته داده‌اند، به فکر تغییر رشته به رشته ریاضی افتاد. پس از مشورت با استادش در دو نیم‌سال چند درس ریاضی و آمار گرفت و در همه آن‌ها نمره‌های بالایی گرفت و در نتیجه توانست به ریاضیات تغییر رشته بدهد.

پنج سال بعد، در سال ۱۳۵۱، با درجه دکتري ریاضیات به ایران برگشت و مستقیم به دانشکده علوم دانشگاه تهران و نزد رئیس دانشکده، دکتر **عبدالله شیبانی**، رفت. بالاخره در گروه ریاضی دانشکده علوم استخدام شد و شروع به تدریس کرد. در سال ۱۳۵۳ برای اولین بار به اتفاق دو تن از استادان باسابقه گروه در «کنگره بین‌المللی ریاضی‌دانان» که در «ونکوور» کانادا تشکیل شده بود شرکت کرد.



یک سال بعد برای استفاده از فرصت مطالعاتی به آمریکا رفت و وقتی در سال ۱۳۵۷ برگشت، دید اوضاع مملکت دگرگون شده است. از ۲۹ آذر همان سال جمعی از استادان دانشگاه تهران همراه با انقلاب مردم در ساختمان معروف به «دبیرخانه دانشگاه» متحصن شدند و او نیز یکی از آن استادان بود. ۲۵ روز بعد با بازگشایی دانشگاه تهران استادان به تحصن خود خاتمه دادند.

او که دکترای خود را در زمینه «معادلات با مشتقات جزئی» گرفته بود، از حوالی سال ۱۳۶۳ به مطالعه و سپس پژوهش در مباحثی از ترکیبیات علاقه‌مند شد و به همین دلیل همه دانشجویانی که برای دریافت درجه کارشناسی ارشد یا دکترا با او کار کردند، در زمینه «طرح‌های بلوکی» که بخشی از ترکیبیات است، فارغ‌التحصیل شدند.

خسروشاهی در حالی که فعالانه در دانشگاه تهران به آموزش و پژوهش مشغول بود، با به‌وجود آمدن شرایط مناسب، در سال ۱۳۶۸ توانست به آرزوی دیرین خود جامعه عمل بپوشاند و در تأسیس و پاگرفتن «مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات» نقشی تعیین‌کننده ایفا کند. پس از گذشت سالیان متمادی، او هنوز هم در «پژوهشگاه دانش‌های بنیادی»^۱ فعال است.

پی‌نوشت

۱. نام «مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات» چند سال پس از آنکه توسعه یافت، به «پژوهشگاه دانش‌های بنیادی» تغییر پیدا کرد.

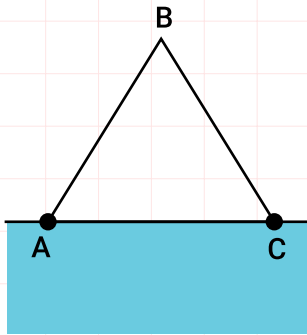
یک کشاورز ریاضی‌خوان چقدر زمین نیاز دارد؟

محرم ایردموسی
قسمت دوم

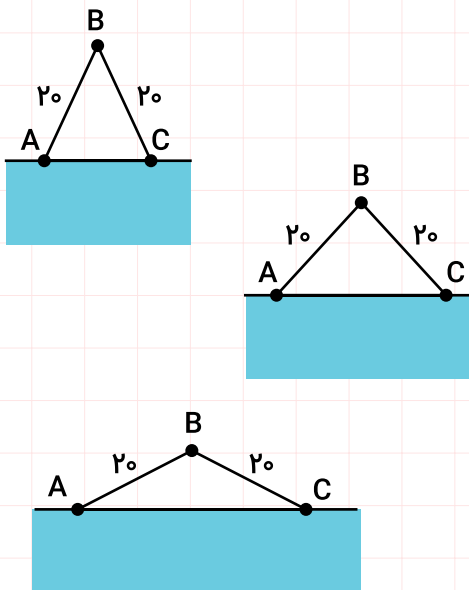
حال به کمک مسئله اول، چون محیط مستطیل $BCC'B'$ مقدار ثابت ۸۰ کیلومتر است، مساحت زمینی ماکزیم می‌شود که $BCC'B'$ مربع باشد. در نتیجه: $BB' = BC = ۲۰$ و داریم: $CD = AB = ۱۰$. بنابراین اگر: $BC = ۲۰$ و $AB = ۱۰$ ، مساحت مستطیل بیشترین مقدار ممکن خواهد بود. در ادامه به دو حالت دیگر از داستان خواهیم پرداخت. سعی کنید به مسئله‌های انتهایی هر حالت پاسخ دهید.

ماجرای سوم

رئیس ایل بشکرها، بعد از مشورت با اهالی ایل، به پاهوم می‌گوید تو می‌توانی زمینی سه گوش در کنار رود ولگا برای خود برداری؛ با این شرط که در این زمین سه گوش مانند ABC ، دو ضلع AB و BC برابر باشند و مجموع این دو ضلع که توسط پاهوم طی می‌شود برابر ۴۰ کیلومتر باشد. در واقع پاهوم حدود ۱۲ ساعت فرصت داشت که دو ضلع AB و BC با مجموع ۴۰ کیلومتر را طی کند و نیازی نبود ضلع CA را ببیماید.



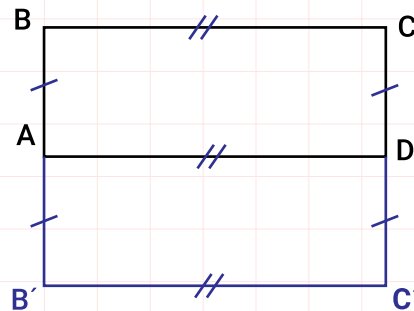
پاهوم به این فکر کرد که ضلع ساحلی زمینش چقدر باید باشد؟ چون انتخاب‌های زیادی وجود داشتند:



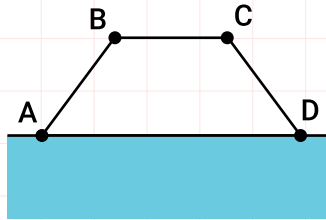
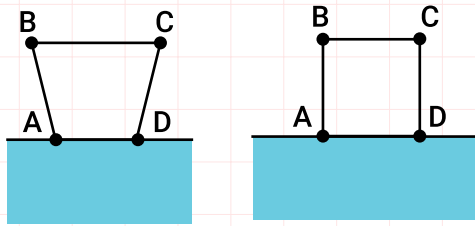
در قسمت اول با سرنوشت پاهوم داستان تولستوی آشنا شدید. اگر قسمت اول را نخوانده‌اید، قبل از ادامه دادن آن را بخوانید. دیدید که در حالت‌های متفاوت داستان چه تصمیمی به بهترین انتخاب ختم می‌شود. در حالت اول داستان دیدید که بین مستطیل‌های دارای محیط ثابت ۴۰ کیلومتر، مربع بیشترین مساحت را دارد (امیدوارم مسئله اول مقاله را هم حل کرده باشید). در حالت دوم داستان دیدید که بین مستطیل‌های دارای مجموع سه ضلع ثابت برابر ۴۰ کیلومتر، مستطیلی که نسبت دو ضلع آن برابر ۲ است، بیشترین مساحت را دارد. به عبارت دقیق‌تر، اگر مجموع سه ضلع AB ، BC و CD از مستطیل $ABCD$ برابر با مقدار ثابت ۴۰ کیلومتر باشد، آنگاه هنگامی که $BC = ۲AB$ ، مساحت مستطیل بیشترین مقدار یعنی ۲۰۰ کیلومترمربع خواهد بود. برای حل این مسئله دو راه‌حل پیشنهاد شد. در اینجا روش حل دوم را ارائه می‌کنیم:

روش دوم برای حل مسئله دوم قسمت اول

قرینه مستطیل $ABCD$ نسبت به ضلع DA را در نظر بگیرید و آن را $AB'C'D$ بنامید.



در نتیجه مساحت مستطیل $BCC'B'$ دو برابر مساحت مستطیل $ABCD$ و محیط آن برابر مقدار ثابت ۸۰ کیلومتر خواهد شد. بنابراین اگر مساحت مستطیل $BCC'B'$ ماکزیم شود، مساحت مستطیل $ABCD$ نیز ماکزیم خواهد شد.

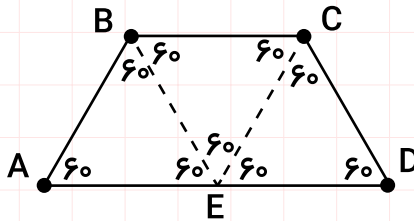


مسئله ۵. با فرض دوزنقه بودن ABCD و $AB=BC=CD=10$ و ثابت کنید: $\angle A = \angle D$.

مسئله ۶. اگر طول ارتفاع وارد بر AD از رأس B را h و طول AD را a بنامیم، ثابت کنید: $4h^2 + (a-10)^2 = 400$.

مسئله ۷. به کمک قرینه کردن دوزنقه نسبت به AD نشان دهید یافتن بیشترین مساحت برای ABCD با این مسئله معادل است: «بین همه شش ضلعی‌هایی که طول تمام ضلع‌های آن‌ها برابر ۱۰ است، کدام شش ضلعی بیشترین مساحت را دارد؟»

مسئله ۸. ثابت کنید مساحت دوزنقه ABCD زمانی بیشترین مقدار ممکن است که زاویه A برابر 60° باشد. در این حالت دوزنقه به سه مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱۰ افراز می‌شود.



راهنمایی: برای حل مسئله آخر به دانستن نسبت‌های مثلثاتی نیاز دارید که ان شاء الله در آینده‌ای نزدیک فرا خواهید گرفت.

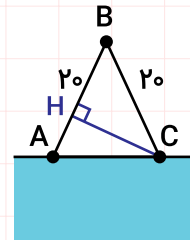
مسئله ۴. ثابت کنید بین مثلث‌های متساوی‌الساقین که مجموع دو ساق آن‌ها برابر 40 کیلومتر باشد، مثلی که در آن زاویه قائمه وجود دارد، بیشترین مساحت را دارد.

راهنمایی ۱. از روش قرینه کردن استفاده کنید. منتها قبل از آن باید ثابت کنید بین لوزی‌های دارای محیط ثابت، مربع بیشترین مساحت را دارد.

راهنمایی ۲. می‌توانید اثباتی بر اساس فرمول زیر برای مساحت مثلث دست و پا کنید:

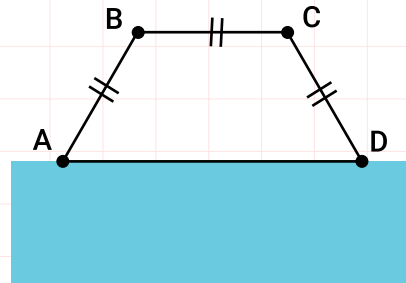
مساحت مثلث با طول دو ضلع a و b و زاویه بین α برابر است با: $S = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$.

راهنمایی ۳. راه حل دیگر این است که ضلع AB را به عنوان قاعده در نظر بگیرید و از رأس C عمودی بر ضلع AB رسم کنید. حال مساحت مثلث برابر است با: $S = \frac{1}{2} \times 20 \times CH = 10CH$ در نتیجه باید کاری کنیم که طول ارتفاع CH ماکزیم شود. تکمیل راه حل با شما.



ماجرای چهارم

رئیس رو کرد به پاهوم و گفت: «تصمیم این است که زمینی به شکل دوزنقه در کنار رود ولگا به شما بدهیم که ضلع‌های واقع بر خشکی این دوزنقه با هم برابر باشند و مجموع این سه ضلع برابر 30 کیلومتر باشد (شکل زیر).



در واقع: $AB=BC=CD=10\text{ km}$. حال پاهوم باید به این فکر کند که وقتی از نقطه A می‌خواهد حرکت کند، با چه زاویه‌ای حرکت کند تا به نقطه B برسد؛ چون انتخاب‌های متفاوتی وجود دارند:

چونر دیگر باید دید

خسرو داودی
آرش رستگار

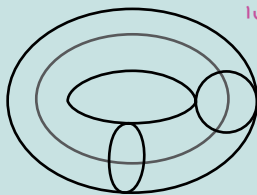
تمرین‌های متفاوت

از مجموعه به دست می‌آید که می‌تواند به طور پیوسته حرکت کند. برای مثال، نمادگذاری زیر را در نظر بگیرید:

$[0]$ و $[5]$ و $[3]$ و $[2]$ و $[1]$ و $[0]$ یعنی در طبقه اول دو بازه داریم: $[5]$ و $[0]$ و $[3]$ و همهٔ عددهای بین ۳ تا ۵، در طبقه دوم زیر بازه $[5]$ و $[6]$ بازه‌ای نیست، ولی زیر بازه $[3]$ و $[0]$ بازه $[2]$ و $[1]$ مشخص شده است. این یک روش پرانتزگذاری برای بازه $[6]$ و $[0]$ است. در طبقه اول بازه $[6]$ و $[5]$ یا بازه $[3]$ و $[0]$ یا عددی بین ۳ تا ۵ را می‌دهد. در طبقه دوم یا عددی در بازه $[6]$ و $[5]$ یا عددی در بازه $[1]$ و $[0]$ یا عددی در بازه $[3]$ و $[2]$ یا خود بازه $[2]$ و $[1]$ را به دست می‌دهد. در طبقه بعدی عددی بین صفر تا شش را نمایش می‌دهد. آیا می‌توانید نموداری برای داده‌ها در این ساختار تعبیه کنید؟

مسئله ۵. می‌توان دو نمودار دایره‌ای را با هم ترکیب کرد و یک نمودار چنبره‌ای ساخت (شکل ۱)؛ زیرا:

(چنبره) = (دایره) × (دایره)



شکل ۱

اگر دایره اول به m قسمت با نسبت‌هایی و دایره دوم به n قسمت با نسبت‌هایی تقسیم شده باشند، چنبره حاصل ضرب به $m \times n$ قسمت تقسیم خواهد شد. مثالی در زندگی روزمره برای چنین نموداری بیاورید.

زندگی کنند، اما جمع زاویه‌ها اهمیت داشته باشد، در این صورت کدامیک از نمودارها و مفهومی‌های آماری به همان شکل قبلی قابل استفاده هستند و کدامیک به بازتعریف نیاز دارند؟ برای مثال آیا مفهوم احتمال تغییر می‌کند؟ آیا نمودار میل‌های، نمودار دایره‌ای یا نمودار خط شکسته تغییر می‌کنند؟ اگر داده‌های ما عددهای پیوسته، مانند $\mathbb{R}$ یا عددهای گسسته مانند $\mathbb{Z}$ باشند، فرقی می‌کند؟ اگر داده‌های ما تصویری باشند یا نماد باشند چگونه؟ آیا مثالی می‌شناسید که داده‌ها تصویری یا نماد باشند؟

مسئله ۳. اگر به عددهای صحیح از دورتر و دورتر نگاه کنیم، آن‌ها را پیوسته می‌بینیم و چیزی شبیه کل محور عددها را مشاهده می‌کنیم. آیا می‌توانید روشی برای خلاصه کردن داده‌ها، مشابه همین مفهوم دور شدن ارائه کنید؟ یعنی اگر به داده‌ها از دور نگاه کنیم چه می‌بینیم؟

مسئله ۴. ممکن است برای طیفی از عددها روی محور عددهای حقیقی در چندین طبقه پرانتزگذاری کنیم. برای مثال: (4) و (3) و (2) و (1) و (4) و (3) و (2) و (1) می‌توانند در برنامه‌ریزی رایانه‌ای کارآمدی باشند. حال فرضیاتی روی این پرانتزگذاری‌ها قرار می‌دهیم. مثلاً فرض کنید اگر همهٔ پرانتزها را برداریم عددهای حقیقی مرتبی به دست بیایند. در این صورت مفهومی

در ایران و اکثر کشورهای جهان «آموزش ریاضیات به سبک تصویری» مغفول مانده یا به آن کم‌توجهی شده است؛ از موارد استثنا می‌توان به نظام آموزش ریاضی در کشور سنگاپور اشاره کرد. در این سلسله مقاله‌ها تلاش شده است این نقیصه با طرح تمرین‌هایی متفاوت تا حدی جبران گردد.

هفتمی‌ها

مسئله ۱. با نمودار دایره‌ای، نمودار میل‌های و نمودار خط شکسته آشنا شده‌اید. این نمودارها داده‌ها را در یک طبقه خلاصه می‌کنند و هدف آن‌ها مقایسه سهم داده‌ها در هر دسته با دسته‌های دیگر است. اکنون که در عصر اطلاعات زندگی می‌کنیم، هم حجم داده‌ها بسیار بالاست، هم دسته‌بندی آن‌ها پیچیده‌تر است، هم در هر دسته، چندین طبقه از دسته‌بندی‌ها وجود دارد و هم داده‌ها در بستر زمان تغییر می‌کنند. پس لازم است نمودارها را در بستر زمان رسم کنیم. رایانه و کدنویسی به ما کمک می‌کنند این روش‌ها را راحت‌تر به اجرا بگذاریم. چون روی کاغذ تنها می‌توان به یک طبقه فکر کرد و طبقه‌های متمایز را نمی‌توان هم‌زمان در دسترس قرار داد. نظامی برای نمایش اطلاعات در چندین طبقه در بستر زمان طراحی کنید.

مسئله ۲. اگر داده‌های ما عدد نباشند و مثلاً زاویه باشند، یعنی روی یک دایره

هشتمی‌ها فصل هشتم

مسئله ۱. آیا میانگین چند عدد صحیح همیشه عددی صحیح است؟ آیا میانگین چند عدد گویا همیشه عددی گویاست؟ آیا میانگین چند زاویه را می‌توان تعریف کرد؟ توجه شما را به این نکته جلب می‌کنم که تقسیم یک زاویه به عدد طبیعی n ، دارای n جواب روی دایره مثلثاتی است و این تعریف میانگین زاویه‌ها را دچار مشکل می‌کند.

مسئله ۲. آیا مرکز ثقل یک شکل روی محور عددها که همان مفهوم میانگین است، برای یک شکل در صفحه یا یک شکل سه بعدی در فضا هم با مفهوم میانگین ربط دارد؟ آیا تعریف مرکز ثقل وابسته به دستگاه مختصات است؟ آیا مفهوم میانگین در سه جهت محور طول‌ها و محور عرض‌ها و محور ارتفاع‌ها وابسته به دستگاه مختصات است؟ تناقضی نمی‌بینید؟

(راهنمایی: برای یک شکل در صفحه، مرکز ثقل این طور تعریف می‌شود: نقطه تلاقی همه خط‌هایی که مساحت را نصف می‌کنند و می‌توان نشان داد که هم‌رسند، و نقطه هم‌رسی مرکز ثقل شکل است. در سه بعد نیز به‌طور مشابه می‌توان مرکز ثقل را تعریف کرد. همه صفحه‌هایی که حجم شکل را به دو نیمه مساوی تقسیم می‌کنند، از یک نقطه خاصی می‌گذرند که آن نقطه را مرکز ثقل می‌نامیم. در صفحه مرکز ثقل این خاصیت را دارد که هر خطی از آن بگذرد حتماً مساحت را هم نصف می‌کند. یعنی چنین نیست که این نقطه از تلاقی بعضی از خط‌ها که مساحت را نصف می‌کنند به دست آمده باشد. بلکه تمام خط‌های گذرنده از مرکز ثقل این خاصیت را دارند. در سه بعد هم مشابه این نکته صحیح است. هر صفحه گذرنده از مرکز ثقل، حجم را به دو نیمه مساوی تقسیم می‌کند. آیا می‌توانید وجود مرکز ثقل را برای شکل‌های دو بعدی و حجم‌های سه بعدی ثابت کنید؟)

مسئله ۳. مفهوم میانگین و مفهوم مرکز ثقل به هم شباهت دارند. آیا مفهومی شبیه این دو در ریاضی یا در زندگی روزمره می‌شناسید؟ وقتی شما میانگین نمره‌های درس‌های خود را در پایان سال محاسبه می‌کنید، می‌بینید برخی نمره‌های شما تکراری هستند. می‌توانید فرض کنید این نمره‌ها تکرر دارند. یعنی تکرار می‌شوند. پس میانگین برای عددهای تکرر دار قابل تعریف است. مشابه همین نکته در مرکز ثقل دیده می‌شود. وقتی چند وزنه نقطه‌ای دارید و مرکز ثقل آن‌ها را محاسبه می‌کنید، جرم‌های این نقطه‌ها

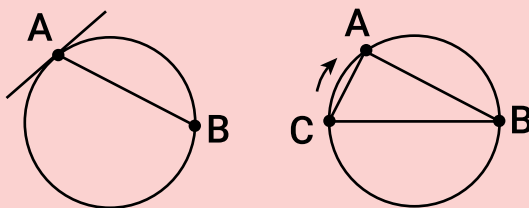
متفاوت هستند و باز مفهوم تکرار یا میانگین وزن دار وارد می‌شود. آیا می‌توانید برای شکلی در صفحه که وزن آن به‌طور همگن توزیع نشده است، به کمک میانگین وزن دار مرکز ثقل تعریف کنید؟ برای یک حجم سه بعدی چطور این کار را انجام می‌دهید؟

(راهنمایی: توزیع وزن نقطه‌ها را روی شکل می‌توان با تابعی با مقدارهای مثبت که روی آن شکل تعریف شده است، مدل‌سازی ریاضی کرد.)

فصل نهم

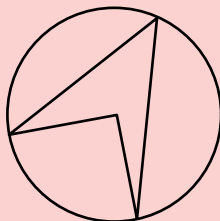
مسئله ۱. در حالت حدی یک زاویه محاطی ممکن است یک ضلع مماس بر دایره داشته باشد. باز هم اندازه زاویه محاطی نصف زاویه مرکزی روبه‌رو به آن کمان است (شکل ۱). این حکم را بدون کمک گرفتن از زاویه‌های محاطی که یک ضلعشان مماس است ثابت کنید. بعد تصمیم بگیرید آیا می‌توان گفت چون برای زاویه‌های محاطی معمولی حکم برقرار است، برای زاویه‌های محاطی حدی هم به کمک حدگرفتن و حرکت پیوسته حکم باید برقرار باشد؟ آیا چنین استدلالی به نظر شما در هندسه پذیرفته است؟ حالت‌های حدی قضایای دیگری را که در هندسه می‌دانید در نظر بگیرید و سؤال بالا را بررسی کنید.

شکل ۱



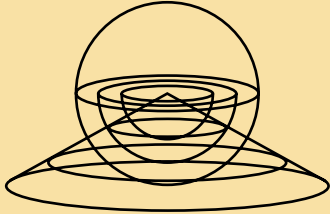
مسئله ۲. برای اثبات این نکته که زاویه محاطی نصف زاویه مرکزی روبه‌رو به همان کمان است، زاویه محاطی را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم (شکل ۶)؛ به‌طوری که یکی از آن‌ها ضلعی داشته باشد که از مرکز بگذرد. البته برای این کار گاهی لازم داریم یک زاویه محاطی به صورت تفاضل دو زاویه از نوع بالا بنویسیم. آیا می‌توانید روشی برای اثبات این حکم بدهید که به زاویه‌های محاطی که یک ضلعشان از مرکز می‌گذرد نیاز نداشته باشیم.

شکل ۲



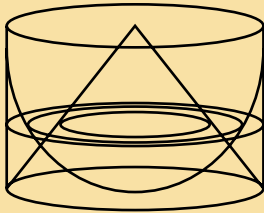
مسئله ۵. مشابه محاسبه‌ای که برای مساحت دایره انجام دادید، به کمک شکل ۶ فرمولی برای حجم کره به کمک حجم مخروط به دست آورید.

▼ شکل ۶



مسئله ۶. در شکل ۷ به کمک حجم استوانه و حجم مخروط فرمولی برای حجم کره به دست آورید. برای این اثبات به اصل کاوالیری نیاز خواهید داشت.

▼ شکل ۷

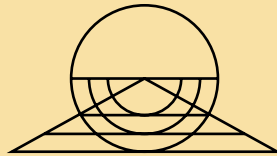


الف) به کمک اصل کاوالیری سه بعدی، فرمول مساحت متوازی‌السطوح را از فرمول مساحت مکعب مستطیل نتیجه بگیرید.
ب) با تقسیم مکعب به شش هرم مساوی، فرمول حجم هرمی را که ارتفاع آن برابر ضلع قاعده مربع آن باشد، نتیجه بگیرید.

مسئله ۳. برای اثبات فرمول حجم هرم یا مخروط با قاعده و ارتفاع دلخواه به صورت دیگری از اصل کاوالیری نیاز داریم. در این صورت دیگر، باید اجازه دهیم مساحت مقاطع حجم اول، ضریبی ثابت از مقاطع حجم دوم باشند. صورت جدید اصل کاوالیری را فرمول‌بندی کنید و فرمول حجم هرم و حجم مخروط را به کمک آن ثابت کنید.

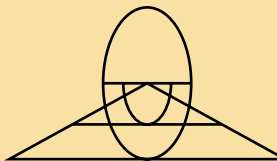
مسئله ۴. آیا می‌توانید به کمک شکل ۳ فرمول مساحت دایره را اثبات کنید؟

▼ شکل ۳

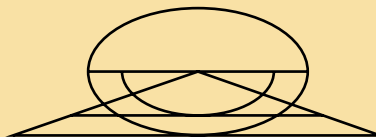


اگر به جای دایره بیضی بگذاریم (مانند شکل‌های ۴ و ۵)، آیا مساحت بیضی به دست می‌آید؟ بحث کنید.

▼ شکل ۴

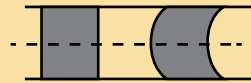


▼ شکل ۵



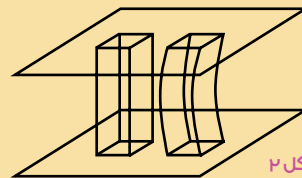
نهمی‌ها
مسئله ۱. اصل کاوالیری می‌گوید: اگر دو شکل چنان باشند که بین دو خط در صفحه محدود باشند، به طوری که هر قاطع موازی با این زوج خط‌ها دو شکل ما را در پاره‌خط‌هایی مساوی قطع کند، آنگاه آن دو شکل مساحت مساوی دارند (شکل ۱).

▼ شکل ۱



الف) به کمک اصل کاوالیری فرمول مساحت متوازی‌الاضلاع را از فرمول مساحت مستطیل نتیجه بگیرید.
ب) به کمک اصل کاوالیری نشان دهید مثلث‌هایی با ارتفاع و قاعده برابر، مساحت یکسان دارند.
ج) یک صورت اصل کاوالیری را برای حجم شکل‌های سه بعدی فرمول‌بندی کنید.

مسئله ۲. اصل کاوالیری در سه بعد می‌گوید: اگر دو حجم چنان باشند که بین دو صفحه موازی محدود باشند، به طوری که هر صفحه قاطع موازی با این زوج صفحه‌ها، دو حجم ما را در شکل‌های مسطح با مساحت یکسان قطع کند، آنگاه آن دو شکل حجم برابر دارند (شکل ۲).



▼ شکل ۲



▲ ادامه مسئله‌ها



▲ پاسخ‌ها



▲ آموزش معلمان

درس در کلاس

حل مسئله به کمک معادله

● محمدتقی طاهری تنجانی

بچه‌ها: علی ۸ ساله است $x=8$.

آقای رهنما: بچه‌ها کاری که در این مسئله کردیم بیان مسئله به زبان ریاضی و حل آن بود. در سایر مسئله‌ها هم کمابیش همین کار را می‌کنیم. حالا به این مسئله توجه کنید:

«زهره به سرعت شروع به دویدن می‌کند و هر دقیقه دو واحد به سرعت خود اضافه می‌کند. فاطمه با سرعتی دو واحد کمتر از سرعت زهره شروع به دویدن می‌کند و در هر دقیقه سرعت خود را دو برابر می‌کند. در دقیقه سوم سرعت این دو برابر می‌شود. زهره با چه سرعتی شروع به دویدن کرده است؟»

بچه‌ها: آقا خیلی سخت شد! می‌شود راهنمایی کنید!

آقای رهنما: کلید حل مسئله یافتن مجهول و ایجاد ارتباط بین مجهول و معلومات مسئله است. در اینجا چه چیزی مجهول است؟

بچه‌ها: سرعت دویدن زهره مجهول است!

آقای رهنما: خوب سرعت زهره را x واحد در دقیقه در نظر می‌گیریم. در دقیقه اول، دوم و سوم چقدر می‌شود؟

احمدی: دقیقه اول x ، دقیقه دوم $x+2$ و دقیقه سوم $x+4$.

آقای رهنما: خوب حالا سرعت فاطمه را در نظر بگیرید. در دقیقه اول با چه سرعتی می‌دود؟

مجیدی: آقا سرعت فاطمه $x+2$ می‌شود؟!

آقای رهنما: چرا $x+2$ ؟!

آقای رهنما (دبیر ریاضی): خوب درس امروز در ادامه درس جلسه قبل است. در جلسه قبل با مفهوم معادله و حل معادله آشنا شدید و امروز می‌خواهیم از معادله‌ها برای حل مسئله استفاده کنیم. برای شروع یک مسئله را مطرح می‌کنم:

«اگر سن علی و سن برادر دوقلوی او را با هم جمع کنیم، سپس سن دوستشان را که یک سال از آن‌ها بزرگتر است، به آن اضافه کنیم، ربع قرن تجربه به‌دست می‌آید. علی چند سال داشته است؟

برای حل این سؤال و سؤال‌های مشابه آن اول باید مجهول را مشخص کنیم. در اینجا چه چیزی برای ما مجهول است؟»

بچه‌ها: سن علی!

آقای رهنما: خوب، سن علی را x در نظر می‌گیریم. حالا چه چیزهای دیگری به‌عنوان معلومات داریم؟

بچه‌ها: سن برادر علی و سن دوست علی.

احمدی: و اینکه مجموعشان ربع قرن یعنی ۲۵ سال می‌شود.

آقای رهنما: خوب حالا ارتباط بین این‌ها را که گفتید، طبق صورت مسئله بنویسید.

پس باید داشته باشیم: $x+x+(x+1)=25$. حالا کافی است این معادله را حل کنیم که برای شما کاری آسان است. جواب چند می‌شود؟!

دیگری را حل کنید:

«محمود به جمعی از دوستان خود رسید و پرسید: چند نفرید؟ یکی از دوستانش گفت: «ما و ما و نیمه‌ای از ما و نیمه‌ای از نصف ما، گر تو هم با ما شوی، جملگی صد می‌شویم. دوستان محمود چند نفر بودند؟»

سعی کنید مسئله را حل کنید.

سپس با قدم‌زدن در کلاس به راهنمایی دانش‌آموزان در حل مسئله پرداخت. بعد از چند دقیقه پرسید: «آیا کسی موفق به حل مسئله شد؟!»

مصطفوی: آقا اجازه! اگه مجهول را دوستان محمود در نظر بگیریم، پس باید کلمه ما را x در نظر بگیریم. ما و ما می‌شود: $x+x$ یا: $2x$. نصف ما هم می‌شود: $\frac{x}{2}$ و نیمه‌ای از نصف ما هم می‌شود: $\frac{1}{2} \times \frac{x}{2}$ یا $\frac{x}{4}$. جمع این‌ها باید بشود ۱۰۰: درست است؟

احمدی: آقا اجازه چیزی کم دارد. مگر نگفته که گر تو هم با ما شوی جملگی صد می‌شویم؟ پس باید با عدد ۱ جمع بشود.

آقای رهنما: بله آقای مصطفوی درست گفتند و آقای احمدی هم مطلب را تکمیل کردند. حالا کافی است معادله $x+x+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+1=100$ را حل کنیم و x را به دست بیاوریم.

احمدی: آقا می‌شود ۳۶.

آقای رهنما: حالا برای کنترل کافی است به مسئله برگردیم. $36+36$ همان «ما و ما» است که می‌شود ۷۲. نصف ۳۶ هم ۱۸ و نصف نصف ۳۶ هم می‌شود ۹. پس داریم: $72+18+9$ که می‌شود ۹۹. حالا اگر با یک جمع بشود، می‌شود ۱۰۰. پس مسئله را درست حل کردیم. حل هر مسئله به همین سادگی است. کلید اصلی همان پیدا کردن ارتباط درست معلومات و مجهولات مسئله است. حالا این سؤال را حل کنید:

«دو شمع بلند یکی زودتر و دیگری دیرتر روشن شده‌اند و هر کدام در هر پنج دقیقه به اندازه یک سانتی‌متر کوتاه‌تر می‌شوند یکی از شمع‌ها ۱۵ سانتی‌متر و دیگری ۳۵ سانتی‌متر بلندی دارد. پس از چه مدت بلندی شمعی که دیرتر روشن شده دو برابر بلندی شمع دیگر است؟»

محمودی: آقا مسئله خیلی سخت است! کمکی بکنید!

آقای رهنما: فکر می‌کنید سخت است. نه این‌طور نیست. چه چیزی مجهول است؟

بچه‌ها: زمان خواسته شده.

آقای رهنما: خوب آن را x در نظر بگیرید. در این مدت هر کدام از شمع‌ها به چه اندازه کوتاه‌تر شده‌اند؟

یکی از بچه‌ها: $5x$.

آقای رهنما: آیا واقعاً ۵ برابر می‌شود؟ باید کمتر بشود.

احمدی: آقا می‌شود $\frac{x}{5}$ ، چون هر ۵ دقیقه یک سانتی‌متر کوتاه‌تر می‌شود.

مجیدی: چون مسئله گفته دو واحد کمتر از سرعت زهراست.

احمدی: نه آقا $x-2$ می‌شود. چون دو واحد باید کم بشود نه اضافه.

آقای رهنما: بله آقای احمدی درست می‌گوید. حالا در دقیقه‌های دوم و سوم چقدر می‌شود؟

احمدی: آقا دو برابر مرحله قبل، یعنی دقیقه دوم $2(x-2)$ یا $2x-4$ و در دقیقه سوم $2(2x-4)$ یا $4x-8$.

آقای رهنما: آفرین حالا بیا و ارتباط بین معلومات و مجهولات مسئله را بنویس.

احمدی: آقا باید در دقیقه سوم سرعتشان برابر باشد. باید بنویسیم:

$$(سرعت زهرا) \quad 4x-8=x+4 \quad (سرعت فاطمه)$$

از حل معادله داریم: $x=4$. یعنی زهرا در هر دقیقه چهار واحد سرعت داشته است.

آقای رهنما: آفرین. حالا برای کنترل جواب و اینکه ببینیم درست حل کردیم یا نه، یک بررسی انجام می‌دهیم. سرعت زهرا در سه دقیقه اول به ترتیب ۴، ۶ و ۸ واحد و سرعت فاطمه در سه دقیقه اول ۲، ۴ و ۸ بوده و معلومه که در دقیقه سوم سرعت هر دو نفر ۸ واحد سرعت بوده است. در حل هر مسئله اگر در پایان، بررسی جواب به دست آمده با صورت مسئله صورت بگیرد، باید همه چیز منطقی و درست منطبق با معلومات مسئله باشد. اگر غیر از این بود جایی از کار می‌لنگید!

محمودی: آقا یک سؤالی ذهن مرا درگیر کرده است. می‌توانم بپرسم؟

آقای رهنما: البته! بفرمایید.

محمودی: آقا چرا در حل هر مسئله ما مجهول را x در نظر می‌گیریم؟ آیا علت خاصی دارد؟

آقای رهنما: سؤال خوبی است. دلیل خاصی ندارد و مجبور نیستیم حتماً مجهول را x در نظر بگیریم. می‌توانیم یک حرف دیگر را نماینده مجهول در نظر بگیریم. ولی تمایل اکثر افراد به استفاده از x برای نمایش مجهول یک علت تاریخی دارد. نمادهای جبری برای نخستین بار در اروپای قرن‌های پانزدهم و شانزدهم میلادی به وجود آمدند؛ ابتدا برای مجهول‌ها و بعد برای عمل‌ها. خوارزمی که از دانشمندان بزرگ کشور عزیزمان است، در کتاب خود برای مجهول از واژه «شیء» استفاده کرد. بعد برای نخستین بار، یک اسپانیایی به نام پدرو (Pedro) در ترجمه کتاب خود به جای واژه شیء از واژه x که کلمه‌ای اسپانیایی است استفاده کرد. برای همین وقتی می‌خواستند از حرفی برای نشان دادن مجهول در مسئله استفاده کنند، حرف اول کلمه x ، یعنی x را انتخاب می‌کردند. پس x یا y یا هر حرف دیگری فرقی نمی‌کند. حالا آماده شوید مسئله

احمدی: تعداد بادکنک‌های مانده ضرب در قیمت فروش هر کدام می‌شود کل قیمت فروش. تعداد بادکنک‌های باقی‌مانده $11-y$ و قیمت فروش هر کدام $x+20$ تومان است. پس مبلغ کل فروش می‌شود:

$$(11-y)(x+20)$$

آقای رهنما: آفرین! حالا این دو را از هم کم کن. بیا پای تابلو و بنویس.

احمدی پای تابلو می‌رود و تابلو را پاک می‌کند و می‌نویسد:

$$(11-y)(x+20) - 11x = 113$$

سود خرید فروش

$$11x + 220 - yx - 20y - 11x = 113$$

$$-yx - 20y = -107$$

$$yx + 20y = 107$$

آقای رهنما: خب تا اینجا درست است، ولی حل این معادله آخر با یک ابتکار و اینکه x و y عددهای طبیعی‌اند حل می‌شود. چون اولین بار است که با این جور معادلات برخورد می‌کنید، من خودم آن را حل می‌کنم و توضیح می‌دهم. کافی است عبارت سمت چپ را به صورت ضرب دو پرانتز بنویسم:

$$y(x-20) = 107$$

حالا چون عدد 107 عدد اول است، پس باید دو عدد در سمت چپ تجزیه شده باشند و فقط می‌شود نوشت:

$$y(x-20) = 1 \times 107$$

پس y باید برابر 1 و $x-20$ باید 107 باشد. در نتیجه: $x=127$. یعنی یک بادکنک ترکیده و قیمت خرید هر بادکنک 127 تومان بوده است. خب این هم شگرد دیگری از حل معادلات خاص بود. فرصت امروز تمام شد. تعدادی تمرین برای منزل شما در نظر گرفتم. مبصر کلاس برگه‌های سؤال‌ها رو لطفاً توزیع کن.

تمرین

۱. فاصله دو شهر 100 کیلومتر بیشتر از یک سوم فاصله آن دو شهر است. فاصله دو شهر را پیدا کنید.
۲. از **فیثاغورس** پرسیدند: چند ساعت از نیمه شب گذشته است؟ او پاسخ داد: آنچه از نیمه شب گذشته دو برابر دو سوم مدتی است که چهار ساعت پیش به نیمه شب مانده بود. فیثاغورس چه ساعتی را اعلام کرده است؟
۳. برای جابه‌جا کردن تعدادی صندوق، یک سرکارگر ورزیده با 9 کارگر به کار گماشته شدند. هر یک از کارگران 15 صندوق را جابه‌جا کرد و تعداد صندوق‌هایی که سرکارگر جابه‌جا کرد 9 عدد بیشتر از میانگین همه صندوق‌های جابه‌جا شده بود. این گروه روی هم چند صندوق را جابه‌جا کرده‌اند؟

آقای رهنما: بله آقای احمدی درست حدس زده است. حالا روابط بین معلومات و مجهولات مسئله را بنویسید.

احمدی: آقا شمعی که 35 سانتی‌متر طول داشته، در این مدت $\frac{x}{5}$ از طولش کم شده. پس طولش به $35 - \frac{x}{5}$ می‌رسد. شمعی هم که 15 سانتی‌متر طول داشته، طولش به $15 - \frac{x}{5}$ می‌رسد. حالا پرسیده است پس از چه مدت طول شمع بزرگ‌تر دو برابر طول شمع کوچک‌تر می‌شود. پس باید داشته باشیم:

$$35 - \frac{x}{5} = 2 \left(15 - \frac{x}{5} \right)$$

اما از حل معادله داریم: $x=25$. نمی‌دانم کجای مسئله را غلط حل کردم که جواب منفی شد!

آقای رهنما: آقای احمدی شما کاملاً درست حل کردید. باید جواب به دست آمده را تفسیر کنید. 25 - دقیقه را به معنی زمان گذشته تعبیر می‌کنیم. جواب به دست آمده می‌شود 25 دقیقه پیش از این. در طول 25 دقیقه گذشته، از بلندی هر شمع 5 سانتی‌متر کم شده و اول طول شمع‌ها 40 و 20 سانتی‌متر بوده است.

در حل هر مسئله جواب باید منطقی و قابل قبول باشد. بهترین راه برای اطمینان از درستی جواب بازگشت به مسئله و کنترل راه‌حل با معلومات مسئله است. اگر معادله نظیر یک مسئله را نتوان حل کرد، مسئله حل نشده باقی می‌ماند. بعضی وقت‌ها جواب‌های به دست آمده با شرط‌های مسئله سازگاری ندارند. باید بررسی کنیم که آیا جواب‌ها پذیرفتنی هستند یا نه. همه این‌ها رو باید تفسیر کرد. چون فرصت کم است مسئله دیگری هم مطرح می‌کنم که از نظر آموزشی نکته‌های خوبی دارد:

«پسرکی 11 بادکنک خریده بود. پس از ترکیدن چند تای آن‌ها، بقیه را هر یک به بهای 20 تومان بیشتر از بهای خرید فروخت و 113 تومان سود برد. چند تا از بادکنک‌ها ترکیده و بهای خرید هر بادکنک چقدر بوده است؟
بچه‌ها: آقا اینجا که دو تا چیز مجهول است: هم تعداد بادکنک‌های ترکیده و هم قیمت بادکنک‌ها.

آقای رهنما: اشکالی ندارد. شما دو تا متغیر x و y را در نظر بگیرید و ارتباط بین معلومات و مجهولات را بنویسید.
مصطفوی: آقا اگر بهای خرید هر بادکنک را x و تعداد بادکنک‌های ترکیده را y در نظر بگیریم، پس تعداد بادکنک‌های ترکیده $11-y$ و مبلغ فروش هر بادکنک $20+x$ می‌شود؛ چون 20 تومان بیشتر فروخته. تا اینجا ارتباط‌ها را توانستم بنویسم. بقیه‌اش را نمی‌دانم.

آقای رهنما: خب سود چطور به دست می‌آید؟
احمدی: آقا اختلاف بین مبلغ فروش و مبلغ خرید.

آقای رهنما: خب مبلغ خرید چقدر است؟

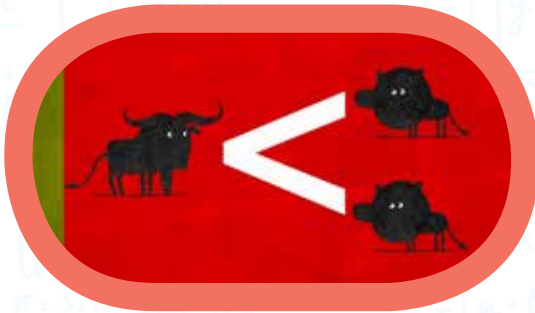
احمدی: یازده بادکنک هر کدام x تومان که می‌شود: $11x$.

آقای رهنما: کل قیمت فروش چقدر است؟

گردآوری: مریم جعفرآبادی

معمای عبور از رودخانه

آتش مهیبی در یک مزرعه بزرگ شعله‌ور شده است. سه شیر و سه بوفالو جانشان را برداشته و پا به فرار گذاشته‌اند. برای فرار از این جهنم آن‌ها باید از رودخانه‌ای پر از کروکودیل عبور کنند.

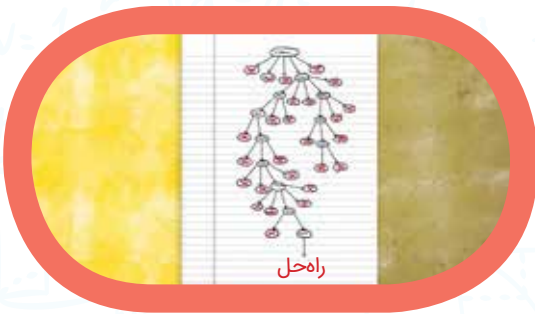
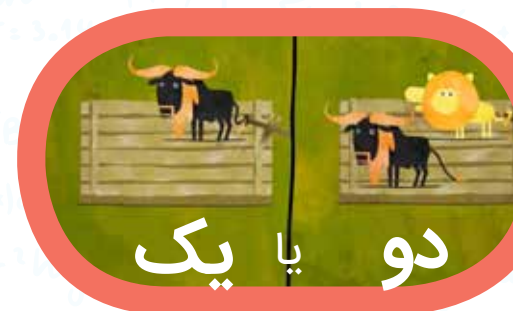


می‌خواهیم ببینیم در این اوضاع که هر لحظه ممکن است آتش جان همه حیوانات را بگیرد، سریع‌ترین راه برای عبور حیوانات از رودخانه بدون خورده شدن توسط شیرها چیست؟



می‌توانید فعلاً ادامه این مطلب را نخوانید و خودتان کمی فکر کنید. وقتی به جواب رسیدید بقیه مطلب را بخوانید. اگر در چنین مسئله‌هایی گیر کردید، بکوشید همه تصمیماتی را که در هر لحظه می‌توانید بگیرید فهرست کنید؛ و همین‌طور عاقبت آن تصمیم‌ها را!

خوشبختانه یک کلک (تخته چوبی که می‌توان روی آن سوار شد و از رودخانه عبور کرد) در آن اطراف هست که می‌تواند هم‌زمان دو حیوان را حمل کند. باید حداقل یک شیر یا یک بوفالو سوار آن شوند تا کلک را برانند و از رودخانه رد شوند.



مثلاً برای اولین حیوان یا حیواناتی که سوار کلک می‌شوند پنج گزینه داریم: • یک بوفالو، • یک شیر، • دو بوفالو، • دو شیر، • یک بوفالو و یک شیر.

فقط مشکلی هست! اگر تعداد شیرها در هر طرف رودخانه از تعداد بوفالوها بیشتر شود، حتی برای یک لحظه غریزه درندگی شیرها بالا می‌زند و کار به جاهای باریک می‌کشد. این قانون شامل حیواناتی که برای عبور از رودخانه روی کلک سوار شده‌اند هم می‌شود. یعنی اگر روی کلک هم تعداد شیرها بیشتر از بوفالوها شود، ممکن است چیزی از بوفالوهای سوار بر کلک باقی نماند.

حالا به جواب نزدیکیم، چون همه بوفالوها در جای امن و مطمئنی هستند و تعداد آنها هم بیشتر از شیرهاست. فقط یک شیر مانده که باید برگردد و دوست‌هایش را یکی‌یکی با خودش ببرد. به این ترتیب با مجموع ۱۱ رفت و برگشت همه حیوانات صحیح و سلامت به سمت چپ رودخانه می‌رسند.



اگر یک حیوان تنها حرکت کند مجبور می‌شود برای برگرداندن کلک به سمت دیگر رودخانه دوباره سوار آن شود و برگردد. پس انگار بی‌فایده است. اگر دو بوفالو همزمان سوار کلک شوند، بوفالوی سوم که با شیرها تنها مانده است فوراً خورده می‌شود. پس این گزینه‌ها رد می‌شوند.

فرستادن دو شیر یا یک شیر و یک بوفالو را بررسی کنیم. هر دوی این انتخاب‌ها می‌توانند درست باشند و با تعداد حرکات برابر راه‌حل‌های درستی برای این معما باشند. بیایید یکی از این تصمیم‌ها را بررسی کنیم و بررسی حالت دوم را بر عهده شما بگذاریم.

بیایید فکر کنیم یک شیر و یک بوفالو سوار بر کلک شده‌اند و می‌خواهند از رودخانه رد شوند. در این شرایط اگر بوفالو در سمت دیگر رودخانه بماند و شیر به سمت حیوانات دیگر که منتظر کلک هستند برگردد، اتفاق خوبی نیست. چون تعداد شیرها در سمت دیگر رودخانه سه تا می‌شود که خبر خوبی نیست.

پس شیر باید سمت چپ رودخانه بماند و بوفالو به سمت راست رود برگردد که بقیه حیوانات در آنجا هستند. حالا دوباره همان پنج گزینه را داریم، ولی یک شیر به سمت چپ رودخانه رفته است. این بار اگر دو بوفالو با هم بخواهند از روی رود رد شوند، یک بوفالو در سمت راست می‌ماند که سرنوشت او، خورده شدن توسط شیرهاست. اگر یک شیر و یک بوفالو هم بروند، بوفالوی روی کلک به محض اینکه به سمت چپ رود برسد خورده می‌شود. پس این گزینه‌ها هم به بن‌بست می‌رسند!

بنابراین در سومین حرکت فقط دو تا شیر می‌توانند با هم سوار کلک شوند. یکی از آنها پیاده شود و حالا دو شیر در سمت چپ رودخانه هستند. شیر سوم کلک را به سمت راست رودخانه برمی‌گرداند؛ جایی که بوفالوها منتظرند.

حالا چه کار کنیم؟ از آنجا که در سمت چپ رودخانه دو شیر داریم، تنها گزینه فرستادن دو بوفالو است. ولی اگر قرار باشد همین دو حیوان دوباره به سمت راست رودخانه برگردند که خیلی کار بی‌معنی و بی‌فایده‌ای انجام داده‌ایم. پس یک شیر و یک بوفالو را با کلک برمی‌گردانیم. یک بوفالو و یک شیر سمت چپ رودخانه می‌مانند و دو تا از هر کدام سمت راست رودخانه. باز هم برگرداندن یک شیر و یک بوفالو بی‌معنی است، پس عبور بعدی باید برای دو تا شیر یا دو تا بوفالو باشد. اگر شیرها بروند، بوفالوی سمت چپ را می‌خورند، پس باید بمانند و دو بوفالو از رودخانه رد می‌شوند.

راه‌حلی که شامل فرستادن دو شیر در مرحله اول بود هم با مجموع ۱۱ حرکت به نتیجه درست می‌رسد. شش حیوان توانستند به‌موقع از مهلکه فرار کنند و زندگی جدیدی را در سمت دیگر رودخانه آغاز کنند. البته حالا که خطر از سر گذشته باید دید این دو پادشاه در یک اقلیم می‌گنجند یا طوفان دیگری در راه است؟



منبع

https://www.ted.com/talks/lisa_winer_can_you_solve_the_river_crossing_riddle?language=en



● مهدیه مسیبی

جذابیت از تلاش می آید

گفت و گو با
فاطمه محبی،
دانش آموز سازنده
کلیپ آموزشی
مجموعه های
ریاضی،
از کوه دشت
لرستان

یکی با گوشی تلفن همراه فقط برای بازی، تفریح و تماشای فیلم سروکار دارد و یکی هم دنبال این است که چطور می توان از آن برای آموزش و یادگیری بهتر استفاده کرد. فاطمه که مثل شما دانش آموز دوره متوسطه است، با گوشی تلفن یک تکه فیلم (کلیپ) آموزشی به روش «استاپ موشن» می سازد تا هم به یادگیری بهتر یک مبحث آموزشی کمک کند و هم در جشنواره خوارزمی حضور داشته باشد. او در یک خانواده فرهنگی زندگی می کند. پدرش بازنشسته فرهنگی و خواهرش معلم است. برادر بزرگترش دانشجوی حسابداری و برادر کوچکترش دانش آموز است. مادر هم به خانه داری مشغول است. گفت و گو با فاطمه محبی را که به رایانه و هوش مصنوعی بسیار علاقه دارد، با هم می خوانیم.

کردم. زیرا پدیده ای ملموس و قابل درک برای دانش آموزان است و بهتر می توان مجموعه را نشان داد و درک کرد. بچه ها با این مثال ملموس به راحتی مبحث مجموعه ها را درک می کنند.

● ساخت این تکه فیلم چقدر زمان برد؟ آیا تنهایی آن را انجام دادی یا دانش آموز دیگری هم با شما همکاری می کرد؟

○ حدود یک ماه زمان نیاز داشتم و هر روز یک ساعت روی آن کار کردم. من این طرح و ایده را خودم به تنهایی انجام دادم و تنها از پدرم مشورت گرفتم.

● چه چیزی باعث شد که سراغ ساخت تکه فیلم بروی؟ چرا مثلاً برای مجموعه ها سراغ یک تحقیق نرفتی و مثلاً مقاله نوشتی؟

○ چون استاپ موشن را دوست داشتم و به همین دلیل این مبحث را انتخاب کردم. از طرف دیگر دوست داشتم در جشنواره خوارزمی هم شرکت کنم.

● آیا در همان مرحله اول کار تمام شد و به نتیجه رسیدی

● موضوعی که باعث شد ما امروز با هم گفت و گو کنیم ساخت یک تکه فیلم آموزشی در زمینه درس ریاضی است. درباره آن برای ما بگو.

○ موضوع تکه فیلم من «مجموعه ها در ریاضی» است که با استفاده از مواد دور ریختنی، مانند نخ، کاغذ، بطری، وسایل دم دستی و ... آن را ساختم. سعی کرده ام در این تکه فیلم نشان دهم که با استفاده از یک مجموعه چیزهای ساده و به ظاهر دور ریختنی و با کمی فکر و خلاقیت می توان روی یک موضوع آموزشی کار کرد و امکانی را فراهم آورد تا یادگیری جذاب و شیرین باشد.

● این تکه فیلم را به کمک چه چیزهایی ساخته ای؟

○ من با استفاده از تلفن همراه این تکه فیلم را به روش «استاپ موشن» ساختم. برای ساخت آن حدود ۷۰۰ عکس گرفتم و بعد این فیلم را درست کردم.

● این تکه فیلم در مورد کدام مبحث ریاضی است و چرا این مبحث را برای کارت انتخاب کردی؟

○ بحث مجموعه ها درس اول ریاضی پایه نهم است. من از موضوع خانواده برای نشان دادن مجموعه ها استفاده

یا اینکه مشکلاتی هم داشتی؟

○ به نکته جالبی اشاره کردید. بعد از اینکه در اولین مرحله تمام عکس‌ها را کامل کردم و آماده بودم تا کار ویرایش (ادیت) را انجام بدهم، به‌خاطر کیفیت پایین گوشی تمام عکس‌هایم پاک شدند. آن لحظه ناامید شدم. ولی بعد از مدتی تصمیم گرفتم تا دوباره کار را شروع کنم و ادامه بدهم که خوشبختانه به نتیجه رسیدم. از آنجا که به کار خودم باور داشتم، سعی کردم با پشت کار دوباره آن را دنبال کنم و نتیجه بگیرم. این اتفاق برای من درس بزرگی بود که آدم باید برای رسیدن به هدفش تلاش کند و از شکست‌های کوچک بین راه هراس نداشته باشد.

خانم احمدی دبیر ریاضی شما در این زمینه چقدر نقش داشت؟ آیا تو را تشویق می‌کرد؟ چه کمک یا راهنمایی در این زمینه برایت داشت؟

○ من بعد از ساخت کار اولیه، آن را به ایشان نشان دادم. خانم احمدی استقبال کرد و ایرادهای کارم را به من یادآوری کرد.

ساخت این تکه‌فیلم چقدر به خودت در فهم بهتر این مبحث کمک کرد و برای انجام این کار چقدر مطالعه بیشتر از سطح کتاب داشتی؟

○ پرداختن به این موضوع، یعنی مجموعه‌ها در ریاضی، در فهم بهتر مطلب به طور یقین به من کمک کرد و نقش داشت. البته من بیشتر روی کتاب درسی خودمان تمرکز داشتم و نیازی به کتاب‌های دیگر پیدا نکردم.

این تکه‌فیلم را در چه مسابقه‌ای شرکت دادی و تا چه مرحله‌ای پیش رفتی؟

○ در جشنواره نوجوان خوارزمی و تا مرحله کشوری پیش رفتم.

آیا باز هم دوست داری در زمینه ریاضی فعالیت‌های فوق برنامه داشته باشی؟ چه برنامه‌ای برای آینده خودت در این زمینه داری؟ یعنی روی چه موضوع‌هایی می‌خواهی کار کنی؟

○ من به رشته رایانه، گرایش برنامه‌نویسی علاقه دارم. این رشته را در هنرستان دنبال خواهم کرد و هدفم ادامه تحصیل در حوزه هوش مصنوعی است. قصد دارم در المپیاد رایانه شرکت کنم. واقعاً به رشته رایانه علاقه دارم. آینده شغلی خوبی هم دارد. برای حرفه‌ای شدن در کلاس برنامه‌نویسی به صورت برخط شرکت کرده‌ام و علاقه‌مندم به برنامه‌نویسی ادامه بدهم.

تکه‌فیلمی که ساختی در مدرسه چقدر مورد استقبال سایر دانش‌آموزان قرار گرفت و چه کمکی به آنان در فهم بهتر این مبحث ریاضی کرد؟

○ راستش با توجه به اینکه آن را به مدرسه ارائه نداده‌ام، بنابراین نمی‌توانم اظهار نظر کنم. اما هرکسی آن را دید، آن را اثری جذاب و خلاقانه ارزیابی و معرفی کرد.

شنیدم در دوره ابتدایی و حتی دوره اول متوسطه به عنوان عنوان معلم‌یار به سایر دانش‌آموزان در فهم بهتر مطالب ریاضی کمک می‌کردی.

○ بله، من در دوره‌های ابتدایی و اول متوسطه به عنوان همیار ریاضی به دانش‌آموزانی که در مسائل ریاضی مشکل داشتند کمک می‌کردم. هنوز هم کمک می‌کنم. در غیاب معلم مشکلات درسی بچه‌ها را بررسی می‌کردم و در یادگیری و فهم مطالب به آن‌ها یاری می‌رسانم.

برای اینکه مباحث درس ریاضی را خودت بهتر یاد بگیری چه روشی داری؟ مثلاً چند بار می‌خوانی، تمرین می‌کنی یا کتاب‌های فوق برنامه مطالعه می‌کنی؟

○ برای یادگیری بهتر مباحث ریاضی، چند بار به روش روخوانی مطالب را می‌خوانم و نکات مهم را روی برگه باطله می‌نویسم. تمرین‌های دشوار مبحث را چند بار تکرار می‌کنم و بعد از یادگیری، سراغ تست‌های ریاضی همان مباحث می‌روم. روش من تکرار تمرین‌های درسی و مباحث آموزشی است.

نظرت درباره درس ریاضی چیست؟ بعضی‌ها می‌گویند خیلی سخت است. این جمله را قبول داری؟

○ خیر من چنین اعتقادی ندارم. دشواری هر درسی بستگی به خود دانش‌آموز دارد. با تلاش و کوشش، هر درسی آسان‌تر و جذاب‌تر می‌شود.

وقتی در حل مسئله‌های ریاضی با مشکلی برخورد می‌کنی و نمی‌توانی آن را حل کنی چاره کار چیست؟

○ از پدرم کمک می‌گیرم و در غیر این صورت کتاب‌های کمکی را جست‌وجو می‌کنم. گاهی هم سراغ وبگاه‌های (سایت‌های) اینترنتی می‌روم.

و حرف آخر.

○ من به مجله رشد ریاضی برهان علاقه دارم و مباحث مرتبط با حساب، جبر و هندسه را هم می‌خوانم.
● برای تان موفقیت و سربلندی آرزو داریم.



مقدمه‌ای بر زبان‌های برنامه‌نویسی

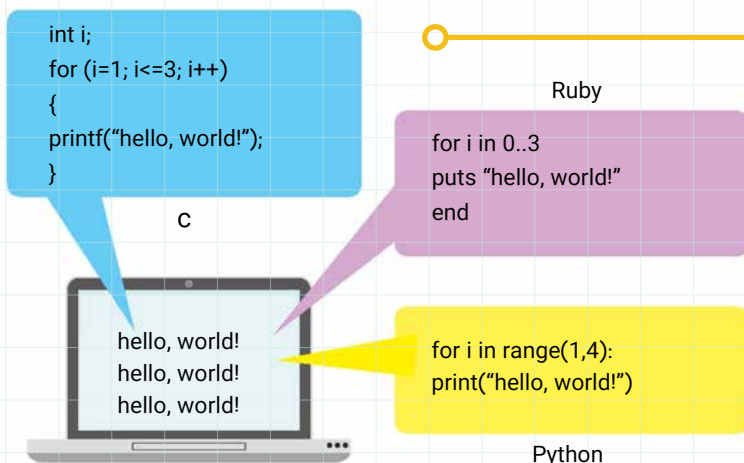
زبان‌های برنامه‌نویسی به منظور کمک به انسان برای ارتباط با رایانه ابداع و توسعه داده شده‌اند. چالش اساسی در برنامه‌نویسی ترجمه دستورها به زبانی است که از یک سو برای انسان‌ها قابل فهم باشد و از سوی دیگر امکان ترجمه آن‌ها به زبان رایانه نیز فراهم باشد.

زبان‌های برنامه‌نویسی

زبان برنامه‌نویسی مجموعه‌ای رسمی از کلمه‌ها و نمادهاست که به افراد اجازه می‌دهد دستوراتی را به رایانه‌ها بدهند. درست مانند زبان‌های انسانی، هر زبان برنامه‌نویسی واژگان و دستور زبان خاص خود را دارد. ترجمه یک الگوریتم که برای مثال به زبان فارسی نوشته شده است، به زبان برنامه‌نویسی مورد نظر، رایانه را قادر می‌سازد دستورها را بفهمد و اجرا کند.

ویژگی‌های مشترک زبان‌های برنامه‌نویسی

همه زبان‌های برنامه‌نویسی ویژگی‌های اساسی خاصی دارند که عبارت‌اند از: تصمیم‌گیری، تکرار دستورها، و ذخیره مقدارها در ظرف‌های نام‌گذاری شده. کلمه‌های استفاده‌شده برای این ویژگی‌ها از زبانی به زبان دیگر متفاوت است، اما همه آن‌ها اساساً یک کار را انجام می‌دهند. آشنایی با این مفهوم‌ها در یک زبان، یادگیری زبان دیگر را برای شما بسیار آسان‌تر می‌کند. راه‌های متنوعی برای ترجمه زبان‌های برنامه‌نویسی به کد دودویی (که کد ماشین نیز نامیده می‌شود) وجود دارد. این کدها را رایانه می‌فهمد. برخی از زبان‌ها مانند C و C++ از «مترجم» (کامپایلر) استفاده می‌کنند که یک فایل جدید حاوی کد ماشین تولید می‌کند. رایانه می‌تواند این فایل جدید را اجرا کند. زبان‌هایی مانند «پایتون» و «جاوا اسکریپت» از یک «مفسر» استفاده می‌کنند که برنامه نوشته شده طی یک فرایند را ترجمه و اجرا می‌کند.



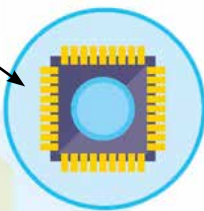
نتیجه یکسان

سه برنامه نشان داده شده در اینجا کاملاً متفاوت به نظر می‌رسند، اما همه آن‌ها نمونه‌هایی از یک مفهوم برنامه‌نویسی به نام «حلقه» هستند که برای نمایش یک پیام سه بار از آن استفاده می‌شود.

زبان‌های سطح بالا و پایین

از اصطلاح «زبان‌های برنامه‌نویسی» معمولاً برای اشاره به زبان‌های سطح بالا استفاده می‌شود. زبان‌های سطح بالا به برنامه‌نویسان اجازه می‌دهند از زبانی نزدیک‌تر به زبان انسان استفاده کنند. زبان‌های سطح پایین با سخت‌افزار داخلی، مانند «ثبات‌ها» و «حافظه» کار می‌کنند و به نوع خاصی از رایانه متصل هستند. برنامه‌های نوشته شده به زبان سطح بالا را می‌توان روی هر رایانه‌ای با مترجم مربوطه اجرا کرد.

با فشردن دکمه‌های صفحه کنترل مایکروویو، کد نوشته توسط پردازنده داخلی آن اجرا می‌شود.



سامانه‌های جاسازی شده

سامانه‌های «جاسازی شده» رایانه‌هایی هستند که امروزه به عنوان بخش مهمی از وسایل گوناگون با آن‌ها سروکار داریم. برای مثال این سامانه‌ها در یک مایکروویو یا خودرو گنجانده شده‌اند و غالباً به زبان C برنامه‌نویسی می‌شوند. با وجود اینکه C یک زبان برنامه‌نویسی سطح بالاست، به برنامه‌نویسان امکان می‌دهد کنترل زیادی بر نحوه اجرای کد در سطح «ثبات‌ها» (رجیسترها) داشته باشند.

برنامه‌نویسی برای هدف خاص

برای نسل‌های اولیه رایانه‌ها، برنامه‌نویسان مواردی را با کد دودویی یا زبان اسمبلی می‌نوشتند. از آن زمان، زبان‌های برنامه‌نویسی به عنوان ابزاری برای برآورده کردن یک نیاز یا انجام یک هدف مشخص توسعه یافته‌اند. برای مثال می‌توان به زبان‌هایی اشاره کرد که به ریاضی‌دانان و دانشمندان اجازه می‌دهند فرمول‌ها را وارد کنند، زبان‌هایی که برای آموزش برنامه‌نویسی به علاقه‌مندان به کار می‌روند، یا زبان‌هایی که به توسعه هوش مصنوعی کمک می‌کنند.

اسکرچ



کُد برای کودکان و دانش‌آموزان ابتدایی «اسکرچ»^۳ برای آموزش کدنویسی به کودکان و دانش‌آموزان ۷ تا ۱۳ ساله ایجاد و توسعه داده شد و یادگیری آن آسان و سرگرم‌کننده است.

فرترن



محاسبه‌های علمی

فرترن^۱ به گونه‌ای طراحی شده بود که به افراد اجازه می‌داد برنامه‌هایی بنویسند که شامل فرمول‌های ریاضی باشد. نام فرترن کوتاه شده عبارت «ترجمه فرمول» یعنی «Formula Translation» است.

لیسپ



تفکر ماشینی و هوش مصنوعی

«لیسپ»^۴ بر اساس یک تعریف ریاضی از زبان‌های برنامه‌نویسی ابداع شد و خیلی زود بین محققان و علاقه‌مندان که هوش مصنوعی را مطالعه می‌کردند، محبوب شد.

کوبول



تجارت و کسب‌وکار

کوبول^۲ یا کوبال مخفف «زبان متداول کسب‌وکارمحور»، یعنی: «Common Business-Oriented Language» است که برای تسهیل و ارزان ترساختن نرم‌افزارهای مرتبط با تجارت برای شرکت‌ها توسعه داده شد.

پی‌نوشت‌ها

1. Fortran
2. COBOL
3. Scratch
4. Lisp

فناوری‌های سطح بالا

یکی از معروف‌ترین روبات‌هایی که سامانه برنامه‌ریزی شده دارد، «مریخ‌نورد کنجکاوی» است. این روبات متحرک برای کاوش مریخ و ارسال داده‌ها، ساخته و برنامه‌ریزی شده است. کدهای نوشته شده برای مریخ‌نورد کنجکاوی، عمدتاً به زبان C نوشته شده‌اند. قبل از فرستادن کنجکاوی، آن را به طور کامل آزمایش کردند تا اطمینان حاصل شود برای مثال به طور تصادفی به سنگ برخورد نمی‌کند و به خود آسیب نمی‌رساند.



عباس قلعه پورا قدم

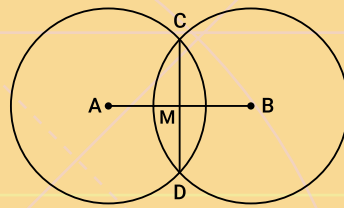
چگونه رسم می‌شود؟

سلام. امیدوارم رسم‌های ارائه شده در هفت شماره قبلی را تمرین کرده و یاد گرفته باشید. در این قسمت از «چگونه رسم می‌شود؟» که در آخرین شماره از سال تحصیلی جاری ارائه می‌شود، قصد آموزش رسم شکل به‌خصوصی را ندارم، بلکه می‌خواهم رسم‌های جالبی را بیاورم که برای بهتر فهمیدن بخش هندسه کتاب ریاضی‌تان مفید خواهند بود.

۱. زاویه قائمه چگونه رسم می‌شود؟

برای رسم دقیق یک مربع یا مستطیل یا هر شکل هندسی دیگری که زاویه قائمه داشته باشد، یکی از اصلی‌ترین شرط‌های لازم برای رسیدن به یک شکل با همان اندازه‌ها که می‌خواستیم، این است که زاویه قائمه رسم‌شده دقیقاً ۹۰ درجه باشد. چرا که یک یا دو درجه خطا در اندازه زاویه قائمه می‌تواند تمامی اندازه‌های شکل را تحت تأثیر قرار دهد و کار خراب شود. برای رسم زاویه قائمه دو روش ارائه می‌کنم:

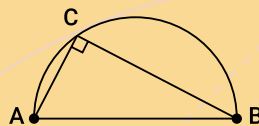
روش اول: پاره‌خطی به طول دلخواه می‌کشیم؛ مانند AB (شکل ۱). دو سر AB، یعنی A و B را مرکز قرار می‌دهیم و دو دایره به شعاعی بیشتر از نصف طول AB رسم می‌کنیم؛ به طوری که در دو نقطه C و D یکدیگر را قطع کنند. خط راست CD را می‌کشیم تا AB را در نقطه M قطع کند. هر چهار زاویه که رأسشان نقطه M است، قائمه هستند.



شکل ۱

روش دوم: نیم دایره‌ای به قطر دلخواه AB رسم می‌کنیم و نقطه دلخواه C را روی آن در نظر می‌گیریم. C را به نقطه‌های A و B وصل می‌کنیم. زاویه ACB قائمه است (شکل ۲).

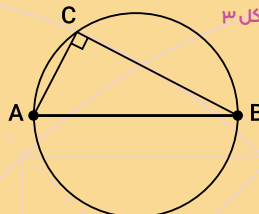
شکل ۲



پرسش: چرا با انتخاب دلخواه نقطه C روی محیط نیم‌دایره، زاویه تشکیل‌شده ACB همیشه قائمه است؟

برای پاسخ به این پرسش نیمه دوم نیم‌دایره را نیز رسم می‌کنیم تا دایره کاملی حاصل شود (شکل ۳). در هر دایره به زاویه‌هایی نظیر ACB که رأسشان روی محیط دایره و اضلاعشان وترهایی از دایره هستند، «زاویه محاطی» می‌گویند. اندازه هر زاویه محاطی با نصف اندازه کمان روبه‌رویش برابر است. چون کمان روبه‌روی زاویه محاطی ACB یک نیم‌دایره و نیم‌دایره ۱۸۰ درجه است، لذا اندازه زاویه ACB برابر نصف ۱۸۰، یعنی ۹۰ درجه خواهد بود.

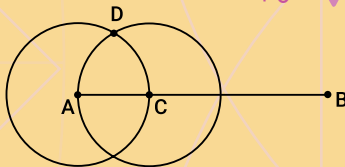
شکل ۳



۲. چگونه بر نقطه A از پاره‌خط AB خطی عمود رسم کنیم، بدون آنکه پاره‌خط را از طرف A امتداد دهیم؟
پاره‌خط AB را در نظر می‌گیریم (شکل ۴). می‌خواهیم در نقطه A عمودی

بر AB رسم کنیم. استفاده از گونیا در این مورد بدون خطا نخواهد بود. برای اینکه متوجه این خطا بشوید، خودتان دست به کار شوید و سعی کنید پس از رسم یک پاره‌خط، در یکی از دو سر آن با گونیا عمودی بر آن پاره‌خط رسم کنید. خواهید دید که نتیجه خیلی مطلوب نخواهد بود و شما مجبور خواهید بود که پاره‌خط AB را امتداد دهید. روش زیر به شما کمک می‌کند بدون امتداد دادن، بر پاره‌خط مورد نظر، عمود رسم کنید. روی پاره‌خط AB نقطه دلخواه C را در نظر می‌گیریم. به مرکزهای A و C و شعاعی مساوی با طول AC دو دایره رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه‌ای که آن را D می‌نامیم، قطع کنند.

شکل ۴

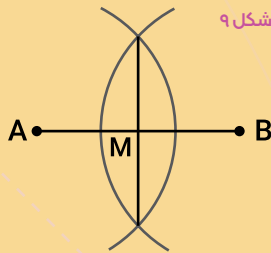


حال D را به C وصل می‌کنیم و پاره‌خط CD را از طرف D به اندازه خودش امتداد می‌دهیم تا به نقطه E برسیم. برای امتداد دادن CD به اندازه خودش از طرف D، دو کار می‌توانیم انجام دهیم:

(الف) با خط‌کش طول CD را اندازه بگیریم و به همان اندازه امتداد دهیم. (ب) دهانه پرگار را به اندازه CD باز کنیم (CD با AC هم طول است، پس دهانه پرگار به همان اندازه‌ای که دو دایره قبلی را رسم کردیم، خواهد ماند و نیاز به تغییر نیست) و به مرکز D دایره‌ای رسم کنیم و بعد CD را امتداد دهیم تا دایره را در نقطه‌ای که آن را E می‌نامیم، قطع کند.

روش دوم مطلوب‌تر و دقیق‌تر است (شکل ۵). پس از امتداد CD، E را به A وصل می‌کنیم تا زاویه قائمه EAC به دست آید. EA بر AB در A عمود است.

تا یکدیگر را در دو نقطه قطع کنند. این دو را به هم وصل می‌کنیم. محل تقاطع پاره‌خط رسم شده با AB را M می‌نامیم. M وسط AB است (شکل ۹).

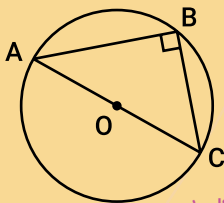


شکل ۹

۵. چگونه مرکز دایره رسم شده‌ای را که مرکزش نامعلوم است، تعیین کنیم؟

بارها برای خود من اتفاق افتاده است که دایره‌ای را روی کاغذ رسم کرده‌ام، ولی به دلیل کم عمق بودن اثر نوک سوزن پرگار روی کاغذ، نتوانسته‌ام مرکز دایره را بیابم. البته ناگفته نماند قوت بینایی نیز در این امر دخیل است. در چنین شرایطی به این طریق عمل می‌کنیم:

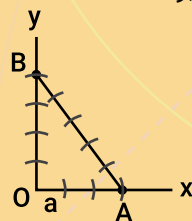
در دایره مفروض، وتر دلخواه AB را رسم می‌کنیم و از نقطه B عمودی بر AB خارج می‌کنیم تا دایره را در C قطع کند (روش رسم عمود را در شماره ۲ شرح دادیم). وسط AC مرکز دایره است که می‌توان آن را به کمک آنچه در شماره ۴ ذکر شده است، به دست آورد (شکل ۱۰).



شکل ۱۰

در پایان امیدوارم این پنج مورد را خوب تمرین کنید و در سال تحصیلی آینده نیز پیگیر مطالب مجله باشید. اگر هم کلاس نهمی هستید، از سال آینده علاوه بر دوست صمیمی‌تان مجله برهان متوسطه اول، با برهان متوسطه دوم نیز روابط خوبی برقرار کنید. به امید موفقیت شما عزیزان.

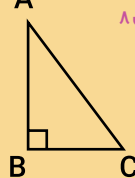
شعاع، کمان دیگری رسم کنیم و بار سوم نیز این را تکرار کنیم تا روی OX سه پاره‌خط هم طول به وجود آیند. آخرین نقطه را A می‌نامیم (شکل ۷). سپس روی ضلع OY از طرف O به همان ترتیبی که گفته شد، این بار چهار پاره‌خط مساوی به طول a جدا می‌کنیم و آخرین نقطه را B می‌نامیم. A را به B وصل می‌کنیم. اگر طول AB درست مساوی $5a$ بود، زاویه XOY قائمه، اگر بیشتر از $5a$ بود، منفرجه و اگر کمتر بود، حاده است.



شکل ۷

آیا متوجه رابطه بین عددهای ۳، ۴ و ۵ شدید؟ آیا با رابطه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه آشنا هستید؟ در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع طول وتر برابر است با مجموع مربعات طول‌های دو ضلع قائم. در شکل ۸، $AC^2 = AB^2 + BC^2$ قائم‌الزاویه ABC است و داریم:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$



شکل ۸

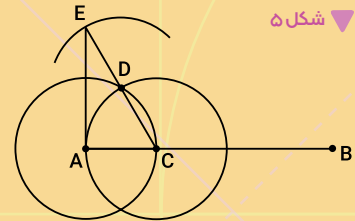
در شکل ۷ اگر XOY قائمه باشد، مثلث AOB قائم‌الزاویه خواهد بود. نتیجه خواهیم داشت:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2$$

اگر: $OA = 3a$ و $OB = 4a$ ، در این صورت می‌توانید حساب کنید که طول AB برابر $5a$ خواهد بود.

۴. چگونه یک پاره‌خط را به دو قسمت مساوی تقسیم کنیم؟

برای نصف کردن پاره‌خط AB ، به مرکزهای A و B با شعاعی بیشتر از نصف طول AB ، دو کمان می‌زنیم



شکل ۵

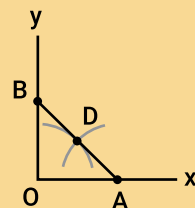
۳. چگونه بدانیم زاویه رسم شده‌ای قائمه است یا نه؟

روش اول: زاویه XOY را که می‌خواهیم بدانیم قائمه است یا نه، در نظر می‌گیریم. روی ضلع OX ، نقطه دلخواه A را انتخاب می‌کنیم. به مرکزهای O و A و با شعاعی بیشتر از نصف طول OA ، دو کمان دایره رسم می‌کنیم. نقطه تقاطع دو کمان در داخل زاویه را D می‌نامیم. پاره‌خط AD را از طرف D به اندازه خودش امتداد می‌دهیم و انتهای آن را B می‌نامیم (شکل ۶).

الف) اگر B روی ضلع OY واقع شود، زاویه قائمه است.

ب) اگر B داخل زاویه بیفتد، زاویه XOY منفرجه است.

پ) اگر B در خارج زاویه قرار گیرد، زاویه حاده است.



شکل ۶

روش دوم: روی ضلع OX و از طرف O ، سه پاره‌خط مساوی به طول دلخواه a جدا می‌کنیم. برای این کار کافی است دهانه پرگار را کمی باز کنید (البته در ریاضی اینکه من بگویم: «دهانه پرگار را کمی باز کنید» صحیح نیست. چون منظور من مشخص و واضح نیست و ابهام دارد. در واقع شما باید سه پاره‌خط هم طول روی ضلع OX جدا کنید. پس باید دهانه پرگار به اندازه‌ای باز شود که سه برابر آن از خود OX بیشتر نشود) و به مرکز O کمانی رسم کنیم تا OX را قطع کند. دوباره به مرکز نقطه جدید و همان

جعفریانی

همه جای ریاضی!

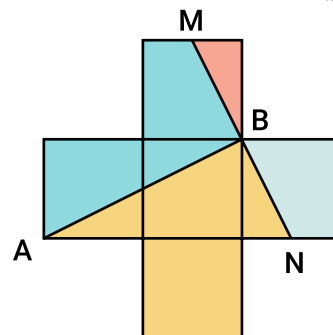
۱. چند سؤال کوتاه:

- از صفر تا صد چند تا ۹ وجود دارد؟
- یک پدر و مادر هفت پسر دارند و هر یک از پسران یک خواهر دارد. این خانواده چند نفرند؟
- مادری ۵ سیب در زنبیل برای ۵ بچه‌اش آورد و گفت هر کدامتان یک سیب! اما کاری کنید که یک سیب هم در زنبیل بماند. چگونه چنین چیزی ممکن است؟

۲. شش عدد چوب‌کبریت داریم. چگونه می‌توانید با کنار نهادن آن‌ها هشت مثلث متساوی‌الاضلاع و یک شش ضلعی منتظم بسازید؟



۳. شکل به‌علاوه‌ای روی مقوا بکشید، از نقطه A به نقطه B وصل کنید و سپس در نقطه B خطی عمود بر AB بکشید تا از دو طرف به M و N برسد. اکنون چهار قسمت ایجاد شده را ببرید و با کنار هم نهادن آن‌ها یک مربع بسازید.



۴. در میان شاعران فارسی زبان کسانی را می‌شناسیم که در شعر خود تاریخ تولد خویش یا واقعه‌ای را به شعر درآورده‌اند. از آن میان چند نفر را با شعرشان نام می‌بریم. این‌ها به جز شاعرانی هستند که تاریخ‌ها را به صورت حروف ابجد می‌نوشتند.

• **فردوسی:** سال پایانی سرودن شاهنامه؛

ز هجرت شده پنج هشتاد بار
که گفتم من این نامه شاهوار (سال ۴۰۰ هـ. ق)

• **سعدی:** سال سرودن گلستان؛

در این مدت که ما را وقت خوش بود
ز هجرت ششصد و پنجاه و شش بود (۶۵۶ هـ. ق)

• **کسایی مروزی:** تاریخ تولد خودش؛

به سیصد و چهل و یک رسید نوبت سال

چهارشنبه و سه روز باقی از شوال

بیامدم به جهان تا چه گویم و چه کنم؟

سرود گویم و شادی کنم به نعمت و مال

• **ناصرخسرو قبادیانی:** تولد خودش؛

بگذشت ز هجرت پس سیصد نود و چار

بگذاشت مرا مادر بر مرکز اغبر (سال ۳۹۴ هـ. ق)

• **شیخ محمود شبستری:** سرودن مثنوی گلشن راز؛

گذشته هفت و ده با هفتصد سال

ز هجرت ناگهان در ماه شوال

رسولی با هزاران لطف و احسان

رسید از خدمت اهل خراسان (۷۱۷ هـ. ق)

و بالاخره:

• **عبدالرحمن جامی:** سال تولد خودش؛

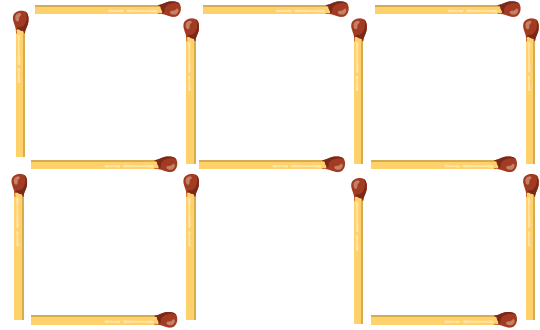
به سال هشتصد و هفده ز هجرت نبوی

که زد ز مکه به یثرب سرادقات جلال

ز اوج قله پروازگاه عز و قدم

بدین حضيض هوان سست کرده‌ام پر و بال (۸۱۷ هـ. ق)

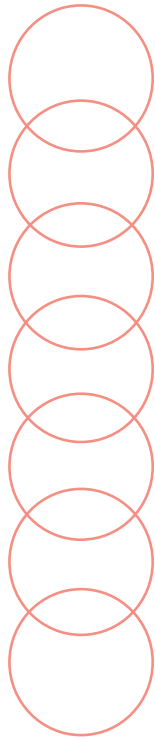
۵. سه چوب کبریت را جابه‌جا کنید طوری که چهار مربع درست شود!



۷. آیا می‌توانید اعمال ریاضی بین این ۶ عدد ۴ را طوری به کار ببرید که حاصل ۱۰۰ شود؟

۴ □ ۴ □ ۴ □ ۴ □ ۴ □ ۴
(راهنمایی: می‌توانید از +، × و () استفاده کنید.)

۸. مسافری به مهمانخانه رفت و خواست شب بماند. اما چون پول نقد نداشت با صاحب مهمانخانه قرار گذاشت هر شب یک حلقه از دستبند نقره‌اش را که هفت حلقه داشت به او بدهد. مسافر اما برای اینکه همه حلقه‌ها از هم جدا نشوند کاری کرد که فقط یکی از آن‌ها از دستبند جدا شود و به این ترتیب ۷ شب را به سر آورد. بگویید کدام حلقه را جدا کرد و چگونه همه حلقه‌ها را به مهماندار داد.



۶. شما در کتاب تاریخ و بعضی درس‌های دیگر، هم با تاریخ هجری قمری سروکار دارید و هم با تاریخ هجری شمسی. مثلاً می‌خوانید که نهضت مشروطیت در سال ۱۲۸۵ هجری شمسی اتفاق افتاد که برابر است با سال ۱۳۲۴ هجری قمری. آیا می‌دانید چگونه می‌توان این سال‌ها را به یکدیگر تبدیل کرد؟ از این راه:

سال شمسی = A - سال قمری → $A = \text{سال قمری} \times \frac{11}{365}$ (۱)
سال قمری = B - سال شمسی → $B = \text{سال شمسی} \times \frac{11}{354}$ (۲)
برای مثال شاه عباس صفوی در سال ۱۰۰۵ هجری قمری اصفهان را پایتخت خود قرار داد. این سال برابر چه سال شمسی می‌شود؟
طبق رابطه (۱):

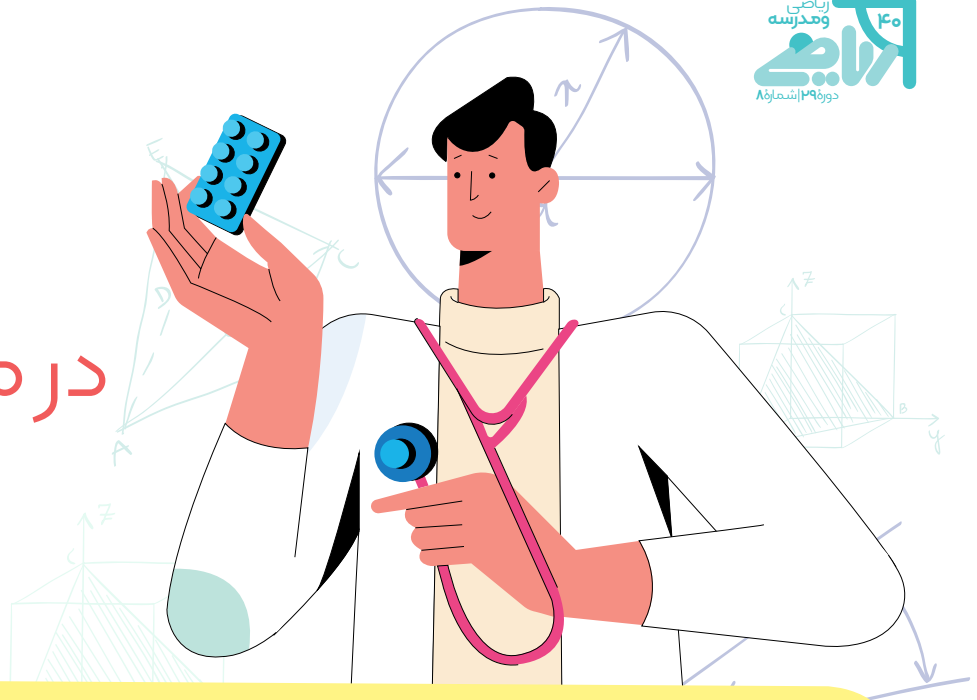
$$1005 \times \frac{11}{365} = 30/28 \rightarrow 1005 - 30/28 = 974/72$$

عدد ۹۷۴/۷۲ نشان می‌دهد که شاه عباس در سال ۹۷۵ هجری شمسی اصفهان را به پایتختی خود انتخاب کرده است. (چرا ۹۷۵؟)

به پایان آمد این دفتر حکایت همچنان باقی‌است.
آخرین بخش مجموعه «همه جا ریاضی» هم به پایان رسید.

خطاهای فراگیر در محاسبات ریاضی

افشین خاّصه خان



تجویز و درمان

برای درمان این مشکل شهودی لازم است فعالیت شهودی طراحی شود. برای مثال می‌توان از اشیای روزمره موجود برای نمایش ضلع و زاویه استفاده کرد. اشیایی همچون سطح یک میز یا کاغذ، قیچی و ... وسایلی هستند که دانش‌آموز به‌طور دائم با آن‌ها سروکار دارد و به راحتی می‌توان مفهوم‌های شهودی ضلع و زاویه را با این لوازم به دانش‌آموز تفهیم کرد.

ابتدا بهتر است مفهوم نقطه رأسی با استفاده از سطح یک میز به دانش‌آموز تفهیم شود. کافی است از او بخواهیم نقطه‌های گوشه یک میز یا نیمکت خود را مشخص سازد و فرق آن نقطه‌ها را با سایر نقطه‌ها بیان کند. سپس از لبه‌های میز می‌توان برای تفهیم ضلع استفاده کرد. سپس نوبت زاویه و نمایش آن است. سطح میز که بین دو لبه و نقطه گوشه محصور شده است، می‌تواند به‌طور کاملاً شهودی زاویه را نمایش دهد. علاوه بر آن، یکی از بهترین ابزارها برای نمایش زاویه و تغییرات آن قیچی است. با قیچی می‌توان زاویه‌هایی با اندازه‌های متفاوت نمایش داد.

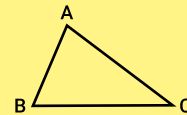
نسخه تکمیلی

بهتر است این دانش‌آموزان مفهوم‌های زاویه و ضلع را از کتاب‌های درسی ریاضی به دقت بخوانند، فعالیت‌ها را انجام دهند و با توجه به مثال‌ها، کاردرکلاس‌ها را جواب دهند. در پایان هم تمرین‌های آخر فصل را حل کنند. در صورت موفق‌نشدن در پاسخ‌گویی به بعضی از تمرین‌ها، دوباره به متن کتاب مراجعه کنند و بعد از بازخوانی متن کتاب، برای حل آن‌ها چالش‌های جدیدی انجام دهند.

عرض ادب و احترام خدمت علاقه‌مندان درمانگاه ریاضی. از اینکه در سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ با ما همراه بودید و ما را دنبال کردید، کمال تشکر و قدردانی را دارم. در آخرین شماره این سال تحصیلی هم به یک اشتباه متداول دیگر می‌پردازم. امیدوارم برای شما مفید واقع شده باشد.

اشتباه متداول ۸: نشناختن صحیح ضلع و زاویه در شکل‌های هندسی

از جمله اشتباه‌های متداول دانش‌آموزان، شناخت نادرست ضلع و زاویه در شکل‌های مثلث، مربع و ... است. کم نیستند دانش‌آموزانی که ضلع و زاویه را با هم اشتباه می‌گیرند یا رأس زاویه را خود زاویه می‌پندارند. برای مثال، زاویه را با دو حرف یا ضلع را با یک حرف و حتی در موارد نادری با سه حرف نشان می‌دهند:



ضلع AB زاویه C

تشخیص

به نظر می‌رسد علت اصلی چنین خطایی آن است که دانش‌آموزان مفهوم‌های ضلع و زاویه را بد فهمیده‌اند و در شناخت شهودی آن‌ها ضعف دارند. در واقع بسیاری از آن‌ها درک شهودی درستی از ضلع و همچنین سطح محصور بین دو ضلع ندارند و برای نمایش یک ضلع فقط روی نقطه‌های ابتدا یا انتهای آن تمرکز می‌کنند. یا برای نمایش یک زاویه در صفحه، رأس آن یا راستای یک ضلع آن زاویه را نشان می‌دهند. به‌ویژه زمانی که زاویه با سه حرف نشان داده می‌شود، این مشکل بیشتر بروز می‌کند.

علیرضا محمد صالحی

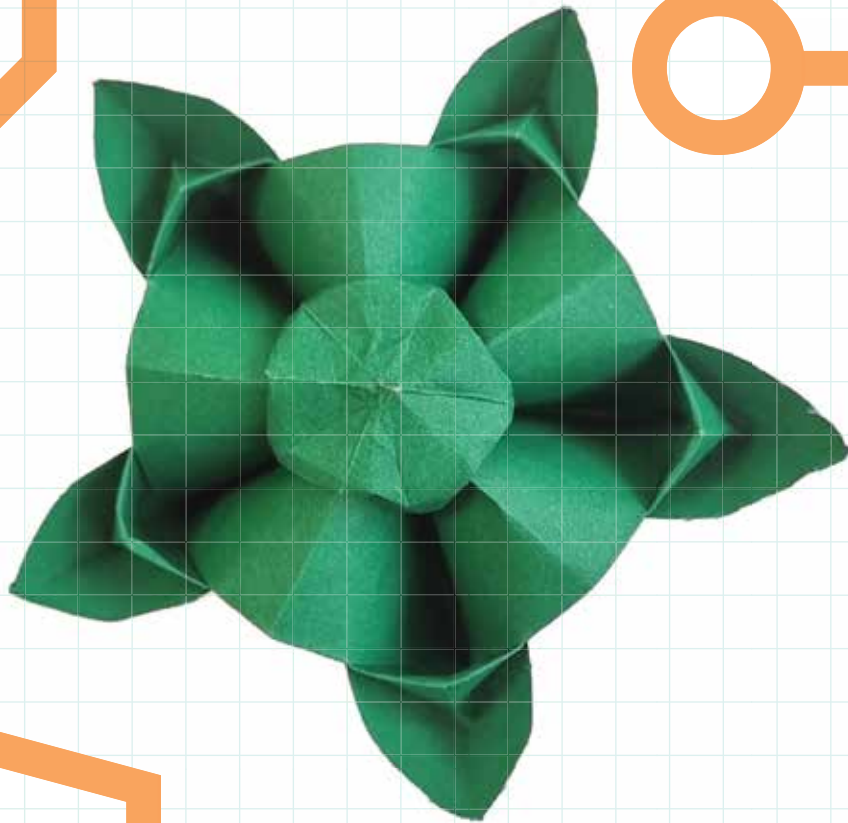
کاغذتایی



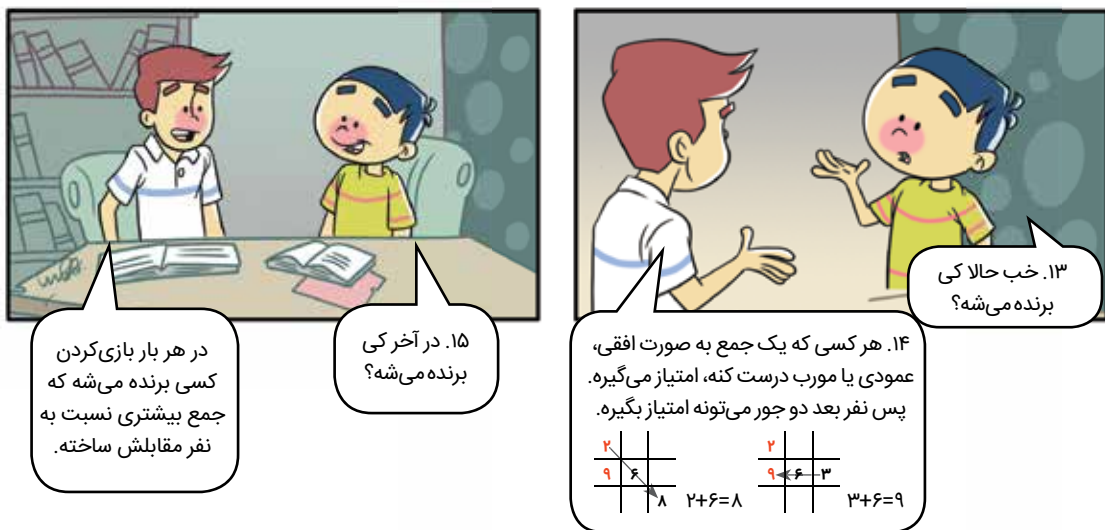
شکوفه پنچپر



برای مشاهده
مراحل ساخت،
رمزینه را پویش
کنید.



بازی «تیک تاک تو»



حالا در سه حالت زیر که نفر اول (عددهای قرمز) باید بازی را ادامه بده، اگر شما جای آن نفر باشید چگونه امتیاز می‌گیرید؟

۸		۹
	۱	۷

۴	۷	
۹		۶

۵		۳

