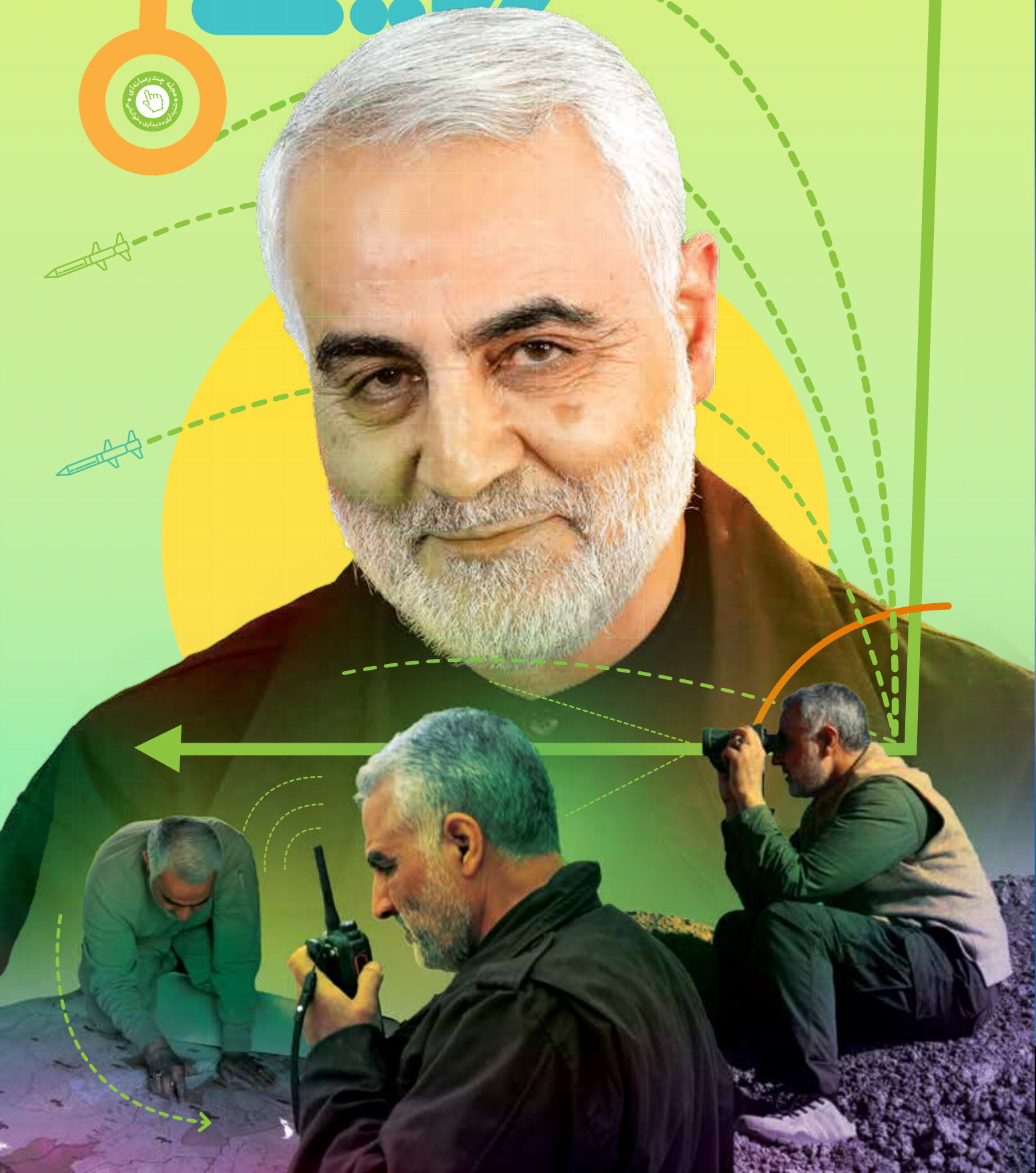
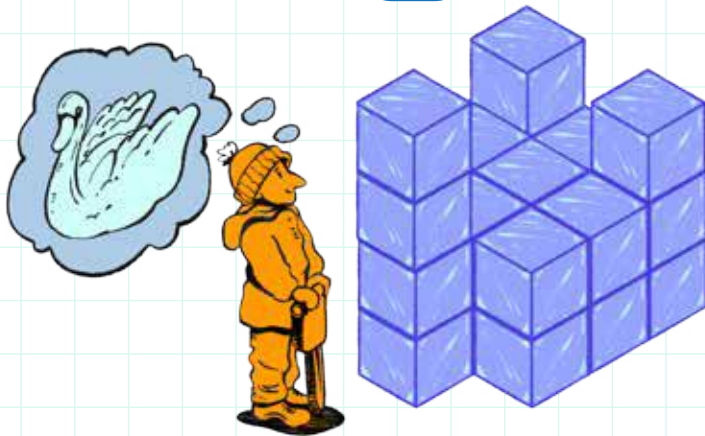
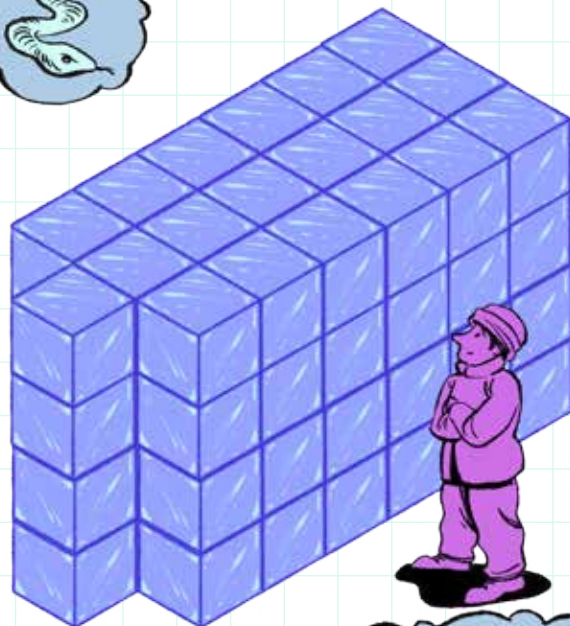
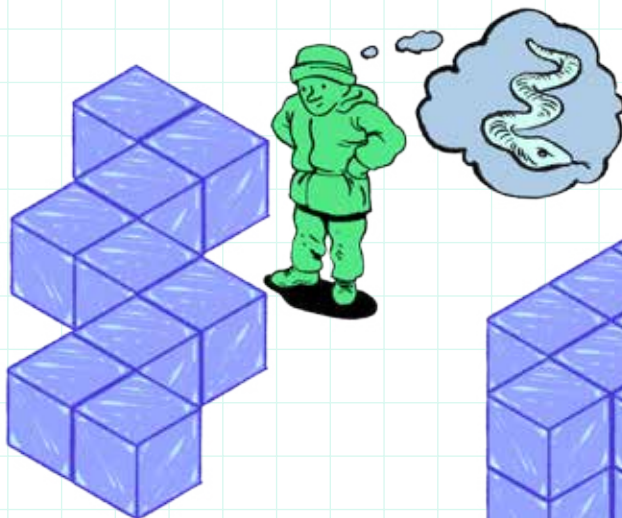




مکعب‌های یخی



در یک مسابقهٔ مجسمه‌سازی با مکعب‌های یخی، تعدادی مکعب برای هر فرد در نظر گرفته شده است. شرکت‌کنندگان در این مسابقه مجسمه‌ای را در ذهن خودشان در نظر می‌گیرند و می‌کوشند با بریدن قطعه‌های یخی مکعب‌شکل، حجم مورد نظرشان را بسازند. شما در این تصویرها که از صحنهٔ مسابقه تهیه شده است، تعداد مکعب‌های هر کدام را بشمارید و در کنار آن بنویسید.



برای مشاهدهٔ
پاسخ، رمزینه را
پویش کنید.



در این ماه؛ دی ۱۴۰۲: چهارم؛ میلاد حضرت مسیح (ع)؛ نهم؛ روز بصیرت و میثاق
امت با ولایت (س)؛ ولادت حضرت فاطمه (س)، روز زن و تولد
امام خمینی (ع) و شهادت سردار بزرگ اسلام شهید سپهبد حاج قاسم
سلیمانی (ع)؛ بیست و سوم؛ ولادت امام محمد باقر (ع)؛ بیست و پنجم؛
شهادت امام هادی (ع)؛ بیست و ششم؛ فرار شاه؛ بیست و نهم؛ روز غزه
شرح مناسبت های ماه را با پویش رهنه ببینید.



سخن سردبیر

کلید گنج دانش / حسین نامی ساعی / ۲

ریاضی و مدرسه

مفهوم های هندسی و حل مسئله / محمود نصیری / ۳

یک مسئله و چند راه حل؛ تناسب در مثلث های متشابه / محسن کیخانی / ۶

عددهای گویا در سه پرده / محرم ایرد موسی / ۲۲

خطاهای فراگیر در محاسبات ریاضی / افشین خاصه خان / ۳۱

در کلاس درس / محمد تقی طاهری تنجانی / ۳۴

ریاضی و استدلال

کاشی کاری هندسی / طرح های کاشی کاری هندسی چگونه تولید می شوند؟ / به انتخاب

آرش رستگار / ۹

گفت و گو

چراغ همیشه روشن تجربه / گفت و گو با محمود نصیری، نویسنده، پژوهشگر، معلم

ریاضی / محمد حسین دیزجی / ۱۲

دلیم برای چالش های شگفت انگیز می تپد / گفت و گو با امیر حسین اشتیری، طراح و

داور مسابقات ریاضی مدرسه از الیگودرز / مهدیه مسیبی / ۳۲

ریاضی و کاربرد

بیابید کمی فکر کنیم! اربعین حول کره زمین / خسرو داودی / ۱۴

از صفر تا ۱۰۰۰ کیلومتری سطح زمین / روح الله خلیلی بروجنی / ۱۶

ریاضی و نشانی (قسمت چهارم) / شراره تقی دستجردی، صبا قاسمی / ۱۸

ریسک و ریاضی / زما جواهری پور / ۲۵

گوشتمالی هیپاسوس / مریم جعفر آبادی / ۲۶

چگونه رسم می شود؟ / عباس قلعه پور اقدم / ۴۰

ریاضی و تاریخ

یاور استاد / بهزاد منوچهریان / ۲۰

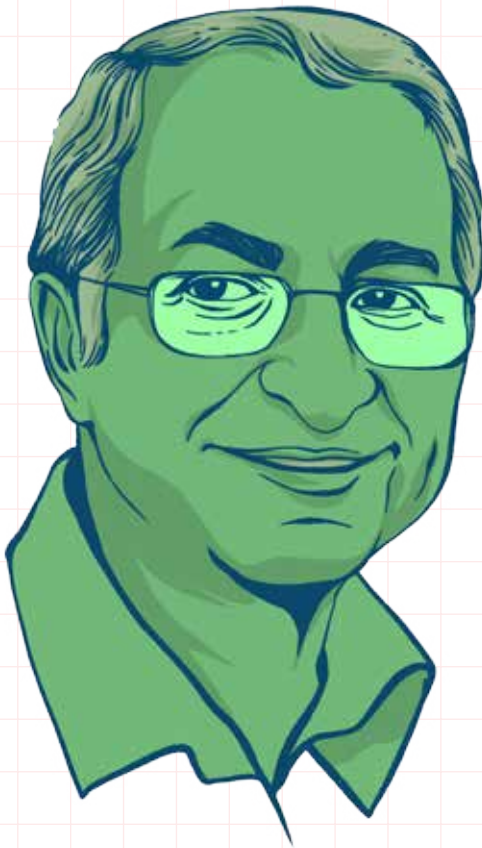
ریاضی و مسئله

چور دیگر باید دید / خسرو داودی، آرش رستگار / ۲۸

آرشی با کمان عشق و آگاهی / جعفر ربانی / ۳۸

ریاضی و برنامه نویسی

ذخیره و بازیابی اطلاعات در برنامه نویسی / آریان خلیلی / ۳۶



شانزدهم اردیبهشت سال ۱۳۲۳ در اصفهان پا به این دنیا نهاد
و در یک خانواده متوسط مذهبی بزرگ شد. پنج ساله بود که او را در
«دبستان جعفری» ثبت نام کردند...

صفحه های ۲۰ و ۲۱ را بخوانید.

قیمت: ۱۱۰۰۰ ریال

خانواده مجلات رشد همه تلاش خود را کرده است تا این مجله
در دسترس عموم دانش آموزان قرار گیرد و همه کودکان و
نوجوانان میهن عزیز اسلامی مان امکان تهیه آن را داشته باشند.
برای مشاهده شرایط ارسال مطلب و همکاری با ماهنامه
رشد ریاضی برهان متوسطه اول، رهنه را پویش کنید.



nazar.roshdmag.ir



نشانی کانال مجله رشد
ریاضی برهان متوسطه اول
در پیام رسان شاد:

@roshd_borhan1



کلید گنج دانش

چهارمین سالگرد شهادت افتخارآمیز سردار و سرباز سرافراز اسلام و میهن عزیزمان ایران، **حاج قاسم سلیمانی**، و یار وفادارش ابومهدی المهندس را گرامی می‌داریم. شهید سلیمانی با فداکاری و رشادت‌های خود در مبارزه برای دین و وطن، به‌زیبایی به ما درس مقاومت و ایستادگی در برابر ظلم و ستم آموخت و به برکت خون پاکش، حرکت در مسیر جهاد و مقاومت با انگیزه‌ای مضاعف و صد چندان همچنان جریان دارد. یاد و خاطره او همواره در دل ما زنده است.

زمانی که دانش‌آموز بودم، در طول تدریس معلم هر سؤالی که به ذهنم می‌رسید، یادداشت می‌کردم و در زمان مناسب از معلم می‌پرسیدم. زمان معلمی هم یادم هست و تجربه کرده‌ام، کلاس‌هایی که در آن‌ها پرسش و پاسخ بیشتری وجود داشت، تدریس بهتر بود، بازخورد با کیفیت‌تری داده می‌شد و سطح یادگیری دانش‌آموزان بسیار بالا و خارج از انتظار بود.

بچه‌ها! سؤال کردن نقش مهمی در یادگیری دارد. به‌علاوه، سؤال کردن بسیار مورد تأکید آموزش‌های دینی و متخصصان آموزشی است. تا آنجا که پیامبر اسلام، حضرت محمد مصطفی (ص) می‌فرمایند: «الْعِلْمُ خَزَائِنٌ وَمَفَاتِيحُهُ السُّؤَالُ فَاسْأَلُوا رَحِمَكُمُ اللَّهُ فَإِنَّهُ تُؤْجَرُ أَرْبَعَةُ السَّائِلِ وَالْمُتَكَلِّمِ وَالْمُسْتَمِعِ وَالْمُجِيبُ لَهُمْ». علم و دانش خزینه‌ها و گنجینه‌هایی هستند و کلید این گنجینه‌ها سؤال کردن است. بنابراین، در مورد مجهولاتان سؤال کنید؛ خداوند شما را رحمت کند. زیرا چهار گروه بر اثر پرسش و پاسخ اجر می‌برند: سؤال‌کننده؛ معلم و استادی که پاسخ می‌دهد؛ کسی که در آن جلسه حاضر است و پرسش و پاسخ را می‌شنود؛ و کسی که در جلسه حضور ندارد، اما این کار را دوست دارد [تحف‌العقول، جلد ۱، ص ۴۱].

در ریاضیات سؤال کردن یکی از روش‌های مهم یادگیری است. سؤال کردن کمک می‌کند مفهوما را بهتر درک کنیم، اشکال‌های خود را پیدا و رفع کنیم، و خلاقیت و قدرت تفکرمان را افزایش دهیم. همچنین به ما کمک می‌کند، با معلم و هم‌کلاسی‌هایمان هم‌فکری و هم‌آموزی داشته باشیم. از طرف دیگر، سؤال کردن به معلمان هم کمک می‌کند تا سطح دانش و نیازهایشان را بشناسند، و در نتیجه آن، تصمیم مناسب‌تری برای شما بگیرد؛ فعالیت‌های آموزشی جدیدی را برای شما طراحی و اجرا کند و میزان یادگیری را ارزشیابی کند. اما چگونه سؤال کردن مهم است. چگونه سؤال کنیم تا در یادگیری، به‌خصوص یادگیری درس ریاضی تأثیر خوبی داشته باشد؟ به نظر من سؤال باید:

- با کیفیت و مناسب باشد؛ • معلم و دانش‌آموزان را به فکر و تحلیل وادار کند؛
- نظرات و استدلال‌های گوناگونی به‌وجود آورد؛ • جواب‌های متعددی داشته باشد؛
- مبتنی بر اطلاعات و دانش قبلی سؤال‌کننده باشد؛ • به واقعیت نزدیک باشد؛
- مرتبط با موضوع تدریس، هدف‌دار و بامفهوم باشد.

توصیه من به شما این است که برای تقویت پرسیدن این کارها را انجام دهید:

- از خودتان هم سؤال کنید! • در گفت‌وگوهایتان، با دوستان، هم‌کلاسی‌ها و معلمان، سعی کنید با طرح جمله‌های پرسشی دائماً از آن‌ها بپرسید و گفت‌وگوهایتان را چالشی کنید. • سؤال‌هایتان را همیشه در زمان مناسب بپرسید و دقت کنید که چه سؤالی را و با چه اهمیتی مطرح می‌کنید. • سؤال‌هایی بپرسید که ایده جدید و گفت‌وگو و بحث را در پی داشته باشند. • سؤال‌هایتان پیش پا افتاده نباشند و بر نکات مهم و اساسی تأکید داشته باشید. • به‌خصوص در ریاضیات، از سؤال‌هایی که پاسخ آن‌ها به تحلیل، و منطق استقراء و استنتاج نیاز دارد استفاده کنید. • از سؤال‌های متنوع استفاده کنید، به طوری که با طرح سؤال‌هایتان کل موضوع تدریس پوشش داده شود. • قبل از سؤال کردن، به سؤال خود و پاسخ احتمالی آن بیشتر فکر کنید. اگر سؤالی است که خود سؤال و یا پاسخ آن بی‌اهمیت است، هرگز سؤال نکنید. • هرگز فراموش نکنید هر سؤال خوب مانند چراغی است که پاسخی تازه را آشکار و روشن می‌سازد.

حسین نامی‌ساعی



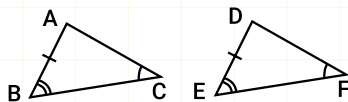
● محمود نصیری

مفهوم‌های هندسی و حل مسئله

آشنایی با هم‌نهشتی در مثلث‌ها

هرگاه بدانیم مجموع اندازه‌های زاویه‌های درونی یک مثلث 180° است، در این صورت می‌توانیم هم‌نهشتی زیر را ثابت کنیم.

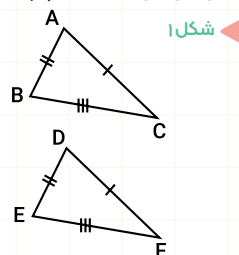
هم‌نهشتی «ز ز ض»: هرگاه دو زاویه و ضلع مقابل یکی از آن‌ها در مثلثی با اجزای نظیرش از مثلث دیگری نظیر به نظیر هم‌اندازه یا هم‌نهشت باشند، دو مثلث هم‌نهشت‌اند.



▲ شکل ۲

در دو مثلث ABC و DEF (شکل ۲) داریم: $AB=DE$ و $\angle B \cong \angle E$ ، $\angle C \cong \angle F$ در نتیجه دو مثلث هم‌نهشت‌اند. چرا؟

نتیجه‌های این سه حالت هستند. مثلاً در دو مثلث قائم‌الزاویه، اگر دو ضلع زاویه قائمه از یکی با دو ضلع زاویه قائمه از دیگری هم‌اندازه باشند، دو مثلث هم‌نهشت هستند. در واقع این همان حالت «ض ض ض» است. چرا؟ در دو مثلث متساوی‌الساقین، اگر ساق و قاعده از یکی با ساق و قاعده از دیگری نظیر به نظیر هم‌اندازه باشند، دو مثلث هم‌نهشت‌اند. حالت «ض ض ض» است. چرا؟



◀ شکل ۱

هم‌نهشتی «ض ض ض»: با هم‌نهشتی‌های «ض ض ض» و «ز ض ز» در بخش‌های قبلی آشنا شدیم. در این قسمت هم‌نهشتی سه‌ضلع، یعنی «ض ض ض» را بررسی می‌کنیم. **هم‌نهشتی «ض ض ض»:** هرگاه سه ضلع از مثلثی نظیر به نظیر با سه ضلع از مثلث دیگری هم‌اندازه یا هم‌نهشت باشند، آن‌گاه دو مثلث هم‌نهشت هستند.

در دو مثلث ABC و DEC (شکل ۱) داریم: $AB=DE$ و $AC=DF$ ، $BC=EF$. نتیجه: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. کلی‌ترین حالت‌های هم‌نهشتی دو مثلث سه حالتی است که آن‌ها را بررسی کردیم. دو حالت خاص دیگر و همچنین هم‌نهشتی مثلث‌های خاص همگی

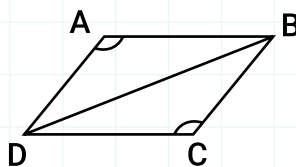
دو خط موازی AB و CD و خط AC را که آن‌ها را بریده است (خط قاطع) در نظر می‌گیریم. بنابر ویژگی خط‌های موازی داریم: $\angle A_1 \cong \angle C_1$. دو خط موازی دیگر و خطی را که آن‌ها را بریده است در نظر بگیرید: $\angle A_2 \cong \angle C_2$ و $AC=CA$. پس بنابر هم‌نهشتی «ض‌ض» داریم: $\triangle ABC \cong \triangle CDA$. این همان ویژگی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

در ریاضی وقتی بلافاصله از یک مسئله یا قضیه می‌توان مسئله یا ویژگی دیگری را به سادگی به دست آورد یا ثابت کرد، این مسئله یا ویژگی را نتیجه نیز می‌نامند. ما سعی می‌کنیم این نتیجه‌ها را که در حل مسئله‌های دیگر هندسه نیز مهم هستند، بیان کنیم و فکر می‌کنیم شما به سادگی می‌توانید آن‌ها را ثابت کنید.

نتیجه ۱. در هر متوازی‌الاضلاع هر دو ضلع مقابل هم‌اندازه یا هم‌نهشت‌اند. فکر نمی‌کنیم چیزی برای اثبات باقی مانده باشد. نتیجه مستقیم هم‌نهشتی دو مثلث در مسئله بالا چنین است: $AB=CD$ و $AD=BC$.

نتیجه ۲. در هر متوازی‌الاضلاع هر دو زاویه مقابل هم‌اندازه یا هم‌نهشت‌اند. در شکل ۵ داریم: $\angle B \cong \angle D$ این هم نتیجه مستقیم مسئله ۱ است. چرا؟ ممکن است بگویید هم‌نهشتی $\angle A$ و $\angle C$ که از هم‌نهشتی دو مثلث بالا نتیجه نمی‌شوند. بله درست است. در این صورت قطر دیگر متوازی‌الاضلاع را رسم می‌کنید (شکل ۶) و حالا همان مسئله ۱ است.

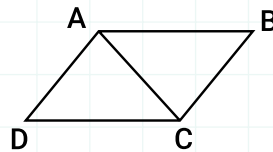
شکل ۶



در اثبات مسئله ۱ از ویژگی خط‌های موازی و قاطع استفاده کردیم. حال

پس اولین مسئله را مطرح می‌کنیم. سعی کنید آن را ثابت کنید.
مسئله ۱. با رسم یک قطر در هر متوازی‌الاضلاع دو مثلث هم‌نهشت پدید می‌آیند.

شکل ۴



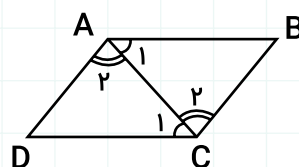
در متوازی‌الاضلاع ABCD، قطر AC را رسم کرده‌ایم (شکل ۴). می‌خواهیم ثابت کنیم: $\triangle ABC \cong \triangle CDA$. ابتدا حدس بزنید که از کدام سه هم‌نهشتی دو مثلث باید استفاده کنید. هم‌نهشتی سه ضلع یا دو ضلع و زاویه بین را آزمایش کنید. اما مشاهده می‌کنیم که به غیر از ضلع AC که در دو مثلث مشترک است، هم‌اندازه بودن هیچ کدام از دو ضلع متناظر دیگر را نداریم. پس این دو حالت هم‌نهشتی برای ما کارساز نیستند.

می‌توانید به گونه دیگری نیز فکر کنید. وقتی در مسئله‌های هندسه با خط‌های موازی روبه‌رو می‌شوید، به یاد ویژگی خط‌های موازی و قاطع، و هم‌اندازه بودن زاویه‌های متبادل و متخارج ایجادشده بیفتید. در مقاله‌های قبلی این ویژگی را توضیح دادیم و مسئله‌هایی در ارتباط با آن حل کردیم.

با توجه به مقدمه‌های بالا، حتماً حدس زده‌اید که در این مسئله باید از هم‌نهشتی «ض‌ض» استفاده کنیم. پس سعی کنید زاویه‌های هم‌اندازه را مشخص کنید.

به احتمال زیاد توانسته‌اید آن‌ها را مشخص کنید (شکل ۵).

شکل ۵



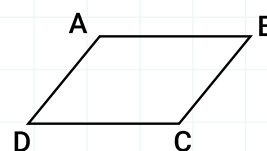
آن را به کدام یک از سه حالت هم‌نهشتی دو مثلث تبدیل می‌کنید؟ واضح است که اگر دو ضلع هم‌نهشت، ضلع‌های بین دوزاویه باشند که دو مثلث هم‌نهشت‌اند، همان هم‌نهشتی «ض‌ض» است. اما در اینجا دو ضلع هم‌اندازه در دو مثلث دو ضلع مقابل به دو زاویه هم‌اندازه هستند. اکنون که با حالت‌های هم‌نهشتی مثلث‌ها آشنا شدیم، چند مسئله در این زمینه حل می‌کنیم. ابتدا مسئله‌هایی را حل می‌کنیم که در آن‌ها بعضی از ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع ثابت می‌شوند. چون مستطیل، لوزی و مربع هر کدام متوازی‌الاضلاع نیز هستند، پس این ویژگی‌ها در این چهارضلعی‌ها نیز برقرار هستند. ابتدا متوازی‌الاضلاع را تعریف می‌کنیم. سپس با استفاده از این تعریف و مفهوم‌های دیگری از هندسه که تاکنون یاد گرفته‌ایم، این مسئله‌ها را حل می‌کنیم.

تعریف: متوازی‌الاضلاع یک چهارضلعی است که هر دو ضلع مقابل آن دو به دو موازی باشند.

قبلاً دو پاره‌خط موازی را تعریف کرده‌ایم. دو پاره‌خط را که روی خط‌های موازی باشند، موازی گوییم. یعنی دو پاره‌خط موازی‌اند، هرگاه خط‌های شامل آن دو موازی باشند.

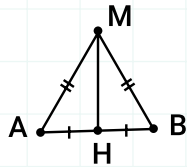
در شکل ۳ پاره‌خط‌های AB و CD روی دو خط موازی AB و CD واقع‌اند و به همین ترتیب پاره‌خط‌های AD و BC روی دو خط موازی AD و BC واقع‌اند. بیشتر ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع به کمک ویژگی مسئله ۱ ثابت می‌شوند. اگر این ویژگی را ثابت کنیم، خیلی از ویژگی‌های دیگر از آن نتیجه می‌شوند.

شکل ۳



ابتدا ثابت کنید در شکل ۱۰ داریم:
 $\triangle AMH \cong \triangle BMH$. آیا می‌توانید از حالت «ض ض ض» استفاده کنید؟ چرا؟

شکل ۱۰



اکنون از هم‌نهشتی این دو مثلث، هم‌نهشتی اجزای نظیر را در نظر بگیرید:
 $m\angle AHM = m\angle BHM$ از طرف دیگر:
 $m\angle AHM + m\angle BHM = 180^\circ$

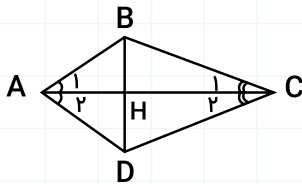
در نتیجه: $m\angle AHM = m\angle BHM = 90^\circ$.
یعنی دو خط MH و AB بر هم عمودند و چون H وسط پاره خط AB است، پس خط MH عمودمنصف پاره خط AB و اثبات کامل است.

روشی را که در بالا به کار بردیم، روشی است که برای اثبات عمودبودن دو خط بر هم از آن استفاده می‌کنیم. اکنون مسئله زیر را حل کنید.

مسئله ۳. در شکل ۱۱ داریم:

$\angle C_1 \cong \angle C_2$ و $\angle A_1 \cong \angle A_2$
یعنی زاویه‌های A_1 و A_2 ، و زاویه‌های C_1 و C_2 هم‌اندازه‌اند. ثابت کنید خط AC عمودمنصف پاره خط BD است.

شکل ۱۱



چون:

$\angle C_1 \cong \angle C_2$ و $\angle A_1 \cong \angle A_2$ ، $AC=CA$ بنابر هم‌نهشتی «ز ز ز» داریم:
 $\triangle ABC \cong \triangle ADC$. در نتیجه: $AB=AD$ و $CD=CB$.
اکنون بنابر ویژگی عمودمنصف، هر دو نقطه C و A روی عمودمنصف پاره خط BD واقع‌اند. چون از دو نقطه فقط یک خط می‌گذرد، پس خط AC عمودمنصف BD است. البته می‌توانید ثابت کنید: $\triangle BMC \cong \triangle DMC$ و مانند مسئله بالا اثبات را انجام دهید.

نیمساز، یک انتها یا یک سر آن‌ها، همواره یک رأس مثلث است. اما عمودمنصف در حالت کلی از رأس نمی‌گذرد، مگر آنکه مثلث در آن رأس متساوی الساقین باشد. پس ابتدا به ویژگی عمودمنصف می‌پردازیم، زیرا عمودمنصف منحصر به مثلث نیست و برای هر پاره خط تعریف می‌شود.

تعریف: عمودمنصف هر پاره خط، خطی در صفحه آن است که در وسط آن پاره خط بر آن عمود باشد.

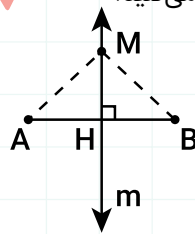
ویژگی‌های عمودمنصف:

۱. هر نقطه روی عمودمنصف پاره خط از دو سر پاره خط به یک فاصله است.
۲. هر نقطه که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله باشد روی عمودمنصف آن پاره خط قرار دارد.

• در شکل ۹ خط m در نقطه H وسط پاره خط AB بر آن عمود شده است. از نقطه M روی m به نقطه‌های A و B، دو سر پاره خط، رسم می‌کنیم. چگونه ثابت می‌کنید $MA=MB$ ؟ چرا $\triangle MAH \cong \triangle MBH$ ؟

از کدام حالت هم‌نهشتی دو مثلث استفاده می‌کنید؟

شکل ۹



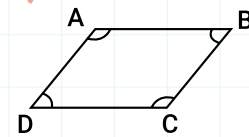
• فرض کنید M نقطه‌ای در صفحه پاره خط AB باشد و: $MA=MB$. از M به نقطه H وسط پاره خط AB وصل می‌کنیم. باید ثابت کنیم خط MH بر خط AB عمود است.
فکر می‌کنید چگونه باید ثابت کنیم خطی بر خط دیگری در یک نقطه عمود است؟ تعریف دو خط عمود بر هم را به یاد آورید.
بله، باید ثابت کنیم یکی از زاویه‌های بین دو خط برابر 90° است. چگونه آن را ثابت کنیم؟

که این ویژگی را مرور کردیم، به کمک آن یک ویژگی دیگر متوازی‌الاضلاع را ثابت می‌کنیم. به مسئله ۲ توجه کنید. ابتدا یک تعریف را بیان می‌کنیم:

تعریف: در هر متوازی‌الاضلاع دو زاویه را که یک ضلع مشترک دارند، دو زاویه همسایه یا مجاور می‌نامیم. البته این در هر چندضلعی محدب نیز تعریف می‌شود.

در شکل ۷، $\angle A$ و $\angle B$ ، $\angle B$ و $\angle C$ ، $\angle C$ و $\angle D$ و بالاخره $\angle D$ و $\angle A$ مجاور یا همسایه‌اند.

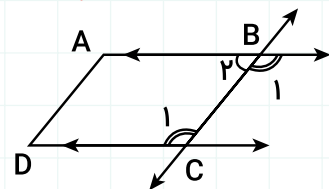
شکل ۷



مسئله ۲. ثابت کنید در هر متوازی‌الاضلاع هر دو زاویه مجاور مکمل هستند.

در واقع این ویژگی نتیجه مستقیم تعریف خود متوازی‌الاضلاع است و حتی نیازی به استفاده از هم‌نهشتی مثلث‌ها نیست. در شکل ۸ داریم: $m\angle B_1 \cong m\angle C_1$ چرا؟ از چه ویژگی استفاده می‌کنید؟

شکل ۸



چون: $m\angle B_1 + m\angle B_2 = 180^\circ$ ، در نتیجه: $m\angle C_1 + m\angle B_2 = 180^\circ$.

اکنون بنابر تعریف دو زاویه مکمل، این دو زاویه مکمل هستند.

در بخش قبلی، میانه، ارتفاع، نیمساز و عمودمنصف را در مثلث تعریف کردیم. اکنون در این قسمت و قسمت بعدی به بررسی ویژگی‌هایی از میانه، ارتفاع و نیمساز در مثلث که پاره خط هستند و عمودمنصف که خط است می‌پردازیم.

ماهیت عمودمنصف با سه تای دیگر متفاوت است. در میانه، ارتفاع و

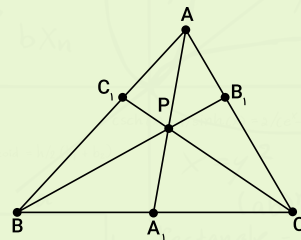
یک مسئله و چند راه حل

تناسب در مثلث های متشابه

● محسن کیخانی

مسئله: در مثلث ABC ، نقاط A_1 ، B_1 و C_1 به ترتیب روی ضلع های BC ، AC و AB واقع شده اند؛ به طوری که پاره خط های AA_1 ، BB_1 و CC_1 در نقطه P متقاطع اند (شکل ۱).

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1 \quad \text{ثابت کنید:}$$



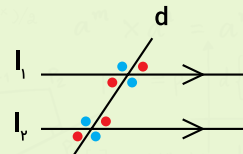
▶ شکل ۱

در ادامه خواهید دید همه روش های اثباتی که برای مسئله فوق در نظر گرفته ایم، بر تناسب ضلع ها در مثلث های متشابه تکیه دارند. بنابراین ابتدا نکته های زیر را یادآوری می کنیم:

- هرگاه خطی غیر عمود، دو خط موازی را قطع کند، هشت زاویه به وجود می آید که چهار زاویه تند با هم و چهار زاویه باز با هم مساوی هستند (شکل ۲). واضح است که اگر خط d بر یکی از دو خط موازی عمود باشد، بر دیگری نیز عمود است و هشت زاویه قائمه تشکیل می شود.

$l_1 \parallel l_2$ و d مورب

▶ شکل ۲



- دو مثلث ABC و $A'B'C'$ (که ضلع های AB ، BC و CA به ترتیب متناظر با ضلع های $A'B'$ ، $B'C'$ و $C'A'$ هستند) را متشابه گوئیم و به صورت $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ نمایش می دهیم، اگر داشته باشیم:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

و برعکس، اگر: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ ، نتیجه می شود:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

همچنین اگر: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ ، داریم:

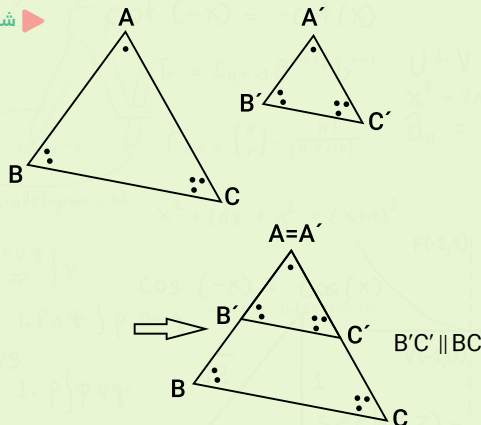
$$\angle C = \angle C', \angle B = \angle B', \angle A = \angle A'$$

و برعکس، اگر در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ داشته

باشیم: $\angle A = \angle A'$ و $\angle B = \angle B'$ می توان نتیجه گرفت: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ که این حالت تشابه را با «ز-ز» نمایش می دهیم.

تذکر: در اینجا (شکل ۳) با توجه به اینکه مجموع اندازه های زاویه های داخلی هر مثلث 180° درجه است: $\angle C = \angle C'$.

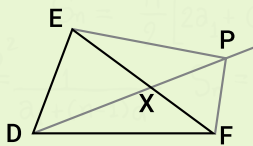
▶ شکل ۳



$$\frac{S_{DPE}}{S_{DPF}} = \frac{EX}{FX} \quad \text{مثال ۱. در شکل ۴ ثابت کنید:}$$

منظور از S_{DPE} و S_{DPF} به ترتیب مساحت مثلث های DPE و DPF است.

▶ شکل ۴



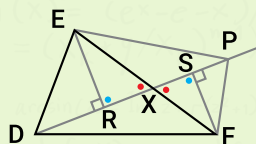
اثبات: با توجه به شکل ۵ این روابط را داریم:

$$\frac{S_{DPE}}{S_{DPF}} = \frac{\frac{1}{2} DP \cdot ER}{\frac{1}{2} DP \cdot FS} = \frac{ER}{FS} \quad (۱)$$

$$\Delta ERX \sim \Delta FSX \Rightarrow \frac{ER}{FS} = \frac{EX}{FX} \quad (۲) \quad \text{(ز-ز)}$$

$$\rightarrow \frac{S_{DPE}}{S_{DPF}} = \frac{EX}{FX}$$

▶ شکل ۵



اثبات مسئله:

روش اول: واضح است که: $\frac{S_{APB}}{S_{APC}} \cdot \frac{S_{BPC}}{S_{BPA}} \cdot \frac{S_{APC}}{S_{BPC}} = 1$

در ادامه می بینید که انتخاب این مثلث ها و جای گذاری مساحت آن ها در این نسبت ها اتفاقی نبوده است! نخست نسبت مساحت مثلث APB به مساحت مثلث APC را به دست می آوریم. در شکل ۶، با در نظر گرفتن AP به عنوان قاعده، ارتفاع دو مثلث بر امتداد آن رسم شده

می‌شود: $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AZ}{BC}$ ، بنابراین:

$$(۱) \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{BC}{AY} \cdot \frac{AZ}{BC} = \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{AZ}{AY}$$

در ادامه از تشابه دو مثلث APB و APY نتیجه می‌گیریم:

$$(۲) \frac{BA_1}{AY} = \frac{BP}{PY} = \frac{A_1P}{PA}$$

و از تشابه دو مثلث APZ و A_1PC هم نتیجه می‌شود:

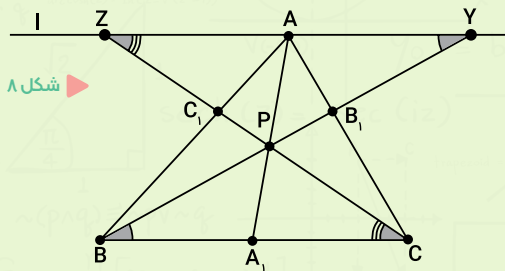
$$(۳) \frac{CP}{PZ} = \frac{A_1C}{AZ} = \frac{A_1P}{PA}$$

رابطه‌های (۲) و (۳) ما را به نتیجه زیر می‌رساند:

$$\frac{BA_1}{AY} = \frac{A_1C}{AZ} \Rightarrow \frac{BA_1}{AY} = \frac{AY}{A_1C} = \frac{AZ}{A_1C}$$

و با توجه به رابطه (۱) نتیجه مورد نظر به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{AZ}{AY} = \frac{AY}{AZ} \cdot \frac{AZ}{AY} = 1$$



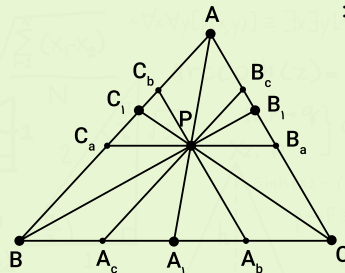
شکل ۸

روش سوم: در شکل ۹ پاره‌خط‌های A_1B_1 ، A_1C_1 و A_1B_1 (هر سه گذرنده از نقطه P) به گونه‌ای رسم شده‌اند که:

$A_1B_1 \parallel AC$ و $A_1C_1 \parallel BC$ و $A_1B_1 \parallel AB$.

در نتیجه:

شکل ۹



$$(۱) \left. \begin{aligned} \triangle APB_1 \sim \triangle AA_1C &\Rightarrow \frac{PB_1}{A_1C} = \frac{AP}{AA_1} \\ \triangle APC_1 \sim \triangle AA_1B &\Rightarrow \frac{C_1P}{BA_1} = \frac{AP}{AA_1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{PB_1}{A_1C} = \frac{C_1P}{BA_1} \Rightarrow \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{C_1P}{PB_1}$$

$$(۲) \left. \begin{aligned} \triangle C_1CP \sim \triangle C_1BC &\Rightarrow \frac{C_1P}{BC} = \frac{PC_1}{CC_1} \\ \triangle B_1BP \sim \triangle B_1BC &\Rightarrow \frac{PB_1}{BC} = \frac{PB_1}{BB_1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{C_1P}{BC} = \frac{PC_1}{CC_1} = \frac{PB_1}{BB_1}$$

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{PC_1}{CC_1} + \frac{PB_1}{BB_1}$$

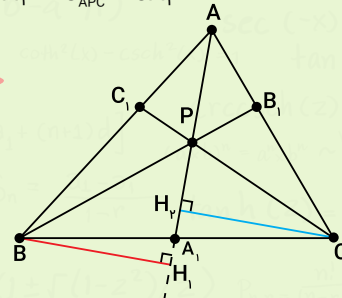
$$(۳) \left. \begin{aligned} \triangle ACC_1 \sim \triangle B_1CP &\Rightarrow \frac{AC_1}{B_1P} = \frac{CC_1}{CP} \\ \triangle BCC_1 \sim \triangle A_1CP &\Rightarrow \frac{C_1B}{PA_1} = \frac{CC_1}{CP} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{AC_1}{B_1P} = \frac{C_1B}{PA_1} \Rightarrow \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{B_1P}{PA_1}$$

است. بنابراین: $\frac{S_{APB}}{S_{APC}} = \frac{\frac{1}{2}AP \cdot BH_1}{\frac{1}{2}AP \cdot CH_2} = \frac{BH_1}{CH_2}$ و با توجه به

اینکه $\triangle BH_1A_1 \sim \triangle CH_2A_1$ (ز-ز)، پس:

$$\frac{BH_1}{CH_2} = \frac{BA_1}{CA_1} \Rightarrow \frac{S_{APB}}{S_{APC}} = \frac{BA_1}{CA_1}$$

شکل ۶

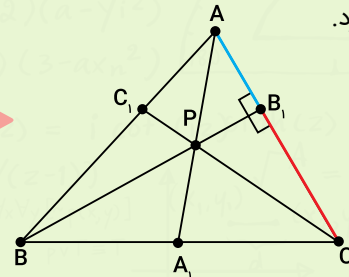


برای به دست آوردن نسبت $\frac{S_{BPC}}{S_{BPA}}$ با در نظر گرفتن شکل

$$Y \text{ (BP قاعده مشترک دو مثلث) داریم: } \frac{S_{BPC}}{S_{BPA}} = \frac{CB_1}{B_1A}$$

توجه دارید که در اینجا CB_1 و B_1A بر امتداد BP عمودند. پس آن‌ها را به ترتیب ارتفاع مثلث‌های BPC و BPA در نظر گرفتیم و نسبت مورد نظر به طور مستقیم و در یک مرحله به دست آمد. این موضوع کاملاً اتفاقی است و اگر مثلثی متفاوت در نظر بگیریم، ارتفاع‌ها CB_1 و B_1A را منطبق نمی‌شوند و مانند قسمت قبل باید این نسبت را به دست آورد.

شکل ۷



تمرین ۱. ثابت کنید: $\frac{S_{APC}}{S_{BPC}} = \frac{AC_1}{C_1B}$

بنابراین:

$$(۲) \left\{ \begin{aligned} \frac{S_{APB}}{S_{APC}} &= \frac{BA_1}{CA_1} \\ \frac{S_{BPC}}{S_{BPA}} &= \frac{CB_1}{B_1A} \\ \frac{S_{APC}}{S_{BPC}} &= \frac{AC_1}{C_1B} \end{aligned} \right. \xrightarrow{(۱),(۲)} \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1$$

روش دوم: در شکل ۸ خط l گذرنده از رأس A را موازی پاره‌خط BC رسم کرده‌ایم. امتداد پاره‌خط‌های BB_1 و CC_1 این خط را به ترتیب در نقطه‌های Y و Z قطع کرده‌اند. زاویه‌های که اندازه برابر دارند با علامت یکسان مشخص شده‌اند.

اکنون با توجه به اینکه دو مثلث AYB_1 و CBB_1 متشابه‌اند: $\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{BC}{AY}$ و از تشابه دو مثلث AZC_1 و BCC_1 نتیجه

نقطه‌ای مانند P متقاطع‌اند.

عکس مسئله نیز بسیار کاربردی است. با استفاده از آن می‌توان نتایج مهم و ارزشمندی را ثابت کرد. (هرچند در این مطلب از اثبات آن صرف‌نظر کردیم!)

تمرین ۴. به کمک عکس مسئله، ثابت کنید میانه‌های هر مثلث در نقطه‌ای مانند P متقاطع‌اند.

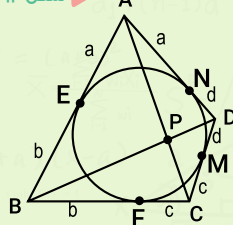
(میانه در مثلث پاره‌خطی است که رأس را به وسط ضلع مقابل وصل می‌کند.)

مسئله‌ای را که در آغاز دیدید (به همراه عکس آن)، ریاضی‌دانی ایتالیایی به نام **جیووانی سوا**^۱ در سال ۱۶۷۸ میلادی در کتابش^۲ مطرح کرده است. به همین دلیل به «قضیه سوا» معروف شده است. این قضیه در بیشتر کتاب‌های هندسه مقدماتی آنچنان که باید، مورد توجه قرار نگرفته است، با این حال از اهمیت فراوانی برخوردار است و به‌تنهایی می‌تواند زمینه تحقیقات گسترده‌ای را فراهم آورد.

تمرین ۵. در شکل ۱۲، ABCD یک چهارضلعی است که دایره‌ای درون آن و مماس بر ضلع‌هایش رسم شده است. (همان‌طور که می‌دانید اگر از نقطه‌ای خارج دایره دو مماس بر آن رسم کنیم، طول این مماس‌ها برابر است؛ برای مثال: AE=AN و CF=CM).

ثابت کنید: $\frac{AP}{PC} = \frac{a}{c}$

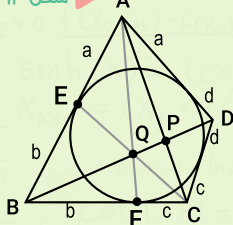
شکل ۱۲



راهنمایی: طبق قضیه‌ای^۳

پاره‌خط‌های AF و BD، CE و BD، مانند شکل ۱۳ در نقطه Q متقاطع‌اند. اکنون قضیه سوا را برای مثلث ABC به کار ببرید.

شکل ۱۳



پی‌نوشت‌ها

1. Giovanni Ceva 1648-1734
2. De lineis rectis
3. Brianchon's theorem

منابع

1. T. Andreescu, S. Korsky, C. Pohoata, Lemmas in olympiad geometry, XYZ Press. 2016.
2. David B. Surowski, Advanced High-School Mathematics, Kansas State University, 2011.
3. www.cut-the-knot.org/Generalization/ceva.shtml

$$\begin{aligned} \Delta ABB_1 \sim \Delta B_cPB_1 &\Rightarrow \frac{B_cP}{AB} = \frac{PB_1}{BB_1} \\ \Delta ABA_1 \sim \Delta PA_cA_1 &\Rightarrow \frac{PA_c}{AB} = \frac{PA_1}{AA_1} \end{aligned} \Rightarrow \frac{B_cP}{PA_c} = \frac{PB_1}{BB_1} \cdot \frac{AA_1}{PA_1}$$

و از (۳) و (۴) نتیجه می‌شود: $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{PB_1}{BB_1} \cdot \frac{AA_1}{PA_1}$

تمرین ۲. نشان دهید: $\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{PA_1}{AA_1} \cdot \frac{PC_1}{CC_1}$

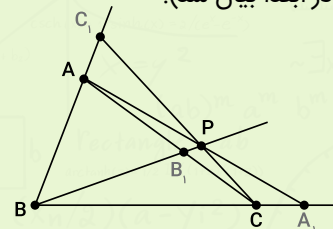
بنابر روابط بالا نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = \left(\frac{PC_1}{CC_1} \cdot \frac{PB_1}{BB_1}\right) \left(\frac{PA_1}{AA_1} \cdot \frac{PC_1}{CC_1}\right) \left(\frac{PB_1}{BB_1} \cdot \frac{PA_1}{AA_1}\right) = 1$$

تمرین ۳. با توجه به شکل ۱۰، ثابت کنید: $\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1$

(در اینجا نقاط A_1 و C_1 به ترتیب بر امتداد اضلاع BC و AB در نظر گرفته شده‌اند، و این حالت دیگری از مسئله‌ای است که در ابتدا بیان شد).

شکل ۱۰



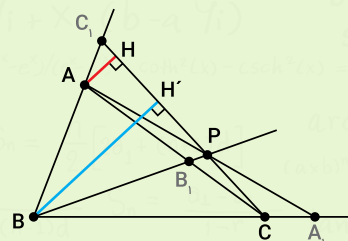
راهنمایی: به عنوان یک روش پیشنهادی، رابطه مقابل را

$$\frac{S_{APB}}{S_{APC}} \cdot \frac{S_{BPC}}{S_{BPA}} \cdot \frac{S_{APC}}{S_{BPC}} = 1$$

مثلاً برای به‌دست آوردن $\frac{S_{APC}}{S_{BPC}}$ ، در شکل ۱۱ PC را به عنوان قاعده در نظر می‌گیریم و AH و BH' را که به ترتیب ارتفاع مثلث‌های APC و BPC هستند بر امتداد آن عمود می‌کنیم. در نتیجه:

$$\begin{aligned} \frac{S_{APC}}{S_{BPC}} &= \frac{\frac{1}{2} PC \cdot AH}{\frac{1}{2} PC \cdot BH'} = \frac{AH}{BH'} \\ \Delta AHC_1 \sim \Delta BH'C_1 &\Rightarrow \frac{AC_1}{BC_1} = \frac{AH}{BH'} \end{aligned} \Rightarrow \frac{S_{APC}}{S_{BPC}} = \frac{AC_1}{BC_1}$$

شکل ۱۱



تذکر مهم: عکس مسئله‌ای که ابتدا بیان کردیم هم برقرار است. یعنی اگر در مثلث ABC، نقطه‌های A_1 ، B_1 و C_1 به ترتیب روی ضلع‌های BC، AC و AB قرار داشته باشند و:

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1$$

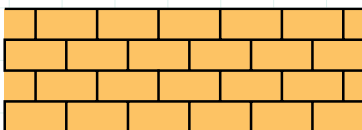


طرح‌های کاشی‌کاری هندسی چگونه تولید می‌شوند؟

کاشی‌کاری هندسی

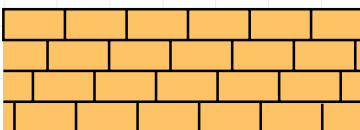
• به انتخاب آرش رستگار

شکل ۲ ▶



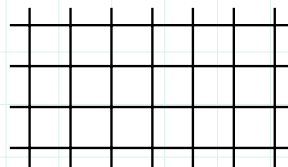
البته هر یک از ردیف‌ها را می‌شد به ترتیب دلخواه با کمی
انتقال، آجرچینی کرد (شکل ۳).

شکل ۳ ▶



مسیح و هاتف متوجه شباهت کاشی‌کاری آشپزخانه و
آجرهای دیوار خانه‌شان شدند.
مسیح: اگر کاشی‌های آشپزخانه مستطیل بودند، بسیار
شبیه آجرهای دیوار حیاط می‌شدند (شکل ۱).

◀ شکل ۱



هاتف: البته ردیف‌های آجر دیوار حیاط کمی با کاشی‌های
آشپزخانه تفاوت دارند. هر آجر روی دو آجر ردیف پایین
قرار می‌گیرد (شکل ۲).

پیش از مطالعه ادامه بحث، مسئله‌های زیر را بررسی کنید و سپس در مورد آن‌ها به صورت همگانی بحث کنید.

مسئله ۱. مجموع زاویه‌های داخلی یک ضلعی منتظم برابر $180^\circ \times (n-2)$ است.

مسئله ۲. اگر چند ضلعی منتظم را کنار هم بچینیم، طوری که در یک گوشه، مجموع زاویه‌های این ضلعی‌ها برابر 360° بشود (مانند شکل ۸)، آنگاه این ضلعی فقط مثلث، مربع یا شش ضلعی خواهد بود.

راهبردهای رسم شکل، تنظیم جدول نظام‌دار و الگویابی را به کار بگیرید.

مسیح: اگر دقت کنی می‌بینی که در هر گوشه، شش مثلث، چهار مربع یا سه شش ضلعی می‌توان قرار داد. پس اگر بخواهیم با یک کاشی منتظم کاشی‌کاری درست کنیم، باید روش دیگری هم باشد.

هاتف: درست است، یاد کن دوی زنبور عسل افتادم. می‌توان از روی آن، یک کاشی‌کاری با شش ضلعی‌ها درست کرد، ولی دیگر مثل مثال‌های قبلی به شکل ردیفی نیست (شکل ۹).

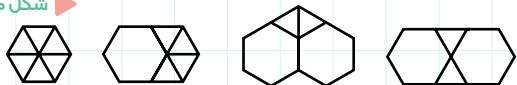
شکل ۹ ▶



مسیح: پس نتیجه می‌گیریم اگر برای کاشی‌کاری بخواهیم از یک نوع کاشی که به شکل چندضلعی منتظم باشد استفاده کنیم، به طوری که ضلع‌های کاشی‌ها درست مقابل هم قرار بگیرند، فقط سه نوع کاشی‌کاری وجود دارد. فردای آن روز هاتف که دانش‌آموزی بسیار کنجکاو بود، با چند شکل جالب پیش مسیح آمد.

هاتف: سلام مسیح، ببین چه مثال‌های جالبی درست کرده‌ام (شکل ۱۰). اگر بخواهیم یک گوشه را با مثلث‌ها و شش ضلعی‌ها پر کنیم، چه روش‌های جالبی پیدا می‌شوند!

شکل ۱۰ ▶



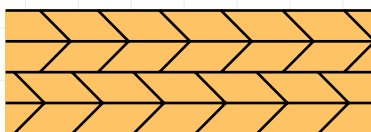
مسئله ۳. به غیر از مثال‌های شکل ۳، چهار مثال دیگر از یک گوشه پیدا کنید که با مربع‌ها، مثلث‌ها یا شش ضلعی‌ها پر شده باشد.

مسیح با نگاه تحسین‌آمیزی به جدول نگاه کرد و گفت: «سلام، جالب است که ترتیب قرارگرفتن کاشی‌ها را در کنار هم نیز در نظر گرفته‌ای.»

هاتف لبخندی زد و گفت: «بله! داشتم به این فکر می‌کردم که کدام یک از این الگوها را می‌توان به یک کاشی‌کاری تبدیل کرد.»

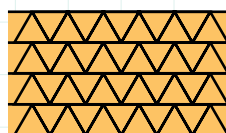
مسیح: راست می‌گویی. در واقع این ردیف‌ها هستند که به روش‌های متفاوتی به آجرهای مستطیلی یا مربع‌شکل تقسیم شده‌اند. مثلاً می‌شد با استفاده از کاشی‌های متوازی‌الاضلاع، هر ردیف را با آجرهایی به شکل متوازی‌الاضلاع پُر کرد (شکل ۴).

شکل ۴ ▶



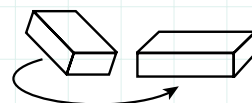
هاتف: اگر به جای هر متوازی‌الاضلاع دو مثلث متساوی‌الاضلاع بگذاری، دیگر مجبور نمی‌شوی از دو نوع کاشی استفاده کنی و هر ردیف را با مثلث‌ها پر می‌کنی؛ مانند شکل ۵.

شکل ۵ ▶



مسیح: اشتباه می‌کنی، شکل من فقط از یک نوع آجر درست شده است. با دقت نگاه کن! با یک دوران، بسیاری از آن‌ها مانند آجر دیگری به نظر می‌رسند (شکل ۶).

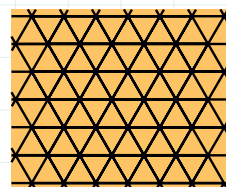
شکل ۶ ▶



مسیح با دقت به آجرچینی مثلثی نگاه کرد و متوجه نکته جالبی شد.

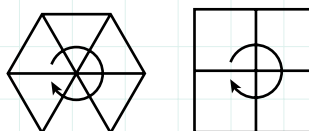
مسیح: هاتف، اگر این ردیف‌ها را درست کنار هم بچینید، طوری که ضلع‌های مثلث‌ها درست روبه‌روی هم قرار بگیرند، شش ضلعی‌های جالبی دیده می‌شوند (شکل ۷).

شکل ۷ ▶



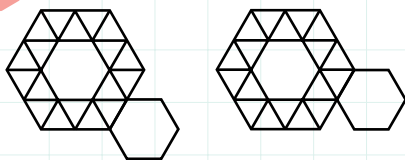
هاتف: چقدر قشنگ! این به دلیل آن است که اگر شش مثلث متساوی‌الاضلاع را در یک گوشه در کنار هم قرار دهیم، یک شش ضلعی منتظم درست می‌شود. شبیه همین را در کاشی آشپزخانه هم داریم. در آنجا چهار مربع کنار هم هستند و یک مربع بزرگ‌تر را درست می‌کنند (شکل ۸).

شکل ۸ ▶



هاتف: خب ببین! یک نکته مهم را جا انداختی! می‌توانستی در آغاز مانند شکل ۱۶ با دو الگو شروع کنی.

شکل ۱۶ ▶



این دو الگو قابل انطباق نیستند.

مسیح: ولی یک ارتباط جالب دارند. کمی فکر کن، می‌توانی آن را پیدا کنی.

هاتف: ... بیا با هم الگوی دوم را کامل کنیم.

مسئله ۴: الگوی دوم را کامل کن و ارتباط آن را با الگوی اول بیابید.

مسئله‌ها:

۱. چهار مثالی را که در مسئله ۴ درست کردید، بررسی کنید. کدام‌ها را می‌توان به یک کاشی‌کاری با گوشه‌های قابل انطباق گسترش داد؟ این کاشی‌کاری‌ها را رسم کنید.

۲. فرض کنید در یک کاشی‌کاری بتوانیم دو نوع گوشه داشته باشیم. با مربع‌ها و مثلث‌ها چند کاشی‌کاری جدید بسازید.

۳. فرض کنید در یک کاشی‌کاری بتوانیم دو نوع گوشه داشته باشیم. با مثلث‌ها و شش‌ضلعی‌ها چند کاشی‌کاری بسازید.

۴. نشان دهید با هر مثلث دلخواه می‌توان صفحه را فرش کرد. با چهارضلعی‌های دلخواه چطور؟

۵. نشان دهید با هر شش‌ضلعی که مرکز تقارن داشته باشد، می‌توان تمام صفحه را فرش کرد.

۶. چند نوع کاشی‌کاری با کاشی‌های غیرمنتظم ارائه کنید که تمام رأس‌های آن‌ها قابل انطباق باشند. آیا می‌توانید آن‌ها را به یک کاشی‌کاری منتظم تبدیل کنید؟ آیا کاشی‌کاری یکنواختی به‌دست می‌آید؟

۷. چند منبع کاشی‌کاری سنتی ایران را انتخاب کنید و بکوشید الگوی پایه آن‌ها را که از یکی از کاشی‌کاری‌هایی که تا به حال به‌دست آمده گرفته شده است، از بین آن‌ها شناسایی کنید. چرا نظم این الگوها این چنین برای ما چشم‌نواز است؟ این سؤال را در کلاس به بحث بگذارید.

۸. الگوهای هندسی کاشی‌کاری‌های حرم مطهر امام رضا(ع) و حرم مطهر حضرت معصومه(س) را که در رمزینه آمده است، پیدا کنید.

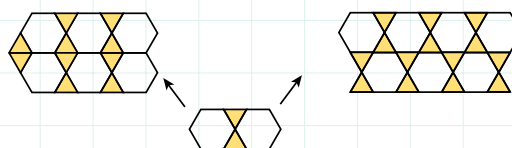


منبع

تابش، یحیی؛ حاجی‌بابایی، جواد؛ رستگار، آرش (۱۳۷۹). آموزش هنر حل مسئله. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی، وزارت آموزش و پرورش. تهران.

مسیح: البته زیبایی کاشی‌کاری‌های قبلی به این بود که در آن‌ها همه رأس‌ها قابل انطباق بودند. مطمئن هستی که همه این‌ها را می‌شود این‌طور کامل کرد؟ مثلاً شکل ۱۱ را در نظر بگیر که به چند روش کامل می‌شود. در یکی از این کاشی‌ها همه رأس‌ها قابل انطباق هستند، اما در دیگری این‌طور نیست.

شکل ۱۱ ▶



هاتف: بگذار ببینم. در یکی از کاشی‌کاری‌ها فقط گوشه‌هایی به صورت شکل ۱۲ وجود دارد.

شکل ۱۲ ▶



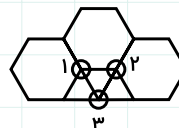
ولی در دیگری به جز گوشه‌هایی از نوع بالا، گوشه‌هایی از نوع دوم نیز دیده می‌شوند (شکل ۱۳) که قابل انطباق بر گوشه‌های اولی نیستند.

شکل ۱۳ ▶



ببینم می‌توانم مثالی از یک کاشی‌کاری درست کنم که در آن تنها از نوع دوم استفاده شده باشد؟

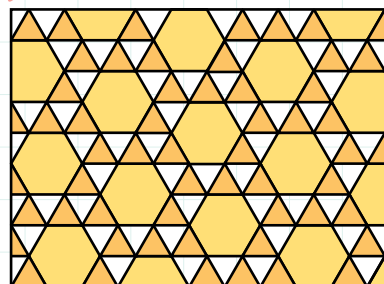
شکل ۱۴ ▶



به نظر می‌رسد این کار ممکن نیست؛ چون همان‌طور که در شکل ۱۴ می‌بینیم اگر گوشه ۲ را هم بخواهیم مانند گوشه ۱ کامل کنیم، در گوشه جدید، ۳ گوشه متفاوت با گوشه اولیه داریم.

مسیح: بیا آخرین گوشه را هم امتحان کنیم تا ببینیم کدام‌ها یک کاشی‌کاری با گوشه‌های قابل انطباق درست می‌کنند. ببین، همین الگو (شکل ۱۵) را می‌توان ادامه داد.

شکل ۱۵ ▶





چراغ همیشه روشن تجربه

گفت‌وگو
با محمود
نصیری،
نویسنده،
پژوهشگر و
معلم ریاضی

● محمدحسین دیزجی

تمام دوران ابتدایی را در روستایی که حدود ۵۰۰ نفر جمعیت داشت، پشت سر گذاشت. ابتدا فقط یک معلم هر شش پایه را تدریس می‌کرد و سپس یکی از اول تا چهارم و یکی پنجم و ششم. از سال هفتم تا دوازدهم را در شهر گلپایگان ادامه داد. چون از کودکی به ریاضی علاقه داشت، بدون هیچ شک و شبهه‌ای رشته ریاضی را انتخاب کرد و در سال ۱۳۵۳ در «دانشگاه تربیت معلم» یا همین «دانشگاه خوارزمی» امروزی در رشته ریاضی پذیرفته شد. به گفته خودش در آن سال اتفاق عجیبی در آزمون سراسری رخ داد: «دانشگاه صنعتی شریف امروزی که جدیدتر بود، از طریق آزمون سراسری مجزایی دانشجو گرفت. به همین دلیل حدود ۷۰۰ صندلی دانشگاه‌ها خالی مانده بود. تعدادی در دو جا قبول شده بودند. ما اعتراض زیادی کردیم و به ما گفتند از نو اسم‌ها را اعلام می‌کنیم.» محمود نصیری در رشته مکانیک دانشگاه پلی‌تکنیک (امیرکبیر امروزی) پذیرفته شد، اما اعلام کردند که باید پنج سال به ارتش تعهد بدهد. از آنجا که به معلمی علاقه داشت و حتی پیش خودش گفته بود اگر مهندسی هم قبول بشوم باز دبیر خواهم شد، از آن صرف نظر کرد و همان رشته ریاضی را ادامه داد. در خرداد ۱۳۵۸ دوره کارشناسی او به پایان رسید و در همان خرداد در مؤسسه ریاضی دانشگاه تربیت معلم که به نام مدرسی ریاضی بود و امروز مؤسسه دکتر مصاحب نامیده می‌شود، پذیرفته شد و سال ۱۳۶۰ به استخدام آموزش و پرورش درآمد. اگر می‌خواهید ریاضی را عاشقانه درک کنید و از این دانش بی‌انتها در زندگی‌تان بهره ببرید، این مصاحبه را دوبار بخوانید. بار اول زیر نکته‌های کلیدی آن خط بکشید و برای مرتبه‌های دوم به بعد روی آن نکته‌ها تأمل و تعمق داشته باشید. گفت‌وگو با محمود نصیری، مؤلف، نویسنده و معلم باتجربه ریاضی کشورمان پیش روی شماست.

● با ریاضی، فیزیک هم تدریس می‌کردم.
● در ریاضیات چه چیزی کشف کردید که این قدر عاشق آن بودید و هنوز هم این شوق ادامه دارد؟

○ سؤال بسیار خوبی است. ذات ریاضیات کشف‌کردنی است. لزومی ندارد شما متخصص فلان شاخه ریاضیات باشید و مسئله‌های عجیب و غریبی را کشف یا حل کنید که کار یک ریاضی‌دان بسیار با تجربه و حرفه‌ای است. همان مسئله‌های عادی ریاضی را که از قبل وجود دارند، وقتی شما خودتان بررسی می‌کنید و به مطالب کامل‌تر آن می‌رسید، یک دنیا لذت می‌برید و خوش‌حال می‌شوید. یادم نیست در کدام کلاس ابتدایی این مسئله وجود داشت که شعاع‌های چرخ‌های یک دوچرخه را که یکی خیلی کوچک‌تر از دیگری بود داده بود و پرسش می‌کرد که اگر مثلاً چرخ بزرگ‌تر دو دور بچرخد، چرخ کوچک چند دور می‌چرخد. مسئله‌هایی نظیر این‌ها را در حساب و هندسه حل می‌کردم، لذت می‌بردم.

آن زمان کتاب‌های درسی هفتم، هشتم و نهم دبیرستان بسیار غنی بودند. خیلی از قضیه‌ها یا مطالبی که امروزه در دوره دوم متوسطه آمده‌اند، در این کتاب‌ها وجود داشتند.

● این عشق و علاقه شما به ریاضی، نقطه شروعی دارد و افرادی هم هستند که در این مسیر، شوق آفرین بوده‌اند. از این عشق و شوق آفرینی برای ما بفرمایید.

○ از همان دوران ابتدایی به ریاضی و علوم و حتی جغرافی و تاریخ علاقه داشتم. وارد دبیرستان که شدم علاقه‌ام به ریاضی بیشتر شد. در تمام دوران دبیرستان فقط به ریاضی علاقه داشتم، با وجود اینکه در شهرستان بودیم و معلم با تجربه کافی نداشتیم. البته فقط یک معلم ریاضی به نام آقای علی‌اکبر جعفری داشتیم که تازه دبیر شده بود و تلاش بسیار زیادی برای ما می‌کرد که قابل تقدیر است. در زمان ما در دوران دبیرستان کتاب‌های کمک‌درسی کم بودند، اما توانستم کتاب‌های «روش‌های جبر» و «تقارن در جبر» پرویز شهریاری را تهیه کنم که بیشتر وقت‌ها و به‌خصوص تابستان‌ها آن‌ها را مطالعه می‌کردم. اما هیچ کتاب فیزیک یا شیمی به غیر از کتاب‌های درسی نداشتیم. در سال دوازدهم دو کتاب «فیزیک» و «مکانیک» نوشته محمود عرب‌اف از فردی به دستم رسید. این دو کتاب چنان جذاب بودند که عاشق فیزیک شدم؛ به‌طوری‌که در زمان دانشجویی و حتی کمی بعد از آن، هم‌زمان

وقتی مسئله‌های هندسه را حل می‌کردم، یا اتحادی و یا یک رابطه مثلثاتی را ثابت می‌کردم، بسیار خوش حال می‌شدم؛ همان گونه که وقتی شما آوای مورد علاقه خود را گوش می‌کنید یا از یک منظره طبیعی لذت می‌برید. یادم هست در پایه هفتم سه کلاس در دبیرستان ما وجود داشت. وقتی در ثلث اول امتحان هندسه دادیم، تنها فردی بودم که در این سه کلاس نمره بیست گرفتم. دبیر ما ورقه مرا به بچه‌ها نشان می‌داد. خط خوبی نداشتم، اما به قدری مسئله‌ها و قضیه‌ها را دقیق و زیبا نوشته بودم که می‌گفت ورقه نوشتن یعنی این. الان می‌گویند کتاب درسی ریاضی را چنان بنویسیم که کاربردی باشد تا دانش‌آموزان علاقه‌مند شوند. من کاملاً با این عقیده موافق نیستم. می‌گویم ریاضی خودش زیباست. البته کاربرد هم باید داشته باشد، اما به جای خودش. من ریاضی را از کودکی برای خود ریاضی می‌خواندم و علاقه داشتم. در دبیرستان درسی به نام «حساب استدلالی» داشتیم که شامل مسئله‌های جالبی از نظریه اعداد بود. از حل این مسئله‌ها چنان لذت می‌بردم که حاضر نبودم آن را با چیز دیگری عوض کنم. یکی از دلیل‌هایی که من عاشق ریاضی بودم و هستم این است که بیشتر دوست داشتم خودم مطلب را مطالعه کنم و یاد بگیرم تا اینکه کسی به من یاد بدهد. البته از نظر بعضی‌ها شاید این ویژگی خوبی نباشد، به همین دلیل برخوردیم با مطالب جدید ریاضی بسیار خوب است. عاشق مطالب جدید ریاضی هستم. این علاقه در کتاب‌هایی که می‌نویسم مشهود است. در سال ۱۳۷۰ که نظام جدید شروع شد و کتاب‌های درسی تغییر کردند، از مؤلفان هندسه ۱ و هندسه ۲ بودم. با همکاری دوستان مؤلف کتاب‌های هندسه بسیار متحول شد که دارای مطالب بسیار جدید بود. این موضوع موجب نگرانی خیلی از دبیرانی شد که هندسه تدریس می‌کردند؛ البته تا حدودی حق داشتند. زیرا قبلاً کلاسی برایشان گذاشته نشده بود و شاید هم ما کمی زیاده‌روی کرده بودیم. همین باعث شد که بعد از سه سال کتاب‌های هندسه تغییر کردند و از نظر من افت هندسه در ایران شروع شد.

• از جذابیت‌های معماها و شگفتی‌های دانش ریاضی برای ما بگویید. آیا خودتان در دوران دانش‌آموزی به این مباحث علاقه‌مند بودید؟ پرداختن به این نوع موضوع‌های ریاضی چقدر می‌تواند دانش‌آموزان را نسبت به این دانش بیشتر علاقه‌مند کند؟

○ از نظر من جذابیت ریاضی در اکثر موضوع‌های آن وجود دارد. امروزه مباحث‌های زیادی در ریاضی داریم که می‌توانند برای دانش‌آموزان انگیزه و جذابیت ایجاد کنند. در زمان دانش‌آموزی ما وضعیت کتاب‌های درسی کاملاً متفاوت بود، اما برای دانش‌آموزی که به ریاضی علاقه‌مند بود، خود مطالب کتاب‌های درسی هم شاید جذاب بود. مثلاً بیشتر در هندسه این نوع مطالب وجود

داشت. اما مطالبی که یک دانش‌آموز غیرعلاقه‌مند را به خود جذب کند، کمتر وجود داشت. با وارد شدن مطالب جدید به کتاب‌های درسی، مفهوم‌های جذاب‌تری نیز وارد کتاب‌های درسی شدند و این اقدام می‌تواند ادامه یابد. یعنی می‌توانیم مطالب جذاب‌تری وارد کتاب درسی کنیم که به علاقه‌مندی دانش‌آموزان کمک کند.

در درس‌هایی مانند هندسه، گراف، نظریه اعداد و حتی خود جبر مطالب جذابی وجود دارند. برای مثال وقتی از هندسه اقلیدسی حرف می‌زنیم، می‌توانیم توضیح‌های مختصری درباره هندسه‌های ناقلیدسی نیز بدهیم که چون بعضی قسمت‌ها با دنیای واقعی سروکار دارند، برای دانش‌آموزان جذاب‌اند؛ مانند هندسه روی کره زمین. در مجله رشد برهان ریاضی کمی در این مورد صحبت کرده‌ایم. یا مفهوم تقارن یکی از زیباترین مفهوم‌های هندسه است که برای دانش‌آموزان جذاب خواهد بود. در گراف‌ها نیز مفهوم‌هایی مانند رنگ‌آمیزی و غیره برای دانش‌آموزان جذاب خواهد بود. اگر دانش‌آموزی این را تجربه کند که فقط با چهار رنگ می‌توان هر نقشه کشوری یا قاره‌ای را رنگ‌آمیزی کرد که هیچ دو استان یا هیچ دو کشور همسایه دارای یک رنگ یکسان نباشند، این بسیار جالب خواهد بود. از این نوع مسئله‌ها در گراف‌ها زیاد وجود دارند.

• شما خودتان یکی از نویسندگان مجله رشد ریاضی برهان متوسطه اول هستید. از چه زمانی با این مجله آشنا شده‌اید و چه مباحثی را بیشتر در این مجله برای دانش‌آموزان می‌نویسید؟

○ این‌جانب از سال ۱۳۶۵ تا سال ۱۳۷۲ عضو هیئت تحریریه مجله رشد آموزش ریاضی بودم. تا شماره ۴۵ این مجله مقاله‌هایی در آن داشتم. در تعدادی از شماره‌ها تنظیم مسئله‌ها نیز به عهده این‌جانب بود. دوباره از سال ۱۳۹۷ عضو تحریریه این مجله شدم و از سال ۱۴۰۰ از نویسندگان مجله رشد ریاضی برهان شدم. ظرف دو سال اخیر، در ۱۶ شماره آن مطالبی را در مورد هندسه به طور متوالی نوشته‌ام که تاکنون نیز ادامه دارد.

• خودتان به کدام مبحث ریاضی بیشتر علاقه‌مند هستید و چرا؟

○ به تمام موضوع‌های ریاضی علاقه دارم و در همه شاخه‌های ریاضیات دبیرستانی، یعنی هندسه، جبر و حساب دیفرانسیل، و انتگرال و ریاضیات گسسته کار کرده و کار می‌کنم و کتاب‌های متعدد در آن‌ها دارم. اما چون در اوایل خدمت معلمان کمتر به دنبال تدریس هندسه می‌رفتند و من علاقه داشتم، بیشتر هندسه تدریس می‌کردم. حتی در حدود سال ۱۳۶۶ که به «دبیرستان علامه حلی» منتقل شدم، بیشتر هندسه تدریس می‌کردم. البته به طور مرتب هر کدام از درس‌های دیگر را هم در سال‌های متفاوت تدریس می‌کردم.



با پویش رمزبینه ادامه این گفت‌وگو را بخوانید.

● خسرو داودی

بیایید کمی فکر کنیم!

اربَعین حول کره زمتین

کمی فکر کنیم

در ایام اربعین حسینی دل‌های عاشقان از دور و نزدیک متوجه آن آستان مقدس می‌شود. در سال گذشته هم یکی از مطالب این بخش را به این اجتماع عظیم مربوط کردم. امسال هم می‌خواهم از زاویه‌ای دیگر، دوباره به آن موضوع بپردازم. سال قبل به موضوع اقتصاد و مجموع تقریبی بخشی از هزینه‌هایی پرداختیم که صرف پذیرایی از خیل علاقه‌مندان و عاشقان این مسیر راهپیمایی می‌شود.



طی کنند. به عبارت دیگر، یک زنجیره انسانی به اندازه خط استوا ایجاد کنند. مسیر راهپیمایی از شهر نجف اشرف تا شهر مقدس کربلا حدود ۸۰ کیلومتر است.

$$۸۰ \times ۱۰۰۰ = ۸۰۰۰۰ \text{ (متر)}$$

یعنی با زنجیره انسانی ۴۰۰۰۰ نفر می‌توان این مسیر را پوشش داد.

فرض کنید همه ۲۴ میلیون نفر نخواهند در همین مسیر بایستند و زنجیره انسانی تشکیل دهند.

$$۲۴۰۰۰۰۰۰ \div ۴۰۰۰۰ = ۶۰۰$$

پس ۶۰۰ زنجیره انسانی در این مسیر قرار می‌گیرد. به عبارت دیگر، ۶۰۰ ردیف از زائرانی که دست در دست هم دادند می‌توانند این مسیر ۸۰ کیلومتری را پر می‌کنند. بیابید از زاویه‌ای دیگر به این تعداد نگاه کنیم. در واحدهای نیروی زمینی ارتش، کوچک‌ترین واحد دسته و بزرگ‌ترین واحد سپاه نام دارد. عده‌هایی که به‌طور معمول برای واحدهای ارتش به کار می‌برند، چنین هستند:

دسته: ۸ تا ۱۳ نفر؛ جوخه: ۲۶ تا ۵۵ نفر؛ گروهان: ۸۰ تا ۲۲۵ نفر؛ گردان: ۳۰۰ تا ۱۳۰۰ نفر؛ هنگ یا تیپ: ۳۰۰۰ تا ۵۰۰۰ نفر؛ لشکر: ۱۰۰۰۰ تا ۱۵۰۰۰ نفر؛ سپاه: ۲۰ هزار تا ۴۵ هزار نفر.

حالا ما بیشترین را در نظر می‌گیریم، یعنی یک سپاه با ۴۵ هزار سرباز. ببینیم این تعداد زائر معادل چند سپاه می‌شود:

$$۲۴۰۰۰۰۰۰ \div ۴۵۰۰۰ \approx ۵۳۳$$

اگر فرض کنیم نیمی از این زائران خانم‌ها یا کودکان باشند، باز هم به‌طور تقریبی حدود ۲۶۰ سپاه خواهیم داشت. بنا به وبگاه www.gunsmonitor.com آمریکا به‌عنوان قدرت اول نظامی دنیا، فقط ۱۴۰۰۰۰۰ نفر نیروی انسانی فعال خط مقدم در تمام بخش‌های ارتش خود دارد. حالا حساب کنید این ارتش ۲۴ میلیونی چه قدرت عظیمی را در نگاه کشورهای دیگر ایجاد می‌کند؟

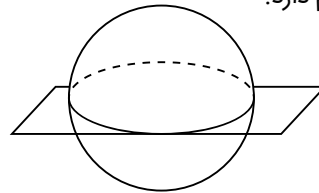
بیشتر فکر کنیم

اربعین تنها زیارت قبر مطهر امام حسین علیه‌السلام نیست. حرکتی جمعی است که مسلمانان و شیعیان سراسر عالم را جمع می‌کند تا قدرت خود را به رخ جهانیان بکشند و زمینه را برای ظهور منجی عالم بشریت فراهم کنند. زائران با وجود سختی راه و گرمای زیاد همه دشواری‌ها را به جان می‌خورند و مهربان‌تر و صمیمی‌تر از همیشه، برادرانه به هم کمک می‌کنند این راهپیمایی هر سال باشکوه و عظمت بیشتری برگزار شود. امیدوارم شما هم توفیق داشته باشید، در این اجتماع معنوی شرکت کنید و در این حرکت جهادی سهیم باشید.

در این شماره اخبار و اطلاعاتی را می‌آوریم که در خصوص تعداد شرکت‌کنندگان در این نمایش قدرت مسلمانان و بزرگ‌ترین گردهمایی انسانی است. طبق آمار اعلامی در تابستان ۱۴۰۲ با وجود گرمای هوا که در بعضی مواقع به ۵۰ درجه بالای صفر می‌رسید، فقط از کشور ایران حدود ۴ میلیون زائر از مرزهای زمینی و هوایی عبور کردند. تعداد کل زائرانی را که توفیق شرکت در این راهپیمایی را داشتند، حدود ۲۴ میلیون نفر تخمین زده‌اند. البته ممکن است شما عده‌های دیگر هم شنیده باشید. عدد ۴ میلیون زائر ایرانی که از منابع رسمی ایران اعلام شده است، تا حد زیادی دقیق است، چون ورود و خروج افراد در مرزها از طریق ثبت در سامانه خروج از کشور مشخص می‌شود. اما عدد ۲۴ میلیون زائر جهانی کاملاً تقریبی است و بر اساس شواهد و میزان جمعیت عبوری برآورد شده است. به هر حال، کمی بالا یا پایین، در این نوشته تعداد زائران را همان ۲۴ میلیون نفر فرض می‌کنیم. مهم درک این عدد است و من سعی می‌کنم با مثال‌هایی برای شما تصور خوبی از این تعداد ایجاد کنم.

محاسبه کنیم

می‌دانید اگر یک کره را با صفحه برش بزنیم، سطح مقطع آن یک دایره می‌شود. بزرگ‌ترین دایره زمانی درست می‌شود که صفحه‌ای که کره را قطع می‌کند، از مرکز کره عبور کند، که به آن دایره عظیمه می‌گویند. در کره زمین هم این دایره‌ها را که از کوچک‌ترین (در قطب) شروع می‌شود تا به بزرگ‌ترین می‌رسد، مدار می‌گویند. بزرگ‌ترین مدار که همان دایره عظیمه است، خط استوا نام دارد.



شعاع کره زمین در واقع شعاع دایره استوا هم می‌شود. شعاع کره زمین ۶۳۷۱ کیلومتر است. بنابراین، محیط دایره عظیمه (خط استوا) برابر است با:

$$\text{کیلومتر} = \frac{۲\pi r}{۱۷۴} = \frac{۲ \times \pi \times ۶۳۷۱}{۱۷۴} = ۴۰۰۳۰$$

می‌دانیم هر کیلومتر برابر ۱۰۰۰ متر است، پس:

$$\text{متر} = \frac{۴۰۰۳۰}{۱۷۴} \times ۱۰۰۰ = ۴۰۰۳۰۱۷۴$$

اگر چند نفر دستانشان را به هم بدهند و کنار هم بایستند، به‌طور تقریبی فاصله افراد ۲ متر می‌شود. به این ترتیب خواهیم داشت:

$$۴۰۰۳۰۱۷۴ \div ۲ = ۲۰۰۱۵۰۸۷ \text{ نفر}$$

یعنی اگر زائران کنار هم بایستند و دست همدیگر را بگیرند، می‌توانند بیشتر از یک دور، دور بزرگ‌ترین دایره کره زمین را

روح الله خلیلی بروجنی

از صفر تا ۱۰۰۰۰ کیلومتری سطح زمین

برون سپهر

این بالاترین لایه جو زمین است، جایی که در فضا به تدریج محو می‌شود. فقط تعداد کمی از گازهای بسیار سبک در این ارتفاع بالای سیاره ما یافت می‌شوند. تنفس در اینجا غیرممکن خواهد بود.

ماهواره‌ها

تمامی ماهواره‌ها در گرم‌سپهر (ترموسفر) و برون‌سپهر (اگزوسفر) به دور زمین می‌چرخند. از ماهواره‌ها برای برقراری انواع ارتباطات استفاده می‌کنیم.

دانشمندان همچنین از ماهواره‌ها برای یافتن اطلاعات بیشتر در مورد ویژگی‌های کره زمین و منابع آن استفاده می‌کنند.

گرم‌سپهر

برخلاف دیگر لایه‌های جو زمین، دما در اینجا هر چه بالاتر می‌رود افزایش می‌یابد و در برخی از قسمت‌ها دما تا ۲۰۰۰ درجه سانتی‌گراد افزایش می‌یابد! ماهواره‌ها، از جمله ایستگاه فضایی بین‌المللی، در گرم‌سپهر به دور زمین می‌چرخند.

زمین توسط لایه‌ای ضخیم از گازها به نام «جو» (اتمسفر) احاطه شده است. این گازها از زمین در برابر پرتوهای خورشید محافظت می‌کنند و دمای سیاره ما را در مقدار مطلوبی نگه می‌دارند. جو زمین به چند لایه مجزا تقسیم می‌شود. در لبه بیرونی جو، هیچ مرز مشخصی وجود ندارد. فقط به تدریج در فضا بسیار رقیق و محو می‌شود

شفق قطبی

این نورهای درخشان زمانی در گرم‌سپهر ظاهر می‌شوند که ذرات باردار درون بادهای خورشیدی با جو زمین برخورد می‌کنند.

بدون وجود برخی از گازها در جو، زمین برای زندگی بسیار سرد می‌شد!

۱۰۰۰۰ تا ۶۰۰

۶۰۰ تا ۸۰

شهاب‌ها

شهاب‌ها تکه‌سنگ‌هایی هستند که از منظومه شمسی وارد جو زمین می‌شوند و می‌سوزند و رگه‌هایی از نور برای لحظاتی کوتاه ایجاد می‌کنند.

مزوسفر (میان سپهر)

بالای میان سپهر سردترین قسمت جو زمین با دمای منفی ۱۴۳ درجه سانتی‌گراد وجود دارد. گازها در این لایه، به اندازه کافی غلیظ هستند تا بتوانند تندی شهاب‌سنگ‌ها را کاهش دهند و سبب سوختن آن‌ها شوند.

استراتوسفر (پوشن سپهر)

هوای این لایه بسیار خشک و ساکن است. لایه ازون در پوشن سپهر قرار دارد که از جانداران روی زمین در برابر پرتوهای خطرناک فرابنفش (UV) که در تابش خورشید وجود دارند، محافظت می‌کند.

تروپوسفر (وردسپهر)

گازهای موجود در وردسپهر هوایی را که تنفس می‌کنیم تشکیل می‌دهند. بنابراین زندگی در این لایه وجود دارد. ابرها در اینجا شکل می‌گیرند و بیشتر تغییرات آب و هوای ما در وردسپهر رخ می‌دهند.

هواپیماها

هواپیماها معمولاً در وردسپهر پرواز می‌کنند، اما ممکن است برخی از آن‌ها تا لبه پوشن سپهر نیز بالا بروند.

بالن‌های هواشناسی

دانشمندان از این بالن‌ها برای جمع‌آوری اطلاعات در مورد شرایطی فیزیکی جو زمین (مانند دما و فشار هوا) که بر آب و هوا تأثیر می‌گذارد، استفاده می‌کنند.

کوه‌ها

قله برخی از بلندترین کوه‌های زمین تا لایه وردسپهر هم می‌رسد.

پرتوهای خورشید

پرتوهای بازتابش

لایه ازون

این لایه نازک که در سراسر پوشن سپهر قرار دارد، حاوی مقدار زیادی گاز ازون است. ازون گازی است که پرتوهای فرابنفش (UV) خورشید را جذب می‌کند. پرتوهای فرابنفش باعث آفتاب‌سوختگی پوست می‌شوند و ممکن است باعث سرطان پوست شوند.

۵۰ تا ۷۰

۵۰ تا ۱۴

۱۴ تا ۲۰

ریاضی و نشانی

روش مهم‌تر از جواب

شراره تقی دستجردی، صبا قاسمی



و راست می‌پردازیم و برای سادگی فعلاً فرض می‌کنیم ابتدا در مبدأ مختصات هستیم.

سؤال مهمی که می‌خواهیم به آن پاسخ دهیم این است:

با چه قوانین حرکتی‌ای، رفتن از نقطه مبدأ به نقطه‌های (۱ و ۰) یا (۰ و -۱) امکان‌پذیر است؟

به کمک زبان ریاضی دیدیم که اگر به ترتیب n و m بار به سمت چپ و راست حرکت کرده باشیم، آنگاه مختصه طول نقطه‌ای که در آن توقف می‌کنیم، چنین است:

$$n \times 6 - m \times 2$$

پاسخ به پرسش بالا معادل با این است که: آیا عددهای طبیعی n و m به‌گونه‌ای وجود دارند که داشته باشیم:

$$n \times 6 - m \times 2 = 1$$

یا:

$$n \times 6 - m \times 2 = -1$$

این بیان ریاضی را می‌توان به هر قانون حرکت دیگری در راستای محور طول‌ها تعمیم داد:

«اگر در هر حرکت بتوانیم به ترتیب a و b واحد به سمت چپ و راست حرکت کنیم، آنگاه بعد از به ترتیب n و m

اگر در شماره‌های قبل این نشریه، مطلب «ریاضی و نشانی» را خوانده‌اید، خوب است بدانید هدفمان چیست. در ریاضی و نشانی قصد داریم ریاضیات نهفته در نشانی‌دادن را بررسی کنیم. برای این کار، در شماره قبل فرض کردیم فعلاً فقط روی نقطه‌هایی با مختصات صحیح از یک صفحه مختصات می‌توانیم بایستیم؛ با این قانون که در هر حرکت تنها می‌توانیم چند واحد به سمت بالا، پایین، چپ و راست برویم (توجه کنید که تعداد واحدها در جهت‌های متفاوت لزوماً یکسان نیست). برای مثال یک قانون چنین است:

قانون الف) در هر حرکت می‌توانید یا ۲ واحد به راست، یا ۶ واحد به چپ، یا ۴ واحد به بالا، و یا ۲ واحد به پایین بروید. همچنین بررسی کردیم که با هر قانونی لزوماً نمی‌توان از یک نقطه (با مختصات صحیح) به نقطه مجاورش (یعنی نقطه بالایی یا نقطه پایینی، یا نقطه چپی یا نقطه راست آن) رفت. مثال بالا دقیقاً نمونه‌ای از چنین قوانینی است.

از طرف دیگر، دیدیم که چون حرکت‌های بالا و پایین مستقل از حرکت‌های چپ و راست هستند، پس فعلاً خودمان را به یکی از آن دو معطوف می‌کنیم. در اینجا به حرکت‌های چپ

و شما در هر حرکت بتوانید یا a واحد به چپ و یا b واحد به راست بروید، آنگاه نمی‌توان از نقطهٔ مبدأ به نقطه‌های (0) و (1) یا (-1) رفت.

برای اثبات این قضیه کافی است توجه کنید که وقتی عددهای صحیح a و b دارای عامل مشترک r هستند، یعنی عددهای صحیح a' و b' وجود دارند که: $a = ra'$ و $b = rb'$ ، با جای‌گذاری این رابطه‌ها در معادلهٔ زیر خواهید دید که معادله جواب نخواهد داشت:

$$n \times a - m \times b = 1$$

ادامهٔ اثبات را شما بنویسید.

همان‌طور که گفته شد به دلیل مستقل بودن حرکت‌های عمودی از حرکت‌های افقی، در قضیهٔ بالا تنها حرکت از مبدأ و تنها حرکت به سمت چپ و راست (حرکت‌های افقی) در نظر گرفته شد. پس این قضیه برای حرکت‌های عمودی، یعنی حرکت به سمت بالا و پایین نیز برقرار است. سعی کنید گزارهٔ بالا را برای حرکت‌های افقی و شروع از نقطهٔ مبدأ بازنویسی و اثبات کنید. همچنین در حالت کلی‌تر ثابت کنید قضیهٔ قبل برای هر نقطه به جز مبدأ نیز درست است.

با این شرح، آیا می‌توانید بدون آنکه دست به قلم و کاغذ ببرید و معادله بنویسید، به سؤال مهم طرح‌شده در ابتدای این مطلب پاسخ دهید؟ سؤال چنین بود:

با چه قوانین حرکتی‌ای رفتن از نقطهٔ مبدأ به نقطه‌های (0) و (1) یا (-1) امکان‌پذیر است؟

ما تنها برای دسته‌ای از قوانین حکم قطعی داده‌ایم که تعداد واحدی که در هر حرکت افقی به چپ یا راست می‌روند، عامل مشترک داشته باشند (مانند قوانین مثال‌های الف، ب و پ). اما دستهٔ دیگر چه؟ یعنی اگر قوانین چپ و راست عامل مشترک نداشته باشند، می‌توان به طور قطع گفت که رفتن به خانه‌های مجاور امکان‌پذیر است؟

اگر شهودتان به این پرسش پاسخ مثبت می‌دهد، باید به شما تبریک بگوییم. در واقع این سؤال نتیجه‌ای از صورت یک قضیهٔ مهم در ریاضی است که نخستین بار یک ریاضی‌دان فرانسوی به نام **اتین بزو** آن را اثبات کرد. از این رو، قضیه‌ای که در ادامه می‌آید، به قضیهٔ بزو مشهور است:

قضیه: اگر بزرگ‌ترین عامل مشترک (ب.م.م) عددهای صحیح a و b برابر با d باشد، آنگاه عددهای صحیح n و m به گونه‌ای وجود دارند که:

$$n \times a - m \times b = d$$

از آنجا که اثبات این قضیه به دانشی فراتر از دانش ریاضی دورهٔ اول متوسطه نیاز دارد، از اثبات آن می‌گذریم. اما بدانید که هنوز کار ما در «ریاضی و نشانی» ادامه دارد.

بار حرکت به سمت چپ و راست، به نقطه‌ای می‌رسیم که مختص طول آن برابر است با:

$$n \times a - m \times b$$

می‌خواهیم بدانیم برای کدام a و b (صحیح) امکان‌پذیر است که بتوانیم بعد از تعدادی حرکت به سمت چپ و راست به یکی از نقطه‌های (0) یا (1) یا (-1) برسیم. به زبان ریاضی: آیا n و m طبیعی وجود دارد که رابطه‌های زیر برقرار باشند:

$$n \times a - m \times b = 1$$

$$n \times a - m \times b = -1$$

اما اگر به جای اینکه n و m را عددهای طبیعی در نظر بگیریم، آن‌ها را عددهای صحیح فرض کنیم، آنگاه فقط کافی است پاسخ معادلهٔ $n \times a - m \times b = 1$ را بررسی کنیم. شاید در ابتدا این معادله ظاهر ترسناکی داشته باشد، پس برای سادگی به همان مثال اولیه‌مان برگردیم. کشفیاتمان را با همان مثال ساده آغاز می‌کنیم و می‌کوشیم نتایجی را که به دست آورده‌ایم به حالت کلی تعمیم دهیم. پس همراه ما بمانید.

در معادلهٔ $1 = n \times 6 - m \times 2$ ، چون 2 و 6 عامل مشترک دارند، می‌توانیم معادله را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$2(3n - m) = 1$$

با تقسیم دو طرف این معادله بر 2 ، به دست می‌آوریم:

$$3n - m = \frac{1}{2}$$

اما با توجه به اینکه n و m را عددهای صحیح فرض کردیم، این معادله جواب ندارد. (چرا؟) این یعنی نمی‌توان از نقطهٔ مبدأ به نقطه‌های (0) یا (1) یا (-1) رفت. سعی کنید این روش را برای قوانین زیر که در شمارهٔ قبل هم به آن‌ها اشاره شده بود، یا هر قانون دیگری که خودتان می‌خواهید وضع کنید، امتحان کنید:

ب) در هر حرکت می‌توانید یا ۵ واحد به جلو و یا ۱۰ واحد به عقب بروید.

پ) در هر حرکت می‌توانید یا ۶ واحد به جلو و یا ۴ واحد به عقب بروید.

ت) در هر حرکت می‌توانید یا ۳ واحد به جلو و یا ۴ واحد به عقب بروید.

ث) در هر حرکت می‌توانید یا ۵ واحد به جلو و یا ۲ واحد به عقب بروید.

با توجه به اشتراکات قوانین الف تا ث، آیا می‌توان گفت اگر تعداد حرکت به سمت چپ و تعداد حرکت به سمت راست عامل مشترک داشته باشند، آنگاه نمی‌توان با این قانون‌ها به خانه‌های مجاورشان حرکت کرد؟

اگر حدس زده‌اید که چنین است، باید به شما آفرین بگوییم. **قضیه:** اگر عددهای صحیح a و b عامل مشترک داشته باشند

یاوراستاد

ریاضی دان معاصر؛ دکتر احمد حقانی

● بهزاد منوچهریان ● تصویرگر: حسین یوزباشی

شانزدهم اردیبهشت سال ۱۳۲۳ در اصفهان پا به این دنیا نهاد و در یک خانواده متوسط مذهبی بزرگ شد.

پنج ساله بود که او را در «دبستان جعفری» ثبت نام کردند. در کلاس هشتم به درس جبر علاقه مند شد و این علاقه دلیلی نداشت جز شخصیت و نظم و ترتیب دبیر جبر.

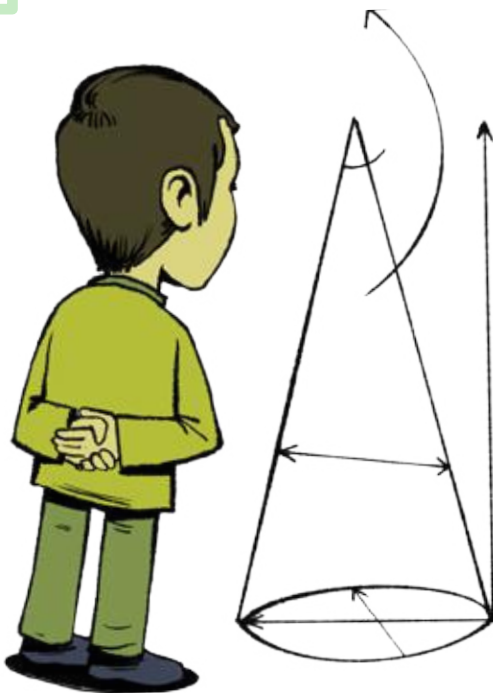
از کلاس نهم به تهران آمد و پس از آنکه یک سال در «دبیرستان پیرنیا» تحصیل کرد، سه سال آخر دبیرستان را در «دبیرستان هدف شماره ۳» که در خیابان ۱۷ شهریور (ژاله سابق) بود، تحصیل کرد. مدرسه های هدف توسط استاد احمد بیرشک و جمعی از دوستانش تأسیس شده بودند.



یکی از درس هایی که احمد در دبیرستان به آن علاقه داشت، هندسه مخروطات بود که در سال آخر دبیرستان داشتند. البته او به مطالعه کتاب های غیردرسی، مانند تاریخ علوم اثر **پییر روسو** که **حسن صفاری** ترجمه کرده بود هم علاقه داشت.

احمد در سال ۱۳۴۴ وارد رشته ریاضی دانشگاه اصفهان شد. رشته ریاضی تازه در آن دانشگاه راه افتاده بود و استادانش همه از دانشگاه تهران می آمدند.

او دکتر **محسن هشترودی** را به یاد می آورد که در آن سال ها با او سه درس داشت: توپولوژی، نظریه عددها و گنکسیون. بنابر عادتی که دکتر هشترودی داشت، هنگام تدریس یکی از دانشجویان را پای تخته می خواست تا هرچه می گوید آن دانشجو روی تخته بنویسد و از قضا این احمد بود که غالباً پای تخته بود و گفته های استاد را روی تخته می نوشت.



در سال ۱۳۴۸، در حالی که شاگرد اول شده بود، از دانشگاه اصفهان لیسانس ریاضی گرفت و سپس برای ادامه تحصیل به انگلیس رفت. او در «دانشگاه لیدز» در رشته جبر (نظریه حلقه) مدرک دکترا گرفت. در مدت تحصیل در آن دانشگاه بیش از سه چهار بار استاد راهنمای خود را پیرامون مسائل مربوط به پایان نامه دکترایش ملاقات نکرد و به این طریق آموخت که باید برای یادگیری مطالب بیشتر به خودش متکی باشد.



در سال ۱۳۵۰، با یکی از هم‌کلاسی‌هایش در دانشگاه شیراز ازدواج کرد. همسرش هم از سال ۱۳۵۱ در دانشگاه لیدز مشغول تحصیل شد و پس از سه سال مدرک دکترای خود را در رشته «آنالیز تابعی» گرفت.

پس از بازگشت از انگلیس او و همسرش به استخدام دانشگاه شیراز درآمدند و تا سال ۱۳۶۳ در آن دانشگاه به تدریس پرداختند. پس از آن هر دو به دانشگاه صنعتی اصفهان منتقل شدند.

دکتر حقانی تا پیش از بازنشستگی در دانشگاه صنعتی اصفهان مشغول تدریس و تحقیق بود. سال‌ها پس از آن هم به راهنمایی دانشجویان دوره‌های تحصیلات تکمیلی پرداخت و چندین مقاله پژوهشی هم منتشر کرد.



$$\frac{1}{\mu} = 1/\mu\mu\mu\mu \dots = 1/\overline{\mu}$$

پس این عدد جزو دسته دوم است. نتیجه‌ای که به دست آمد این بود: «ابتدا صورت و مخرج کسر داده شده را ساده می‌کنیم. در کسر حاصل اگر مخرج کسر شمارنده توانی از ۱۰ باشد، آنگاه این عدد گویا در دسته اول قرار می‌گیرد. در غیر این صورت جزو دسته دوم است.»

بعد به این فکر کردم که چه عده‌هایی شمارنده توانی از ۱۰ هستند. با توجه به اینکه تنها شمارنده‌های اول ۲، ۵ و ۱۰ هستند، پس می‌توان به این نتیجه رسید: «کسر $\frac{a}{b}$ جزو دسته اول از عده‌های گویاست هرگاه بعد از ساده‌کردن صورت و مخرج، در کسر حاصل، تنها عامل‌های اول مخرج ۲ یا ۵ باشند»

بعد از ارائه پروژه، معلم که لبخند رضایت بر صورتش نشسته بود گفت: «آفرین مرضیه، نتیجه آخری که به دست آوردی درست است و می‌توان آن را بعدها با دقت بیشتری ثابت کرد.»

تمرین ۲. سعی کنید این اثبات دقیق‌تر را به کمک بخش‌پذیری پیدا کنید.

بعد از ارائه من نوبت سارا بود. مسئله‌ای که معلم به سارا داده بود به مسئله من مربوط می‌شد. سؤال این بود: «عدد گویایی را به صورت اعشاری تبدیل کرده‌ایم و حاصل به شکل $0.\overline{235} = 0.2353535\dots$ است. یعنی بعد از اعشار رقم اول ۲ است و بعد دو رقم ۳۵ تکرار شده‌اند و تعداد رقم‌ها هم نامتناهی است. عدد گویا را پیدا کنید.»

در واقع سارا باید از روی نمایش عددهای اعشاری عدد گویا، خود عدد را که جزو دسته دوم بود پیدا می‌کرد. سارا روبه‌روی تخته کلاس که قرار گرفت گفت: «من ابتدا تلاش کردم مثال‌های ساده‌تر را حل کنم. ابتدا عدد $\frac{1}{10}$ را در نظر گرفتم. یعنی عدد $A = \frac{1}{10}$ را که نامتناهی با رقم ۱ تکرار شده است. مشاهده کردم که اگر A را ده برابر کنم به این نتیجه می‌رسم که: $10 \times A = \frac{10}{10} = 1$. پس: $10 \times A = 1 + A$. بعد از ساده کردن A از دو طرف خواهیم داشت: $9 \times A = 1$ و در نتیجه: $A = \frac{1}{9}$.

در مثال دوم، عدد $0.7777\dots$ یا همان $B = \frac{7}{9}$ را در نظر گرفتیم. دوباره همان عملیات بالا را روی B تکرار کردیم:

$$B = \circ / \bar{v} \Rightarrow 1 \circ \times B = v / \bar{v} = v - \circ / \bar{v} = v + B$$

$$\Rightarrow 1 \times B = v \Rightarrow B = \frac{v}{1}$$

بعد از این دو مثال سراغ مثال سخت‌تری رفتم:

$$\begin{aligned} \circ / 1\bar{2} = C &\Rightarrow 10 \times C = 1/21\bar{2} \Rightarrow 100 \times C = 12/1\bar{2} \\ &\Rightarrow 100 \times C = 12 + C \Rightarrow 99 \times C = 12 \Rightarrow C = \frac{12}{99} = \frac{4}{33} \end{aligned}$$

مانند $\frac{1}{3}$ و $\frac{3}{7}$ ایجاد شد:

$$\frac{\omega}{\epsilon} = \omega \div \epsilon = 0.\text{A}\overline{\text{B}}\text{C}\text{D}\text{E}\text{F}\text{G}\text{H}\text{I}\text{J}\text{K}\text{L}\text{M}\text{N}\text{O}\text{P}\text{Q}\text{R}\text{S}\text{T}\text{U}\text{V}\text{W}\text{X}\text{Y}\text{Z} = 0.\text{A}\overline{\text{B}}$$

با توجه به این مثال‌ها، من کسرهای را به دو دسته تقسیم کردم: دسته اول شامل کسرهایی که در نمایش اعشاری آن‌ها تعداد محدودی (متناهی) رقم بعد از اعشار وجود دارد؛ مانند $\frac{2}{5}$ و $\frac{1}{8}$ و $\frac{5}{4}$. در دسته دوم کسرهایی را قرار دادم که در نمایش اعشاری آن‌ها، تعداد نامحدودی رقم بعد از اعشار وجود دارد و این رقم‌ها از جایی به بعد تکرار می‌شوند؛ مانند: $\frac{1}{3}$ و $\frac{3}{7}$ و $\frac{5}{6}$.

ابتدا سعی کردم مثال‌های بیشتری از این دو دسته پیدا کنم:

$$\frac{1}{V} = 0.1 \text{ fF} \cdot \Delta V \cdot 1 \text{ fF} \cdot \Delta V \cdot 1 \text{ fF} \cdot \Delta V \cdot 1 \text{ fF} \cdot \Delta V = 0.1 \text{ fF} \cdot \Delta V$$

۱/۷ جزو دسته دوم است، چرا که در نمایش اعشاری آن شش رقم ۱۴۲۸۵۷ با همین ترتیب به تعداد نامحدود پشت سر هم تکرار می‌شوند.

عدد گویای $\frac{9}{75}$ جزو دسته اول است: $0/12$

تمرین ۱: عددهای زیر جزو کدام دسته هستند؟ اگر جزو دسته دوم بودند، مانند مثال‌های فوق آن‌ها را نمایش دهید.

$$\frac{1}{9}, \frac{5}{11}, \frac{6}{125}, \frac{29}{25}, \frac{100}{55}$$

حال باید به این فکر می‌کردم که چه عده‌های گویایی در
دسته اول قرار می‌گیرند.

$$\frac{r}{\lambda} = o/r = \frac{r}{10}$$

$$\frac{1}{\lambda} = 0.125 = \frac{125}{1000}$$

$$\frac{9}{VA} = 0.12 = \frac{12}{100}$$

با بررسی مثال‌ها متوجه شدیم که عددهای دسته اول را همیشه می‌توان به کسری تبدیل کرد که مخرج آن، توانی از ۱۰ باشد؛ برای مثال:

$$\frac{r}{\omega} = \frac{r \times r}{\omega \times r} = \frac{r^2}{\omega}$$

$$\frac{1}{A} = \frac{1 \times 125}{A \times 125} = \frac{125}{1000}$$

$$\frac{9}{VA} = \frac{\cancel{10} \times 10}{\cancel{10} \times VA} = \frac{10 \times 10}{VA \times 10} = \frac{10}{100}$$

البته برای این کار باید ابتدا صورت و مخرج کسر را تا جایی که ممکن است ساده کنیم؛ مانند: $\frac{9}{78}$.

مثلاً سعی کردم این قاعده را روی کسرهای زیر امتحان کنم:

$$\frac{21}{35} = \frac{\cancel{3} \times 7}{\cancel{5} \times 7} = \frac{3}{5} = \frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{6}{10} = 0.6$$

$$\frac{r_o}{10} = \frac{\cancel{10} \times r}{\cancel{10} \times 10} = \frac{r}{10}$$

در اینجا نمی‌توانیم صورت و مخرج را در عددی ضرب کنیم تا مخرج به توان ۱۰ تبدیل شود. چون ۱۰ بر ۳ بخش‌پذیر نیست. با ماشین حساب هم مقدار $\frac{1}{3}$ را به دست آوردم:

اما عددی که معلم داده بود کمی کار بیشتری لازم داشت:

$$A = 0/235 \Rightarrow 10 \times A = 2/35 = 2+0/35$$

فرض کنیم: $B = 0/35$ ، در نتیجه:

$$\begin{aligned} 100 \times B &= 35/35 = 35 + B \Rightarrow 99B = 35 \Rightarrow B = \frac{35}{99} \\ \Rightarrow 10 \times A &= 2 + \frac{35}{99} = \frac{2}{1} + \frac{35}{99} = \frac{2 \times 99 + 35}{99} = \frac{233}{99} \\ \Rightarrow A &= \frac{233}{99} \div 10 = \frac{233}{990} \Rightarrow A = \frac{233}{990} \end{aligned}$$

خوشبختانه پروژه سارا هم به نتیجه رسیده بود و مطلب جدیدی را به همه ما آموزش داد. در آخر معلم تمرین زیر را اضافه کرد تا بتوانیم آموخته جدید را تمرین کنیم.

تمرین ۳. عددهای اعشاری (نامختوم = بی‌پایان) زیر را به شکل کسری نمایش دهید:

$$0/9 \text{ و } 0/521 \text{ و } 0/123$$

اما پروژه مهتا کمی سخت‌تر بود. مسئله‌ای که معلم به مهتا داده بود این بود: «مرد روستایی ۱۷ گوسفند داشت. او وصیت کرده بود گوسفندانش به نسبت $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{9}$ بین سه فرزندش تقسیم شوند. البته وصیت او بعد از درگذشت مرد روستایی برای سه فرزندش آشکار شده بود. آن‌ها به درستی وصیت پدرشان را درک نکرده بودند و فکر می‌کردند سهم فرزند اول $17 \times \frac{1}{3}$ ، یعنی $5\frac{2}{3}$ ، سهم فرزند سوم $17 \times \frac{1}{4}$ ، یعنی $4\frac{1}{4}$ از گوسفندان است و این سهم‌ها هیچ‌کدام مقدار صحیح هم نبودند. این بود که پیش آموزگار ده رفتند و از او چاره‌جویی کردند. معلم وصیت‌نامه پدرشان را که خواند، کاغذ و مدادی آورد و همان‌طور که روی کاغذ محاسبه‌هایی انجام می‌داد، به سه فرزند پیرمرد متوفی گفت: «پدر شما در وصیت‌نامه نوشته به نسبت $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{9}$ گوسفندان تقسیم شوند و منظور این نبوده که نصف گوسفندان برای نفر اول، ثلث گوسفندان برای نفر دوم و ثلث‌ثلث گوسفندان برای نفر سوم باشد.»

محاسبه‌های معلم که تمام شد، نگاهی به چهره‌های مبهوت سه فرزند انداخت. در آن لحظه بود که متوجه شد توضیح محاسبه‌هایش برای آن سه فرزند روستایی ناممکن است. در این فکرها غوطه‌ور بود که چه راهی برای توضیح دادن پیدا کند که گوسفندی از گله جدا شد و به کلاس درس معلم آمد. با تلاش سه فرزند و معلم، گوسفند فراری را گرفتند و به طویل‌بردند تا صاحبش مراجعه کند. اما گوسفند فراری، ایده یک راه‌حل را در ذهن معلم زنده کرد. معلم گفت: «من به شما یک گوسفند می‌دهم تا تعداد گوسفندان ۱۸ بشود ۱۸. درست است؟» فرزندان با هم گفتند: «درست است آقا معلم»

معلم گفت: «خب حال با همان حساب و کتاب خودتان سهم نفر اول می‌شود: $18 \times \frac{1}{3}$ تا؛ یعنی ۹ تا. درست است؟» فرزند اول که دید به جای $5\frac{2}{3}$ ، حالا ۹ تا گوسفند به او

می‌رسد گفت: «درست است.» معلم ادامه داد: «سهم نفر دوم که ثلث بود می‌شود ۶ گوسفند و سهم نفر سوم که ثلث‌ثلث بود می‌شود ۲ گوسفند. درست است؟»

چهره فرزندان دوم و سوم هم راضی به نظر می‌رسید. بعد معلم گفت: «۹ تا و ۶ تا و ۲ تا گوسفند می‌شود ۱۷ تا و یکی می‌ماند. آن هم، همان گوسفندی است که من اضافه کردم.»

با آنکه فرزندان پیرمرد متوفی هنوز نفهمیده بودند که معلم چه جادویی با عددها کرده بود، اما همگی آن‌ها راضی بودند. فرزند بزرگ‌تر رو به معلم کرد و گفت: «آقا معلم ما نمی‌دانیم شما چطور حساب و کتاب کردید، اما ما نمی‌خواهیم لقمه حرام سر سفره خانواده ببریم. اگر شما مطمئن هستید که این تقسیم همان است که پدرمان گفته ما هم قبول می‌کنیم.»

معلم در جواب به آن‌ها اطمینان داد که این تقسیم خواسته پدرتان است و خیالتان از این بابت راحت باشد. فرزندان رفتند. معلم به محاسبه‌هایش دوباره نگاهی انداخت و با خود گفت: «بله، کاملاً درست است.»

اما خواسته معلم ما از مهتا این بود که کشف کند محاسبه‌های معلم روستا چه بود که به تقسیم $17 = 2+6+9$ رسیده بود.

مهتا پای تخته سیاه رفت و این‌گونه نوشت:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{9+6+2}{18} = \frac{17}{18}$$

بعد گفت: «جمع این سه کسر از ۱ کمتر است و این نشان می‌دهد که تصور فرزندان اشتباه است. اما برای اینکه نسبت‌ها به گونه‌ای باشد که جمع‌شان برابر ۱ باشد، باید دو طرف تساوی بالا را در $\frac{18}{17}$ ضرب کنیم:

$$\begin{aligned} \left(\frac{18}{17} \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{18}{17} \times \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{18}{17} \times \frac{1}{9}\right) &= \frac{17}{18} \times \frac{18}{17} = 1 \\ \Rightarrow \frac{9}{17} + \frac{6}{17} + \frac{2}{17} &= 1 \end{aligned}$$

در نتیجه سهم نفر اول $17 \times \frac{9}{17}$ یعنی ۹ گوسفند، سهم نفر دوم $17 \times \frac{6}{17}$ یعنی ۶ گوسفند و سهم نفر سوم $17 \times \frac{2}{17}$ یعنی ۲ گوسفند خواهد بود. این محاسبه‌ها همان محاسبه‌هایی بودند که معلم روستا انجام داده بود.

صحبت‌های مهتا که تمام شد، معلم راه‌حل مهتا را تأیید کرد و در پایان کلاس تمرین زیر را برای حسن‌خاتم زنگ پروژه‌ها روی تخته کلاس نوشت:

تمرین ۴. سه شریک می‌خواهند سودی ۲۳۰ میلیونی را بین خود تقسیم کنند. آن‌ها با توجه به سهمشان در تولید، این بند را در قرارداد گنجانده‌اند که سود شرکت به نسبت $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{8}$ بین آن‌ها تقسیم شود. سهم هر شریک را مشخص کنید.

ژما جواهری پور

ریسک و ریاضی

منحرف می‌شود. به فاصلهٔ آماجه تا مرکز «انحراف معیار» گفته می‌شود.



در مثال سرمایه‌گذاری لوازم تحریر، ارزش مورد انتظار شما ۲۰۰۰۰ تومان سود است. اگر کالای خود را با ۵۰۰۰ تومان سود بفروش برسانید، به اندازهٔ ۱۵۰۰۰ تومان انحراف معیار داشتید. در هر سرمایه‌گذاری باید واریانس و انحراف معیار را از ارزش مورد انتظار پیش‌بینی کنید.

برای کاهش خطری‌ری چه کاری می‌توان انجام داد؟ نظریه‌ای وجود دارد به نام «متنوع‌سازی»، به منظور سرمایه‌گذاری بهینه که ارائه‌دهندهٔ آن جایزهٔ نوبل را دریافت کرده است.

این جمله را شنیده‌اید که «همهٔ تخم‌مرغ‌هایت را توی یک سبد نگذار». در مورد سرمایه‌گذاری مثال قبل، اگر تنوع کالاها را بالا ببرید، البته با نیازسنجی که از دانش‌آموزان و حتی معلمان داشته‌اید، خطری‌ری خود را کاهش خواهید داد. شاید تفاوت سود جنس‌هایی مثل خوراکی و لوازم تحریر بتواند ارزش مورد انتظار را برآورده کند.

مدیریت خطری‌ری، به‌خصوص در بنگاه‌های سرمایه‌گذاری، از اهمیت بسیار بالایی برخوردار است و اگر مایل هستید در این حوزه کار کنید، باید در تقویت دانش ریاضی خود بکوشید.

آیا شما خطری‌ری هستید؟ اگر دوستی از شما دعوت کند که برای بازی «بانجی جامپینگ» ثبت نام کنید، دعوتش را می‌پذیرید یا رد می‌کنید؟ فرض کنید شخصی به شما پیشنهاد بدهد که برای خرید لوازم تحریر و فروش آن در بوفهٔ مدرسه سرمایه‌گذاری کنید. پاسخ شما چیست؟ آیا می‌دانید ریسک این سرمایه‌گذاری چقدر است؟

اگر در این سرمایه‌گذاری ۱۰۰۰۰۰ تومان لوازم تحریر بخرید و با سود ۲۰ درصد انتظار داشته باشید، بعد از یک هفته ۱۲۰۰۰۰ تومان سرمایه بازگشت داشته باشد، در این سرمایه‌گذاری ممکن است جنس‌ها ظرف یک هفته به فروش نرسند و مثلاً دو ماه بعد به رقم مورد نظر خود برسید. یا حتی با سود ۲۰ درصد کالا مشتری نداشته باشد و ناچار شوید با سود کمتر و یا حتی زیر قیمت تمام‌شده بفروشید.

به احتمال انحراف بازده واقعی سرمایه‌گذاری از بازده پیش‌بینی‌شدهٔ آن، خطری‌ری (ریسک) گفته می‌شود. خطری‌ری همچنین شامل احتمال ازدست‌رفتن همه یا بخشی از اصل سرمایه‌گذاری نیز می‌شود.

شما از میزان سود دریافتی انتظاری دارید که ممکن است به آن نرسید، ولی باید به خطر سرمایه‌گذاری خود نیز فکر کنید و از آن پیش‌بینی داشته باشید. برای درک بهتر ریسک باید با مفهوم‌های ریاضی، مثل آمار و احتمال، و واریانس و انحراف معیار آشنا باشید. در ادامه به زبان ساده این مفهوم‌ها را آموزش می‌دهیم.

حتماً تجربهٔ بازی تیر و کمان و یا آماجه (دارت) را دارید. در این بازی ارزش مورد انتظار شما این است که همهٔ تیرها به مرکز صفحه اصابت کند. ولی ممکن است تیر به هر بخش از صفحه برخورد کند. به این احتمال «واریانس» گفته می‌شود. واریانس معیاری است برای سنجش اینکه هر پیشامد، احتمالاً چقدر از ارزش مورد انتظار فاصله دارد. مثلاً سنجش اینکه یک آماجه احتمالاً چقدر از مرکز هدف

پی‌نوشت

۱. به احتمال به وجود آمدن آسیب و صدمه از یک خطر معین، ریسک گویند. در واقع به شانس یا احتمال اینکه کسی از خطر آسیب ببیند یا اموالی دچار صدمه گردد، ریسک گفته می‌شود. رانندگی در جاده یا راه رفتن روی زمین روغنی، ریسک است.

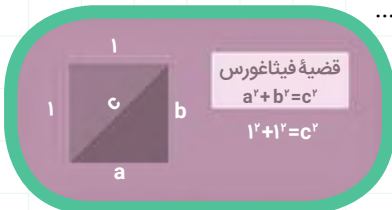
گوشمالی ہیپاسوس

حتی عددهای اعشاری نامتناهی مثل $\frac{34}{45}$ هم یک نمایش کسری دارند. تمام این‌ها عددهایی هستند که به آن‌ها «عددهای گویا» می‌گوییم.

[illegible]

هیپاسوس عددی را کشف کرد که این نظم و هماهنگی را بر هم می‌زد. همهٔ ماجرا از یک شکل ساده شروع شد.

او مربعی به ضلع ۱ رسم کرد و قطر آن را کشید. طول قطر این مربع طبق قضیهٔ فیثاغورس باید جذر ۲ یا ریشهٔ دوم عدد ۲ می‌بود و او، طبق قانونی که در گروه خودشان داشتند، باید می‌توانست این عدد را به صورت یک کسر یا تقسیم دو عدد صحیح بر هم بنویسد. اما هیپاسوس هر چه تلاش کرد به نتیجه‌ای نرسید! حالا که نتوانسته بود نشان دهد عدد رادیکال ۲ یک عدد گویاست، تصمیم گرفت ثابت کند که رادیکال ۲ عددی گویا نیست! و با همین ایده، جان خود را به خطر انداخت! ...



حالا ببینیم او چطور این ایده اولیه را ثابت کرد:

هیپاسوس فرض کرد که فکر دوستانش در مکتب فیثاغورسی‌ها برای همهٔ عددها، حتی ریشهٔ دوم ۲، درست باشد! او ابتدا فرض کرد عدد رادیکال ۲ عددی گویاست. پس باید می‌توانست این عدد را به صورت یک کسر بنویسد. او ساده‌ترین کسر ممکن را در نظر گرفت که صورت و مخرج آن هیچ شمارندهٔ مشترکی نداشته باشند. صورت را p و مخرج آن q را نوشت و شروع کرد به ثابت‌کردن این حقیقت که چنین کسری هرگز وجود نخواهد داشت. تصویر زیر را ببینید:

$$\sqrt{\frac{p}{q}} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$$

$\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$

$\frac{p}{q}$

$\frac{p}{q}$

گویا

هیچ شمارنده مشترکی ندارند

چنین کسری وجود ندارد

جرم: کشف عددهای گنگ
مجازات: غرق شدن در دریا

نام هیپاسوس را تا به حال شنیده‌اید؟ او ریاضی‌دان و فیلسوفی یونانی بود که به مکتب فکری **فیثاغورسی‌ها** تعلق داشت. این گروه اصل و اساس و بنای همه چیز را، یا به عبارت دیگر، آجرهای سازندهٔ این دنیا را، عددها می‌دانستند؛ از کیهان‌شناسی، شیمی و موسیقی گرفته تا مابعدالطبیعه، اخلاق و حقوق و هر الگو و هماهنگی (هارمونی) که در این دنیا دیده می‌شود. آن‌ها می‌گفتند همه چیز را در این دنیا می‌توانیم با نسبت‌هایی از عددها توضیح دهیم و تفسیر کنیم.

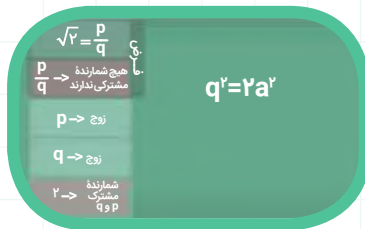


اما چه شد که هیپاسوس مورد خشم و نفرین، و مجازات خدایان قرار گرفت؟ آیا او دستش به خون کسی آلوده شده بود؟ یا یک مراسم آیینی و مذهبی را به هم زده بود؟ هیچ کدام! جرم هیپاسوس کشف عددهای گنگ بود.

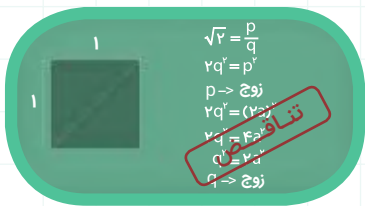


اعضای مکتبِ فکری فیثاغورس، آن‌ها که سنگ بنای این دنیا را عددها می‌دانستند، ابتدا بر این باور بودند که ما هر عددی را می‌توانیم به صورت تقسیم دو عدد صحیح بر هم، یا به صورت کسری که صورت و مخرج آن عددهای صحیحی مثل a و b باشند بنویسیم.

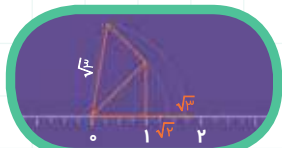
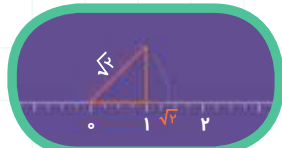
عددهای گویا



یعنی فرض اولیه هیپاسوس که گفته بود بیابیم فرض کنیم رادیکال ۲ هم عددی گویاست، درست نبود و آنچه می‌خواست ثابت کند به نتیجه رسید! رادیکال دو وارد دسته دیگری از عددها شد که آن‌ها را «عددهای گنگ» نام‌گذاری کردند.



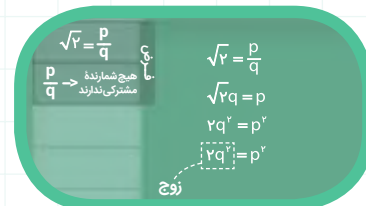
با وجود اینکه ثابت شد رادیکال ۲ عددی گنگ است و نمی‌شود آن را به صورت یک کسر مشخص نمایش داد، اما جای قرارگیری این دسته از عددها را می‌توان به صورت دقیق روی محور عددها نشان داد.



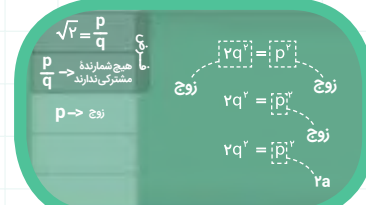
به جز ریشه دوم ۲، عددهای دیگری مثل «عدد پی» هستند که ما هرگز نمی‌توانیم آن‌ها را به صورت یک کسر دقیق بنویسیم؛ هر چند می‌توانیم تقریب‌هایی برای آن‌ها ارائه کنیم. از اینکه آخر و عاقبت هیپاسوس چه شد اطلاعات دقیقی در دست نداریم! اما آنچه که می‌دانیم و در آن هیچ شکی نداریم این است که کشف بزرگ هیپاسوس انقلابی در ریاضیات ایجاد کرد و دریچه‌های بسیاری را به روی دانشمندان گشود. داستان هیپاسوس به روشنی به ما نشان می‌دهد که هرگز نباید از کاوشگری و جست‌وجو در دنیای ناشناخته‌ها و غیرممکن‌ها دست بکشیم؛ شاید که درهای جدیدی در علم منتظر گشوده‌شدن به دست ما باشند.

او دو طرف تساوی را که برای جذر ۲ نوشته بود، در q ضرب کرد تا از شکل کسری خارج شود و سپس هر دو سمت تساوی را به توان ۲ رساند.

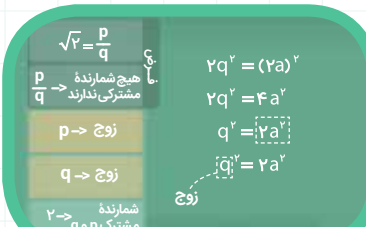
حالا در سمت چپ تساوی، مربع عدد q در عدد ۲ ضرب می‌شود. می‌دانیم که هرگاه عددی در ۲ ضرب شود حاصل آن عددی زوج خواهد بود. پس سمت راست تساوی هم باید عددی زوج باشد؛ یعنی مربع p هم باید عددی زوج باشد.



اما اگر p عددی فرد باشد، وقتی به توان ۲ می‌رسد هم باز حاصلش فرد است که آن وقت تساوی به هم می‌خورد. پس p هم حتماً باید زوج باشد و نمی‌تواند عددی فرد باشد. حالا چه می‌شود؟ عدد p را که حالا فهمیده‌ایم حتماً باید عددی زوج باشد، به صورت $2a$ که فرم کلی نمایش عددهای زوج است نشان می‌دهیم:



و حالا چون p به توان ۲ رسیده بود و $2a$ را به جای آن نوشتیم، باید $2a$ هم به توان ۲ برسد. p یا مقدار مساوی آن، یعنی $2a$ زوج هستند، پس مربع آن‌ها نیز عددی زوج است و می‌تواند با عدد ۲ که در سمت چپ تساوی آمده است ساده شود!



در نتیجه‌های جدول سمت چپ دقت کنید. آیا اینجا به یک تناقض نمی‌رسید؟

یک بار گفتیم کسر p به روی q ساده‌ترین حالت ممکن است و صورت و مخرج آن هیچ شمارنده مشترکی ندارند که بتوانند ساده‌تر شوند. و حالا به این نتیجه رسیده‌ایم که p و q هر دو زوج‌اند. پس یک عامل مشترک دارند و آن ۲ است. بنابراین می‌توانستند ساده‌تر شوند. این نتیجه با فرض اولیه ما در تناقض است.

جور دیگر باید دید تمرین‌های متفاوت ریاضی

در ایران و اکثر کشورهای جهان «آموزش ریاضیات به سبک تصویری» مغفول مانده یا به آن کم‌توجهی شده است؛ از موارد استثناء می‌توان به نظام آموزش ریاضی در کشور سنگاپور اشاره کرد. در این سلسله مقاله‌ها تلاش شده است این نقیصه با طرح تمرین‌هایی متفاوت تا حدی جبران گردد.

هفتمی‌ها، فصل پنجم: شمارنده‌ها و اعداد اول

مسئله ۱. الف) به کمک تساوی $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ می‌توان عددها را به عامل‌های کوچک‌تر تجزیه کرد. مثلاً قرار می‌دهیم: $a=9$ و $b=2$.

$$9^2 - 2^2 = (9-2)(9+2) = 7 \times 11$$

$$9^2 - 2^2 = 81 - 4 = 77$$

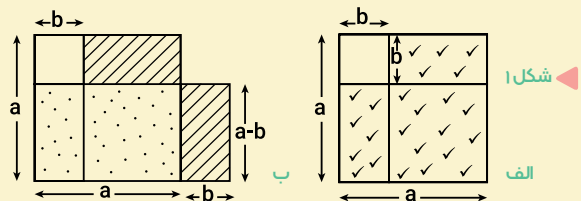
از طرف دیگر:

پس: $77 = 7 \times 11$. به همین منظور تمام عددهای بین یک تا صد را که تفاضل دو مربع کامل هستند، فهرست کنید و ببینید در مورد تجزیه آن‌ها عبارت بالا چه می‌گوید.

ب) به کمک تساوی $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ می‌توان عددها را به عامل‌های کوچک‌تر تجزیه کرد. حال عددهای بین یک تا صد را که تفاضل دو مکعب کامل هستند، فهرست و تجزیه کنید.

ج) به کمک تساوی $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ می‌توان عددها را به عامل‌های کوچک‌تر تجزیه کرد. حال عددهای بین یک تا صد را که مجموع دو مکعب کامل هستند، فهرست و تجزیه کنید.

د) تساوی $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ را به کمک مقایسه دو شکل الف و ب در شکل ۱ ثابت کنید:



ه) با توجه به شکل‌های الف و ب شکل ۱، مشابه اثبات بالا را برای اثبات تجزیه $a^3 - b^3$ و $a^3 + b^3$ به کمک مکعب‌های سه‌بعدی بازسازی کنید. در وبگاه www.geogebra.org می‌توانید شبیه‌سازی آن را پیدا کنید.

مسئله ۲. الف) هر عدد طبیعی را می‌توان به حاصل ضرب عوامل اول تجزیه کرد. حال عددهای طبیعی را در نظر بگیرید که خالی از مربع باشند. یعنی بر توان دوم هیچ عدد اولی بخش‌پذیر نیستند. به هر چنین عددی مجموعه عوامل اول آن را نسبت دهید. نشان دهید ب.م.م و ک.م.م این عددها همان اشتراک

و اجتماع مجموعه عوامل اول وابسته به آن‌هاست. توجه کنید که مجموعه عوامل اول این عددها آن‌ها را به‌طور یگانه مشخص می‌کنند.

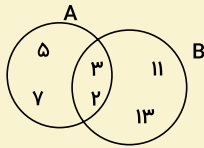
$$A = \{2, 3, 5, 7\} \leftrightarrow a = 2 \times 3 \times 5 \times 7$$

$$B = \{2, 3, 11, 13\} \leftrightarrow b = 2 \times 3 \times 11 \times 13$$

اشتراک دو مجموعه:

$$A \cap B = \{2, 3\} \leftrightarrow (a, b) = 2 \times 3$$

$$A \cup B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\} \leftrightarrow [a, b] = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13$$

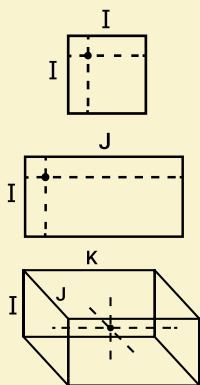


اجتماع دو مجموعه

ب) حال فرض کنید عدد طبیعی دلخواه داده شده است. با تجزیه به عوامل اول، تکرار هر عامل اول مشخص می‌شود. حال یک نظریه نمودارهای ون مثل شکل ۲ با تکرار اعضا و مفهومی از اجتماع و اشتراک تعریف کنید که متناظر با ب.م.م و ک.م.م عددهای طبیعی دلخواه باشد.

ج) حال فرض کنید به جای عددهای طبیعی، با عددهای گویا سروکار داریم. در این صورت برای هر عامل اول ممکن است تکرار منفی هم داشته باشیم. حال یک نظریه نمودارهای ون با تکرار احتمالاً منفی درست کنید و مفهوم اجتماع و اشتراک مجموعه‌ها را به این نظریه توسعه دهید. با کمک این مدل اسباب بازی مفاهیم ب.م.م و ک.م.م را به عددهای گویای مثبت تعمیم دهید.

مسئله ۳. می‌توانید تخیل کنید که یک مستطیل حاصل ضرب دو پاره‌خط باشد؛ مثلاً $I \times J$. و یک مکعب مستطیل حاصل ضرب سه بازه باشد؛ مثلاً $I \times J \times K$. حال می‌شود حاصل ضرب تعدادی بیشتر بازه را در نظر گرفت؛ مثلاً $I_1 \times \dots \times I_n$. و ممکن است طول بعضی بازه‌ها برابر باشند و در این صورت می‌نویسیم: $I_1^{k_1} \times \dots \times I_n^{k_n}$ که در آن k_i تکرار بازه‌ها هستند. توجه کنید که یک مربع به شکل I^2 است.



توجه کنید که در هر مستطیل مثل جدول، سطرها و ستون‌هایی داریم که هر نقطه دقیقاً در یک سطر و یک ستون قرار گرفته است. در مکعب مستطیل هم مشابه سطر و ستون وجود دارد. آن‌ها را خط‌های موازی اضلاع مکعب مستطیل می‌گیریم که در سه جهت دوه‌دو عمود برهم مطابق شکل ۳ انطباق می‌یابند. تخیل کنید که در مکعب مستطیل k بعدی، دقیقاً k جهت دوه‌دو عمود برهم از هر نقطه عبور کند.

الف) یک نظریه تجزیه برای مکعب مستطیل‌های n بعدی به شکل $I_1 \times \dots \times I_n$ درست کنید. ب.م.م و ک.م.م دو مکعب مستطیل را نیز تعریف کنید.

ب) نظریه تجزیه برای مکعب مستطیل‌های ابعاد بالا را به یک

نظریه نمودارون با تکرار مثبت تبدیل کنید و اجتماع و اشتراک تعمیم یافته را که در مسئله ۲ تعریف کرده‌اید، با ب.م.م و ک.م.م مکعب مستطیل‌ها انطباق دهید. (ج) به کمک خلاقیت خودتان مثالی دیگر از تجزیه به عوامل اول بسازید. مثلاً برای زیرمجموعه‌های عددهای حقیقی با تکرار صحیح یا حقیقی، اشتراک و اجتماع تعریف کنید و مفهومی شبیه ب.م.م و ک.م.م به دست آورید.

هشتمی‌ها، فصل چهارم، جبر و معادله

مسئله ۱. به این مثال توجه کنید:

$۳^۴۵۲$ را به شکل $۳[۲]+۴[۳]+۲[۵]$ بنویسید و بخوانید ۳ تا عدد اول ۲، با ۴ تا عدد اول ۳، با ۲ تا عدد اول ۵ را با هم در نظر می‌گیریم. هر عدد طبیعی که به روش زیر به حاصل ضرب عوامل اول تجزیه شده باشد $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ را با نماد جمعی به شکل $\alpha_1[p_1] + \dots + \alpha_k[p_k]$ نمایش دهید. با همین نمایش اجازه دهید α_i ها عدد صحیح هم باشند. عددهای گویا نیز به این روش قابل نمایش هستند. حال جمع عددهای گویا را در نماد جمعی بازنویسی کنید. به جای عدد طبیعی چه نماد جمعی را مناسب می‌بینید؟

مسئله ۲. برای تجزیه‌های زیر تعبیر هندسی پیدا کنید. بعد به این فکر کنید که: آیا هر تجزیه‌ای را می‌توان به طور هندسی تعبیر کرد؟

$$a^2 + b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

مسئله ۳. الف) یک عبارت جبری دو متغیره را در نظر بگیرید؛ مانند $P(x, y)$. می‌خواهیم تحقیق کنیم که $P(x, y) = 0$ معادل این است که $x - y$ یک عامل تجزیه $P(x, y)$ باشد. این نکته را در عبارات $x^2 - y^2$ و $x^3 - y^3$ بررسی کنید.

ب) حال تحقیق کنید که $P(-y, y) = 0$ معادل این است که $x + y$ یک عامل تجزیه $P(x, y)$ باشد. این را در عبارت $x^2 + y^2$ بررسی کنید.

ج) حال حالت کلی تجزیه عبارت‌های $x^n - y^n$ و $x^n + y^n$ را در نظر بگیرید و سعی کنید تجزیه آن‌ها را با الگویابی از تساوی‌های بالا حدس بزنید. صحت حدستان را بررسی کنید.

مسئله ۴. الف) عددهایی را به شکل مکعب k بعدی تعریف کنید و آن‌ها را با I^k نمایش دهید. حال درست مانند عددهای اول که نمایش جمعی داشته‌اند، مجموع‌های به شکل $(*)$ را تعریف کنید. ضرب $I^m \times I^n$ را برابر I^{m+n} تعریف کنید و به کمک همین رابطه و فرض درستی توزیع پذیری ضرب عبارت‌های به شکل $(*)$ را تعریف کنید. بیایید این عددها را «عددهای مکعبی» بنامیم. عددهای مکعبی جمع نمادین یک سری مکعب k بعدی هستند که ضرب‌های آن‌ها می‌تواند عدد صحیح دلخواه α_i باشد. به نظر شما مجموع عددهای مکعبی می‌تواند به عنوان یک دستگاه عددی به کار رود؟ منظور از دستگاه عددی این است که جمع و ضرب عددهای مکعبی مانند جمع و ضرب عددهای صحیح رفتار می‌کند.

ب) حال به جای I نماد x را بگذارید و به جای I^k از نماد x^k استفاده کنید. آیا همان چندجمله‌ای‌های یک متغیره بر حسب x به دست نمی‌آید؟

ج) چه فرقی بین عددهای $(*)$ و چندجمله‌ای‌ها وجود دارد؟ چه شباهت‌هایی می‌بینید؟ آیا می‌توانید بگویید عددهای $(*)$ هندسی و چندجمله‌ای‌ها جبری هستند؟

مسئله ۵. یک کلمه در نظر بگیرید و با جابه‌جا کردن حرف‌های آن کلمه کلمه‌های دیگری بسازید. فرض کنید ترتیب حرف‌ها مهم نباشد، اما تکرار آن‌ها اهمیت داشته باشد. مثلاً کلمه «شیر» با کلمه «ریش» یکی است، ولی کلمه «مدام» با کلمه «دام» یکی نیست. حال ببینید می‌توانید ک.م.م و ب.م.م دو کلمه را تعریف کنید؟ دو کلمه مثال بزنید که حرف‌هایشان تکرار نداشته باشند و هر دو کلمه ک.م.م و ب.م.م آن‌ها با ترتیبی به انتخاب شما معنی‌دار باشند. بعد مثالی بزنید که هر دو کلمه حرف‌های تکراری داشته باشند و باز هر دو کلمه ک.م.م و ب.م.م آن‌ها با یک ترتیبی به انتخاب شما معنی‌دار باشند.

نهمی‌ها، فصل چهارم، توان و ریشه

مسئله ۳. فرض کنید می‌خواهید عبارت رادیکالی زیر را محاسبه کنید:

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$$

$$x^2 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}$$

$$x^2 = 1 + x$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

جواب مثبت $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ خواهد بود. آیا به نظر شما هر عبارت

رادیکالی به شکل $a\sqrt{b + a\sqrt{b + a\sqrt{b + \dots}}}$ را می‌توان برحسب یک رادیکال نوشت؟

(ب) اگر در عبارت بالا به جای ریشه دوم همه جا ریشه سوم بگذارید و سؤال را پاسخ دهید. مجبورید فرمول حل کلی معادله‌های درجه سوم توسط رادیکال‌ها را در اینترنت جست‌وجو کنید.

(ج) اگر به جای ریشه دوم یا سوم، ریشه n ام قرار دهید، چه می‌توانید بگویید؟

مسئله ۴. معادله $x^2 = x^3$ را در نظر بگیرید. $x=2$ و $x=4$ دو جواب برای این معادله هستند. زیرا $2^2=2^3$ و $4^2=4^3$. آیا جواب دیگری برای این معادله می‌شناسید؟ چه روشی برای پاسخ به این پرسش پیشنهاد می‌کنید؟ از رسم نمودارهای تابع‌های $y = x^2$ و $y = x^3$ کمک بگیرید. در مورد تعداد جواب‌های $x^n = 2^x$ برای n های زوج و فرد طبیعی بحث کنید.

مسئله ۵. به کمک ماشین حساب جدول زیر را پر و تحلیل کنید.

x	0/1	0/01	0/001	0/9	0/99	0/999	1/1	1/01	1/001
x^2									
x^3									
x^4									

مسئله ۶. توان‌های ۲ را با توان‌های ۴ و توان‌های ۸ و توان‌های ۱۶ مقایسه کنید. چه می‌توانید بگویید؟ در مورد رشد تابع توانی a^x چه نتیجه‌ای می‌گیرید. نمودار a^x را با a^{2x} ، a^{3x} و a^{4x} مقایسه کنید.

مسئله ۱. الف) فکر می‌کنید تعداد ذرات بنیادی کره زمین از مرتبه 10^6 به توان چند باشد؟ در مورد کهکشان راه شیری چطور؟ در مورد عالم ماده چه تخمینی وجود دارد؟ پاسخ این سؤال‌ها را در اینترنت جست‌وجو کنید. مهم است تصویری از بزرگی توان‌های 10^6 داشته باشید.

(ب) توان‌های 10^6 را با توان‌های دو تقریب بنزید و بگویید به کدام طرف نزدیک‌تر هستند.

$$\begin{array}{lll} 2^{\square} < 10^6 < 2^{\square} & 2^{\square} < 10^6 < 2^{\square} & 2^{\square} < 10^6 < 2^{\square} \\ 2^{\square} < 10^6 < 2^{\square} & 2^{\square} < 10^6 < 2^{\square} & 2^{\square} < 10^6 < 2^{\square} \\ 2^{\square} < 10^6 < 2^{\square} & 2^{\square} < 10^6 < 2^{\square} & 2^{\square} < 10^6 < 2^{\square} \end{array}$$

(ج) در مورد توان‌های منفی نیز می‌توان چیزهایی گفت. با کمک نامساوی‌های بالا جاهای خالی را در نامساوی‌های زیر پر کنید.

$$\begin{array}{lll} 2^{\square} < 10^{-6} < 2^{\square} & 2^{\square} < 10^{-6} < 2^{\square} & 2^{\square} < 10^{-6} < 2^{\square} \\ 2^{\square} < 10^{-6} < 2^{\square} & 2^{\square} < 10^{-6} < 2^{\square} & 2^{\square} < 10^{-6} < 2^{\square} \\ 2^{\square} < 10^{-6} < 2^{\square} & 2^{\square} < 10^{-6} < 2^{\square} & 2^{\square} < 10^{-6} < 2^{\square} \end{array}$$

مسئله ۲. ابتدا مسئله ۳ از سؤال‌های جور دیگر باید دید از کتاب هفتم را مرور کنید تا تعریف مکعب مستطیل k بعدی را یاد بگیرید. یک مکعب k بعدی را به شکل I^k تخیل کنید که I یک پاره‌خط است. بنابراین مربع به شکل $I \times I$ و مکعب سه بعدی به شکل $I \times I \times I$ خواهد بود. وجوه مکعب k بعدی چندبعدی خواهند بود؟ آیا می‌توانید وجوه را بر حسب نمایش مکعب k بعدی به شکل I^k فرمول بندی کنید؟ تعداد وجوه مکعب k بعدی را بر حسب k بشمارید؟ تعداد رأس‌ها چقدر است؟ تعداد یال‌ها چطور؟ این‌ها را در یک جدول قرار دهید و با الگویابی، فرمولی کلی به دست دهید.

بعد مکعب	۱	۲	۳	۴	۵	۶	...
تعداد وجوه‌ها							
تعداد							
رأس‌ها							
تعداد یال‌ها							



▲ آموزش معلمان



▲ پاسخ‌ها



▲ ادامه مسئله‌ها

خطاهای فراگیر در محاسبات ریاضی

● افشین خاصه‌خان



پرداختن به مفهوم آن جست‌وجو کرد. این دانش‌آموزان توجه خود را بیشتر به آهنگ ضرب عددها معطوف کرده‌اند تا مفهوم آن‌ها و جواب‌های اشتباهی که می‌دهند، ضرب آهنگی مشابه با ضرب اصلی دارد.

تجویز و درمان

برای درمان این اشتباه متداول که به نظر می‌رسد دوران کرونا به علت حضورنداشتن دانش‌آموزان در مدرسه شدت بیشتری پیدا کرده است، باید مفهوم ضرب (جمع عددهای مشابه) را به این دانش‌آموزان یادآوری شویم و در صورت امکان فعالیت‌هایی طراحی و اجرا کنیم که این دانش‌آموزان، علاوه بر حفظ کردن جدول ضرب، علت حاصل ضرب‌ها را نیز بدانند و با تکرار منظم این محفوظات همراه با فهم آن‌ها، به سرعت قابل قبولی در محاسبه‌ها نیز دست یابند.

نسخه تکمیلی

بهتر است برای دانش‌آموزان در ارتباط با محاسبه‌ها، تمرین‌های تکمیلی مرکب از اعمال جبری طراحی کنیم یا از کتاب‌های کمک‌درسی سال‌های قبل، تمرین‌هایی مرتبط انتخاب و به عنوان کار در خانه به آن‌ها تکلیف دهیم. سپس چند سؤال در همین زمینه طراحی کنیم به عنوان آزمونک به آن‌ها ارائه دهیم و بر اهمیت این سؤال‌ها تأکید کنیم.

سلام و خسته نباشید خدمت دوست‌داران درمانگاه ریاضی. امیدوارم دانش‌آموزان ما بتوانند با ریاضیات ارتباط برقرار کنند و از مفهومی‌های آن لذت ببرند. صبر و شکیبایی در مطالعه ریاضی از یک طرف، و دقت و تأمل برای اینکه اشتباه‌های قبلی تکرار نشوند از طرف دیگر، دو عامل مهم در برقراری ارتباط با این علم مادر است. جامعه کم‌حوصله و کم‌دقت ما معمولاً از این ارتباط بهره زیادی نمی‌برد. در این قسمت نیز به دو اشتباه متداولی می‌پردازیم که دانش‌آموزان مرتکب آن‌ها می‌شوند.

اشتباه متداول ۴: تسلط کامل نداشتن در ضرب عددهای

یک‌رقمی در یک‌رقمی

تعداد قابل تأملی از دانش‌آموزان در دوره ابتدایی و حتی دوره‌های دبیرستان، در ضرب عددهای یک‌رقمی در یک‌رقمی دچار اشتباه می‌شوند. این اشتباه کوچک اما مؤثر در انجام محاسبه‌ها و حل مسئله‌ها مشکل ایجاد می‌کند. کم نیستند دانش‌آموزانی که اشتباه‌هایی نظیر ضرب‌های زیر را انجام می‌دهند:

$$3 \times 7 = 27 \quad 7 \times 4 = 24 \quad 7 \times 6 = 56 \quad \dots\dots$$

تشخیص

علت اصلی این اشتباه را می‌توان در حفظ کردن آهنگ‌وار جدول ضرب در پایه سوم ابتدایی، بدون

• مهدیه مسیبی

دلم برای چالش‌های شگفت‌انگیز می‌تپد

گفت‌وگو با **امیرحسین اشتري**، طراح و داور
مسابقه‌های ریاضی مدرسه از الیگودرز

سطح مطالعه، میزان آگاهی و شوق یادگیری او در ریاضیات، نسبت به سن و دوره تحصیلی‌اش، آن قدر قابل اعتماد و اتکا است که در برخی آزمون‌های مدرسه طراح سؤال و در تعدادی دیگر داور، بار و یاور مجموعه آموزشی خود باشد. در المپیادها و مسابقه‌های ریاضی شرکت می‌کند و می‌کوشد همواره یاد بگیرد و آموخته‌های خود را به راحتی با دیگر دوستان و هم‌کلاسی‌های خود به اشتراک بگذارد. امیرحسین اشتري، دانش‌آموز پایه نهم دبیرستان استعدادهای درخشان شهر الیگودرز است. تک فرزند است و پدرش پزشک و مادرش نیز در حرفه معلمی فعالیت دارد. او گفت‌وگو را این گونه آغاز کرد: «به نام خداوندی که جهان را بر اساس حساب و هندسه آفرید.» این گفت‌وگو را با هم می‌خوانیم.

○ پژوهش‌های من درباره شاخص‌های متفاوتی از ریاضیات، مثل نظریه اعداد، مجموعه‌ها و یا هندسه و مثلثات است. در جبر نیز پژوهش‌هایی داشته‌ام. مثل بی‌نهایت به عنوان مسئله عدد تقسیم بر صفر، صفر به توان صفر یا مطالعه کتاب فشرده ریاضیات. اصولاً اثبات قضیه‌های هندسی برای من چالشی شگفت‌انگیز است و فعالیت‌های گوناگونی در زمینه اثبات مسئله‌های هندسی و فرمول‌ها دارم.

● **چطور شد این موضوع‌ها را انتخاب کردید؟ آیا مدرسه یا معلمان پیشنهاد داده بود و یا خودتان علاقه داشتید؟**

○ تحقیق یا شرکت در مسابقه‌ها و المپیادها را با میل و علاقه‌مندی خودم دنبال می‌کنم و انجام می‌دهم. البته در بعضی موارد معلم در رابطه با موضوع‌ها و مسئله‌های نوین ریاضی پیشنهادهایی به من می‌دهد.

● **پژوهش‌ها چه کاربردی دارند و کجا قابل استفاده هستند؟**

○ پژوهش‌هایی در زمینه موضوع‌هایی مانند بی‌نهایت ذهن انسان را باز می‌کنند و در یادگیری درس‌ها به ما کمک می‌کنند. و یا هر چه انسان درباره نظریه عددها اطلاعات بیشتری داشته باشد، قدرت محاسبه بیشتری دارد و می‌تواند در مسئله‌های خرید و فروش جنس‌ها موفق باشد. تحقیق در رابطه با هندسه یا حل مسئله‌های هندسه هم به انسان قدرت تجزیه و تحلیل می‌دهد و منطق انسان را در فعالیت‌های روزمره تقویت می‌کند.

● **این پژوهش‌ها به کدام مباحث‌های درس ریاضی بیشتر ارتباط دارند و در فهم بهتر آن‌ها به شما یا دیگر دانش‌آموزان کمک می‌کنند؟**

○ پژوهش‌های من بیشتر با هندسه، جبر و احتمال، و نظریه اعداد ارتباط دارد. بعضی از دانش‌آموزان ریاضی را حفظ می‌کنند و درک درستی از آن ندارند. انجام پژوهش و تحقیق، منطق و

● **نقطه آغاز علاقه شما به درس ریاضی کجاست؟ چه عواملی دست به دست هم دادند تا ریاضی را دوست داشته باشید؟**

○ علاقه من به درس ریاضی پیش از رفتن به مدرسه شروع شد. از بچگی به حساب و کتاب علاقه داشتم. اصولاً چالش را دوست دارم. ریاضی برایم از سایر درس‌ها جذاب‌تر است، چون درسی نیست که آن را حفظ کنم. برای حل یک مسئله ریاضی گاهی باید ساعت‌ها فکر کرد و راه‌های متفاوت را آزمود. می‌توان گفت ریاضی پرکاربردترین علم در زندگی روزمره است. به عنوان نمونه، در خرید و فروش روزمره، به طور پی‌درپی از ضرب و تقسیم استفاده می‌کنیم. حتی در آشپزی نیز باید تا حدودی ریاضیات ابتدایی را بلد بود؛ مثلاً برای تعیین مقدار برنج از پیمانه استفاده می‌کنیم. یا مقدارهای مواد اولیه را اندازه می‌گیریم. ریاضی در هنر و مجسمه‌سازی نیز هست.

● **حالا که به کاربرد ریاضی اشاره کردید از جذابیت و کاربرد آن برای ما بیشتر بگویید.**

○ ریاضی علاوه بر جذابیت و شیرینی فراوان، درسی فلسفی و عمیق محسوب می‌شود. ریاضیات درس منطق است. خیلی چیزها در گذر زمان محو و نابود می‌شوند، ولی یک معادله ریاضی همیشه پابرجاست. در ریاضی خلاقیت، منطق و از همه مهم‌تر تفریح وجود دارد. **نیکلای ایوانوویچ لوبافسکی**، ریاضی‌دان روسی، می‌گوید: «هیچ شاخه‌ای از ریاضیات نیست که روزی در جهان واقعی به کار نرود.»

● **این طور که ما شنیده‌ایم شما در درس ریاضی علاوه بر محتوای کتاب درسی، یک سلسله فعالیت جداگانه هم دارید. تحقیقات و پژوهش‌هایی هم انجام داده‌اید. در مورد این پژوهش‌ها برای ما بگویید. چند تحقیق و پژوهش است و موضوع‌های آن‌ها چیست؟**

و یکی دو ساعت پژوهش داشته باشم. در درس ریاضی به سایر دانش‌آموزان کمک می‌کنم، به‌خصوص دانش‌آموزانی که در درس ریاضی ضعیف‌تر هستند. این کار برای فهم بهتر مطلب است؛ هم برای خودم و هم برای دیگران.

● چرا به ریاضی خیلی علاقه دارید. دلیل این علاقه چیست و چه کسانی در این علاقه‌مندی نقش دارند؟

○ به نظر من یک معادله ریاضی نسبت به خیلی چیزهای دیگر بیشتر برای ما باقی می‌ماند. از طرف دیگر به نظر من دانشی مثل ریاضی بسیار عمق و وسعت دارد. درس‌هایی از قبیل ریاضی و فیزیک در پیشرفت بشریت بسیار تأثیرگذار بوده و هستند. پسر خاله‌ام در عشق من به ریاضیات تأثیر بسزایی داشته است.

● دوست دارید در آینده در چه رشته‌ای ادامه تحصیل بدهید؟

○ به رشته‌های ریاضی و تجربی علاقه دارم. به رشته ریاضی به دلیل علاقه شخصی به رشته تجربی به دلیل حرفه پدر و پدربزرگم که پزشکی است.

● به نظر شما چرا برخی از دانش‌آموزان هم سن و سال شما این تصور را دارند که درس ریاضی سخت، خشک و غیرقابل فهم و درک است؟

○ این افراد به اندازه کافی با ریاضی وقت نگذرانده‌اند. گاهی ما با خیلی چیزها وقت می‌گذرانیم، اما برای برخی درس‌ها حس و حال نداریم. البته برخی از افراد حفظ کردن را بر منطق ترجیح می‌دهند و نگاه این افراد برای من محترم است. اما وقت‌گذرانی بیشتر با ریاضی، انسان را با این علم بی‌نظیر آشنا می‌کند. بعضی از دانش‌آموزان هم به دلیل شیوه‌های اشتباه تدریس کلاس‌های مدرسه یا آموزشگاه‌های خارج از مدرسه، از درس ریاضی زده می‌شوند. در صورتی که به عقیده من ریاضی، به اندازه حل کردن چیستان و یا اسموفامیل بازی کردن جذاب و هیجان‌انگیز است. علاقه به ریاضی به وقت‌گذرانی با این علم نیاز دارد. ریاضی گاه دیرپاب و دشوار می‌شود، اما با فکر و تأمل، مقداری شور و شوق، و پرورش منطق و استدلال فهم ریاضی آسان می‌شود.

● در چه زمینه‌های دیگری در حوزه ریاضی فعالیت دارید؟
○ در المپیادها و مسابقه‌های ریاضی مثل «کانگرو» یا «ساسمو» شرکت کرده‌ام. در زمینه همایش در مدرسه تا حدودی فعال هستم. همچنین برای برخی از آزمون‌ها به عنوان طراح سؤال فعالیت دارم و در برخی مسابقه‌های ریاضی مدرسه، به عنوان داور حضور پیدا می‌کنم. در برخی از جشنواره‌های سالانه نیز در حوزه روایتگری و توضیح رویدادهای علمی شرکت می‌کنم.

● برایتان درخشش روزافزون آرزو مندیم.

فهم انسان را در ریاضی افزایش می‌دهد و انسان را با منطق و استدلال بیشتر آشنا می‌کند. بنابراین دانش‌آموزانی که ریاضی را می‌فهمند، شیرینی دلیل آوردن یا نقض کردن فرض‌ها یا حل کردن مسئله‌ها را می‌چشند. به عبارت دیگر، با انجام پژوهش، انسان وقت بیشتری را با ریاضیات می‌گذراند و بیشتر با این علم عمیق و حیاتی رفیق می‌شود.

● اصولاً مطالعه خارج از کتاب درسی چه کمکی به شما می‌کند؟

○ مطالعه خارج از درس علاوه بر تفریح باعث می‌شود دامنه اطلاعات من درباره ریاضیات افزایش یابد و بیشتر به اعماق ریاضیات فکر کنم. فکرکردن در ریاضیات هدفمند و طبقه‌بندی شده است و حل تمرین و یا مسئله‌های خارج از حوزه مدرسه، به شناخت بیشتر مسئله‌ها و طبقه‌بندی راه‌حل‌ها در ذهن، کمک شایانی می‌کند.

● از چه منابعی برای تحقیق و پژوهش بیشتر استفاده می‌کنید و اگر در تحقیقات خودتان با مشکلی روبه‌رو بشوید، آن را چگونه برطرف می‌کنید؟

○ منابع متفاوتی برای پژوهش یا کمک به حل بعضی از مسئله‌ها وجود دارند از جمله دانشنامه‌ها، وبگاه‌ها و مجله‌های علمی در پژوهش‌ها کمک بسیاری می‌کنند. برای حل بعضی از مسئله‌ها نیز باید از روش‌های نوین، مثل رسم دقیق شکل در برنامه‌هایی مثل هندسه و برنامه‌جئوجبرا، کمک گرفت. کتاب‌های مرجع نیز به من در بعضی از پژوهش‌ها کمک می‌کنند. اگر در تحقیقاتم به مشکل برخورد کنم، از معلمم کمک می‌گیرم.

● شنیدیم شما به عنوان کمک معلم هم در مدرسه و کلاس خودتان فعال هستید. کمی در این زمینه برای ما بفرمایید.

○ تدریس را دوست دارم و همیشه می‌خواهم مطلبی را که یاد گرفته‌ام با بقیه به اشتراک بگذارم با مسئله سختی را برای آنان قابل فهم کنم. اینشتین می‌گوید: «هیچ چیزی را خوب نمی‌فهمید، مگر بتوانید آن را به مادر بزرگتان توضیح دهید.» تدریس ریاضی و حل مسئله‌های گوناگون انسان را به منطق و ریاضی نزدیک می‌کند و اگر انسان در تدریس روش‌های درستی را پیش بگیرد، دیگران را هم به ریاضی علاقه‌مند می‌کند.

● اصولاً در طول هفته چقدر ریاضی مطالعه می‌کنید تا همیشه از اطلاعات و آگاهی بالاتری نسبت به هم‌کلاسی‌ها برخوردار باشید. این‌طور که ما شنیده‌ایم، به خیلی از دانش‌آموزان مدرسه هم در آموزش ریاضی کمک می‌کنید. در این باره برای ما بفرمایید.

○ سعی می‌کنم در هفته پنج تا هفت ساعت مطالعه ریاضی



محمدتقی طاهری تنجانی

در کلاس درس قوانین بخش پذیری

آقای رهنما (دبیر ریاضی) رو به دانش آموزان کرد و گفت: «درس امروز بخش پذیری و قوانین بخش پذیری عددهاست. در جلسه های قبل به بخش پذیری اشاره کردیم. کسی یادش هست تعریف بخش پذیری را؟»

مصطفوی: آقا اجازه! شما در جلسه ای فرمودید که اگر عدد صحیح a بر عدد صحیح $b \neq 0$ بخش پذیر باشد، باید عدد صحیحی مانند q باشد که داشته باشیم: $a = bq$.

آقای رهنما: آفرین کاملاً درست است. وقتی 24 بر 3 بخش پذیر است که: $24 = 3 \times 8$. حالا شما بگویید چه عددی بر 2 بخش پذیر است.

بچه ها (یک صدا): عددهای زوج.

آقای رهنما: چه عددهایی زوج هستند؟

بچه ها: عددهایی که بر 2 بخش پذیرند!

آقای رهنما: حواستان را جمع کنید. این یک دور است و به جای اول برگشتیم. من پاسخ سؤال را نگرفتم!

احمدی: آقا اجازه! عددهایی بر 2 بخش پذیرند که باقی مانده تقسیمشان بر 2 برابر صفر شود.

آقای رهنما: آفرین! حالا به تعریف برگشتید. اما انجام تقسیم وقت گیر است. قاعده ای باید پیدا کنیم.

مصطفوی: از سال ها قبل به ما گفته اند عددی که یکان آن زوج باشد بر 2 بخش پذیر است، ولی دلیل آن را نمی دانم.

آقای رهنما: بیایید با یک مثال بررسی کنیم. آیا عدد 534 بر 2 بخش پذیر است. یک راه این است که تقسیم را انجام دهیم. اما ما به دنبال راه دیگری هستیم. می دانیم عدد 534 یعنی $5 \times 100 + 3 \times 10 + 4$ چون 100 و 10 بر 2 بخش پذیرند پس 5×100 و 3×10 نیز بر 2 بخش پذیرند. پس کافی است که عدد 4 یعنی همان یکان عدد 534 بر 2 بخش پذیر باشد. در حالت کلی اگر عدد abc را داشته باشیم می توان نوشت:

$$abc = a \times 10^2 + b \times 10 + c$$

احمدی: آقا اجازه! چرا بالای عدد خط کشیدید؟!

آقای رهنما: در ریاضیات منظور از abc ضرب سه عبارت a ، b و c است. ولی اگر بالای حرف ها خط بکشیم، به معنی عدد است. هر حرف نماینده یک رقم است که ارزش مکانی خودش را دارد. چون 10^2 و 10 بر 2 بخش پذیرند، برای آنکه عدد abc بر 2 بخش پذیر باشد، باید رقم یکان آن، یعنی c بر 2 بخش پذیر باشد. حالا شما بخش پذیری بر 4 را همین طور بررسی کنید.

مصطفوی: مثل حالت قبل می توانیم بنویسیم:

$$abc = a \times 10^2 + b \times 10 + c$$

چون 10^2 بر 4 بخش پذیر است، پس باید $b \times 10 + c$ و یا همان bc بر 4 بخش پذیر باشد.

آقای رهنما: و این یعنی عددی بر 4 بخش پذیر است که دو رقم سمت راست آن بر 4 بخش پذیر باشد. حالا با این قاعده کدام یک از عددهای 736 و 814 بر 4 بخش پذیرند؟

احمدی: خب معلوم است، عدد 736 . چون 36 بر 4 بخش پذیر است و در عدد 814 عدد 14 بر 4 بخش پذیر نیست.

آقای رهنما: درست است. حالا به همین روش می توانیم بخش پذیری بر 3 را بررسی کنیم. برای شروع عدد 6741 را در نظر بگیرید. ارزش مکانی عدد را می نویسیم:

$$6741 = 6 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 4 \times 10 + 1$$

خب حالا چه کنیم؟ عددهای 10^3 ، 10^2 و 10 بر 3 بخش پذیر نیستند که شبیه بخش پذیری بر 2 عمل کنیم. اینجا یک نکته را باید در نظر بگیریم. عددهای 10^3 ، 10^2 و 10 را اگر بر 3 تقسیم کنیم، باقی مانده شان 1 می شود. از این نکته استفاده می کنیم:

$$6741 = 6 \times 1000 + 7 \times 100 + 4 \times 10 + 1$$

$$= 6(999+1) + 7(99+1) + 4(9+1) + 1$$

$$= 6 \times 999 + 6 + 7 \times 99 + 7 + 4 \times 9 + 4 + 1$$

$$= (6 \times 999 + 7 \times 99 + 4 \times 9) + (6 + 7 + 4 + 1)$$

مجموع پرانتز اول بر 3 بخش پذیر است. چرا؟

محمودی: چون تک تک عبارت های آن بر 3 بخش پذیر است.

آقای رهنما: آفرین. حالا برای بخش پذیری بر 3 باید ببینیم حاصل پرانتز دوم هم بر 3 بخش پذیر است یا نه. حاصل پرانتز دوم می شود 18 و واضح است که 18 بر 3 بخش پذیر است.

پس عدد 6741 بر 3 بخش پذیر است. حالا کسی هست که قاعده کلی را حدس بزند.

مصطفوی: عددی بر 3 بخش پذیر است که مجموع رقم های آن بر 3 بخش پذیر باشد.

آقای رهنما: آفرین! حالا آیا عدد 12345678 بر 3 بخش پذیر است؟

احمدی: جمع رقم های عدد می شود 36 و 36 بر 3 بخش پذیر است. پس عدد مورد نظر بر 3 بخش پذیر است.

آقای رهنما: آفرین. بخش پذیری بر 9 هم مثل 3 همان مرحله ها را دارد. عددی بر 9 بخش پذیر است که مجموع رقم هایش بر 9 بخش پذیر باشند.

بر ۲ و ۶ بخش پذیر باشند ممکن است بر ۱۲ بخش پذیر نباشند؛ مثل عدد ۳۰. وقتی عدد ۱۲ را به دو عامل تجزیه می کنید، باید بزرگترین مقسوم علیه مشترکشان یک باشد تا درست دربیاید. چون بزرگترین مقسوم علیه مشترک ۲ و ۶ برابر ۲ است، پس قابل قبول نیست. ولی چون ۳ و ۴ بزرگترین مقسوم علیه مشترکشان یک است (نسبت به هم اول اند)، پس قاعده درست است. یعنی عددی بر ۱۲ بخش پذیر است که بر ۳ و ۴ بخش پذیر باشد.

حالا این مسئله را حل کنید: «اگر عدد $2a3b$ بر ۱۲ بخش پذیر باشد، a و b چه عددهایی هستند؟ آقای محسنی شما بفرمایید حل کنید.

محسنی: همان طور که الان اشاره کردید، باید عدد $2a3b$ یک بار به ۳ و یک بار به ۴ بخش پذیر باشد. یعنی $2+a+3+b$ یا $5+a+b$ باید بر ۳ بخش پذیر باشد. از طرف دیگر، $3b$ یا $30+b$ باید بر ۴ بخش پذیر باشد. بقیه اش را نمی دانم.

آقای رهنما: $30+b$ چه وقت بر ۴ بخش پذیر است؟ به جای b رقم بگذارد.

محسنی: اگر b برابر ۲ یا ۶ باشد.

آقای رهنما: خوب حالا یک جدول بکش و برای حالت $b=2$ و $b=6$ ، رقم های a را حساب کن.

محسنی: یعنی این جوری بنویسم؟

b	a
۲	۲, ۵, ۸
۶	۱, ۴, ۷

اگر $b=2$ ، پس $5+a+2$ باید بر ۳ بخش پذیر باشد و a می شود ۲ یا ۵ یا ۸.

در حالت $b=6$ هم، $11+a$ باید بر ۳ بخش پذیر باشد و a می شود ۱ یا ۴ یا ۷. پس مسئله ۶ جواب دارد.

آقای رهنما: البته برای عددهای دیگر هم قوانین بخش پذیری داریم، ولی برای امروز کافی است. تعدادی مسئله هم برایتان در نظر گرفته ام که در منزل حل کنید. روی آن ها کار کنید تا جلسه بعد بررسی کنیم. مبصر کلاس لطفاً برگه های تمرین را پخش کنید.

تمرین

۱. بخش پذیری هر یک از عددهای زیر را بر ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ بررسی کنید.

الف) ۱۲۳۴۲ (ب) ۹۰۱۸۱۵ (پ) ۱۸۳۳۲۴ (ت) ۱۲۳۱۲۳

۲. مقlob یک عدد، یعنی برعکس نوشتن آن. مقlob ۷۴۲۳ می شود ۳۲۴۷. بررسی کنید اگر عددی را از مقlobش کم کنیم، حاصل بر ۹ بخش پذیر است.

۳. اگر عدد $2ab3c$ بر ۳۰ بخش پذیر باشد، a و b کدام اند؟

۴. اگر عدد $4b3a$ بر ۹ و عدد $3a4c$ بر ۴ بخش پذیر باشند، a ، b و c کدام اند؟

۵. قاعده ای برای بخش پذیری بر ۲۵ پیدا کنید.

محمودی: آقا، یعنی چون ۹۹۹، ۹۹ و ۹ بر ۹ بخش پذیرند، پس پرانتز اول بر ۹ بخش پذیر است. حالا باید مجموع عددهای پرانتز دوم بر ۹ بخش پذیر باشد. درست گفتیم؟

آقای رهنما: کاملاً درست است. حالا بفرمایید عدد ۱۲۳۴۵۶۷۸ آیا بر ۹ بخش پذیر است؟

محمودی: مجموع رقم های عدد می شود ۳۶ و ۳۶ بر ۹ بخش پذیر است. بله، عدد ۹ بخش پذیر است.

آقای رهنما: شما می توانید بخش پذیری بر ۵ را هم همین طور بررسی کنید. چون ۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰ و ... بر ۵ بخش پذیرند و داریم:

$$abcd = a \times 10^3 + b \times 10^2 + c \times 10 + d$$

پس باید d بر ۵ بخش پذیر باشد؛ یعنی d یا صفر است یا ۵. حالا ببینید چند مسئله حل کنیم تا با کاربرد این قوانین بیشتر آشنا شوید. اگر عدد ۸۹۷۵ بر ۳ بخش پذیر باشد، a چه رقم هایی می تواند باشد.

احمدی: آقا اجازه! ما بگوییم. باید جمع رقم های عدد بر ۳ بخش پذیر باشد؛ یعنی $29+a$ باید بر ۳ بخش پذیر باشد. a باید رقمی باشد که اگر با ۲۹ جمع شود، حاصل مضرب ۳ باشد. کمترین رقم عدد ۱ است، بعدش ۴ و ۷. پس مسئله سه جواب دارد.

آقای رهنما: آفرین! حالا این مسئله را حل کنید: اگر عدد $732b$ بر ۴ بخش پذیر باشد، حداکثر مقدار b چقدر است؟

علیپور: آقا عددی بر ۴ بخش پذیر است که دو رقم سمت راست آن بر ۴ بخش پذیر باشد. پس باید $2b$ بر ۴ بخش پذیر باشد. بقیه اش را نمی دانم.

آقای رهنما: خوب $2b$ را به صورت ارزش مکانی بنویسید:

$$2b = 2 \times 10 + b$$

پس باید $20+b$ بر ۴ بخش پذیر باشد. b می تواند ۴ یا ۸ باشد. پس حداکثر مقدار b برابر ۸ است. حالا بگویید چند عدد سه رقمی با ارقام برابر داریم که بر ۳ بخش پذیر باشند؟ عدد سه رقمی را به صورت aaa در نظر بگیرید.

احمدی: آقا باید جمع رقم ها بر ۳ بخش پذیر باشد؛ یعنی $3a$. خوب $3a$ که مضرب ۳ است. یعنی هر عدد سه رقمی که رقم هایش برابر باشند بر ۳ بخش پذیر است. حالا باید ببینیم a چه رقم هایی می تواند باشد. از صفر تا ۹، یعنی ۱۰ رقم به جای a می توانیم بنویسیم!

آقای رهنما: آیا صفر هم می تواند به جای a قرار بگیرد؟ بچه ها: نه نمی شود!

آقای رهنما: پس به جز صفر ۹ تا رقم داریم که هر کدام می توانند به جای a بشینند. پس چند تا عدد سه رقمی داریم؟ بچه ها: ۹ تا!

آقای رهنما: آفرین. حالا بگویید چه عددهایی بر ۶ بخش پذیرند؟ **علیپور:** عددهایی که هم بر ۲ و هم بر ۳ بخش پذیر باشند.

آقای رهنما: آفرین! حالا چه عددهایی بر ۱۲ بخش پذیرند؟ بچه ها: عددهایی که بر ۲ و ۳ یا ۶ و ۴ بخش پذیر باشند!

آقای رهنما: درست است که: $12 = 2 \times 6$ و $12 = 3 \times 4$ ، ولی عددهایی که

آریان خلیلی

ذخیره و بازیابی داده‌ها در برنامه‌نویسی

هر لیوان می‌تواند
چیزهای متفاوتی را
در خود جای دهد،
اما هر بار فقط
می‌تواند حاوی یکی
از آن‌ها باشد.



همه برنامه‌ها، از برنامه یک ماشین حساب ساده گرفته تا برنامه یک نرم‌افزار حرفه‌ای مانند «فتوشاپ»، باید بتوانند داده‌ها را ذخیره کنند و روی آن‌ها دستورات مورد نظر را انجام دهند. اساسی‌ترین ابزارهای برنامه‌نویسی مورد استفاده به این منظور، **متغیرها**، **ثابت‌ها** و **آرایه‌ها** هستند.

متغیرها

متغیرها یکی از سازوکارهای ذخیره‌سازی داده‌ها هستند. شبیه یک لیوان که می‌تواند نام، قیمت و حجم مشخصی داشته باشد، هر متغیر نیز می‌تواند ویژگی‌های مربوط به خود را داشته باشد. از آنجا که محتویات درونی یک لیوان می‌تواند در طول زمان تغییر کند، محتویات درون یک متغیر نیز می‌تواند در ضمن اجرای برنامه تغییر کند. همچنین هر متغیر اندازه خاصی دارد؛ مانند هر لیوان که حجم معینی دارد.

مهم است که از همان ابتدای برنامه‌نویسی، اندازه متغیر را متناسب با نیازمان انتخاب کنیم، زیرا انواع متفاوت داده‌های ذخیره‌شده در متغیر می‌توانند حجم‌های متفاوتی از فضای حافظه رایانه را اشغال کنند.

ذخیره‌سازی متغیرها

متغیرها همیشه برچسب‌گذاری می‌شوند. برای جست‌وجو و دسترسی آسان به داده‌ها، برنامه‌نویسان نام‌هایی مفید و توصیفی برای متغیرهای خود انتخاب می‌کنند.

ثابت‌ها

ثابت‌ها مانند متغیرها رفتار می‌کنند، اما برای داده‌هایی استفاده می‌شوند که در حین اجرای برنامه تغییر نمی‌کنند. از ثابت‌های برنامه‌ها، برای ذخیره برخی مقدارهای ریاضی (مانند مقدار عدد پی)، ثابت‌های علمی (مانند عدد آووگادرو) یا مقدارهای خاص هنگام برنامه‌نویسی استفاده می‌شود. ثابت‌ها هنگام اصلاح برنامه‌ها می‌توانند کمک‌کننده باشند. هر چیزی که ممکن است فراموش شود، هر چند سال یک بار تغییر کند، یا حتی دچار اشتباه املائی شود، بهتر است آن را در یک ثابت ذخیره کنید.

ارزش ثابت

هنگامی که یک مقدار به یک ثابت اختصاص داده می‌شود، مقدار آن را نمی‌توان تغییر داد؛ مگر اینکه برنامه متوقف و دوباره راه‌اندازی شود. این شبیه به یک صندوق بسته است که محتویات آن فقط در صورت باز شدن آن قابل تغییر است.



دنیای واقعی

برنامه‌ی شرکت

فرض کنید یک شرکت در حال تغییر نام تجاری خود است. اگر برنامه‌نویس وبگاه (وبسایت)، داده‌های مربوط به تصویر برنامه‌ی (بنر) شرکت را در یک ثابت ذخیره کرده باشد، فقط باید یک تغییر در کد وبگاه ایجاد کند تا در همه جا تغییر مورد نظر اعمال شود. در غیر این صورت، برنامه‌نویس وبگاه باید تعداد بسیار زیادی پرونده (فایل) را برای اعمال تغییر جست‌وجو کند.



آرایه‌ها

آرایه مجموعه‌ای از عناصر مشابه با ترتیبی خاص است. درست مثل خانه‌های خیابان یا خودروهای پارک‌شده در یک توقفگاه که شروع و پایان مشخصی دارند. موقعیت یک عنصر در یک آرایه را «شاخص» (اندیس) آن آرایه می‌گویند. برای عنصر اول یک نام یا برچسب انتخاب می‌شود و عنصرهای دیگر بر اساس فاصله‌شان از عنصر اول نام‌گذاری (برچسب‌دهی) می‌شوند. در مجموعه‌ای از خودروها، نام اولی «خودرو»، نام دومی «خودرو+۱»، بعدی «خودرو+۲» و به همین ترتیب برای خودروهای دیگر نام انتخاب می‌شود.

اندازه یک آرایه

مانند طراحی یک توقفگاه، اندازه یک آرایه از قبل تعیین و سپس پر می‌شود. همچنین می‌توان یک متغیر برای پیگیری تعداد موقعیت‌های پر شده ایجاد کرد.

شماره‌گذاری در آرایه‌ها، به جای ۱، از ۰ شروع می‌شود. آرایه‌ای با ده عنصر حاوی موقعیت ۰ تا ۹ است.



اشیا

هر شیء نوعی متغیر خاص و دارای اندازه سفارشی است. این شیء زمانی مفید است که نیاز باشد داده‌های مربوط به آن در اندازه‌ها و شکل‌های متفاوت با هم گروه‌بندی شوند. نکته کلیدی در مورد اشیا این است که کاربران باید خودشان کد مربوط به آن را بنویسند. برای این کار، یک الگوی خام اولیه به نام «کلاس» باید تعریف شود. این کار شامل فهرست کردن تمامی ویژگی‌های شیء است که هر کدام متغیر متفاوتی هستند. پس از آن، هر بار می‌توان از همان الگوی اولیه برای ایجاد یک شیء جدید استفاده کرد.

شیء مشتری

یک شیء برای یک خریدار برخط ممکن است شامل یک رشته متن (نام مشتری)، چند عدد (سن مشتری و یک شماره شناسایی منحصر به فرد) و یک آرایه (اقلام موجود در سبد خرید برخط مشتری) باشد.



ژرف و عمیق

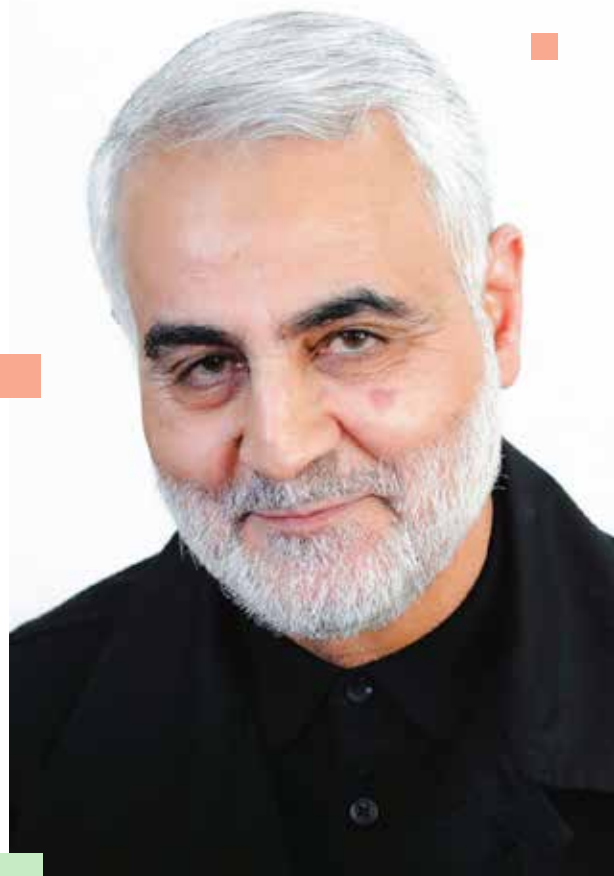
مزیت‌ها و عیب‌ها

برای دسترسی به داده‌ها به صورت گروهی، آرایه‌ها بسیار ارزشمندند. مانند یک برنامه کاربردی (اپلیکیشن) موسیقی که تمام آهنگ‌های یک هنرمند را فهرست می‌کند. با این حال، اگر آرایه‌ای بیش از حد طولانی باشد، یافتن یا اصلاح یک عنصر منفرد در آن می‌تواند دشوار باشد. یک عنصر خاص می‌تواند در هر جایی باشد. برای مثال در موقعیت‌های ۱، ۵۳، یا ۴۸۹۳. تا زمانی که به هر عنصر نگاه نکنید، جای آن را نمی‌توانید تشخیص دهید.

ژرف و عمیق

چرا از اشیا استفاده کنیم؟

هدف اصلی از ایجاد یک شیء نگهداری داده‌های مربوط به آن در یک موقعیت مرکزی است. برنامه‌نویسی شیء‌گرا، روش‌های ایجاد یک شیء را معین می‌کند که شامل تابع‌های ویژه‌ای برای دستکاری داده‌های ذخیره‌شده در شیء هستند. می‌توان دسترسی بخش‌های متفاوت برنامه به متغیرها را محدود کرد. این به ویژه برای برنامه‌های نرم‌افزاری بزرگی که صدها، ولی نه هزاران فایل کد دارند، مفید خواهد بود، که ممکن است هر کدام نوعی متفاوت و نامرتب از داده‌ها را پردازش کنند.



آرشی با کمان عشق و آگاهی

همان‌طور که می‌دانیم سردار قاسم سلیمانی آن دلیرمرد جبهه‌های نبرد با دشمنان ایران و اسلام روز ۱۳ دی ماه ۱۳۹۸، در فرودگاه بغداد به‌دست نیروهای آمریکایی همراه با ابومهدی المهندس به شهادت رسید و بدین‌سان به زندگی مردی که از آغاز دفاع مقدس تا آن روز که به شهادت رسید، یک دم نیاسوده بود، پایان داده شد.

سردار قاسم سلیمانی را باید از آن دسته سرداران بزرگی به شمار آورد که در تاریخ ایران کم‌شمار نبوده‌اند و همچون آرش کمانگیر افسانه‌ای، هنگام دفاع از وطن، جان خویش را چون تیری در کمان نهاده و به افق‌های بی‌انتهای پرتاب کرده و جسم خویش را باقی گذاشته‌اند.

سردار سلیمانی از هوش سرشار و قلبی رئوف برخوردار بود و در دفاع از محرومان و ستم‌دیدگان سراز پا نمی‌شناخت. ما نمی‌دانیم او چقدر ریاضی‌خوانده بود و یا چقدر استعداد ریاضی داشت، اما از سرزمینی برخاسته بود که به شهادت یکی از معلمان بزرگ ایران، یعنی

شادروان **احمد آرام**، همهٔ کودکانش از استعدادی سرشار برخوردارند. در سال ۱۳۲۴، احمد آرام که آن زمان بازرس فرهنگ بود، برای بازدید از مدرسه‌های استان کرمان و مشاهدهٔ پیشرفت‌ها و عقب‌ماندگی‌های مدرسه‌های آنجا راهی این استان می‌شود. از قضا به منطقهٔ «رابر» می‌رسد که امروز می‌دانیم قاسم سلیمانی سال‌های بعد در آنجا متولد شده است. یکی از همراهان احمد آرام، چنین می‌گوید:

«بعد از بافت، در مدرسهٔ **رابر**، از بخش‌های بزرگ و حاصل‌خیز بافت، به شاگردانی برخوردیم که از نظر استعداد و هوش به‌شدت ما را تحت تأثیر قرار دادند. درست به یاد دارم که آقای **احمد آرام** در دفتر بازرسی -شاید هنوز به یادگار مانده باشد- نوشتند: امروز در این نقطهٔ دورافتادهٔ کوهستانی از ایران عزیز که نه راه دارد و نه وسایل رفاه، با کودکانی مواجه شدم که به تحقیق و بدون مبالغه از باهوش‌ترین کودکان دنیا هستند و اگر وسایل تعلیم و تربیت برایشان به‌طور صحیح فراهم گردد، از میان آنان نوابغی برخواندخواست» (نقل از آرام‌نامه، به کوشش دکتر مهدی محقق، ۱۳۹۳).

آری، سردار قاسم سلیمانی یکی از همان نوابغ مورد انتظار بود که در دفاع از ایران، در جبههٔ ایمانی و نظامی درخشید و جان خود را در راه انجام وظیفه تقدیم کرد. این جدول را به یاد او برای شما تهیه کرده‌ایم که با جدول‌هایی که تاکنون دیده‌اید متفاوت و از نظر ریاضی جالب توجه است.

● شرح جدول

۱. **یک جدول ۱۵×۱۵ خالی مانند جدول صفحهٔ بعد بکشید.**

۲. به‌جای هر رقم یا عدد که در جدول وجود دارد، حرف مربوط به آن را، از حروف ابجد، در جدول خالی بگذارید (حرف چ را مثل ج برابر ۳ حساب کنید)

۳. هنگامی که جدول کامل شد، ببینید کدام ردیف یا ستون جدول با شرح‌هایی که ما بعد از جدول آورده‌ایم مطابقت دارد. آن‌ها را شماره‌گذاری کنید.

۴. در پایان و هنگامی که جدول را کامل کردید، از ترکیب سه کلمه: دو کلمه، در ردیف سوم و چهارم، و یک کلمه در ستون دهم، عبارتی به دست می‌آورید که نام زندگی‌نامهٔ خودنوشت شهید قاسم سلیمانی است؛ این زندگی‌نامه جنگی نیست و بیشتر به دوران کودکی و نوجوانی این سردار پرداخته است.

● افقی

- ☐ خانهٔ فشنگ - «یک شیء» با «ن» اضافه - پرچم عزا
- ☐ مخفف اینک - از سرداران شهید دفاع مقدس+ش - قاق میان تهی
- ☐ پزشک می‌دهد - ساختمان و عمارت.
- ☐ باطل نیست - مقدرات - اتم سرکنده!
- ☐ موش پرتابی - اما دیگر ندارم - قفل در چوبی روستا
- ☐ ناحیه‌ای در کرمان که شهید سلیمانی از آن برخاسته بود - هم‌رمز سردار سلیمانی که با هم شهید شدند.
- ☐ پایتخت ایتالیا - حرف اضافه - شهید سلیمانی فرمانده این سپاه بود - خشک چوب نوازنده - عدد دم‌بریده
- ☐ نی شیرین - سدی در لواسان
- ☐ کمانگیر حماسی ایران - جاری است - پرندۀ خوشبختی - گلو

از «بر» تشخیص نمی‌دهد -
واحد پول ژاپن - گهواره قدیم - کاری
که باید با مسئله کرد - بمب بی‌سر
کشور همسایه - قتل ناجوانمردانه
و سریع و معمولاً سیاسی
شرک آورنده به خدا - کشیدنی
مثل لشکر
میوه استوایی - به زخم هم
می‌گویند - با «توان» می‌آید - جشن
نیست.
در ترکی یعنی سفید - از غذاها -
نغمه و سرود - آتش لر - آخرین عدد
تک رقمی



پاسخ ◀

مقدس - پنهان شدن به قصد ضربه زدن
از اقوام ایرانی - زیرا - متضاد رفت
- نیز
آرامگاهی منسوب به یک پیامبر
در شهرستان خدابنده در زنجان -
پیکر
دزد نامرتب - از مزه‌ها
دریاچه‌ای در ترکیه - فوری -
تحت با غلط املایی - برادر خار
شهر زلزله - کلمه‌ای از شهید
سلیمانی - در کردی به معنی سیاه
است.
خیلی ترسناک - آبشار در هم
ریخته - پایین‌تر از کم
شصت ثانیه - همان کمانگیر است.
با «او» چه سود گفتن وعظ / نرود
میخ آهنین در سنگ! - بالاتر از بیش

صفت ویژه پلنگ - چیره‌دست
هنر انگلیسی - خوابیده در
بیمارستان
بزرگ‌ترین اثر حماسی زبان
فارسی - سپاه عراقی که به نفع ایران
می‌جنگید.
سلاح پرتابی دستی - پهلوان
همه دوران‌ها
این نیست - «با» ی عرب - همان
مورچه است - خمره - قبول نیست
مرکز استان گیلان - رواندا - قوت
و زیادی - غار پیغمبر

عمودی

اسلحه‌خانه ترکی - همان دریای
مانش است.
خاک - دعا خواندن در مکان‌های

۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
۱۰	۴	۵	۴۰	۶	۲	۱		۲۰	۳۰	۴۰	۴۰۰	۱	۵۰	۱۰۰
۲۰		۲۰۰	۵	۱	۴۰		۴		۲۰۰	۶	۲۰۰	۱۰۰۰		۶
۴	۷۰		۱۰	۵۰		۶۰	۴	۱۰۰		۷	۱		۴۰	۲۰۰
۱۰۰	۲۰۰	۱۰	۲		۵۰	۱۰	۷	۱۰	۳		۲	۱	۳۰۰	۶۰۰
۱۰	۱	۵۰		۱	۴۰	۵		۴	۶	۲۰۰		۳۰۰	۲۰۰	۱
۱۰۰	۱۰۰		۳۰۰	۵۰	۱۰	۴	۳۰	۱	۵۰	۱۰	۷		۲۰	۵۰
۵		۵۰	۱	۱۰	۴۰۰	۳۰		۲۰۰	۲۰	۳۰۰	۱۰	۵۰		۵
	۱	۵۰	۲		۲۰۰				۵		۱	۶	۴	
۲۰		۱۰	۲۰۰	۴۰۰	۶۰	۲		۱		۴۰۰	۲۰۰	۱		۲
۴۰	۴۰۰		۱	۵	۱۰	۱۰	۱	۵۰	۱	۶	۴۰۰		۱۰۰	۸
۱	۲۰۰	۸		۴۰۰	۴	۳۰۰		۴	۴۰	۳۰۰		۴۰۰	۳۰۰	۲۰۰
۵۰	۶	۳۰	۲۰		۴۰	۴۰۰	۳۰۰	۱	۴		۲۰	۳۰۰	۶	۴۰
۴	۲۰۰		۴۰	۶۰۰		۲۰۰	۶	۴۰		۷۰	۴۰		۵۰	۱
۱		۴۰	۴۰۰	۶۰	۲۰۰		۲۰۰		۵	۷	۱۰	۵۰		۵۰
۲۰۰	۴	۲	۲۰۰	۲۰	۳۰۰	۳۰		۵	۴۰	۱	۵۰	۵	۱	۳۰۰

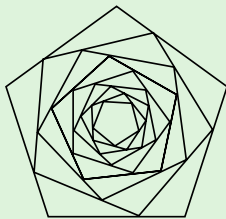
حروف ابجد

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
س	ع	ف	ص	ق	ر	ش	ت	ث	خ	ذ	ض	ظ	غ	
۶۰	۷۰	۸۰	۹۰	۱۰۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	۶۰۰	۷۰۰	۸۰۰	۹۰۰	۱۰۰۰	

عباس قلعه پورا قدم

جگانه پنج ضلعی منتظم رسم می شود؟ تودرتو

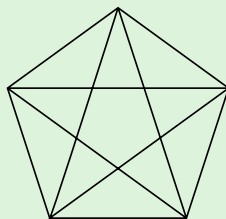
و در نهایت:



شکل ۷

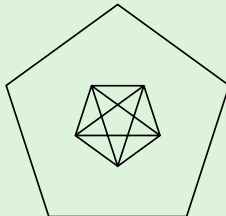
نحوه رسم شکل ۲:

شکل ۲ هم پنج ضلعی های تودرتو را نشان می دهد. برای رسم آن ابتدا یک پنج ضلعی منتظم دلخواه و سپس قطرهای آن را رسم کنید (شکل ۸).

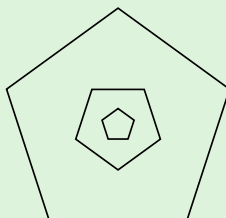


شکل ۸

همان طور که می بینید، با رسم قطرهای، علاوه بر یک پنج ضلعی منتظم، ستاره پنج پر زیبایی هم درست می شود. حالا با پاک کردن قسمت های اضافی، دو تا پنج ضلعی تودرتو می مانند. دوباره قطرهای پنج ضلعی جدید را رسم می کنیم تا به شکل های ۹ تا ۱۰ برسیم.

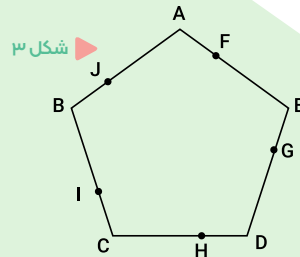


شکل ۹



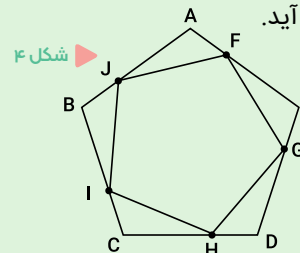
شکل ۱۰

باز هم می توانید ادامه دهید و تعداد پنج ضلعی ها را افزایش دهید. امیدوارم این دو تا رسم را با دقت تمرین کنید. به نظر من شکل ۱ جالب تر و شبیه ماریچج است. البته اگر کمی با فاصله به آن نگاه کنید، ماریچجی بودن آن را خواهید دید.



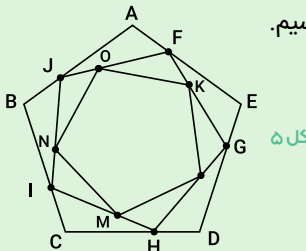
شکل ۳

در شکل ۳، طول هر یک از پاره خط های AF, EG, DH, CI و BJ برابر یک سوم طول ضلع پنج ضلعی است. حالا این پنج نقطه را به هم وصل کنید تا یک پنج ضلعی دیگر درون پنج ضلعی اول پدید آید.

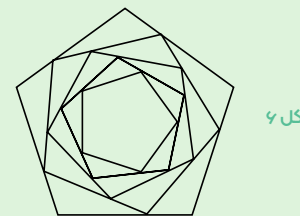


شکل ۴

در شکل ۴ همان کارهایی را که در مورد پنج ضلعی ABCDE انجام دادید، برای FGHIJ انجام دهید تا پنج ضلعی جدیدی حاصل شود. این کار را چند بار دیگر تا جایی که امکانش هست ادامه می دهیم تا به شکل های ۵ تا ۷ برسیم.



شکل ۵

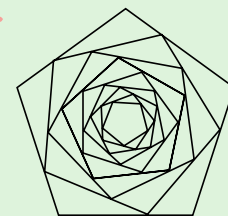


شکل ۶

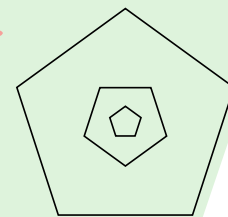
سلام. امیدوارم از رسم های قسمت های قبل لذت برده باشید و با دقت و حوصله رسم های این شماره از مجله را نیز دنبال کنید. بله! لازمه این گونه رسم ها حوصله داشتن است. راستش را بخواهید امروز که این مطلب را برای شما عزیزان آماده می کردم و رسم ها را می کشیدم، چندین بار از فرزندانش شنیدم که: «عجب حوصله ای داری!»

خب! برویم سراغ اصل مطلب. شکل های زیر چگونه رسم می شوند؟

شکل ۱



شکل ۲



نحوه رسم شکل ۱:

شکل ۱ حاوی پنج ضلعی های منتظم تودرتو است. برای رسم آن، ابتدا یک پنج ضلعی منتظم به اندازه دلخواه رسم کنید. البته نباید کوچک باشد، چون می خواهیم چند تایی دیگر درون آن جا بشود. من پنج ضلعی خودم را ABCDE نامیده ام. حالا هر یک از ضلع های آن را به سه قسمت مساوی تقسیم و یک قسمت را با گذاشتن نقطه ای در محل مورد نظر، جدا کنید. به شکل ۳ توجه کنید.

علیرضا محمد صالحی

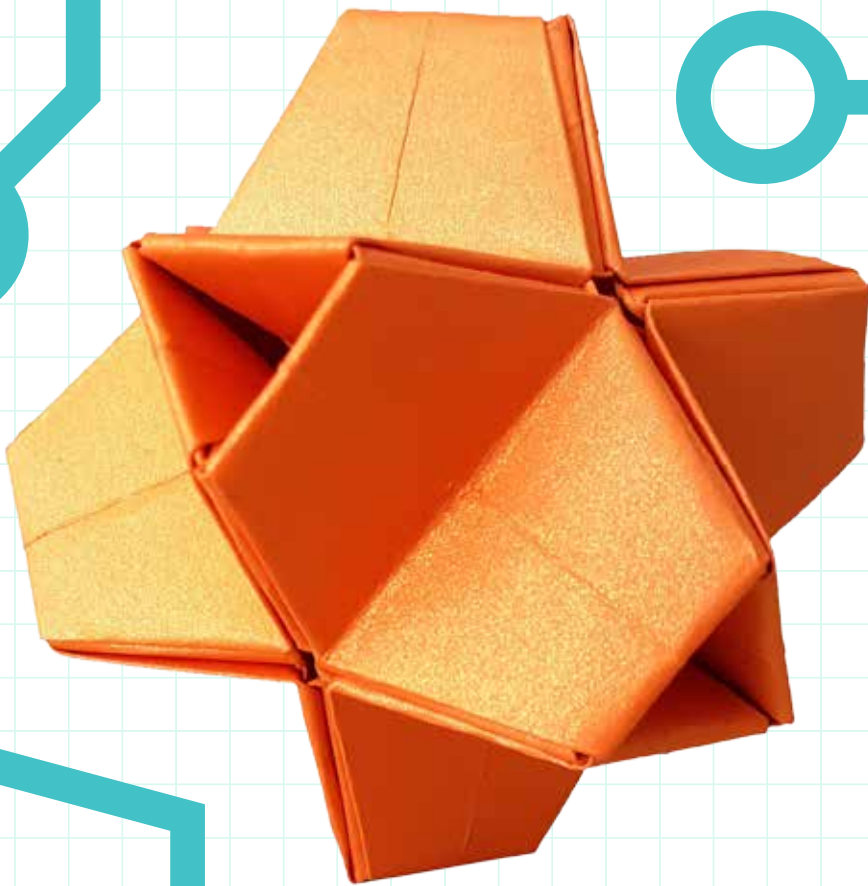
کاغذتایی



گل‌های چندوجهی



برای مشاهده
مراحل ساخت،
رمزبانه را پویش
کنید.





طوفان اقصا

Storm
Al.Aqsa

بار دیگر نیز می‌گویم
این ستاره‌های شش پر
در مسیر ماه، چون مین‌اند
ای دریغ‌ناام داوود
ای دریغ‌ناثر ستاره
ای دریغ‌نا ماه
قدس، خون یحیی در دل تبت است
قصه یوسف درون چاه
سنگ‌ها بگذار چون باد فرود آیند
سنگ‌ها ایستن ایرتد
باران کم نخواهد شد
هر شهید ابری است
جمعه‌ها در سجده خون
از شهیدان کم نخواهد شد

بار دیگر نیز می‌گویم
سیدی زخمی ست اینک قدس
و خبرها همچنان خون
دردها سنگین
سنگ‌ها برآتر از تیغ صلاح‌الدین
علیرضا فزوه

