



متوسطه دوم
ریاضی



دانشگاه تهران
سازمان پژوهش‌های آموزشی
و انتشارات دولتی آموزش

فصلنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

برای دانش آموزان دوره متوسطه دوم

شماره پستی ۱۲۳/۱۴۱۳۳
دوره پستی ۱۴۱۳۳

www.roshdmag.ir

برهان تازه!

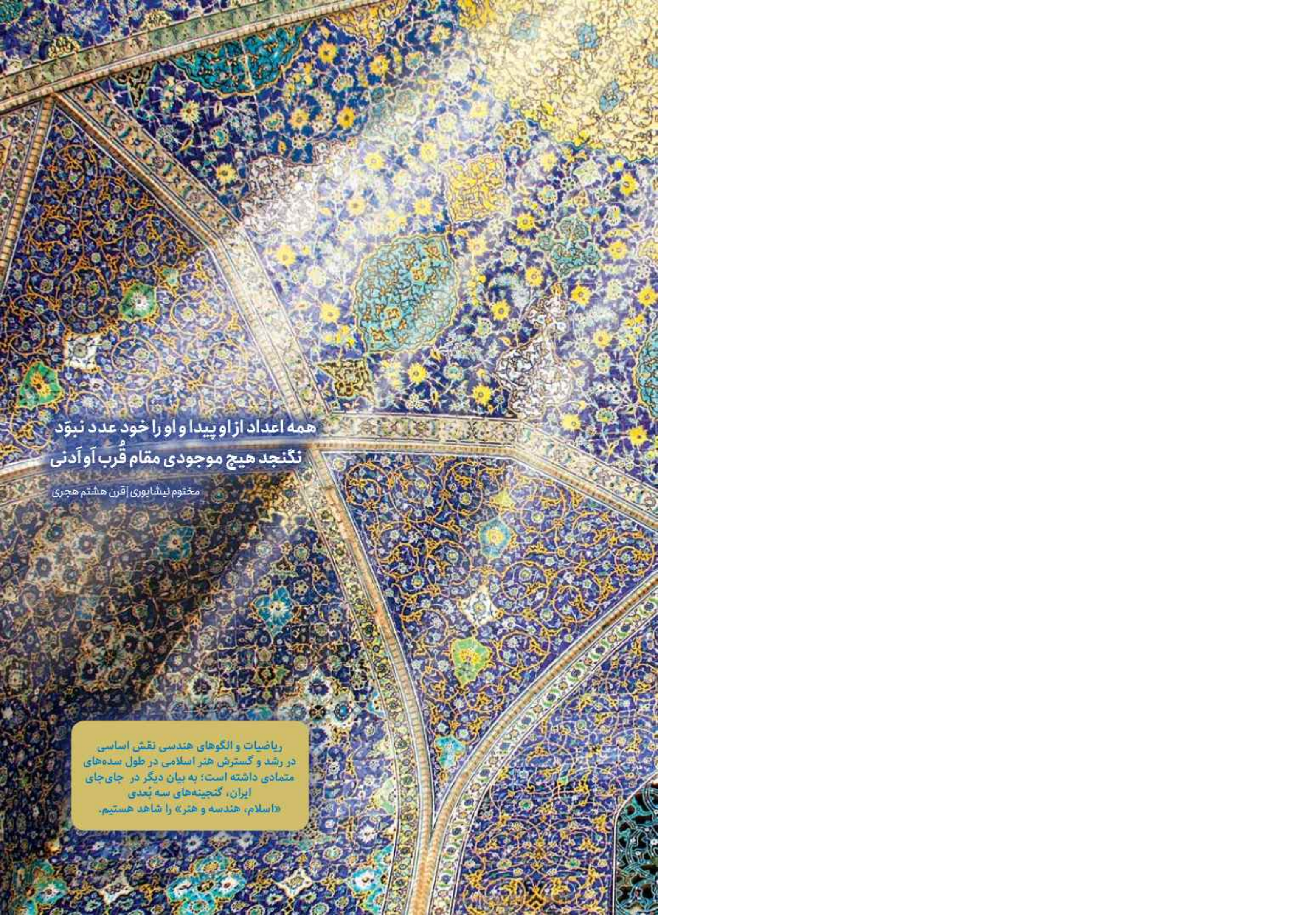
رستم برهان

یک فتنان چای داغ

مسابقه، داستان، سرگرمی و...

به دنبال حیات





همه اعداد از او پیدا و او را خود عدد نبود
نگنجد هیچ موجودی مقام قُرب او آدنی

مختوم نیشابوری | قرن هشتم هجری

ریاضیات و الگوهای هندسی نقش اساسی
در رشد و گسترش هنر اسلامی در طول سده‌های
متضادی داشته است؛ به بیان دیگر در جای جای
ایران، گنجینه‌های سه بُعدی
«اسلام، هندسه و هنر» را شاهد هستیم.



متوسطه ۲

ریاضی



مجله آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
برای دانش آموزان دوره متوسطه ۲
شماره ۱۴ | دوره سی و دوم | ۶۴ صفحه
www.roshdmag.ir

مدیر مسئول: محمد صالح مذنبی
سر دبیر: دکتر عجمید حکمت
محرر داخلی: محمود داووزنی
(با تشکر از الهام الیکایی)
ویراستار: پرویز و استانی
تصویرگر روی جلد: شهرام شیرزادی
طراح گرافیک: روح الله محمودیان

پیشام آیتی پور: محرم ایبره موسی
محمد هاشم و سمنی: محمود داووزنی
رحیم خیرالله زاده: محمدرضا سید صالحی
سید محمد رضا هاشمی موسوی
محمد تقی طاهری تنجانی: آزادیه فرزاد
حسین نامی ساعی: احسان یار محمدی

وبگاه
www.roshdmag.ir
رایانامه
borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir

نشانی دفتر مجله
تهران، ایرانشهر شمالی، پلاک ۲۷۰
تلفن دفتر مجله
۰۲۱-۸۸۸۳۱۶۲۰ (داخلی ۵۲۳)
نمابر مجله
۰۲۱-۸۸۴۹۰۳۱۶
صندوق پستی دفتر مجله
۱۵۸۷۵/۶۵۵۵
صندوق پستی امور مشترکین
۱۵۸۷۵/۳۳۳۱
تلفن امور مشترکین
۰۲۱-۷۷۶۳۳۲۰۸



به نمونه بلارا
پوشش کنید

- ۲۱ | یادداشت سردبیر / یک، دو، سه: برهان تازه / امجد حُلمت
- ۳۱ | معارف درجه دو / معرم ایبره موسی
- ۹۱ | ناخست رستم / دستار و گرم هفتواد / حسین نامی ساعی
- ۱۲۱ | بیات در این شبویه چالش کنیم! / معرم ایبره موسی
- ۱۶۱ | عددها و اخلاق / زهره ناظمی
- ۱۷۱ | یک شگفتی در عددها / محمود داووزنی، چهار سلطانپور
- ۲۲۱ | زمین، بدر بزرگ / معمر تقی طاهری تنجانی
- ۲۶۱ | سرگردان در بیابان / احسان یار محمدی
- ۳۲۱ | مفهوم ریاضی در شعر سعدی / بهنام آیتی پور
- ۳۴۱ | مساحت مثلث (با استفاده از مختصات رأس های آن) / امجد حُلمت
- ۳۸۱ | به دنبال حیات / آزادیه فرزاد
- ۴۱۱ | زاویه بین نیم سازهای مثلث / احسان یار محمدی
- ۴۴۱ | مختصات تصویر قائم یک نقطه روی یک خط / رحیم خیرالله زاده
- ۴۷۱ | سرگرمی های عددی / عباس قلعه پور اقدم
- ۵۰۱ | فوتبال ریاضی / طیبه خاکی نژاد، امجد حُلمت
- ۵۴۱ | درماتیک ریاضی / افشین خاقچه خان
- ۵۹۱ | بازگویی ریاضی به کمک پروژه های برنامه نویسی (قسمت ۲) / بهنام آیتی پور
- ۶۰۱ | گزارش از برگزاری مسابقه کُتر / صدرالاسری
- ۶۴۱ | جدول رقم - ریاضی / امجد حُلمت
- ۶۵۱ | لطایف الحساب به زبان ساده / جعفر زیدی
- ۶۳۱ | ۳۰ سال قبل: برهان / ۶۴۱ | مسئله های مسابقه ای / سید محمد رضا هاشمی موسوی

یادآور ۱۴۰۱: شاهد میلاد پیامبر اکرم (ص) و به ۲۵۰ سال ادامه پیدا کرده و همه آنان در راستای عظیم جهانی که آن را می توان اینطور تعبیر کرد: تحقق هدفی مشخص، یعنی رشد و تعالی انسانیت است. به یکبارگی شیوه و سیره سیاسی و مبارزاتی امامان شیعه در دوران حکومت بنی امیه و بنی عباس، از ایشان یک انسان ۲۵۰ ساله می سازد. زندگی سیاسی امامان شیعه علی رغم تفاوت های ظاهری، در مجموع حرکتی مستمر و طولانی است که بالنده می شود.

۲۵۰ سال ادامه پیدا کرده و همه آنان در راستای عظیم جهانی که آن را می توان اینطور تعبیر کرد: تحقق هدفی مشخص، یعنی رشد و تعالی انسانیت است. به یکبارگی شیوه و سیره سیاسی و مبارزاتی امامان شیعه در دوران حکومت بنی امیه و بنی عباس، از ایشان یک انسان ۲۵۰ ساله می سازد. زندگی سیاسی امامان شیعه علی رغم تفاوت های ظاهری، در مجموع حرکتی مستمر و طولانی است که بالنده می شود.

یک، دو، سه!

برهان تازه!

دکتر مجید حکمت

متوسط هستی، برهان را ورق بزن و برو به سمت عالی شدن. شمایی هم که دلداده و شیدای ریاضی هستی و شیرینی ریاضی را در قلبت احساس می کنی، بدان که برهان هم عاشقانه تو را صدا می زند!

راستی! خبرهای خوش دیگری هم در راه است! در حال تلاشیم تا برهان به صورت چایی به دست شما می رسد. علاوه بر آن، به یاری خداوند در هر چهار فصل سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۲ برهان منتشر خواهد شد و در صفحه چهارم جلد نیز تصویری زیبا از فصل های طبیعت را به نمایش می گذاریم که هم ارتباطی از فصل ها با ریاضیات را ببینید و هم وقتی تا سال بعد با برهان همراه شدید، به آن خبر خوشی که نویدش را داده ایم پی ببرید! ان شاء الله.

خب! دوستان خوب! حالا این شما و این برهان! همین الان، برهان را بردار و ورق بزن این «یک دو سه» برت را!

سیاس و قدردانی:

به این وسیله از تلاش ها و دلسوزی های استاد گرانقدر جناب آقای دکتر حمیدرضا امیری و همکارانشان سیاستگزاری می کنم و برایشان آرزوی تندرستی و شادگامی دارم! امیدوارم که همچنان توفیق همراهی و بهرمنندی نظرات ایشان با برهان را داشته باشیم.

دوستدار شما: مجید حکمت

و وقتی از آن ها دلش را جویا شدیم، جواب های متفاوتی شنیدیم:

• آقا ما اصلاً استعداد ریاضی نداریم.

• هرگز نمی کنیم به ریاضی و معده ریاضی علاقه مند نمی شیم.

• ریاضی رو دوست داریم، ولی راستش معده ای که چاپ نشه، خیلی به دلون نمی چسبه.

• مطالب سرگرمی ریاضی رو بیشتر دوست داریم.

• مطالبی از ریاضی رو که به درد زندگی مون بخوره باید بفهم کمتر ریاضی بلد لنه بیشتر می پسندیم.

• به ریاضی علاقه داریم، ولی نمی دونیم از کجا شروع کنیم.

و...

خلاصه هر کسی دلیلی برای ناآشنایی اش با معده برهان داشت. برای همین ما صحبت های شما را به خوبی شنیدیم و از همین شماره ۱۲۳ برای همه سلیقه ها و برای همه نوع استعدادها مطالب جذاب ریاضی گذاشتیم: از داستان و معما و سرگرمی های ریاضی گرفته تا کاربردها و آموزش های ساده و پیشرفته و مقاله های علمی سطح بالا. و حالا نوبت دوست دوست خوب! اگر فکر می کنی توی ریاضی ضعیف هستی، برهان را بردار و شکوفایی استعدادهای نهفته ات را مشاهده کن و از درک ریاضی لذت ببر. شما هم که در سطح

بر آن که میدی و مشوق و حامی است

بزدوست نغیم و جهان، جو ترم است

ترک سرو جان گیر پس آنگاه وینای

آری، غزلقین بین دیک دور کلام است!

«سلام دوستان خوب! امیدوارم حالتان خیلی عالی باشد.

بعضی عددها، سوای ویژگی های ریاضی، در زندگی هم ویژگی های جالبی دارند. یکی از آن ها ۱۲۳ است؛ یک دو سه! عدد ۱۲۳ نشان دهنده شروع های جدید و حرکت رو به جلوست. این عدد به طرزی اعجاب انگیز مژه آغازهای جدید و امید به آینده را با خود به ارمغان می آورد.

بچه ها! مجله پیش روی شما، شماره ۱۲۳ از مجله «رشد ریاضی برهان ۲» است؛ پس نویدبخش شروعی تازه برای ما، شما و برهان است! مجله ریاضی برهان ۲، رفیق شش دانگ دانش آموزان دوره دوم متوسطه است. البته ما دانش آموزانی را دیدیم که از حال این دوست دلسوزشان بی اطلاع بودند

سخنی با دبیران عزیز

لازم است، عرض سلام و ارادت صمیمانه خدمت همکاران محترم و دبیران ریاضی سرزمینم داشته باشم. شما سروران ارجمند می توانید

ضمن نشر و گسترش مطالب مجله در بین شاگردان، انواع مطالب علمی و جذاب ریاضی خود را برای مجله بفرستید تا سایرین هم از تجربه ها و یافته های شما بهره مند شوند.

پی نوشت ها

۱. شعر از وحدت کرمانشاهی. مکتب به «فصح المتکلمین» است.
۲. برگرفته از شعر کمال خجندی؛ صبح است کمال و می و آواز خوشی می برخیز و غنیمت بشمار این یک دو سه دم را

معادله درجه دو

محرم ایردموسی



مثل یک سنگ‌نوشته ماندگار بشن. از شما چه پنهان، ما هم این مشکل را داشتیم، اما به جای دو دقیقه ماندگاری فرمول در حافظه پارسا، دو روز یا در نهایت ده روز حافظه‌مون مسئولیت قبول می‌کرد!

تا اینکه اون اتفاق افتاد و نه تنها پارسا، بلکه همه ما توتستیم یک راه خوب برای حل این مشکل پیدا کنیم.

دقیقاً یادمه. روز شنبه بود و ما زنگ اول ریاضی داشتیم. قرار بود دبیر ریاضی مون، آقای نیک‌گفتار، فصل جدید رو شروع کنه که درباره معادله درجه دوم بود. من از خواهر بزرگ‌ترم شنیده بودم که برای حل معادله درجه دوم یک فرمول هست.

سر کلاس نشسته بودیم و منتظر ورود دبیر بودیم که یک جوان عینکی با موهای فرقی و ژولیده وارد کلاس شد. یک کوله هم داشت؛ مثل ما. همه بچه‌ها جا خورده بودند و یک سؤال بزرگ تو ذهنشون جولان می‌داد: «این کیه؟!»

من اول فکر کردم شاگرد جدیدمه،

« پارسا هم کلاسی من بود. تو خوندن درس ریاضی اخلاق عجیبی داشت. به توصیه‌های هیچ‌کس هم گوش نمی‌داد. حتماً می‌پرسید رفتار عجیب پارسا چی بود.

پارسا هیچ فرمولی را حفظ نمی‌کرد. نه اینکه نخواهد حفظ کنه. حفظ می‌کرد، اما دو دقیقه بعد، وقتی می‌پرسیدی فرمول فلان چی بود، کلی به خودش فشار می‌آورد و آخرش یک فرمول عجیباً غریباً تحویل می‌داد که تو دکان هیچ عطاری پیدا نمی‌شد.

یک بار برای اینکه بهش انگیزه بدم، گفتم: «پارسا، تو آزمون سراسری که سؤال‌ها چهارجوابی‌اند و وقت زیادی تدار برای حل کردن، اون وقت می‌خواهی چه کار کنی؟ به فکری برای این بیماری فرمول‌هراسی (فوبیا) بکن تا دیر نشده.»

پارسا گفت: «چی چی؟ فرمول‌هراسی؟ نه داداش. من ترسی از فرمول ندارم. باید راهی پیدا کنم تا فرمول تو حافظه‌ام حک بشه؛ همین.» راست می‌گفت. باید راهی پیدا می‌کرد تا فرمول‌ها تو حافظه‌اش

اما به قیافه‌اش می‌خورد که سنش از ما بیشتر باشه. خلاصه تو این افکار غرق بودیم که تازه‌وارد معمای اول رو حل کرد: «سلام بچه‌ها، من **نوروش** هستم و امروز جای آقای نیک‌گفتار اومدم. ایشون کرونا گرفتند و به من گفتند که به‌جاشون پیام، البته نگران نباشید بیماری‌شون خفیفه و اگه چند روزی استراحت کنن، خوب می‌شن.»

حمید پرسید: «ببخشید امروز چه کار کنیم؟ چون معلم ما قرار بود فصل جدید رو درس بدن.»

تازه‌وارد کوله‌اش را گذاشت روی میز و گفت: «خب همون کار رو می‌کنیم. لطفاً یکی کتابش رو بده به من. کدوم فصل رو قرار بود کار کنید؟»

سعید که میز اول نشسته بود، کتابش رو به آقای نوروش داد و گفت: «آقا فصل ۴، معادله‌ها و نامعادله‌ها.»

تازه‌وارد عینکش را داد عقب و کتاب را ورق زد تا رسید به فصل ۴. زیر لب گفت: «بسیار خب. آها، معادله درجه دوم.» نگاه سریعی به مطالب فصل ۴ کرد و کتاب را داد به سعید. بعد رقت پای تخته و گچی برداشت تا چیزی بنویسه. بچه‌ها سریع طبق عادت همیشگی دفتر و دستکشون رو پهن کردند رو میز و آماده شدند تا جزوه‌شون رو سنگین و رنگین بنویسند. نوروش رو کرد به بچه‌ها و گفت: «به جای دفتر ریاضی، هر کدومتون یک برگه چرکنویس بردارید و سؤال‌هایی رو که می‌دم حل کنید. کارم که تموم شده، می‌تونید جزوه‌تون رو هم بنویسید.» بچه‌ها اخم‌هاشون رفت تو هم. عادت نداشتند به مسئله‌حل کردن. تازه‌وارد روی تخته کلاس این سه تا عبارت رو نوشت و گفت: «بچه‌ها اول این سه تا عبارت رو ساده کنید:

$$A = (x+3)(x+4)$$

$$B = (x-2)(x+2)$$

$$C = (x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2})$$

ساده کردن عبارت‌های جبری رو بلد بودیم. اولی اتحاد جمله مشترک و جمله غیرمشترک بود و به راحتی به جواب رسیدیم. دومی اتحاد مزدوج بود.

هلو برو تو گلو! سومی با اینکه رادیکال داشت، اما مثل اولی حل می‌شد. آقای نوروش از بچه‌ها خواست که سه نفر بیایند و جواب را بنویسند. حمید و سعید و وحید رفتند پای تخته و راه‌حلشون رو نوشتند. راه‌حل هر سه درست بود:

$$A = (x+3)(x+4) = x^2 + (3+4)x + 3 \times 4 = x^2 + 7x + 12$$

$$B = (x-2)(x+2) = x^2 - 2^2 = x^2 - 4$$

$$\begin{aligned} C &= (x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2}) \\ &= x^2 + (-1+\sqrt{2}-1-\sqrt{2})x + (-1+\sqrt{2})(-1-\sqrt{2}) \\ &= x^2 - 2x + ((-1)^2 - (\sqrt{2})^2) \\ &= x^2 - 2x + (1-2) = x^2 - 2x - 1 \end{aligned}$$

آقای نوروش گفت: درسته، بفرمایید بشینید. بچه‌ها که نشستند، آقای نوروش تخته را پاک کرد و نوشت: $A = x^2 + 11x + 28$ و گفت: «بچه‌ها حالا عکس کار قبلی را انجام بدید. یعنی این عبارت درجه دوم رو به دو عبارت درجه ۱ تجزیه کنید.»

بچه‌ها با این نوع مسئله‌ها آشنا بودند و می‌دوستند که باید به دنبال دو عدد باشند که حاصل جمعشون بشه ضریب x ، یعنی ۱۱. حاصل ضربشون بشه مقدار ثابت عبارت درجه دوم؛ یعنی ۲۸.

این یک کار ذهنی بود که پارسا توش از همه سریع‌تر بود. پارسا به ۵ ثانیه نرسیده، دستش رفت بالا. تازه‌وارد اشاره کرد که بره پای تخته و راه‌حلش رو بنویسه:

$$A = x^2 + 11x + 28 = (x + \bigcirc)(x + \square) = (x+4)(x+7)$$

$$\bigcirc + \square = 11$$

$$\bigcirc \times \square = 28$$

آقای نوروش: «آفرین! درسته. بفرمایید.» بعد زیر راه‌حل پارسا، عبارت بعدی را نوشت و گفت: «حالا اینو چی می‌گین! $B = x^2 + 3x - 154$ »

توی لحنش به‌جور مبارزه‌طلبی بود و انگار می‌خواست بهمون بفهمونه که خیلی هم به حافظه‌تون و توانایی حدس‌زدنتون ننازید. بچه‌ها غرق افکارشون بودند و معلوم بود که تیرهاشون یکی‌یکی به سنگ می‌خوره. پارسا دوباره دستش رفت بالا. تازه‌وارد که معلوم بود تعجب کرده، به پارسا گفت: «مطمئنی جوابت درسته؟»

پارسا گفت: «بله آقا درسته، شک ندارم.» و رفت

پای تخته و راه‌حلش رو نوشت:

$$B = x^2 + 3x - 154 = (x + \square)(x + \square) \\ = (x - 11)(x + 14)$$

$$\begin{aligned} \square + \square &= 3 \\ \square \times \square &= -154 \end{aligned}$$

قبل از اینکه پارسا بشینه، آقای توروک از پارسا پرسید: «از کجا فهمیدی یکی از دو عدد $\square$ و $\square$ منقیه؟»

پارسا گفت: «چون ضربشون منفی بود.» تازه‌وارد گفت: «درسته، اما ۱۱ و ۱۴ رو چطور حدس زدی؟»

پارسا گفت: «۱۵۴ زوج به پس به ۲ می‌خوره. نوشتیم: $154 = 2 \times 77$. بعد دیدم به ۷ می‌خوره. نوشتیم $154 = 2 \times 7 \times 11$. بعد دیدم 2×7 می‌شه ۱۴ که از ۱۱ سه واحد بیشتره. فهمیدم دو عددی که می‌خواهیم ۱۴ و ۱۱- هستند.» آقای توروک گفت: «آفرین! کاملاً درسته. بفرمایید بشینید.»

پارسا که نشست، آقای توروک کارت بعدیش رو رو کرد و گفت: «ببینم این رو کی حل می‌کنه: $C = z^2 + 2z - 675$ »

بچه‌ها درگیر چالش تازه‌وارد شده بودند و می‌خواستند نفر بعدی باشند که چلوی این معلم جوان عرض‌اندام می‌کنند. حتما حمید و سعید و وحید خوش حال بودند که همون اول پای تخته رفتند. اما نه، اونا هم درگیر مسئله شده بودند.

چند دقیقه‌ای گذشت. همه نگاهشون به پارسا بود که نجاتشون بده. پارسا هم حسابی غرق در مسئله شده بود. به خودم گفتم: «دو تا عدد می‌خواهیم جمعشون بشه ۲ و ضربشون بشه ۶۷۵- پس یکی مثبت و یکی منفی.» به اینجا که رسیدم، دیگه متوقف شدم. آقای توروک گفت: «بچه‌ها اگر خود عدد ۶۷۵ را به عامل‌های اول تجزیه کنید، شاید بتونید مسئله رو حل کنید. اما قبول دارید که این روش ممکنه ساعت‌ها وقتتون رو بگیره. مثلاً اگر عبارت $D = x^2 + 5x - 2 = 586$ را بدم، کی می‌تونه حدس بزنه دو عدد چی هستند؟ تازه تجزیه کردن ۵۸۶ هم وقت گیره.»

بچه‌ها منتظر بودند که معلم جوان دست بکنه توی کوله‌اش و یک فرمول جدید بیاره

بیرون و بگه: «راه‌حل مشکل شما پیش منه!» اما آقای توروک رفت پای تخته و گفت: «این مسئله در تاریخ به چند روش حل شده و شما در کتاب درسی با یکی از این روش‌ها آشنا خواهید شد. اما من قصد ندارم اون روش رو امروز بگم و به شما فرمول بدم!» و ادامه داد: «برگردیم به مسئله خودمون: $C = z^2 + 2z - 675$. دنبال دو عدد هستیم که مجموعشون برابر ۲ می‌شه. بچه‌ها میانگین این دو عدد چقدر می‌شه؟»

بچه‌ها همه گفتند: «۱+». معلوم بود که میانگین دو عدد نصف مجموع آن‌هاست. معلم جوان ادامه داد: «من این دو عدد رو $1+a$ و $1-a$ می‌گیرم. چون اگر اولی از میانگین a واحد بیشتر باشه، دومی باید a واحد از ۱ کمتر باشه تا میانگین بشه یک. درسته؟»

استدلال آقای توروک منطقی بود. معلم جوان ادامه داد: «حالا بیایید معلوم‌اتمون رو برحسب $1+a$ و $1-a$ دوباره بنویسیم:

$$\begin{aligned} (1+a) + (1-a) &= 2 \\ (1+a) \times (1-a) &= -675 \end{aligned}$$

تو تساوی دوم یک چیز آشنایی بود که داشت به من و احتمالاً بقیه بچه‌ها چشمک می‌زد! شبیه اتحاد مزدوج بود. معلم جوان ادامه داد: «اگر a رو پیدا کنیم، مسئله حل می‌شه. پس از تساوی دوم ببینید a رو می‌تونید پیدا کنید. بچه‌ها دست به کار شدند. من به راه‌حل رسیده بودم:

$$\begin{aligned} (1+a)(1-a) &= -675 \Rightarrow 1-a^2 = -675 \\ \Rightarrow 1+675 &= a^2 \Rightarrow a^2 = 676 \\ \Rightarrow a &= \pm\sqrt{676} = \pm 26 \end{aligned}$$

دستم رو بردم بالا. هم‌زمان پارسا هم دستش رفت بالا. آقای توروک به من اشاره کرد که برم پای تخته. راه‌حل رو که نوشتیم، آقای توروک پرسید: «پس دو عددی که می‌خواستیم چه عددی هستند؟» ذهنی حساب کردم و گفتم: «۲۷ و ۲۵-؛ یعنی همون $1+a$ و $1-a$ ». معلم جوان رو کرد به پارسا و گفت: «تو هم راحت همینه؟»

پارسا گفت: «بله آقا. منتها من آخر راه‌حل نوشتیم: $a = \sqrt{676} = 26$ »

داد: «حال برای اینکه مطمئن بشم شما این روش رو یاد گرفتید، این عبارت رو تجزیه کنید تا بعد من ربط این تجزیه‌ها رو با معادله درجه دوم بگم. $E = x^2 - x - 1$ »

همه مشغول حل مسئله شدند. بر دیا زودتر از همه حل کرد و با اشاره معلم جوان رفت پای تخته و راه‌حلش رو نوشت:

$$\begin{aligned} \text{جمع} &= -1 \Rightarrow -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow (-\frac{1}{2} + a)(-\frac{1}{2} - a) = -1 \\ (-\frac{1}{2})^2 - a^2 &= -1 \Rightarrow a^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \Rightarrow -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \\ x^2 - x - 1 &= (x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}) \end{aligned}$$

آقای نوروش گفت: «خوش‌حالم که تساوی آخر رو نوشتی. چون هدف ما تجزیه بود. همون‌طور که دیدید در این مثال آخر، دو عددی که دنبالش بودیم، رادیکالی شدند و معلومه که حدس این‌ها مشکل هست. اما با این روش بابلی‌ها ما توانستیم حدس‌زدن رو به یک روش جبری تبدیل کنیم و حالا هر عبارت درجه دومی به ما بدهند یا این روش اون رو تجزیه می‌کنیم. اما حالا کی می‌تونه ارتباط این مثال‌ها را با معادله درجه دومی مثل $x^2 - 6x - 27 = 0$ بگه؟»

محمد اجازه خواست که جواب بده. با اشاره معلم گفت: «آقا برای حل معادله درجه دوم کافیه با این روشی که گفتید تجزیه‌اش کنیم. بعد می‌گیم چون ضرب دو عبارت درجه یک شده صفر، پس یا اولی صفر می‌شه یا دومی و دو تا مقدار برای x به‌دست می‌یاد.» آقای نوروش گفت: «بد نیست همین معادله آخر رو شما بیابید حل کنید.» محمد رفت پای تخته و شروع به حل معادله کرد:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x - 27 &= 0 \\ (-3 + a)(-3 - a) &= -27 \Rightarrow 9 - a^2 = -27 \\ \Rightarrow a^2 &= 36 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow \text{دو عدد: } 3, -9 \\ \Rightarrow x^2 - 6x - 27 &= (x + 3)(x - 9) = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \\ \text{یا} \\ x - 9 = 0 \Rightarrow x = 9 \end{cases} \end{aligned}$$

معلم جوان، راه‌حل محمد را تأیید کرد و گفت: «بچه‌ها ممکنه معادله درجه دوم جواب نداشته باشه یا یک جواب داشته باشه؟» بچه‌ها کمی فکر کردند. پارسا گفت: «آقا ممکنه، مثل معادله $x^2 + 1 = 0$ که می‌دونیم جواب نداره.»

آقای نوروش گفت: «ایرادی نداره. در واقع ما اینجا به دنبال تمام مقادیرهای a نیستیم؛ مثل بابلی‌ها!»

بچه‌ها انگار که اشتباه شنیده باشند، پرسیدند: «بابلی‌ها آقا؟ منظور تون دانش‌آموزان شهر بابله؟»

مسعود که اصالتاً مازندرانیه پرسید: «آقا شما تو بابل درس می‌دید؟» آقای نوروش خندید و گفت: «بابلی‌ها نه بچه‌ها، بابلی‌ها. قوم بابل پانصد سال قبل از میلاد در عراق زندگی می‌کردند.»

مسئله کم‌کم داشت جالب می‌شد. راه‌حلی که برای این مسئله یاد گرفته بودیم به هزاران سال قبل برمی‌گشت و انگار ما هم مثل اجدادمان فکر می‌کردیم.

آقای نوروش در تکمیل توضیح خود گفت: «در اون زمان عددهای منفی هنوز وارد ریاضیات نشده بودند و اگه اون‌ها با این مسئله روبه‌رو می‌شدند، همون راه‌حل پارسا رو می‌نوشتند. البته اشتباه هم نیست، چون ما اینجا اگه به مقداری برای a پیدا کنیم، کفایت می‌کنه. حتی اگه به جای a ، -26 هم بذاریم، همون دو عدد قبلی به‌دست می‌یان.» آقای نوروش گفت: «حالا با این روش که یاد گرفتید، برای پیدا کردن دو عدد، عبارت D رو که گفتیم تجزیه کنید:

$$\begin{aligned} D &= x^2 + 5x - 2 = 586 \\ \text{بچه‌ها دست‌به‌قلم شدند. منم نوشتیم:} \\ \text{جمع} &= 5 \Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow (\frac{5}{2} + a)(\frac{5}{2} - a) = 5 \\ (\frac{5}{2} + a)(\frac{5}{2} - a) &= -20586 \Rightarrow 6/25 - a^2 = -20586 \\ \Rightarrow a^2 &= 20592/25 \Rightarrow a = \sqrt{20592/25} = 143/5 \\ \Rightarrow \begin{cases} 2/5 + 143/5 = 146 \\ 2/5 - 143/5 = -141 \end{cases} \end{aligned}$$

رضا دست بلند کرد و با اشاره آقای نوروش رفت پای تخته. راه‌حلش مثل راه‌حل من بود. آقای نوروش در توضیح راه‌حل رضا گفت: «بچه‌ها دقت کنید که هر عدد مثبتی به هر حال جذری داره و برای ما معلومه.» آقای نوروش ادامه

آقای نوروش گفت: «درسته این معادله رو حل کنید:
 $x^2 + 2x + 5 = 0$ حمید زودتر از همه حل کرد و رفت پای
 تخته و نوشت:

$$\begin{aligned} 1 &= \text{میانگین} \Rightarrow 2: \text{جمع} \\ &\Rightarrow 1+a, 1-a \text{ دو عدد} \\ &\Rightarrow (1-a)(1+a) = 5 \\ &\Rightarrow 1-a^2 = 5 \Rightarrow a^2 = -4 \Rightarrow \text{هیچ مقداری برای } a \text{ وجود ندارد} \end{aligned}$$

در نتیجه معادله ریشه ندارد.
 چند دقیقه به پایان کلاس مانده بود. آقای نوروش پرسید:
 «بچه‌ها اگر به شما معادله‌ای مانند $2x^2 - 5x - 7 = 0$ بدن، اولین کاری که می‌کنید چیه تا بتونید با این روش

حلش کنید؟» بچه‌ها با هم پاسخ دادند:
 «طرفین معادله رو بر ۲ تقسیم می‌کنیم.»
 آقای نوروش گفت: «بچه‌ها اگر معادله‌تون
 به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ باشه و a و b و
 c سه عدد معلوم باشند، چطوری حلش
 می‌کنید؟ درواقع می‌خواهیم یکبار برای
 همیشه معادله درجه دوم رو به‌طور کلی
 حل کنیم.»

پارسا دستش رو برد بالا. معلم گفت:
 «به این زودی حلش کردی؟» پارسا گفت:
 «آقا. ولی مطمئن هستم پای تخته حلش
 می‌کنم. کامل» آقای نوروش اشاره کرد که
 راه‌حلش رو بنویسه. پارسا این‌طور نوشت:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \\ \text{جمع: } \frac{b}{a} &\Rightarrow \text{میانگین} = \frac{b}{2a} \Rightarrow \text{دو عدد: } \frac{b}{2a} + t, \frac{b}{2a} - t \\ \Rightarrow \left(\frac{b}{2a} + t\right)\left(\frac{b}{2a} - t\right) &= \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{b^2}{4a^2} - t^2 = \frac{c}{a} \\ \Rightarrow t^2 &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \\ \Rightarrow t^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ \Rightarrow ax^2 + bx + c &= \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases} \end{aligned}$$



Y

شماره ۱۳۳۳ | پاییز ۱۳۹۳



آقای نوروش گفت: «درسته کاملاً. بچه‌ها شما براساس این فرمول می‌تونید ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ رو مشخص کنید. اما اگر فرمول رو فراموش کردید، از همین روشی که یاد گرفتید، می‌تونید معادله رو حل کنید.»

زنگ پایان کلاس به صدا درآمد. پارسا پای تخته داشت هنوز به راه‌حلش نگاه می‌کرد. به شوخی گفتیم: «داداش حالا یک بار یک فرمول رو خودت به‌دست آوردی، دیگه این همه قیافه گرفتن ندارم.» پارسا، انگار که کشف بزرگی کرده باشه گفت: «بابک جان، حل شد.» گفتیم: «درسته حل شد. فرمولش هم پیدا شد. من هم همین‌طوری حل کردم.» پارسا گفت: «متوجه نیستی بابک‌جان. مشکل اصلی من حل شد. الان این فرمول تو ذهن من حک شده. چون خودم به این فرمول رسیدم. هر وقت هم از یادم بره، می‌دونم چطور بازسازی کنم. اصلاً نیاز نیست فرمول رو حفظ کنیم. باید روش رسیدن به فرمول رو بلد باشیم تا تو حافظه‌مون بمونه.»

راست می‌گفت. با روش آقای نوروش ما به جای فرمول، راه رسیدن به فرمول رو یاد گرفته بودیم و دیگه نگران فراموش کردن فرمول نبودیم. آقای نوروش از بچه‌ها خداحافظی کرد و رفت. جلسه بعد آقای نیک گفتار آمد و روش دیگری (مربع کامل کردن) برای حل معادله درجه دوم گفت و از ما خواست دو روش حل، یعنی روش بابلی‌ها و روش مربع کامل کردن (منسوب به خيام و همچنین ریاضی‌دانان هندی) را با هم مقایسه کنیم. به نظر شما چه مزیت‌هایی در هر روش وجود دارد که در دیگری وجود ندارد؟



تاخت رستم دستان و کرم هفتواد!

حسین نامی ساعی

یادگیری ریاضی با بازی و سرگرمی و معما و استفاده از تخیلات و عجایب و پارادوکس‌ها یا درست‌نماهاست.

بعد از گفت‌وگوی من و رستم، رستم با خوش‌حالی، انگار که چیزی را یافته باشد فریاد زد: جستم! زین پس می‌توانم کمک بچه‌ها بکنم، و ادامه داد: من و بچه‌ها، به جای رفتن به میدان جنگ با ریاضی، باید به دنیای بازی و سرگرمی، تخیلات، عجایب و غیره منتظره‌های ریاضیات برویم و با آن‌ها دل مفاهیم ذهنی ریاضی را بشکافیم و با این روش از مفاهیم ذهنی وارد دنیای واقعی و ملموس ریاضی بشویم تا با هم واقعیت آن مفاهیم را ببینیم و درک کنیم. رستم دستان نام دیگری را در مجله برهان برای خودش انتخاب کرد و نام خود را در مجله برهان به رستم برهان تغییر داد.

رستم برهان پیشنهاد داد، در هر شماره یکی از مفاهیم اصلی و اساسی ریاضی را با معما و سرگرمی و از این دسته قالب‌ها برای بچه‌ها روشن کند و در اولین شماره تصمیم گرفت

که بچه‌های این مرز و بوم، با دست و پنجه نرم کردن با ریاضیات مفاهیم بیشتر و دقیق‌تری از آن را درک کنند و یاد بگیرند. بگذریم! رستم با گپی که در خواب با من زد گفت: از دیرباز به این می‌اندیشم، اما چاره‌ای برای آن پیدا نکرده‌ام و قصد دارم که خودم هم وارد این گود و میدان شوم.

رستم دستان که نیاز به کسب اطلاعاتی داشت، با من هم‌فکری کرد که چگونه مفاهیم ریاضیات را به شکلی آسان به بچه‌ها آموزش دهیم؟ گفتم: ریاضیات ماهیتی ذهنی و انتزاعی دارد و یادگیری آن فکری فعال و خلاق و از همه مهم‌تر پشتکار و علاقه می‌خواهد. درک و فهم ریاضیات درونی است. ریاضی را تنها با خواندن نمی‌توان فهمید، بلکه برای فهم آن باید درباره چیزی که می‌خوانید تفکر کنید. هر چقدر ما بتوانیم روش‌هایی پیدا کنیم تا مفاهیم انتزاعی و ذهنی ریاضی را به دنیای واقعی نزدیک‌تر کند، آن وقت فهم مفاهیم ریاضی آسان‌تر می‌شود. البته روش‌های متعددی برای فهم ریاضی وجود دارند که از جمله آن‌ها،

«ماجرا از پیشنهاد و درخواست یکی از خوانندگان خوب مجله آغاز شد؛ مخاطبی که دوست داشت در مقالاتی به مفاهیم اساسی و اصلی ریاضی، البته به صورتی جذاب، متفاوت و به زبانی ساده و قابل فهم، بپردازیم. این درخواست همه چیز را تغییر داد و ایده تازه‌ای را در ذهن من به وجود آورد و باعث شد که تصمیم بگیرم به شکلی متفاوت به این خواسته پاسخ دهم: به این صورت که به عالم خیال و تخیل گریزی بزنم که البته با خواندن اولین سطر از بند بعدی، حتماً متوجه آن می‌شوید.

و اصل داستان

دیشب با همین فکر به خواب رفتم که چگونه مخاطبان را با مفاهیم اصلی و اساسی ریاضی آشنا کنم. در خواب ناگهان خواب رستم پسر دستان را دیدم. رستم دلیر و خردورز، با زره و لباس خاص و کلاه خود دوشاخ با هبیتی پهلوانانه و ریاضی‌شکل! ... جالب آنکه رستم دستان هم مثل من می‌اندیشید. و دغدغه آن داشت



یک کار جوانمردانه انجام دهد. کار جوانمردانه‌ای که رستم در قالب یک مسابقهٔ متناقض‌نما (پارادوکس) انجام می‌دهد. رستم برای این منظور یک مسابقهٔ دوی سرعت با کرم کندروی هفتواد که در تمام مدت عمرش در هیچ مسابقهٔ دویی برنده نشده و افسرده بود و خیلی دوست داشت حداقل در یک مسابقهٔ دو برنده شود، ترتیب داد...! و اما مسابقه به این شکل بود که:

رستم تندروی برهان به کرم کندروی هفتواد یک امتیاز داد و اجازه داد از نقطهٔ B جلوتر از او که در نقطهٔ A بود مسابقه را شروع کند؛ مسابقه شروع شد؛ کرم کندروی هفتواد و رستم برهان در یک لحظه شروع به دویدن کردند. وقتی رستم برهان از نقطهٔ A در پشت کرم کندروی هفتواد حرکت خود را شروع می‌کند، کرم کندروی هفتواد در این فاصله از نقطهٔ B به نقطهٔ C می‌رود و یک مسافتی پیش رفته است و مدتی طول می‌کشد تا رستم برهان در این زمان به نقطهٔ B برسد که کرم کندروی هفتواد حرکتش را از آنجا شروع کرده است. انتظارمان این است که رستم برهان، بیشتر از این عقب نماند؛ هر چقدر هم مسیر مسابقه کوتاه و فاصلهٔ اولیهٔ کرم کندروی هفتواد از رستم برهان

به نقطه‌ای می‌رسد که کرم کندروی هفتواد بوده. کرم کندروی هفتواد باز هم اندکی جلو رفته است و رستم هنوز به او نرسیده است و این ماجرا تا ابد ادامه می‌یابد، زیرا همواره مدتی طول می‌کشد تا رستم فاصلهٔ میان خودش و کرم کندروی هفتواد را طی کند، و هر قدر هم که کرم کندروی هفتواد کند حرکت کند بخشی از مسافت را در زمان حرکت خود طی می‌کند و دیگر در نقطهٔ قبل نیست و از آن نقطه جلوتر است. پس به هر حال هر چقدر هم این زنجیره را ادامه دهیم، رستم برهان هرگز به کرم کندروی هفتواد نمی‌رسد، چه رسد به اینکه از او جلوتر بزند. پس مسلماً وقتی که مسابقه در نهایت به پایان می‌رسد کرم کندروی هفتواد از رستم برهان جلوتر است.

در این مسابقهٔ عجیب و غیرواقعی، رستم برهان تنها هرگز به کرم کندروی هفتواد نمی‌رسد، بلکه در انتهای مسابقه حتی مجال آن را ندارد که در میدان دوی سرعت بدود. چرا؟ به این ترتیب بالاخره کرم کندروی هفتواد برای اولین بار در عمرش برندهٔ مسابقهٔ دوی سرعت می‌شود و از

زیاد باشد، رستم برهان باید زودتر به خط پایان برسد، اما این طور نیست؛ زیرا مدتی طول می‌کشد تا رستم برهان دوباره به نقطهٔ C برسد که کرم کندروی هفتواد از آنجا گذشته است، و کرم کندروی هفتواد باز در این مدت خود را کمی جلو کشانده و به نقطهٔ D رسیده است. و باز زمانی که رستم برهان به نقطهٔ C برسد، کرم کندروی هفتواد جلوتر است. پس رستم برهان به سمت نقطه‌ای می‌دود که کرم کندروی هفتواد از آنجا گذشته است و کرم کندروی هفتواد دوباره در این مدت خود را کمی جلو کشانده و به نقطهٔ E رسیده است. زمانی که رستم برهان به نقطهٔ E برسد، کرم کندروی هفتواد جلوتر است و به نقطهٔ F رسیده است. پس رستم برهان به سمت نقطهٔ F می‌دود که کرم کندروی هفتواد هم اینک هست و مدتی طول می‌کشد تا رستم به آن نقطه برسد. مسلماً در طول این مدت کرم کندروی هفتواد باز کمی دیگر خود را جلو کشانده و به نقطهٔ G رسیده است. به همین ترتیب رستم برهان مثل سایه کرم کندروی هفتواد را تعقیب می‌کند، اما زمانی که



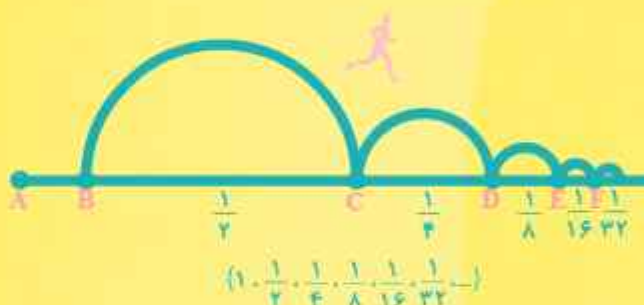
هفتواد در شاهنامه

کلمه هفتواد که صورت دیگر آن هپتن باد و هپتن بوخت است به معنی کسی است که هفت پسر دارد یا دارای هفتمین پسر است.

داستان این کرم در شاهنامه فردوسی به اختصار چنین آمده است که در شهر کجاران مردی بود مشهور به هفتواد زیرا هفت پسر و یک دختر داشت. هفتواد و فرزندان در این شهر به کار ریسندگی مشغول بودند.

دختر روزها همراه با دیگر دختران شهر، دوک نخریسی برمی داشت و در دامنه کوهی در نزدیکی شهر، به نخریسی می پرداخت. روزی دختر هفتواد در راه سببی دید آن را از زمین برداشت و به هنگام خوردن، در درون آن کرمی یافت. دختر کرم را از میان سبب برداشت در دوکدان گذاشت و با خوش شانسای که کرم برایش می آورد، آن روز دوجندان همیشه نخ رسید. این داستان روزها ادامه یافت هر یاسداد دختر هفتواد پارهای از سبب پیش کرم در دوکدان می گذاشت و هر روز بیشتر نخ می رسید. زمانی که داستان را به مادر و پدر بازگو کرد، هفتواد آن را به فال نیک گرفت و از کرم مراقبت می کرد و...

ادامه داستان را در شاهنامه بخوانید.



این بابت، هم کرم کندروی هفتواد خوش حال است و هم رستم جوانمرد برهان که با این مسابقه باعث شده که کرم هفتواد برنده شود!

رستم برهان با این مسابقه قصد دارد چه مفهومی از ریاضیات را روشن کند. برای روشن شدن موضوع، فرض کنید که رستم برهان قصد دارد به مقصد ثابت در ۱۰۰ متر جلوتر از خود برسد. قبل از اینکه او بتواند به مقصد برسد، باید یک دوم مسیر را طی کند و بعد قبل از اینکه نصف مسیر را طی کند باید یک چهارم مسیر را طی کند. و بعد به همین ترتیب؛ یک هشتم، یک شانزدهم، یک سی و دوم و الی آخر...

این توضیحات نشان می دهد که رستم باید بی نهایت کار انجام دهد

تا به مقصد برسد و این یعنی انجام کاری که غیر ممکن است. دیگر مفهوم این است که اگر به فرض کرم هفتواد ثابت باشد و رستم فقط در حرکت باشد و به آن نزدیک شود، رستم باید قبل از رسیدن به کرم هفتواد از نیمه راه عبور کند. به این معنی که رستم هرگز نمی تواند از کرم هفتواد سبقت بگیرد. این مسابقه عجیب و غریب نشان می دهد که رسیدن رستم به کرم هفتواد از نظر ریاضی و انتزاعی غیر ممکن است، و دیگر اینکه هر مقدار متناهی را می توان به تعداد بی نهایت تقسیم کرد.

شما هم بیشتر فکر کنید و ضمناً به تصویر بالا نگاه کنید و شما هم در این باره فکر کنید...

بیاتادراین شیوه چالش کنیم!

قبلش برو یک فنجان قهوه یا چای برای خودت بریز

محرم ایردموسی

مقدمه

اگر اهل مسئله‌های چالشی هستید، شما را به خواندن این مطلب دعوت می‌کنیم. در هر شماره با چند مجموعه از مسئله‌های مرتبط با هم، سعی می‌کنیم علاوه بر به چالش کشیدن ذهن پویای شما مطالبی را هم مرور کنیم یا مطالب جدیدی یاد بگیریم. کاغذ و قلم فراموش نشود، چون بدون آن لطفی ندارد. قبلش بروید و برای خودتان یک فنجان چای یا قهوه بریزید و هر چالش را گام به گام پیش ببرید.

چالش اول

یک: اگر وارون n عدد طبیعی نخست را با هم جمع کنیم و حاصل را با H_n نمایش دهیم، ثابت کنید:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{n}{2}$$

راهنمایی:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{1}, \dots$$

دو: فرض کنید مقدار $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ (مجموع وارون‌های همه عددهای طبیعی) را با H_∞ نمایش داده‌ایم. به کمک قسمت قبل نشان دهید H_∞ از هر عدد مثبت مانند M (هر چقدر هم که بزرگ باشد) بزرگ‌تر است.

سه: می‌توان نتیجه قسمت دوم را این‌طور نوشت: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = +\infty$. چه توجیهی می‌توانید برای بی‌نهایت بودن این مقدار ارائه کنید؟

چهار: اصلاً بیایید $+\infty$ را عددی تعریف کنیم که از همه عددهای حقیقی بزرگ‌تر است. نشان دهید:

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots = +\infty$$

راهنمایی: نشان دهید: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2} + \frac{n-1}{4}$ و نتیجه بگیرید A از هر عدد مثبتی مانند M بزرگ‌تر است.

پنج: به‌طور مشابه نشان دهید: $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots = +\infty$ در واقع هدف این است که نشان دهیم مجموع وارون‌های همه عددهای طبیعی فرد برابر است با بی‌نهایت، یعنی این مجموع از هر عدد حقیقی مثبتی مانند M بزرگ‌تر است.

شش: اگر $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ یک عدد حقیقی مانند a بود، آنگاه نتیجه می‌شد:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \right) = \frac{a}{2}$$

و در نتیجه:



۱۲

شماره ۱۳۳ | پاییز ۱۴۰۳



$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots) -$$

$$(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots) = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$$

در نتیجه باید داشته باشیم: $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots$

اما داریم: $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$ و $\frac{1}{5} > \frac{1}{6}$ و... چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

چالش دوم

یک: می‌دانیم مجموعه n عضوی X ، 2^n زیرمجموعه دارد. اگر بخواهیم یک زوج زیرمجموعه از X مانند (A, B) انتخاب کنیم، چند انتخاب وجود دارد؟

راه‌حل: برای انتخاب A ، 2^n انتخاب و برای انتخاب B نیز 2^n انتخاب وجود دارد. در نتیجه برای انتخاب (A, B) با شرط $A \subset X$ و $B \subset X$ ، $N = 2^n \times 2^n = 4^n$ انتخاب وجود دارد.

دو: اگر دوست داشته باشید زوج زیرمجموعه انتخابی، یعنی (A, B) ، دارای این خاصیت باشد که $A \subseteq B$ ، آنگاه چند انتخاب وجود دارد؟

راهنمایی: برای هر عضو x از X ، سه حالت وجود دارد:

۱. x نه در A باشد و نه در B

۲. x هم در A باشد و هم در B

۳. x در B باشد، اما در A نباشد.

با توجه به سه انتخاب موجود برای هر عضو x ، پاسخ مسئله چیست؟

سه: اگر قسمت قبل را حل کردید و به پاسخ 3^n رسیدید، حالا به این چالش جواب دهید که در چند تا از زوج‌های قسمت دوم، $A \subset B$ اما $A \neq B$.

راهنمایی: تعداد زوج‌های (A, B) با شرط $A \subset B$ چند تا است؟

چهار: اگر در قسمت سوم به پاسخ $N = 2^n - 2^n$ رسیدید، حالا به این چالش پاسخ دهید که در چند زوج مرتب (A, B) ، A نه زیرمجموعه B است و نه B زیرمجموعه A ؟

پنج: در چند زوج مرتب مانند (A, B) با شرط $A \cup B = X$ برقرار است؟

راهنمایی: اول به این فکر کنید که برای هر عضو x از

X چند انتخاب در ارتباط با A و B وجود دارد. بعد از آن مشابه قسمت دوم عمل کنید.

شش: در چند زوج مرتب (A, B) ، شرط $A \cap B = \emptyset$ برقرار است؟

راهنمایی ۱. همانند قسمت‌های دوم و پنجم عمل کنید.
راهنمایی ۲. اگر اشتراک دو زیرمجموعه A و B از X تهی باشد، آنگاه اجتماع، A^c و B^c (مکمل‌های A و B) برابر با X خواهد شد. یعنی از $A \cap B = \emptyset$ می‌رسیم به $A^c \cup B^c = X$. به کمک این مطلب استدلال کنید که پاسخ‌های قسمت‌های پنجم و ششم برابر است.



۱۴

شماره ۱۳۳۰ | پاییز ۱۴۰۳

چالش سوم

یک: دانش آموزی برای محاسبه وارون تابع $f(x) = \frac{\sqrt{2x-1}}{3}$ این گونه استدلال کرده است:

$$x \xrightarrow{+3} 3x \xrightarrow{-1} 3x-1 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} \sqrt{3x-1} \xrightarrow{\div 3} \frac{\sqrt{3x-1}}{3} = y$$

$$y \xrightarrow{\text{ضرب در 3}} 3y \xrightarrow{\text{توان 2}} (3y)^2 \xrightarrow{\text{به علاوه 1}} (3y)^2 + 1 \xrightarrow{\text{تقسیم بر 3}} \frac{(3y)^2 + 1}{3}$$

در نتیجه: $f^{-1}(x) = \frac{9x^2 + 1}{3}$

آیا این استدلال درست است؟

دو: اگر f و g دو تابع وارون پذیر باشند، ثابت کنید $f \circ g$ (ترکیب f و g) نیز وارون پذیر است.

راهنمایی:

باید از یک به یک بودن f و g ثابت کنید $f \circ g$ نیز یک به یک است.

سه: اگر: $y=f(x)$ ، آن گاه: $x=f^{-1}(y)$. ثابت کنید:

$$f(f^{-1}(x))=x, f^{-1}(f(x))=x$$

چهار: اگر $f(f(x))=x$ برای هر $x \in D_f$ و $g(f(x))=x$ برای هر $x \in D_g$ ، ثابت کنید f یک به یک است و وارون آن تابع g است.

راهنمایی:

برای اثبات یک به یک بودن f باید از اینکه $f(x_1)=f(x_2)$ نتیجه بگیرید: $x_1=x_2$. به این منظور از تابع g کمک بگیرید.

پنج: اگر f و g وارون پذیر باشند، ثابت کنید: $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

راهنمایی: از قسمت چهار کمک بگیرید.

شش: آیا می‌توانید قسمت قبل را به سه تابع وارون پذیر تعمیم دهید؟ به چهار تابع وارون پذیر چگونه؟ به n تابع وارون پذیر چگونه؟ ارتباط این قسمت و قسمت اول را بررسی کنید.

چالش چهارم

یک: به هر عدد طبیعی n ، بازه $I_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ را نسبت می‌دهیم. به نظر شما اشتراک تمام بازه‌های $I_1, I_2, I_3, \dots$ چه خواهد شد؟

شهودتان چه می‌گوید؟ آیا می‌توانید حدستان را دقیق ثابت کنید؟

راه حل: شهروندان می‌گویند پاسخ مجموعه تک عضوی $\{0\}$ است. برای اثبات از روش برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید اشتراک آن‌ها شامل عدد غیر صفری مانند a باشد. ابتدا فرض می‌کنیم $a > 0$. در نتیجه $\frac{1}{a} > 0$.

عدد طبیعی n_1 را بزرگ‌تر از $\frac{1}{a}$ در نظر می‌گیریم. در نتیجه $n_1 < \frac{1}{a}$ و بنابراین $a > \frac{1}{n_1}$. پس:

$$a \notin (-\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_1}) \Rightarrow a \notin (-\frac{1}{1}, \frac{1}{1}) \cap (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cap (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \cap \dots$$

که با فرض اول در تناقض است و اشتراک مذکور شامل هیچ عدد مثبتی نیست. با همین شیوه نشان دهید اشتراک این بازه‌ها شامل هیچ عدد منفی هم نیست.

دو: به هر عدد طبیعی یک بازه نسبت دهید، به طوری که اشتراک تمامی آن‌ها برابر $\{1\}$ باشد.

سه: قسمت قبل را تکرار کنید، با این شرط که اشتراک تمامی بازه‌ها برابر بازه $[1, 2]$ باشد.

چهار: آیا می‌توان سه بازه باز (به صورت (a, b)) پیدا کرد، به طوری که دو به دو اشتراک ناتهی داشته باشند، اما اشتراک هر سه تهی باشد؟

احتمالاً شهودتان می‌گویند پاسخ منفی است. سعی کنید این ادعا را ثابت کنید.

پنج: یک باستان‌شناس درباره چهار دوره تاریخی اقوام متفاوت تحقیق می‌کند. و چهار شیء باستانی A, B, C و D پیدا کرده است، به طوری که A متعلق به دوره‌های تاریخی اول و دوم، B متعلق به دوره‌های تاریخی دوم و سوم، C متعلق به دوره‌های تاریخی سوم و چهارم و D متعلق به دوره‌های تاریخی چهارم و اول است. آیا او می‌تواند نتیجه بگیرد تمامی این دوره‌های تاریخی در برهه‌ای از تاریخ معاصر بوده‌اند؟

آیا با این رنگ آمیزی به نتیجه مطلوب می‌رسید؟



دو: مسئله قبل را برای شکل‌های زیر تکرار کنید. البته صورت مسئله را هم باید خودتان زحمت بکشید و طرح کنید!



پی‌نوشت

۱- مصرعی از شعر سعدی

مسئله را با بازه‌های زمانی مدل‌سازی و ادعای خود را ثابت کنید.

چالش پنجم

یک: مربعی به ضلع ۱ در نظر بگیرید. وسط ضلع‌های آن را به طور متوالی به هم وصل کنید و یکی از مثلث‌های ایجادشده را رنگ کنید. حال همین کار را با مربع کوچک‌تر تکرار کنید. دوباره همین کار را روی مربع سوم تکرار کنید. اگر این کار را بی‌نهایت بار تکرار کنید، چه کسری از مربع اولیه رنگ می‌شود؟



راهنمایی برای راه اول

مساحت مثلث‌های اول، دوم و سوم چقدر است؟ این مساحت‌ها چه نوع دنباله‌ای تشکیل می‌دهند؟ مجموع n جمله اول این دنباله برحسب n را به دست آورید. اگر n را زیاد کنید، این مجموع به سمت چه عددی می‌رود؟

راهنمایی برای راه دوم

بیایید از همان ابتدا که مثلث اول را رنگ سبز زدید، سه مثلث دیگر را هم با رنگ‌های زرد، قرمز و آبی رنگ کنید. در مرحله دوم هم از چهار رنگ فوق برای چهار مثلث دوم استفاده کنید و این کار را ادامه دهید.

عددها و اخلاق

زهره کاظمی

«تا به حال به رفتار عددهای بین صفر و یک توجه کرده‌اید؟ هر قدر بزرگشان کنیم و به توان عددهای صحیح مثبت برسانیم، کوچک‌تر می‌شوند خیلی جالب‌اند، نه؟! این داستان رفتار ما با بعضی از آدم‌های زندگی‌مان است که علاوه بر نادیده گرفتن خطاهایشان، آن‌ها را برای انجام کارهای بد تشویق می‌کنیم و تازه فکر می‌کنیم، به آن‌ها کمک می‌کنیم. اما نه دوست من، آن‌ها روز به روز ضعیف‌تر و تهی‌تر می‌شوند. روز به روز از اصل خودشان دورتر می‌شوند تا اینکه روزی و جایی از زندگی‌شان به صفر میل می‌کنند؛ تمام می‌شوند.

اما برعکس، اگر به توان عددهای صحیح منفی برسند، یا اگر زیر رادیکال برده شوند، بزرگ می‌شوند، گاهی تنبیه کردن هم کار بدی نیست. ما انسان‌ها به تنبیه نیاز داریم، چون ممکن الخطاییم. از طرف دیگر، همیشه شنیدن جمله‌هایی مثل: «چقدر قوی شده‌ای! چقدر مهربان هستی! و...» به قدری ما را به وجد می‌آورد که روز به روز برای تقویت این کمالات در وجودمان می‌کوشیم.

تحسین خوبی‌ها و زیبایی‌های انسان‌ها، بدون اسیلونی حسد، دل بزرگی می‌خواهد.

این ماجرا ما را به یاد توان‌رسانی عددهای بزرگ‌تر از یک می‌اندازد که با استعانت از توان‌های مثبت، می‌توانیم آن‌ها را بزرگ و بزرگ‌تر کنیم. اما برعکس، اگر به توان عددهای منفی برسند، کوچک می‌شوند. در واقع اگر نوع نگاه ما نگاه زیبایی نباشد و با کینه و حسد آمیخته شود، این فضائل اخلاقی سیر نزولی پیدا می‌کنند.

پس مواظب باشیم کاری نکنیم که انسان‌های خوب دست از خوبی کردن و خوب بودنشان بردارند. اگر ما بلد باشیم چطور انسان‌ها را به توان برسانیم، چطور هوای دل یکدیگر را در بدترین شرایط زندگی داشته باشیم، چطور حال همدیگر را خوب کنیم، زمین جای قشنگ‌تری برای زندگی می‌شود. پس مراقب باشیم، چه کسی را به توان می‌رسانیم و چگونه. چقدر در تشویق و تنبیه‌هایمان مصلحت‌اندیش هستیم، و چقدر خوب است آدم‌هایی در زندگی‌مان باشند که عدد درون ما را بفهمند و بجا و مؤثر به ما تذکر بدهند؛ زیرا: «ان الذکری تنفع المؤمنین» (قرآن کریم: ۵۵ ذاریات).

صفات پسندیده وجودتان نا شمارا باد!

یک شگفتی در عددها

محمود داورزنی
بهار سلطانیپور

چکیده

دنباله و الگوهای متفاوت از عددها داریم که تعدادی از این روابط و الگوها حتی با وجود ساده بودن، به علت گستردگی عددها، فقط در مرحله حدس هستند.

در بازی با عددها به یک ویژگی جالب پی بردیم که با پرسش از استادان این حوزه تاکنون هیچ کس به آن نپرداخته است. در این مسئله دو عدد دلخواه انتخاب می شود و سپس مجموع رقم های هر یک به دیگری اضافه می شود. عددهای به دست آمده یا با یکدیگر برابرند و یا برابر نیستند. اگر برابر نباشند، این فرایند ادامه می یابد. یعنی مجموع رقم های هر عدد به عدد دیگر اضافه می شود. به طور شگفت انگیزی این عمل جایی به پایان می رسد. یعنی دو عدد حاصل همیشه با هم برابر می شوند.

هنگام بازی با عددها، دو عدد را انتخاب کردیم و مجموع رقم های هر یک را با دیگری جمع کردیم. با تکرار این عمل دریافتیم که در نهایت و در کمال شگفتی این دو عدد در یک مرحله با یکدیگر برابر می شوند. در مورد این مطلب با استادان این حوزه مشورت کردیم و دریافتیم که این ویژگی تاکنون در جایی بیان نشده است. با بررسی های بیشتر، روابطی را در این مسئله دیدیم و یافتیم که توانستیم تعدادی از آن ها را نیز اثبات کنیم و بعضی دیگر در سطح حدس قرار دارند.

مقدمه

مجموع عددها

الف) شرح یک ویژگی در عددها

برای آسان شدن درک مسئله دو مثال ارائه می کنیم: دو عدد متفاوت را در نظر می گیریم و مجموع رقم های هر کدام را با دیگری جمع می کنیم. این عملیات را به همین شیوه ادامه می دهیم تا هر دو عدد در نهایت در یک مرحله به یک عدد مساوی برسند:

۱۱	۲۱
+۳	+۲
۱۴	۲۳
+۰۵	+۰۵
۱۹	۲۸
+۱۰	+۱۰
۲۹	۳۸
+۱۱	+۱۱
۴۰	۴۹
+۱۳	+۰۴
۵۳	۵۳

عددها از گذشته تاکنون، به شکل های گوناگون در زندگی انسان ها حضور داشته اند و به مرور زمان در شیوه زندگی انسان ها تأثیر بیشتری گذاشته اند. به طوری که امروزه عددها و روابط بین آن ها در جای جای زندگی روزمره تمامی افراد به وضوح قابل مشاهده است. ساعتی که هر روز شما را از خواب بیدار می کند، اندازه کاغذی که روی آن می نویسید، نرخ تورم، میزان درآمد، شماره تلفن همراه، کد ملی شما و حتی حجم هوایی که هم اکنون در این لحظه در شش های شما جریان دارد، همه عددهای مشخصی هستند که ممکن است روزانه بارها و بارها از آن ها استفاده کنیم. این ها تنها چند نمونه کوچک از کاربرد عددها در زندگی یک فرد در جامعه امروزی به حساب می آیند.

وابستگی زندگی انسان ها به عددها و روابط بین آن ها باعث شده است که امروزه کشف و ایجاد روابط جدید بین عددها به یکی از هدف های مهم دانشمندان و صاحب نظران تبدیل شود. در نگاه اول عددها ساده و واضح به نظر می رسند و ممکن است این سؤال پیش بیاید که: چه روابط مهمی می توانند داشته باشند؟ اما در واقع ما بی نهایت

البته فرایند بالا که به تساوی دو عدد می‌انجامد ممکن است مراحل بیشتری داشته باشد، ولی باز هم در کمال شگفتی به دو عدد یکسان می‌رسیم.

۱۴۷	۱۵۶
<u>+۰۱۲</u>	<u>+۰۱۲</u>
۱۵۹	۱۶۸
<u>+۰۱۵</u>	<u>+۰۱۵</u>
۱۷۴	۱۸۳
<u>+۰۱۲</u>	<u>+۰۱۲</u>
۱۸۶	۱۹۵
<u>+۰۱۵</u>	<u>+۰۱۵</u>
۲۰۱	۲۱۰
<u>+۰۰۳</u>	<u>+۰۰۳</u>
۲۰۴	۲۱۳
<u>+۰۰۶</u>	<u>+۰۰۶</u>
۲۱۰	۲۱۹
<u>+۰۱۲</u>	<u>+۰۰۳</u>
۲۲۲	۲۲۲

ب) برداشت‌های آزاد از این ویژگی

از مثال‌های گفته‌شده و ویژگی یافت‌شده برداشت‌های متفاوتی کرده‌ایم که بعضی از آن‌ها را ثابت کرده و بعضی دیگر را هنوز ثابت نکرده‌ایم.

بخش اول: برداشت‌های قابل اثبات

۱. اگر کمی به عددهای به‌دست آمده در هر مرحله دقت کنیم، متوجه خواهیم شد که اختلاف آن‌ها بعد از مرحله اول مضرب‌هایی از عدد ۹ است. برای مثال در دو عدد زیر داریم:

۲۴-۱۵=۹	
۳۰-۲۱=۹	
۳۳-۲۴=۹	
۳۹-۳۰=۹	
۱۰	۲۳
<u>+۵</u>	<u>+۱</u>
۱۵	۲۴
<u>+۰۶</u>	<u>+۰۶</u>
۲۱	۳۰
<u>+۰۳</u>	<u>+۰۳</u>
۲۴	۳۳
<u>+۰۶</u>	<u>+۰۶</u>
۳۰	۳۹
<u>+۱۲</u>	<u>+۰۳</u>
۴۲	۴۲

۰۱۱	۰۳۷
<u>+۱۰</u>	<u>+۰۲</u>
۰۲۱	۰۳۹
<u>+۰۱۲</u>	<u>+۰۰۳</u>
۰۳۳	۰۴۲
<u>+۰۰۶</u>	<u>+۰۰۶</u>
۰۳۹	۰۴۸
<u>+۰۱۲</u>	<u>+۰۱۲</u>
۰۵۱	۰۶۰
<u>+۰۰۶</u>	<u>+۰۰۶</u>
۰۵۷	۰۶۶
<u>+۰۱۲</u>	<u>+۰۱۲</u>
۰۶۹	۰۷۸
<u>+۰۱۵</u>	<u>+۰۱۵</u>
۰۸۴	۰۹۳
<u>+۰۱۲</u>	<u>+۰۱۲</u>
۰۹۶	۱۰۵
<u>+۰۰۶</u>	<u>+۰۱۵</u>
۱۰۲	۱۲۰
<u>+۰۰۳</u>	<u>+۰۰۳</u>
۱۰۵	۱۲۳
<u>+۰۰۶</u>	<u>+۰۰۶</u>
۱۱۱	۱۲۹
<u>+۰۱۲</u>	<u>+۰۰۳</u>
۱۲۳	۱۳۲
<u>+۰۰۶</u>	<u>+۰۰۶</u>
۱۲۹	۱۳۸
<u>+۰۱۲</u>	<u>+۰۱۲</u>
۱۴۱	۱۵۰
<u>+۰۰۶</u>	<u>+۰۰۶</u>
۱۴۷	۱۵۶

حال به اثبات این قضیه می‌پردازیم:

فرض می‌کنیم که دو عدد انتخابی دورقمی بوده‌اند و برابر با دو عدد ab و cd هستند. حال داریم:

$$\begin{array}{r} \overline{cd} \\ +a+b \\ \hline 10c+d+a+b \end{array} \quad \begin{array}{r} \overline{ab} \\ +c+d \\ \hline 10a+b+c+d \end{array}$$

اختلاف $\Rightarrow 10c+d+a+b - 10a-b-c-d = 9c-9a = 9(c-a)$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، عدد حاصل در نهایت در ۹ ضرب خواهد شد. پس قطعاً ضربی از عدد ۹ خواهد بود. اگر فرض کنیم که عددهای مورد نظر سه‌رقمی بوده‌اند، برای اثبات آن داریم:

$$\begin{array}{r} \overline{def} \\ +a+b+c \\ \hline 100d+10e+f+a+b+c \end{array} \quad \begin{array}{r} \overline{abc} \\ +d+e+f \\ \hline 100a+10b+c+d+e+f \end{array}$$

اختلاف $\Rightarrow 100d+10e+f+a+b+c - 100a-10b-c-d-e-f = 99d+9e-99a-9b = 9(11d+e-11a-b)$

۲. حال این سؤال پیش می‌آید که ممکن است طی این عملیات یکی از عددها نسبت به دیگری یک ارزش مکانی افزایش یابد. آیا آن زمان هم این رابطه همچنان برقرار است؟ جواب شما بله است.

در ادامه برای اثبات این مسئله داریم:

$$\begin{array}{r} \overline{ab} \\ +c+d+e \\ \hline 10a+b+c+d+e \end{array} \quad \begin{array}{r} \overline{cde} \\ +a+b \\ \hline 100c+10d+e+a+b \end{array}$$

اختلاف $\Rightarrow 100c+10d+e+a+b - 10a-b-c-d-e = 99c+9d-9a = 9(11c+d-a)$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، در این صورت باز هم عدد حاصل ضربی از عدد ۹ است.

۳. گاه ممکن است عددهای انتخاب‌شده در همان مرحله اول با یکدیگر برابر شوند. این در صورتی امکان‌پذیر است که رقم‌های مرتبه دهگان به بعد با یکدیگر برابر باشند.

مثال:

$$\begin{array}{r} 23 \quad 28 \quad 124 \quad 129 \\ +10 \quad 05 \quad +012 \quad 007 \\ \hline 33 \quad 33 \quad 136 \quad 136 \end{array}$$

در ادامه اثبات این قضیه را مشاهده می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} \overline{ab} \\ +a+c \\ \hline 10a+b+a+c \end{array} \quad \begin{array}{r} \overline{ac} \\ +a+b \\ \hline 10a+c+a+b \end{array}$$

$11a+b+c = 11a+c+b$

بخش دوم: برداشت‌هایی بدون اثبات

۱. همان‌طور که تاکنون در مثال‌ها مشاهده کردید، دو عدد در یک مرحله با یکدیگر برابر می‌شوند. تاکنون این عملیات برای تمامی جفت عددهای بررسی‌شده (به‌جز اعدادی مانند ۱ و ۸۰ و زوج اعداد دیگری مانند آن‌ها) جواب داده است، اما تا به حال قادر به اثبات این مسئله نبوده‌ایم.

۲. در مواردی که رقم‌های مرتبه دهگان به بالا در دو عدد انتخابی با یکدیگر برابر نیستند، ممکن است طی مراحل بسیار طولانی به جواب نهایی دست یابیم؛ مانند

مثال زیر:

$$(1) \quad \begin{array}{r} 010 \\ +004 \\ \hline 014 \end{array} \quad \begin{array}{r} 031 \\ +001 \\ \hline 032 \end{array}$$

اختلاف دو عدد

$$(2) \quad \begin{array}{r} 014 \\ +005 \\ \hline 019 \end{array} \quad \begin{array}{r} 032 \rightarrow 18 \\ +005 \\ \hline 037 \end{array}$$

$$(3) \quad \begin{array}{r} 019 \\ +010 \\ \hline 029 \end{array} \quad \begin{array}{r} 037 \rightarrow 18 \\ +010 \\ \hline 047 \end{array}$$

$$(4) \quad \begin{array}{r} 029 \\ +011 \\ \hline 040 \end{array} \quad \begin{array}{r} 047 \rightarrow 18 \\ +011 \\ \hline 058 \end{array}$$

$$(5) \quad \begin{array}{r} 040 \\ +013 \\ \hline 053 \end{array} \quad \begin{array}{r} 058 \rightarrow 18 \\ +004 \\ \hline 062 \end{array}$$

$$(21) \quad \begin{array}{r} 199 \\ + 010 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 226 \\ + 019 \\ \hline \end{array} \rightarrow 27$$

$$(22) \quad \begin{array}{r} 209 \\ + 011 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 245 \\ + 011 \\ \hline \end{array} \rightarrow 36$$

$$(23) \quad \begin{array}{r} 220 \\ + 013 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 256 \\ + 004 \\ \hline \end{array} \rightarrow 36$$

$$(24) \quad \begin{array}{r} 233 \\ + 008 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 260 \\ + 008 \\ \hline \end{array} \rightarrow 27$$

$$(25) \quad \begin{array}{r} 241 \\ + 016 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 268 \\ + 007 \\ \hline \end{array} \rightarrow 27$$

$$(26) \quad \begin{array}{r} 257 \\ + 014 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 275 \\ + 014 \\ \hline \end{array} \rightarrow 18$$

$$(27) \quad \begin{array}{r} 271 \\ + 019 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 289 \\ + 010 \\ \hline \end{array} \rightarrow 18$$

$$(28) \quad \begin{array}{r} 290 \\ + 020 \\ \hline 310 \end{array} \quad \begin{array}{r} 299 \\ + 011 \\ \hline 310 \end{array} \rightarrow 9$$

$$(6) \quad \begin{array}{r} 053 \\ + 008 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 062 \\ + 008 \\ \hline \end{array} \rightarrow 9$$

$$(7) \quad \begin{array}{r} 061 \\ + 007 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 070 \\ + 007 \\ \hline \end{array} \rightarrow 9$$

$$(8) \quad \begin{array}{r} 068 \\ + 014 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 077 \\ + 014 \\ \hline \end{array} \rightarrow 9$$

$$(9) \quad \begin{array}{r} 082 \\ + 010 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 091 \\ + 010 \\ \hline \end{array} \rightarrow 9$$

$$(10) \quad \begin{array}{r} 092 \\ + 002 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 101 \\ + 011 \\ \hline \end{array} \rightarrow 9$$

$$(11) \quad \begin{array}{r} 094 \\ + 004 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 112 \\ + 013 \\ \hline \end{array} \rightarrow 18$$

$$(12) \quad \begin{array}{r} 098 \\ + 008 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 125 \\ + 017 \\ \hline \end{array} \rightarrow 27$$

$$(13) \quad \begin{array}{r} 106 \\ + 007 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 142 \\ + 007 \\ \hline \end{array} \rightarrow 36$$

$$(14) \quad \begin{array}{r} 113 \\ + 014 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 149 \\ + 005 \\ \hline \end{array} \rightarrow 36$$

$$(15) \quad \begin{array}{r} 127 \\ + 010 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 154 \\ + 010 \\ \hline \end{array} \rightarrow 27$$

$$(16) \quad \begin{array}{r} 137 \\ + 011 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 164 \\ + 011 \\ \hline \end{array} \rightarrow 27$$

$$(17) \quad \begin{array}{r} 148 \\ + 012 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 175 \\ + 012 \\ \hline \end{array} \rightarrow 27$$

$$(18) \quad \begin{array}{r} 161 \\ + 017 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 188 \\ + 008 \\ \hline \end{array} \rightarrow 27$$

$$(19) \quad \begin{array}{r} 178 \\ + 016 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 196 \\ + 016 \\ \hline \end{array} \rightarrow 18$$

$$(20) \quad \begin{array}{r} 194 \\ + 005 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 212 \\ + 014 \\ \hline \end{array} \rightarrow 18$$

اگر به مرحله‌های مثال قبل یک بار دیگر نگاهی بیندازیم متوجه خواهیم شد که در برخی مرحله‌ها مجموع رقم‌های دو عدد با هم برابر می‌شوند؛ مانند مرحله‌های ۲، ۳ و ۴ در مثال قبل. پس در این مرحله‌ها اختلاف دو عدد ثابت می‌ماند. اما در برخی مرحله‌ها، مانند مرحله‌های ۵، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۴ در مثال قبل، مجموع رقم‌های دو عدد با هم برابر نیستند. در این موارد اختلاف مجموع رقم‌ها ضربی از عدد ۹ است. برای مثال در مرحله ۵ داریم:

$$13 - 4 = 9$$

در برخی از مرحله‌ها این اختلاف که ضربی از ۹ است، به عدد بزرگ‌تر اضافه می‌شود و اختلاف دو عدد اولیه را بیشتر می‌کند. اما در برخی مرحله‌ها این اختلاف به عدد کوچک‌تر اضافه می‌شود و اختلاف دو عدد اولیه کاهش می‌یابد. برای مثال در مرحله ۵ اختلاف به عدد کوچک‌تر اضافه شده و اختلاف دو عدد اولیه از ۱۸ به ۹ رسیده است. در مرحله ۱۱ هم اختلاف به عدد بزرگ‌تر اضافه شده و اختلاف دو عدد اولیه از ۱۸ به ۲۷ رسیده است.



۳. اگر از مرحله‌هایی که اختلاف در آن‌ها ثابت مانده است صرف‌نظر کنیم و فقط مرحله‌هایی را در نظر بگیریم که اختلاف دو عدد کم یا زیاد شده است، متوجه خواهیم شد که به علت بالا و پایین شدن عدد اختلاف، بعضی از این مرحله‌ها با یکدیگر خنثا می‌شوند. برای مثال، در مرحله‌های ۵ و ۱۱ که کمی قبل‌تر بیان شد، چون در یکی از مرحله‌ها ۹ تا به اختلاف اضافه و در دیگری ۹ تا از آن کم می‌شود، پس می‌توان گفت این دو با هم خنثا می‌شوند. در این صورت اگر مرحله‌های خنثا شده را هم حذف کنیم، تعداد مرحله‌های باقی‌مانده همگی مرحله‌هایی هستند که از اختلاف کم می‌کنند و تعداد آن‌ها برابر با اختلاف رقم‌های دهگان به بالای دو عدد اولیه است.

به‌عنوان نمونه، در مثال قبل تعداد این مرحله‌ها برابر است با: $3-1=2$ ؛ چرا که رقم‌های دهگان به بالای عدد ۳۱ برابر ۳ و عدد ۱۰ برابر ۱ است.

۴. تمامی جفت عددهای به‌دست‌آمده طی انجام این عملیات برای دو عدد اگر به صورت جداگانه در این عملیات قرار گیرند، در نهایت در یک عدد ثابت برابر می‌شوند. برای مثال، دو عدد ۱۰ و ۳۱ در عدد ۳۱۰ با هم برابر شدند. عددهای ۱۲۷ و ۱۵۴ نیز در مرحله ۱۵ در عدد ۳۱۰ به هم می‌رسند.

۱۹۴	۲۱۲
+۰۰۵	+۰۱۴
۱۹۹	۲۲۶
+۰۱۰	+۰۱۹
۲۰۹	۲۴۵
+۰۱۱	+۰۱۱
۲۲۰	۲۵۶
+۰۱۳	+۰۰۴
۲۳۳	۲۶۰
+۰۰۸	+۰۰۸
۲۴۱	۲۶۸
+۰۱۶	+۰۰۷
۲۵۷	۲۷۵
+۰۱۴	+۰۱۴
۲۷۱	۲۸۹
+۰۱۹	+۰۱۰
۲۹۰	۲۹۹
+۰۲۰	+۰۱۱
۳۱۰	۳۱۰

۱۲۷	۱۵۴
+ ۱۰	+ ۱۰
۱۳۷	۱۶۴
+۰۱۱	+۰۱۱
۱۴۸	۱۷۵
+۰۱۳	+۰۱۳
۱۶۱	۱۸۸
+۰۱۷	+۰۰۸
۱۷۸	۱۹۶
+۰۱۶	+۰۱۶
۱۹۴	۲۱۲

نتیجه‌گیری

طی انجام عملیاتی روی عددها، روابط جالبی پیدا کردیم که ضمن مشورت با استادان حوزه نظریه عددها دریافتیم که این مطلب تاکنون بررسی نشده است. در نتیجه به نوشتن این مقاله تشویق شدیم. در این مقاله روابطی میان مجموع رقم‌های دو عدد بیان کردیم که تقریباً برای تمامی عددهای بررسی‌شده جواب داده‌اند. اما مسئله اصلی که برابری تهایی دو عدد است، هنوز ثابت نشده و اثبات آن در جای دیگری نیز بیان نشده است و ما همچنان در پی یافتن راه و روشی برای اثبات آن هستیم.

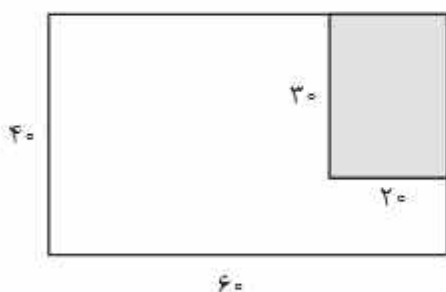
منابع

۱. گریمالدی، رالف (۱۳۶۷). ریاضیات گسسته و ترکیباتی از دیدگاه کاربردی. ترجمه علی عمیدی. مرکز نشر دانشگاهی.
2. Harcet, Josip, et al (2016). DISCRETE MATHEMATICS. Oxford University Press.

زمین پدر بزرگ

محمد تقی طاهری تنجانی

آقای صالحی از من خواست قلم و کاغذ برایش بیاورم. بعد از آنکه شکلی از شرایط مسئله را رسم کرد، از من و حامد خواست مسئله را حل کنیم و ادامه داد: «شما باید با یک خط مستقیم شکل را به دو قسمت هم‌سطح تقسیم کنید.»



من و حامد هر کدام روی کاغذ شکل مسئله را رسم کردیم و مشغول شدیم. هر خطی می‌کشیدیم یکی از شرایط را نداشت. یا زمین کشاورزی نصف نمی‌شد یا بخش مسکونی. آقای صالحی پرسید: «چه می‌کنید؟» گفتم: «هر خطی می‌کشیم، فقط یکی از دو قسمت را نصف می‌کند و هم‌زمان هر دو قسمت نصف نمی‌شوند! آقای صالحی گفت: «یکی از راه‌های خلاقانه حل مسئله این است که ابتدا به‌جای حل مسئله به شرایطی فکر کنی که برای حل مسئله نیاز است. اگر به نتیجه

« غروب جمعه یک روز تابستانی بود. پدر بزرگ مانند هر روز چای دغالی را آماده کرده بود. امروز یک مهمان عزیز به جمع خانواده اضافه شده بود.

آقای صالحی، دبیر دبیرستان‌های تهران، با خانواده‌اش مهمان پدر بزرگ بودند. من و پسرعمویم، حامد، او را خیلی دوست داریم. علاوه بر ادب و فروتنی، لحن سخن گفتن مهربانانه‌ای دارد. در جمع بچه‌ها، به فراخور حالشان، مسئله‌های فکری ریاضی را شرح می‌دهد. روشش فقط راهنمایی است. آن قدر کمک می‌کند تا خودت جواب را پیدا کنی.

آن روز آقای صالحی، هنگام نوشیدن چای، از پدر بزرگ پرسید: «واقعاً تصمیمتان را گرفته‌اید؟!» پدر بزرگ گفت: «بله! فقط یک مشکل وجود دارد: این قسمت باغ مسکونی است و در طرح هادی روستاست. اجازه ساخت فقط برای همین قسمت داده می‌شود و باقی زمین به‌صورت کشاورزی است. مانده‌ام چگونه این زمین را بین دو فرزندم تقسیم کنم؟»

آقای صالحی پرسید: «کل زمین چند متر است؟ ابعاد آن چگونه است؟»

پدر بزرگ گفت: «کل زمین ۴۰ در ۶۰ متر و به شکل مستطیل است. در کنار آن این بخش مسکونی مستطیل شکل به ابعاد ۲۰ در ۳۰ متر قرار دارد. می‌خواهم زمین را به‌صورت هم‌مساحت طوری تقسیم کنم که هم قسمت مسکونی و هم قسمت کشاورزی نصف شوند و فقط با یک دیوار مستقیم این کار انجام شود.»

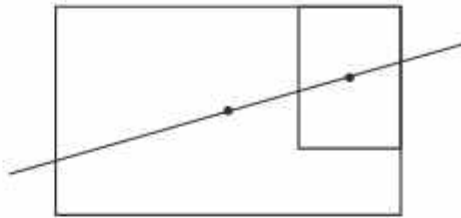
من و حامد دوباره مشغول شدیم. خط‌هایی که مستطیل را نصف می‌کردند زیاد بودند و نقطه مشترک همه آن‌ها مرکز مستطیل بود. کشف بزرگی کرده بودیم. هر کدام از مستطیل‌ها یک مرکز داشتند. پس خط مورد نظر باید از مرکز هر دو مستطیل بگذرد. یافتیم!

به سرعت نزد آقای صالحی رفتیم. گفتیم: «آقای صالحی خط را یافتیم. این خط باید از مرکز هر دو زمین بگذرد.»

نرسیدی. مسئله را به اجزای کوچک‌تر تقسیم کن و مجدداً به شرایط مورد نیاز برای حل مسئله فکر کن؛ تا در نهایت به حل مسئله پرسی. در حل این مسئله:

در چه شرایطی هر کدام از مستطیل‌ها نصف می‌شوند؟ آن خطی که مستطیل‌ها را به دو نیمه مساوی تقسیم می‌کند، چه ویژگی‌ای باید داشته باشد؟ اصلاً فکر کنید فقط یک مستطیل است!





آقای صالحی رو به پدر بزرگ کرد و گفت: «آفرین بر این نوه‌های باهوش. کاملاً درست حدس زده‌اید. شما می‌توانید خط مستقیمی از مرکز دو زمین رسم کنید و دیوار باید در امتداد همین خط باشد.»

صدای مادر بزرگ که برای شام خوردن دعوت می‌کرد، رشته افکارمان را پاره کرد. بعد از شام آقای صالحی با ذکر خاطراتی از معلمی‌اش اشاره کرد که: «تعداد اندکی از دانش‌آموزانی مثل شما داشته‌ام که هم علاقه‌مند به حل مسئله بوده‌اند و هم پشتکار داشته‌اند. آفرین! حالا که مسئله پدر بزرگ را حل کردید، یک مسئله هم من دارم که با توجه به اطلاعات شما از پایه دهم دبیرستان، می‌توانید آن را حل کنید.

طول این دیوار که زمین پدر بزرگ را نصف می‌کند چند متر است؟»

به سرعت جواب دادم: «خب با یک طناب طول پاره خطی را که زمین را نصف می‌کند، اندازه‌گیری می‌کنیم.» آقای صالحی پاسخ داد: «اول اینکه یافتن دقیق مرکز در زمین و ابعاد آن کمی دشوار است. دوم اینکه می‌خواهیم روی کاغذ این طول را به دست آوریم.» به فکر فرو رفتیم: «خب چه مطلبی از ریاضی دهم کمکمان می‌کند؟ ما که نمی‌دانیم این پاره خط در چه تقاطعی زمین را قطع می‌کند...»

گاهی حامد جمله‌ای می‌گفت و رشته فکرها را به هم می‌زد. گفت: «خوب است از آقای صالحی راهنمایی بخواهیم.»

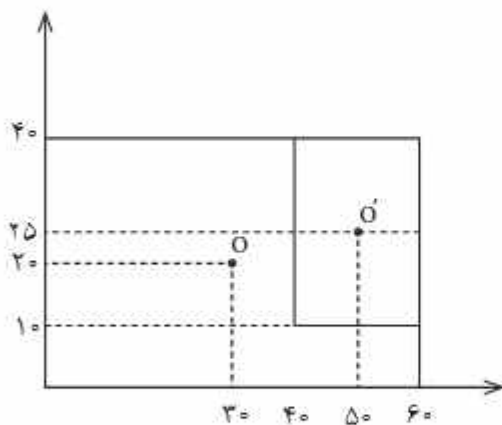
و بلافاصله پیش آقای صالحی رفتم: «آقای صالحی می‌شود راهنمایی کنید؟»

آقای صالحی که آماده خداحافظی می‌شد گفت: «با محورهای مختصات! زمین را ببرید روی محور مختصات و معادله خطی را که از مرکز دو زمین می‌گذرد، بنویسید و...» دیگر گوش نمی‌دادم چه می‌گوید. راهنمایی اساسی بود. مسئله حل شده بود. معلم ریاضی‌مان نمونه آن را برایمان حل کرده بود. گفتیم: «خیلی ممنون آقای صالحی. حلش می‌کنیم.»

دفتر و قلم را کنار رختخوابم گذاشته بودم. روی پشت‌بام خوابیده بودیم و به ستاره‌ها خیره شده بودم. خواب می‌دیدم آقای صالحی بالای سکوی مدرسه ایستاده است و از من و حامد تقدیر می‌کند. او می‌گوید: «حالا می‌خواهم جایزه‌ای به این دو عزیز بدهم که یک مسئله مهم را حل کرده‌اند. لطفاً برایشان دست بزنید.»

بچه‌ها هلهله کنان شروع به دست‌زدن کردند. ناگهان صدای پدرم را شنیدم که صدا می‌زد: «حمید جان! حمید جان! نماز صبحت دیر نشود!» چشمانم را باز کردم. نسیم خنکی صورتم را نوازش می‌کرد. بعد از نماز خوابم نمی‌آمد از حامد پرسیدم: «حامد تو چرا نمی‌خوابی؟»

حامد گفت: «خوابم نمی‌برد، تمام شب را روی حل مسئله فکر می‌کردم! شبیه مسئله‌هایی است که توی کلاس حل می‌کردیم، اما اینجا مختصات شکل را نداریم.» گفتم: «حالا بعد از صبحانه دوباره روی مسئله فکر می‌کنیم. بعد از صبحانه مجدداً مسئله را بررسی کردیم. شکل مسئله را رسم کردیم و مختصات دو مرکز را با توجه به ابعاد مستطیل‌ها به دست آوردیم.



بعد با حامد این‌طور مسئله را حل کردیم که با داشتن مختصات مرکز دو مستطیل شیب خط گذرنده از OO' را به دست می‌آوریم: $O(30, 20)$ و $O'(50, 25)$

$$m_{OO'} = \frac{25 - 20}{50 - 30} = \frac{1}{4}$$

حالا خط گذرنده از OO' را با داشتن شیب خط و یک نقطه از آن می‌نویسیم:

$$y - 25 = \frac{1}{4}(x - 50)$$

ساده‌شده این خط به صورت $y = \frac{1}{4}x + \frac{50}{4}$ درمی‌آید.

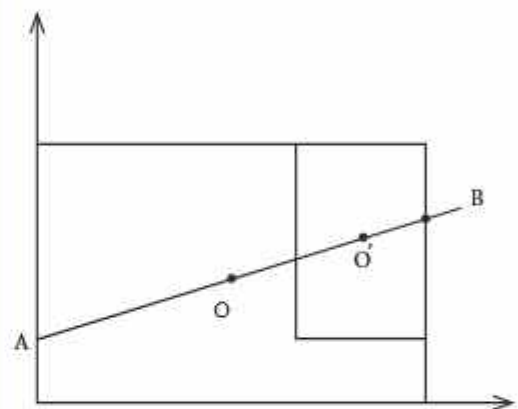


باید ببینیم این خط دو خط $x=0$ (محور y) و خط $x=60$ را کجا قطع می‌کند:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}x + \frac{50}{4} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{50}{4} = 12.5 \Rightarrow A(0, 12.5)$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}x + \frac{50}{4} \\ x = 60 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{110}{4} = 27.5 \Rightarrow B(60, 27.5)$$

حالا طول پاره خط AB را با داشتن مختصات دو نقطه می‌یابیم:



$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$AB = \sqrt{(60 - 0)^2 + (27.5 - 12.5)^2}$$

$$AB = \sqrt{3600 + 225}$$

$$AB = \sqrt{3825}$$

جذر ۳۸۲۵ را با دو رقم اعشار و با استفاده از ماشین حساب به دست می‌آوریم: $AB = 61.85$. یعنی تقریباً نزدیک ۶۲ متر طول این دیوار مشترک می‌شود. این‌ها توضیحاتی بودند که به آقای صالحی دادیم. آقای صالحی لیخندی زد و خیلی تشویقمان کرد و ادامه داد: «شما خوب توانستید از معلوماتی که در مدرسه آموخته‌اید، برای حل یک مسئله پیرامونی استفاده کنید. آفرین بر شما!»

نمی‌دانم آقای صالحی به پدر بزرگ چه گفته بود که پدر بزرگ لقب پروفیسور به ما داده بود. هرچا می‌نشست با خوش حالی چگونگی حل مسئله زمین توسط نوه‌هایش را شرح می‌داد. حالا ما شده بودیم پروفیسور!

سرزمین ستاره‌ها ابن‌الحسین

احسان یارمحمدی

کارگردان: علی‌محمد قاسمی و اعظم نجفیان
تهیه‌کننده: هومن مرادی کرمانی
تصویربردار: علی‌محمد قاسمی
تدوین نهایی: علی‌محمد قاسمی
طراحی و ترکیب صدا و موسیقی: بهروز شهامت
تدوین اولیه: طاهره حسینی
پژوهشگر: محبوبه کلاتتری
انتخاب تصویرهای آرشیوی: اعظم نجفیان
تصویربرداران بخش مصاحبه: مختار نامدار، کاظم فرامرزی، میثم جمال‌لو و اعظم نجفیان
گوینده و راوی: محمود نظرعلیان
تهیه‌شده در شبکه مستند سیمای جمهوری اسلامی ایران

به تاریخ ریاضی و دانش در ایران را با این شخصیت بی‌بدیل در عرصه دانش و فرهنگ ایران‌زمین آشنا کنیم. به همین دلیل نخست سطرهایی از کتاب «زندگی‌نامه ریاضی‌دانان دوره اسلامی از سده سوم تا یازدهم» به قلم زنده‌یاد ابوالقاسم قربانی (۱۳۸۰ - ۱۴۹۰) را که در سال ۱۳۷۵ در «انتشارات مرکز نشر دانشگاهی» به زبور طبع آراسته شده است، می‌آوریم و سپس مواردی از مستند مزبور را در پی خواهیم آورد.

«ابوعلی محمدبن حسن بن هشتم، فیزیک‌دان و ریاضی‌دان بصری - مصری (۴۳۰ - ۳۵۴)، یکی از ریاضی‌دانان نامی و بی‌تردید بزرگ‌ترین فیزیک‌دان عرب [دوره اسلامی] است. در قرون وسطا اروپاییان او را الهازن نامیدند. در تاریخچه زندگی او خلأ بسیار وجود دارد. در حدود ۳۵۴ در بصره به دنیا آمد و در زمان خلافت الحاکم (۴۱۱-۳۸۶) به مصر رفت و در آنجا در صدد برآمد که جریان نیل را منظم سازد. اما چون این کار را ناشدنی یافت، با وجود ترسی که از خشم خلیفه داشت، از آن چشم پوشید. پس از مرگ حاکم به قاهره بازگشت و برای تأمین معاش به رونویسی کتاب‌های خطی علمی، به‌ویژه کتاب‌های ریاضی پرداخت.

مرگ وی در ۴۳۰ اتفاق افتاد. فهرست آثار او که از صد متجاوز است، به وسیله ابن‌ابی‌اصیبعه در کتاب «طبقات الاطباء» فراهم آمده است. اکثر این آثار - که بعضی از

از بزرگ‌ترین ریاضی‌دانان و بنا بر پژوهش‌های به‌عمل آمده، بی‌گمان بهترین فیزیک‌دان دوره اسلامی بوده است. او نخستین دانشمند فیزیک نور در جهان است که در زمینه شناخت نور و قانون‌های شکست و بازتاب آن، نظریات ارزشمندی ارائه کرده است. در این مقاله با معرفی مستند ابن‌هشتم، از مجموعه مستند «سرزمین ستاره‌ها»، قصد داریم ریاضی‌آموزان و علاقه‌مندان



چون مبانی ریاضی مستحکم نداشت، فقط توانست آن را از راه عملی (مکانیکی) حل کند. سرانجام **هویگنس**^۲ که در سال ۱۹۶۹ در گذشت، ظریف‌ترین و ساده‌ترین راه حل را نشان داد.

ابن هیثم ثابت کرده است که شفق نجومی وقتی آغاز می‌شود یا پایان می‌یابد که ارتفاع منفی خورشید به ۱۹ درجه برسد. او بر این مبنا ارتفاع جو زمین را ۵۲۰۰۰ قدم تخمین زده بود. وی علت انکسار جوی و افزایش قطر ظاهری خورشید و ماه را در نزدیکی افق به درستی توضیح داد.

ابن هیثم مانند **ابن سینا** و **بیرونی** معتقد بود که جهت سیر شعاع نور از طرف شیء به طرف چشم است، نه در جهت عکس آن که **اقلیدس**^۳ و **بطلمیوس** و **کندی** انگاشته بودند. در ریاضیات، ابن هیثم مسئله **ماهانی** را به صورتی بدیع حل کرد و رساله‌های متعدد درباره مطالب ریاضی نوشت.

نور نوعی از انرژی است که چشمان ما می‌تواند آن را

آن‌ها بسیار کوتاه‌اند - درباره ریاضیات و فیزیک نوشته شده‌اند. اما وی به مباحث فلسفی و طبی نیز پرداخته است. در سراسر آثار فلسفی او، به احاطه کاملش بر نوشته‌های مؤلفان یونانی، به خصوص **بطلمیوس**^۴ که آثارش را ابن هیثم مطالعه، تنقیح و نقادی کرده است، می‌توان پی برد.

نبوغ ریاضی ابن هیثم در مقاله پنجم کتاب «فی المناظر»، آنجا که مسئله‌ای را حل می‌کند که امروز به نام او معروف است، به اوج شکوفایی رسیده است. این مسئله چنین است: «در صفحه دایره‌ای به مرکز O و به شعاع R دو نقطه ثابت A و B داده می‌شود. هرگاه دایره را به مثابه آینه‌ای فرض کنیم، بر آن نقطه‌ای چون M بیابید که شعاع نوری که از A خارج می‌شود، پس از منعکس شدن در نقطه M بر B بگذرد.»

راه حل بسیار پیچیده ابن هیثم به یک معادله درجه چهارم منتهی می‌شود که وی آن را با قطع کردن یک هذلولی متساوی‌القطرین و یک دایره حل کرده است. **لئوناردو داوینچی**^۵ به حل این مسئله علاقه پیدا کرد، اما



پس از مشاهده
اختلاف مردم در راه‌های
وصول به حقیقت، برای یافتن راهی
مطمئن به سوی حق، عقاید گوناگون
را بررسی کردم و سرانجام به این اعتقاد
گرویدم که جز از راه دانشی که عنصرش
امور حسی و صورتش امور عقلی باشد،
نمی‌توان به حقیقت دست یافت
(ابن هیثم).

آثار ریاضی
موجود وی
عبارت‌اند از:

۱. رساله فی مساحه
المجسم المكافئ
۲. مقاله فی تربیع الدائرہ
۳. مقاله مستقصا فی الاشكال
الہلالیہ
۴. خواص المثلث من جهة العمود
۵. القول المعروف بالغریب فی حساب المعاملات
۶. فصل فی اصول المساحه و ذکرها بالبراهین
۷. قول فی مساحه الكره
۸. مقاله فی ان الكره اوسع الاشكال المجسمه التي احاطاتها
متساويه و ان الدائرہ اوسع الاشكال المسطحه التي احاطاتها
متساويه
۹. قول فی استخراج مسئله عدديه
۱۰. مسئله عدديه مجسمه
۱۱. مقاله فی المعلومات
۱۲. مقاله فی عمل المسبع فی الدائرہ
۱۳. فصل فی مقدمات ضلع المسبع
۱۴. مقاله فی التحلیل و التركيب

۱۵. المعاملات
فی الحساب
۱۶. مقاله فی مسائل التلاقی
۱۷. مسائل الهندسیہ
۱۸. رساله فی برکارالدوائر العظام
۱۹. کتاب فی حل شکوک کتاب اقلیدس فی الاصول و شرح
معاینه
۲۰. شرح مصادرات اقلیدس
۲۱. رساله فی قسمة المقدارین المختلفین المذكورین فی الشكل
الاول من مقاله العاشرة من کتاب اقلیدس
۲۲. رساله فی القوائد و المستنبطات من شرح المصادرات
۲۳. مقاله فی قسمة الخط الذي استعمله ارشمیدس فی المقالة
الثانية من کتابه فی الكره و الاسطوانات
۲۴. رساله فی شکل بنی موسی
۲۵. شرح المجسطی
۲۶. مقاله فی تمام کتاب المخروطات

بینند. نور شامل تمام رنگ‌های موجود در رنگین کمان است. ولی اگر همه این رنگ‌ها با هم ترکیب شوند، نور به رنگ سفید دیده می‌شود. یونانیان باستان تصور می‌کردند که خروج پرتوها از چشم و برخورد آن‌ها با اشیاء باعث بینایی می‌شود. ایرانیان، مصریان و بابلیان قدیم نخستین کسانی بودند که با اصول اولیه نور آشنایی داشتند. آن‌ها توانسته بودند با استفاده از خواص برخی مواد، نظیر کوارتز، چیزهایی شبیه به عدسی‌های کنونی بسازند. رومیان قدیم و یونانیان باستان نیز با پرکردن کره شیشه‌ای از آب، عدسی‌هایی می‌ساختند.

این هیثم نخستین کسی بود که به‌طور علمی و پیش از دیگران پدیده‌های بازتاب و شکست نور را به‌طور علمی مشاهده کرد و قوانین حاکم بر آن‌ها را، با استفاده از آنچه ما امروزه به‌عنوان «نورشناسی هندسی» (اپتیک هندسی) می‌شناسیم، توضیح داد. همچنین در رساله‌ای که خود او نوشته، ساختمان چشم به‌طور بسیار مفصلی توضیح داده شده است.

این هیثم بزرگ‌ترین فیزیک‌دان مسلمانان بود و یکی از بزرگ‌ترین محققان علم مناظر در تمام ادوار. این هیثم به‌طور تجربی ثابت کرد: ما می‌بینیم، چون نور از اشیاء به چشم ما می‌تابد. او از ریاضیات برای توضیح و اثبات این فرایند استفاده کرد؛ کاری که هیچ دانشمندی تا آن زمان برای انجامش کوشش نکرده بود. او باور داشت که دیدن نخست در عدسی بلورین چشم اتفاق می‌افتد. وی از تشکیل تصویر داخل چشم، همچون محفظه‌ای تاریک و بعد از عصب بینایی و ارتباط آن با مغز سخن به میان می‌آورد. نظریه این هیثم در مورد چشم، نظریه‌ای فیزیکی است. در آن زمان آزمایش و تجربه معمول نبود. فیزیک بیشتر به فلسفه شباهت داشت.

این هیثم اظهاراتی بر خلاف باورهای رایج زمان خویش داشت. او که حدود هزار سال پیش‌تر در قاهره می‌زیست، در خانه خویش محبوس بود. زیرا طبق امر خلیفه نتوانسته بود طغیان‌های رود نیل را محاسبه کند. این هیثم بر این عقیده بود که اگر مصریان باستان نتوانسته‌اند طغیان‌های نیل را محاسبه کنند، وی نیز قادر به انجام این کار نخواهد بود. حبس خانگی برای این هیثم بسیار مناسب بود، زیرا او با ماندن در خانه می‌توانست تمام اوقاتش را به مشاهده اشعه‌های نوری که از حفره‌های پنجره‌های خانه به درون می‌تابید، اختصاص دهد. او مشاهده کرد که نور از منفذ کوچکی از پنجره به درون تابیده و شکلی مانند تصویر خورشید هنگام خورشیدگرفتگی روی دیوار مقابل ایجاد

کرده است.

بر این اساس گفت: تصویر خورشید در زمان خورشیدگرفتگی نشان می‌دهد که اگر نور از منبع گرد و تاریک عبور کند و روی صفحه‌ای تخت، رویه‌روی منفذ بیفتد، اگر کامل باشد به شکل هلال در می‌آید. او با این تجربه توضیح داد که نور در خطی مستقیم حرکت می‌کند و وقتی پرتوها از جسمی روشن بازتابش می‌شوند و از منفذی تنگ می‌گذرند، متفرق نمی‌شوند، بلکه هم‌گرا و هم‌رأس می‌شوند و تصویری واژگون روی سطح صاف و سفید موازی با منفذ ایجاد می‌کنند. او سپس پی برد که هر اندازه این منفذ تنگ‌تر باشد، تصویر واضح‌تر است.

نتایج این آزمایش‌ها چنین بود که وقتی نور خورشید به منفذی می‌رسد و از آن می‌گذرد، تصویری مخروطی شکل در محل منفذ ایجاد می‌کند. سپس مخروطی دیگر به‌صورت واژگون ایجاد می‌شود که تا دیوار مقابل منفذ در اتاق تاریک ادامه می‌یابد. این یافته‌ها بعدها به اختراع اتاق تاریک منجر شدند و به این هیثم کمک کردند که نخستین

دوربین عکاسی را بسازد که دوربینی بدون عدسی بود. این هیثم در آزمایش‌های خود از اصطلاحی که در خانه‌های مسلمانان به کار می‌رود، استفاده کرده است. این اصطلاح در زبان لاتینی «کمرا آیسکیورا»^۱ است که همان «اتاق تاریک» معنی می‌دهد. واژه کمرا که امروزه برای دوربین عکاسی هم به کار می‌رود، از واژه عربی قَمَره به معنای اتاق خصوصی یا تاریک مشتق شده است. امروزه دوربین عکاسی که حاصل آزمایش‌ها و تجربه‌های این هیثم در اتاق تاریک محقر اوست به فرایندهای پیشرفته دیجیتال دست‌یافته است. او کوشید توضیح دهد، علت اینکه ما اشیاء را مانند دوربین عکاسی واژگون نمی‌بینیم، بلکه آن‌ها را مستقیم می‌بینیم، نوعی ارتباط عصب بینایی با مغز است که تصویر را تحلیل می‌کند و تشخیص می‌دهد.

کتاب «المناظر» با روشی تجربی و با اتکا به علم ریاضی، به توضیح ماهیت و ویژگی‌های پدیده نور می‌پردازد و رابطه آن را با سازوکار دیدن و درک بینایی تجربه و تحلیل می‌کند. این هیثم به خوبی با موضوع «بسماند تصویر» در چشم آشنا بوده و از آن به‌عنوان «دوام تصویر» نام برده و در توضیح آن چندین آزمایش تجربی را پیشنهاد کرده است.

کتاب المناظر این هیثم را جرارد کرمونایی^۲، اندیشمند قرون وسطا به زبان لاتین ترجمه کرد. ترجمه لاتینی کتاب المناظر در قرون وسطا تأثیر عمیقی بر دانش غربی نهاد و پیشرفت عظیمی را در روش تجربی به بار

دانست. او در پژوهش‌های نورشناسی خود آزمایش و مقایسه انجام می‌داد.

ابن هیثم بین دانشمندان و خاورشناسان اروپایی جایگاه خاصی داشته است. اروپاییان آثار علمی او را بررسی کرده و با شگفتی توانایی‌های علمی او را تحسین کرده‌اند. تا پایان قرن نوزدهم او را بیشتر به سبب کارهایش در نورشناسی می‌شناختند. اما با بررسی‌های آثار ریاضی وی آشکار شد

آورد. برای مثال، **کیلر**، دانشمند معروف علوم نجوم، در کتاب «مناظر» خود از افکار ابن هیثم استفاده زیادی کرده است. وی همچنین به تشریح این نکته پرداخت که چرا ماه و خورشید وقتی نزدیک خط افق هستند، بزرگ‌تر به نظر می‌رسند. وی معتقد بود علت بزرگی ابعاد ظاهری خورشید و ماه، نزدیکی آن‌ها به خط افق است و این افزایش اندازه نتیجه یک اشتباه مربوط به بینایی است که مغز مرتکب می‌شود.

ابن هیثم همچنین نشان داد که افزایش اندازه اجرام آسمانی حاصل شکست نوری است که از خورشید به ماه می‌رسد. وی با دیدن چگونگی شکست نور در جو، توانست تخمین خوبی از ارتفاع جو زمین به دست آورد. وی متوجه شد هنگامی که خورشید تا حدود ۱۹ درصد زیر خط افق قرار می‌گیرد، نور متکسر آن خورشید را بزرگ‌تر جلوه می‌دهد. وی بر این اساس ضخامت جو را حدود ۱۵ تا ۱۶ کیلومتر محاسبه کرد. این عدد به اندازه‌هایی که به تازگی از ضخامت پایین‌ترین لایه جو به دست آمده و حدود ۱۲ کیلومتر تخمین زده شده، نزدیک است. وی در آخر با آزمایش نشان می‌دهد که رنگ همیشه همراه نور و آسیخته با آن است و بدون وجود نور به چشم نمی‌آید.

ابن هیثم زبان عربی را به خوبی می‌دانست و خطی خوش داشت، لذا کتاب‌هایی که وی نسخه‌برداری می‌کرد، هم خطی خوش و هم دقت علمی بسیار داشت. ابن هیثم نخست در بصره به فراگیری دانش پرداخت. مثل پدرش از کارداران دولت «آل بویه» بود و توانست جایگاهی در دستگاه دولتی بصره پیدا کند. سپس از سوی خلیفه به مصر فراخوانده شد تا برنامه پیشنهادی خود را برای نظم بخشیدن به جریان رود نیل به اجرا درآورد. پس از آمدن ابن هیثم به مصر و با دیدن آثار و بناهایی که مصریان براساس طرح‌های دقیق مهندسی ساخته بودند، فهمید که اگر اجرای طرح او ممکن بود، این مصریان دانا تا آن زمان آن را ساخته بودند. بنابراین نزد خلیفه به ناکارآمد بودن طرح خود اعتراف کرد. ابن هیثم چندسالی را در زندان گذراند. پس از مرگ خلیفه از زندان آزاد شد و در قاهره اقامت کرد و بقیه عمر را به تدریس و تحقیق گذراند.

تعداد کل آثار او به ۹۲ اثر می‌رسد که در حال حاضر حدود ۵۵ اثر از وی موجود است. آثار به‌جامانده از ابن هیثم در ریاضیات، نورشناسی، فیزیک و نجوم نقش بسیار مهمی در پیشرفت علم داشته‌اند. ابن هیثم در روزگاری به سر می‌برد که اوج شکوفایی دانشمندان اسلامی بود. او را می‌توان سرآمد و پیشرو دانشمندان تجربی و اهل آزمایش



که ابن هیثم مبتکر حل تعدادی از مسائل دشوار ریاضیات به‌ویژه در حجم‌های مخروطی است و مسائل دشوار مثلثات را نیز از راه‌های هندسی به خوبی حل کرده است. در واقع باید گفت تحول دانش نجوم در غرب مدیون کتاب ابن هیثم است. پژوهش‌های وی درباره نور ماه نیز نخستین تلاش در پژوهش و تحقیق علمی فیزیک نجومی است و او کتاب «ضوء القمر» یا «نور ماه» را به توضیح درباره آن اختصاص داد.

دانشمندان اروپایی همچون **راجر بیکن**^۷ نتایج علمی و آزمایش‌های وی را در تحقیقات علمی خود به کار می‌بردند و می‌توان گفت حتی با اینکه راجر بیکن را پایه‌گذار کاربرد ریاضیات در دانش‌های طبیعی می‌دانند، اما این ابن هیثم بود که برای نخستین مرتبه این کار را انجام داد و می‌توان نمونه‌های روشن و واضحی را در آثارش مشاهده کرد که بیشتر از نوشته‌های بیکن است.

ابن هیثم در غرب در آثار لاتین به **الحازن** شناخته می‌شود. او شخصیت علمی جهانی دارد و به همین دلیل نام الحازن که تبدیل‌شده لاتین نام الحسن است، بر قسمتی از کسره ماه به‌عنوان قدرشناسی از کارهای علمی او نهاده شده است. کتاب المناظر معروف‌ترین اثر ابن هیثم است که اروپاییان آن را در قرون وسطا به لاتین ترجمه کرده‌اند. این کتاب تحول بزرگی در روش کار تجربی ایجاد کرد و موجب پیشرفت علم شد. پس از آن نیز افراد گوناگونی به نقد و انتشار این اثر دست زدند.

از تاریخ دقیق درگذشت ابن هیثم اطلاعی در دست نیست. مورخان مرگ او را در حدود سال ۳۸۸ شمسی یا پس از آن در قاهره دانسته‌اند و گفته‌اند که چون به سختی بیمار شد و دانست که عمرش به سر آمده است، رو به کعبه خوابید و ذکر حق گفت و درگذشت.

در پایان از ارائه مطالب بیشتر درباره مستند «سرزمین ستاره‌ها؛ ابن هیثم» خودداری می‌کنیم و شما ریاضی‌آموزان و علاقه‌مندان به تاریخ ریاضیات در ایران‌زمین را به تهیه و تماشای این مستند تشویق می‌کنیم.



پی‌نوشت‌ها

1. Ptolemy
2. Leonardo da Vinci
3. Huygens
4. Euclid
5. Camera Obscura
6. Gerard of Cremona
7. Roger Bacon



۳۱

شماره ۱۳۳۲ | پاییز ۱۳۹۴

سرگردان در بیابان

مجید صفری

حالا سؤال را این گونه مطرح می‌کنیم: در شکل زیر، فاصله نقطه M از خط d کدام مسیر است؟ A ، B یا C ؟



«می‌خواهیم درباره یکی از اشتباه‌های رایج دانش‌آموزی صحبت کنیم: دانش‌آموزان عزیز، در شکل زیر، مسیر فاصله نقطه M از خط d را رسم کنید؟ (لطفاً همین‌جا توقف کنید و تا پاسخ خود را ندهاید وارد سطر بعدی نشوید.)



آیا پاسخ شما مسیر A است؟



پاسخ بسیاری از دانش‌آموزان A یا C است و این پاسخ به‌خاطر «نگاه افقی یا عمودی یا همان «نگاه جدولی» است که معمولاً در زندگی داریم.

حالا یک سؤال در دنیای واقعی، فرض کنید شما با دوستانتان به گردش رفته‌اید و خدای ناکرده دوستان خود را گم کرده و در بیابان سرگردان شده‌اید و مسیر را هم نمی‌دانید. ناگهان از دور جاده‌ای را می‌بینید. شکل زیر را ببینید:



اگر پاسخ مثبت است، وضع چندان نگران‌کننده نیست، چون اکثر دانش‌آموزان در نگاه اول این پاسخ را می‌دهند. ولی پاسخ داده‌شده اشتباه است!



۳۲

شماره ۱۳۳۰ | پاییز ۱۳۹۰

در نتیجه دانش آموز زرنگ باید حواسش باشد، هنگامی که در مسائل متفاوت به موضوع فاصله نقطه از خط برمی خورد، در تصوراتش دچار نگاه افقی عمودی نشود، بلکه کوتاه ترین فاصله یا همان فاصله عمود نقطه از خط را مورد نظر قرار بدهد.

خب! حالا این موضوع اثبات هندسی هم دارد. اثبات اینکه «کوتاه ترین فاصله نقطه از خط مساوی است با فاصله عمودی نقطه از خط». با استفاده از برهان خلف و این قضیه که «در هر مثلث، ضلع روبه رو به زاویه کوچک تر از سایر ضلع های همان مثلث کوچک تر است»، به دست می آید. حالا شما دانش آموز عزیز که مطلب را به خوبی متوجه شده اید، این اثبات هندسی را بنویسید و برایمان بفرستید. (رایانامه مجله: borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir)

درود بر شما ریاضی دانان جوان!

در این صورت شما با دیدن جاده کدام مسیر را به سمت جاده انتخاب می کنید؟

توجه کنید، شکلی که رسم شده تصویر جغرافیایی است که با رعایت جهت های شمال، جنوب، شرق و غرب رسم شده است. ولی آن لحظه که شما جاده را می بینید، تصویر در نگاه و ذهن شما مطابق شکل زیر است:



پس شما قطعاً و به طور ذاتی مسیر B را انتخاب می کنید و این فاصله، هم «کوتاه ترین فاصله» و هم «فاصله عمود بر خط» است.



۳۳

مفهوم ریاضی در شعر سعدی

بهنام آیتی پور

« سعدی، شاعر بلند آوازه ایران زمین، نیازی به معرفی ندارد. در بیان بزرگی این شاعر شهیر همین بس که این شعر او بر تارک ساختمان «سازمان ملل متحد» می درخشد:

**بنی آدم اعضای یکدیگرند
که در آفرینش ز یک گوهرند
چو عضوی به درد آورد روزگار
دگر عضوها را نماند قرار
تو کز محنت دیگران بی غمی
نشاید که نامت نهند آدمی**

در این مقاله به یک سؤال در مورد بیت اول شعر فوق جواب می دهیم. در ضمن متوجه تصویری جذاب از مفهوم ریاضی مجموعه در شعر سعدی می شویم. کدام یک از مصرع های زیر به درستی نگاشته شده اند؟

الف) بنی آدم اعضای یک پیکرند
ب) بنی آدم اعضای یکدیگرند

قبل از پاسخ به این پرسش چند نکته را یادآوری می کنیم:

در علم ریاضی «مجموعه» به دسته ای از اشیاء، عددها، انسان ها یا ... گفته می شود که با یک ویژگی، کاملاً مشخص شده اند.

مثال ۱. مجموعه حرف های ضدادار انگلیسی:

{a,e,i,o,u}

مثال ۲. مجموعه حرف های دارای سه نقطه الفبای فارسی:

{پ، ژ، ش، چ}

دستگاه: مجموعه ای از اجزاست که با همکاری و هماهنگی، هدفی خاص را پیگیری می کنند.

مثال: دستگاه ضبط صوت و دستگاه موتورسیکلت.

نکته: هر دستگاه یک مجموعه است و ویژگی آن هم همان همکاری و هماهنگی اجزایش است، اما هر مجموعه یک دستگاه نیست. مثلاً مجموعه برادران یک خانواده خاص شامل تعدادی برادر است. مجموعه این برادران به واسطه برادری صرف دستگاه نیستند. ممکن است هیچ کدام از ایشان سال ها با هم هیچ ارتباطی نداشته باشند و هیچ همکاری هم بین آن ها نباشد. احتمالاً یکی خارج از کشور باشد، یکی در کلان شهر تهران

و یکی هم در مشهد. اما مجموعه بازیکنان «پرسپولیس» یا «استقلال» هر کدام به طور جداگانه یک تیم (سیستم) را تشکیل می دهند. چون همه آن ها مشغول همکاری و هماهنگی برای کسب قهرمانی لیگ هستند. پس هر دستگاهی یک مجموعه است، ولی هر مجموعه یک دستگاه نیست.

حالا واقعیت این است که مجموعه افراد یک جامعه در یک تمدن بشری هم یک دستگاه (سیستم) اجتماعی است.

**یکی قاضی است و قضا می کند
یکی درد مردم دوا می کند
یکی دست بر سینه نزد امیر
دگر نان برآرد ز گندم خمیر
یکی می کند سنگ آهن چو آب
یکی می کند گوسفندان کباب
یکی خانه می سازد او چون زحل
یکی رشته کردن رسن با حیل
فقیهی اشارت کند او به دین
دلیری رشادت کند در زمین
معلم هدایت کند کودکان
زجا برکند کوه، آن پهلوان**

(مولانا، دیوان شمس، غزلیات، غزل شماره ۲۷، گنجور)

خلاصه یکی کشاورز است، یکی کارگر، یکی دکتر، یکی مهندس، یکی حسابدار و ... هدف این صنف‌های اجتماعی از تعامل با یکدیگر رفع نیاز خود و دیگر صنف‌های جامعه است. برای بقا، رشد و پیشرفت در جوامع جهانی و در این اجتماع بشری (نظام اجتماعی)، اگر یکی از صنف‌ها دچار مشکل باشد، دیگر صنف‌ها هم دچار مشکل می‌شوند و کلاً جامعه مشکل پیدا می‌کند.

البته که سعدی در سخن تابناک خود این نوع وابستگی را مدنظر ندارد. در غیر این صورت بیت‌هایی مانند بیت‌های شعر بالا می‌سرود و در پایان هم می‌نوشت:

**اگر جزئی از کل نگیرد قرار
تباهی برآرد ز پیکر دمار
چو زنجیر ابنای آدم به هم دوخته
چو یک پیکر کامل افروخته**

اما واقعیت بزرگ‌تری هم وجود دارد. ممکن است جوامع بشری مجزایی وجود داشته باشند که هیچ ارتباطی از نظر داد و ستد کالایی و خدماتی با هم نداشته باشند، مثلاً ممکن است جامعه‌ای با جامعه‌ای در آمریکای جنوبی یا در آفریقای جنوبی هیچ ارتباطی نداشته باشد. در این صورت آیا اگر مشکلی برای آن‌ها پیش بیاید به ما ارتباطی دارد؟ البته از نظر تهیه مایحتاج کالا و خدمات خیر. اما انسانیت ما ایجاب می‌کند که از دیدن گرسنگی و رنج آدم‌های دیگر، ولو در آن طرف اقیانوس‌ها و حتی آن سوی تاریخ، متأثر شویم و نیز از شادی آن‌ها مسرور باشیم.

در واقع نخی نامرئی بین ما و انسان‌های دیگر در همه جغرافیای عالم و در همه تاریخ وجود دارد که

ما را به هم متصل کرده است. شادی و غم آن‌ها بر ما هم تأثیر می‌گذارد. این نخ همان چیزی است که خداوند متعال در سوره آل عمران، آیه ۱۰۳ فرمودند: «وَاعْتَصِمُوا بِحَبْلِ اللَّهِ جَمِيعًا وَلَا تَفَرَّقُوا». ما از یک میهن، از یک معدن، از یک ریشه، از یک جوهر و از یک خداوند هستیم.

همچنین «ظریه آشوب» بر این داربست فکری استوار است که بال‌زدن پروانه‌ای در این سوی عالم، شاید باعث ایجاد تغییرات شگرفی در آن سوی عالم شود. گویی امواجی نامرئی تمام قطب‌های عالم و تمام آدم‌های کره زمین را به هم مرتبط کرده است. بنابراین ما نمی‌توانیم نسبت به غم و اندوه دیگر انسان‌ها، ولو دور و خارج از کشورمان، به صرف اینکه در دستگاه و نظام اقتصادی و تجاری آن‌ها نیستیم، بی‌تفاوت باشیم. حالا اگر دستگاه در قاموس سعدی پیکر باشد و مجموعه معادل کلمه یکدیگر (یک مجموعه‌بودن) کدام واژه برای بیان تفکرات سعدی سزاوتر است؟

«بنی آدم اعضای یکدیگرند» (یعنی عضوهای یک مجموعه حتی بدون اینکه در نظام اقتصادی، تجاری و خدماتی یکدیگر باشند).

«بنی آدم اعضای یک پیکرند» (یعنی آدم‌ها در یک پیکره یا نظام اقتصادی، تجاری و صنفی با یکدیگر در ارتباط‌اند).

خب حتماً شما می‌دانید که مراد کلام سعدی گزینه اول بوده است. البته مفهوم «نظام بودن» در نظام‌های اجتماعی درست است، اما آنچه در مقصود گفتار سعدی گرانمایه است، ارتباط صنفی و پیکر مانند در جامعه بشری نیست، بلکه او این مفهوم سترگ را به تصویر می‌کشد که ما یک مجموعه زنجیره‌وار متصل به او هستیم. ویژگی این مجموعه اتصال به یک عظمت و کبریایی واحد است. این ویژگی مبنای ارتباط ما با همه انسان‌ها در اقصانقاط جغرافیا و تاریخ است. لذا یک بار دیگر از زبان سعدی می‌شنویم که:

**بنی آدم اعضای یکدیگرند
که در آفرینش ز یک گوهرند
چو عضوی به درد آورد روزگار
دگر عضوها را نماند قرار
تو کز محنت دیگران بی‌غمی
نشاید که نامت نهند آدمی**



مساحت مثلث

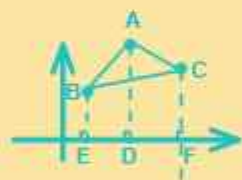
با استفاده از مختصات رأس‌های آن

مجید حکمت

$$S = \frac{1}{2} \times BC \times AH$$

و تمام! چقدر طولانی!

این شد یک راه‌حل طولانی و البته مفهومی. ولی آیا راه‌حل‌های کوتاه‌تر و مفهومی دیگری هم وجود دارند؟
مثلث ABC را با رأس‌های مشخص مطابق شکل در نظر بگیرید.



توجه کنید که این مثلث هر جایی از دستگاه مختصات که واقع شود و به هر حالتی که باشد، با انتقال و چرخش (دوران) مساحت آن تغییر نمی‌کند.
لذا بدون از دست دادن کلیت، فرض کنید مثلث موردنظر در ربع اول مطابق تصویر واقع شده باشد.
از A، B و C به محور x ها عمود رسم می‌کنیم. اکنون دوزنقه‌های BCFE، ACFD، ADEB را در نظر بگیرید.
موافق هستید که:

$$(*) \text{ مساحت دوزنقه} = \text{مساحت دوزنقه} + \text{مساحت دوزنقه} = \text{مساحت مثلث}$$

ABC	ADEB	ACFD	BCFE
-----	------	------	------

از طرف دیگر می‌دانیم:

$$\text{مساحت دوزنقه} = \frac{1}{2} \times (\text{مجموع دو قاعده}) \times \text{ارتفاع}$$

توجه داشته باشید که قاعده‌های سه دوزنقه موردنظر

اگر به شما بگویند مختصات رأس‌های مثلث ABC مشخص است، مساحت این مثلث را به دست آورید، شاید اولین راه که به ذهنتان می‌رسد این باشد:

$$\text{ارتفاع} \times \text{قاعده} \times \frac{1}{2} = \text{مساحت مثلث}$$

بعد، بدین منظور، یکی از ضلع‌های مثلث، مثلاً BC را به‌عنوان قاعده در نظر بگیرید و طول ضلع BC را با استفاده از رابطه طول پاره‌خط (فاصله دو نقطه) محاسبه کنید:

$$|BC| = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2}$$

سپس برای محاسبه ارتفاع وارد بر BC، ابتدا معادله خط BC را از رابطه معادله خط گذرنده از دو نقطه به دست می‌آورید:

$$y - y_B = m_{BC}(x - x_B)$$

که در آن، m_{BC} شیب خط گذرنده از B و C است:

$$m_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C}$$

فرض کنید معادله خط حاصل، پس از ساده‌سازی، به‌صورت $ax + by + c = 0$ باشد. پس از آن، با استفاده از رابطه فاصله نقطه از خط، ارتفاع وارد بر BC را به دست می‌آورید.

$$AH = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

اکنون AH و BC را در رابطه مساحت مثلث قرار می‌دهید:

خب! پس این شب یک نکته جالب که اثباتش را هم دیدید و موضوع کاملاً مفهوم شد. بنابراین حالا می‌توانید برای به‌دست آوردن مساحت یک مثلث با مختصات رأس‌های داده شده، فقط از رابطه‌های نهایی استفاده کنید. برای مثال، یک سؤال آزمون سراسری رشته تجربی خارج از کشور سال ۱۳۹۲ را حل می‌کنیم:

مساحت مثلثی با سه رأس به مختصات $A(2,5)$ ، $B(3,0)$ و $C(0,2)$ کدام است؟

۶(۱)

۶/۵(۲)

۷(۳)

۷/۵(۴)

تمرین: مساحت مثلثی را بیابید که رأس‌های آن $(1,1)$ ، $(-2,-2)$ و $(3,-3)$ باشد.

به‌صورت قائم هستند. لذا ارتفاع آن‌ها در حالت افقی واقع شده است. همچنین مشاهده می‌کنید که قاعده‌های دوزنقه‌ها همان y_A, y_B, y_C و اندازه ارتفاع‌ها $x_D - x_E, x_F - x_D, x_E - x_B, x_D = x_A$ و $x_F = x_C$ و $x_E = x_B$ است. از آنجا که داریم: $x_E = x_B, x_D = x_A$ و $x_F = x_C$ پس اندازه ارتفاع‌ها عبارت است از: $x_C - x_A, x_C - x_B$ و $x_A - x_B$ با این توضیحات داریم:

$$\text{مساحت دوزنقه ADEB} = \frac{1}{2}(y_A + y_B)(x_A - x_B)$$

$$\text{مساحت دوزنقه ACFD} = \frac{1}{2}(y_C + y_A)(x_C - x_A)$$

$$\text{مساحت دوزنقه BCFE} = \frac{1}{2}(y_B + y_C)(x_C - x_B)$$

با جاگذاری این سه مورد در رابطه (*) و پس از مرتب‌سازی داریم:

$$\begin{aligned} \text{مساحت مثلث ABC} &= \frac{1}{2}(y_A x_A - y_A x_B + y_B x_A - y_B x_B \\ &\quad + y_C x_C - y_C x_A + y_A x_C - y_A x_A \\ &\quad - y_B x_C + y_B x_B - y_C x_C + y_C x_B) \end{aligned}$$

اکنون پس از حذف موارد قرینه و فاکتورگیری مناسب به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\text{مساحت مثلث ABC} = \frac{1}{2}(x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B))$$

چون ممکن است A، B و C در مسائل متفاوت با ترتیب‌های متنوعی در شکل واقع شوند، به‌منظور گریز از منفی شدن پاسخ مساحت و ضروری نبودن رسم شکل، رابطه نهایی را داخل قدرمطلق قرار می‌دهیم:

مساحت مثلث ABC

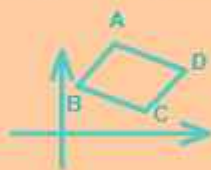
$$= \frac{1}{2} |x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)|$$



راستی! ترتیب نوشتن اندیس‌ها با نمودار

چه رابطه‌ای دارد؟ بله، همان‌طور که می‌بینید، این ارتباط نظم و زیبایی فرمول را آشکارتر می‌کند.

اکنون یک مسئله برای شما: رابطه‌ای برای به‌دست آوردن مساحت چهارضلعی با رأس‌های مشخص $A = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ ، $B = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ ، $C = \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}$ و $D = \begin{pmatrix} x_D \\ y_D \end{pmatrix}$ بیابید.



**پاسخ‌های خود را
برای مجله ارسال کنید.**

منتظر پاسخ‌های شما هستیم!

(رایانامه مجله: borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir)

توجه: لطفاً در پاسخ‌های خود به سؤالات، به ترتیب از ۱ تا ۴ شماره‌گذاری کنید. همچنین به سؤالات شماره ۵ تا ۸ به ترتیب پاسخ دهید. پاسخ‌های خود را به آدرس ایمیل زیر ارسال کنید.

$$S = \frac{1}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_3 y_4 - x_4 y_3 + x_4 y_1 - x_1 y_4|$$

$$S = \frac{1}{2} |(0-5) + (5-1) + (1-0) + (0-5)|$$

پس:



۳۷

شماره ۱۳۳۰ | تابستان ۱۳۹۰

به دنبال حیات

آزاد به فرزاد

زندگی و کشاورزی بوده است؛ حتی اگر فاصله چند ده کیلومتری بین این دو محل وجود داشته باشد و عمق یک سفره آب زیرزمینی ده ها و یا صدها متر باشد. شاید انتقال آب در نگاه اول ساده باشد؛ حفر یک چاه در منطقه مورد نظر و ایجاد یک مجرای آب روی سطح زمین، اما انتقال آب از عمق چند ده متری سطح زمین در نبود پمپ های آب امروزی کار ساده ای نبوده است (حتی امروزه هم نیاز به برق و ... انجام این کار را منوط به هزینه های بسیار سنگین می کند). (شکل ۱).



شکل ۱

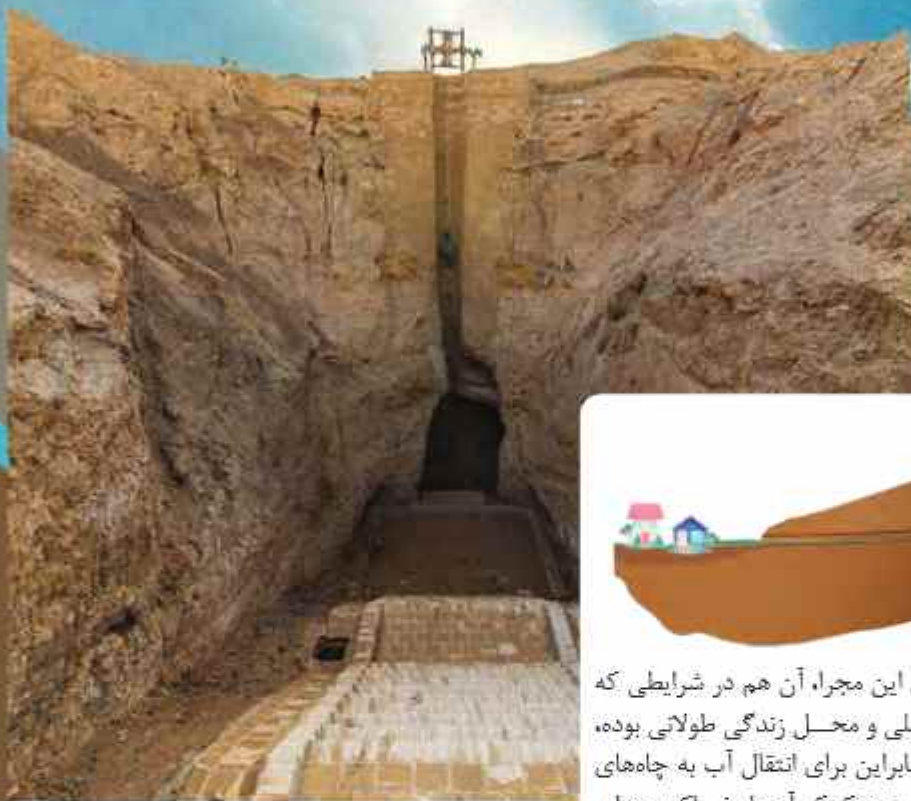
با توجه به دلایل فوق و دلایلی دیگر، مانند تبخیر آب و ... در بیش از سه هزار سال پیش ایرانیان تصمیم به انجام کاری دشوار اما عملی گرفتند؛ ساخت راه آب های زیرزمینی، تا جایی که آب به سطح زمین و محل زندگی و کشاورزی برسد؛ مجرای شبیه شکل ۲.

«از نقاشی های سقف کلیسای «سیستین» تا هنر بی نظیر معماری در مساجد اصفهان از ساخت دیوار چین تا اهرام ثلاثه مصر همه و همه یادآور انسان هایی هستند که با پشتکار، صبر و تحمل، دانش و عشقی وصف ناپذیر برای رسیدن به یک هدف زحمت کشیده اند.

(شاید خواندن و مطالعه ریاضی نیز از این منظر تمرین جالبی برای به دست آوردن این مهارت هاست؛ به دست آوردن مهارت هایی که برای زندگی امروز ضروری به نظر می رسند.) در این مقاله کوتاه می خواهیم با یکی دیگر از شاهکارهای این قبیل انسان ها آشنا شویم؛ شاهکاری که شاید به دلیل ندیدن آن روی زمین کمتر به آن اندیشیده باشیم؛ شاهکاری رمزآلود که ساختن آن به دانش مهندسی، هنر و عشق نیاز داشته است. مقصودمان قنات یا کاریز است. روشی از انتقال آب که در هزاران سال پیش در ایران مرسوم بوده است. هنری که از ایران به بسیاری از کشورهای دور و نزدیک منتقل شد.

شاید تصور برخی از قنات مجرای آبی باشد که آب چشمه را به جایی نزدیک منتقل می کند. اگرچه این تصور کاملاً غلط نیست، عموماً قنات ها مجراهای آبی هستند که زیرزمین حفر می شوند تا آب را از دل زمین به جایی که محل سکونت یا محل کشاورزی است، منتقل کنند.

در سرزمین های خشک مانند ایران، آب های زیرزمینی ده ها و صدها متر در دل خاک وجود دارند. منابع آب زیرزمینی در بسیاری از موارد یا زیر کوه و یا در مکان هایی هستند که امکان زندگی و کشاورزی در آنجا وجود ندارد. راه حل انتقال آب از این سفره های زیرزمینی به محل



اما ساخت مستقیم این مجرا، آن هم در شرایطی که فاصله میان چاه اصلی و محل زندگی طولانی بوده، امکان‌پذیر نبوده است. بنابراین برای انتقال آب به چاه‌های دیگر نیاز بوده است که به کمک آن‌ها، خاک مجرای حفاری‌شده به بیرون منتقل شود. این چاه‌ها را «میله چاه» نامیده‌اند. مقنی‌ها، با حفر این میله‌های چاه، علاوه بر انتقال خاک کانال، راهی برای جریان هوا و اکسیژن به درون کانال نیز می‌ساخته‌اند. همچنین، این چاه‌ها کمک شایانی به لایروبی کانال قنات می‌کرده‌اند (شکل ۳).



به این صورت ساخت یک کاریز یا قنات شکل می‌گیرد. بدیهی است که حفر هزاران متر مکعب چاه در زمین‌ها و محل‌های صعب‌العبور و دشوار امر ساده‌ای نیست. برای دادن شما به حجم کار ساخت قنات، ساخت قدیمی‌ترین

قنات دنیا را بررسی می‌کنیم و در پایان می‌کوشیم ارزش امروزی این قنات را مشخص کنیم.

قنات گناباد

قنات گناباد در شهر گناباد در استان خراسان واقع است. عمر این قنات با توجه به «سفرنامه ناصر خسرو» به بیش از سه هزار سال پیش بر می‌گردد.



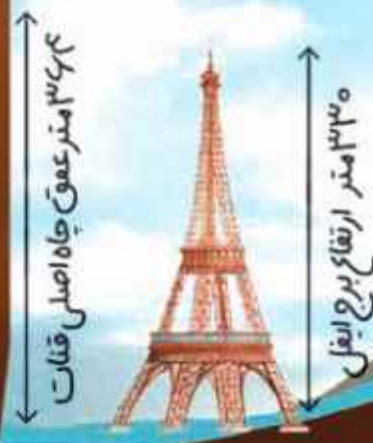
شکل ۴

طول قنات از چاه اصلی تا جایی که مطابق شکل ۴ به



۳۹

شماره ۱۳۳۲ | پاییز ۱۳۹۴



شکل ۵

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{660}{2}(264 + 0) = 120 \times 120 \text{ متر}$$

بنابراین مجموع طول میله چاه‌های قنات گناباد صد و بیست هزار و صد و بیست متر است. با توجه به تاریخ نوشتن این مقاله در آخرین روز از فصل پاییز ۱۴۰۱، قیمت حفر هر یک متر چاه با دستگاه و با وسایل و دیوار چینی یا قرار دادن بهای محفظه‌های آهنی در حدود ۲۲۰۰۰۰۰ تومان است. پس:

ارزش امروزی میله چاه‌های قنات گناباد = C_1

$$= 120,000 \times 2,200,000 = 264,000,000,000 \text{ تومان}$$

با توجه به قیمت حفر و ایجاد کانال که برای هر متر در حدود ۳,۷۰۰,۰۰۰ هزار تومان است و با توجه به وجود ۳۳ کیلومتر مجرای در قنات گناباد داریم:

ارزش امروزی کانال گناباد = C_2

$$= 33,000 \times 3,700,000 = 122,100,000,000$$

و در نهایت:

$$C = C_1 + C_2 = 386,000,000,000 = \text{ارزش کلی قنات}$$

به‌دست می‌آید.

توجه داشته باشید که حفر حدود ۱۵۵ هزار متر چاه و مجرای برای یک گروه حقاری چندین نقره، بیش از ۳۰ یا ۴۰ سال طول می‌کشد؛ عددی که شاید به زبان ساده باشد، اما واقعاً انتظاری طولانی است.

انتظاری که تنها عشق به زندگی و تداوم آن برای عزیزانشان می‌توانسته دلیلی بر تحمل ده‌ها سال سختی و مشقت بوده باشد. انتظاری که برای بسیاری تا آخرین روز حیاتشان و شاید تا نسل بعدی‌شان به طول می‌کشید. ساخت دنباله‌ای برای ادامه حیات ...

پی‌نوشت

۱. مقنی: کسی است که کار حقاری قنات را انجام می‌دهد

دو شاخه تبدیل می‌شود. ۳۳ کیلومتر است. پس از آن توسط دو مجرای آب به طول ۷۰۰ متر، به دو شاخه تقسیم می‌شود که در حال حاضر تنها یکی از آن‌ها فعال است. عمق چاه اصلی این قنات در حدود ۳۶۴ متر محاسبه شده است؛ عددی باورنکردنی که شاید شکل ۵ مقیاسی از این عمق را مشخص کند.

برای محاسبه ارزش امروزی این کار عظیم، با توجه به مشخص بودن طول مجرای قنات، ۳۳ کیلومتر، به محاسبه مجموع طول میله چاه‌های این قنات می‌پردازیم. اگر شیب زمین را ثابت فرض کنیم، با توجه به آنکه فاصله هر میله چاه، مطابق عکس‌برداری‌های هوایی، در این قنات به‌طور میانگین ۵۰ متر است، تعداد میله چاه‌ها ۶۶۰ حلقه چاه به‌دست می‌آید؛ زیرا با تقسیم فاصله چاه اصلی تا مظهر قنات (۳۳ کیلومتر) بر فاصله میان دو میله چاه (۵۰ متر)، تعداد میله چاه‌ها مشخص می‌شود (شکل ۶):

$$n = \frac{33000}{50} = 660 \text{ تعداد میله‌های چاه‌ها}$$



حال به دلیل آنکه طول میله چاه‌ها یک دنباله عددی تشکیل می‌دهد، (چرا؟) اگر $a_1 = 364$ عمق چاه اصلی و $a_n = 0$ عمق آخرین میله چاه باشد، به کمک رابطه محاسبه مجموع جمله‌های دنباله‌های عددی می‌توانیم مجموع چاه میله‌های فوق را مشخص کنیم:

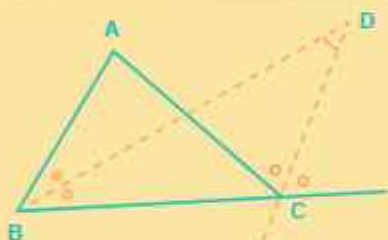


۴۰

شماره ۱۳۳ | پاییز ۱۴۰۱

زاویه بین نیم‌سازهای مثلث

احسان یارمحمدی



شکل ۱

با استفاده از مفهوم نیم‌ساز و با توجه به شکل ۱ داریم:

$$\hat{B} = \hat{B}^* + \hat{B}^* = 2\hat{B}^*$$

و اندازه زاویه خارجی C برابر است با:

$$\hat{C} = \hat{C}^* + \hat{C}^* = 2\hat{C}^*$$

بنابر قضیه زاویه خارجی مثلث در شکل ۱ داریم:

$$\begin{cases} \hat{A} + \hat{B} = 2\hat{C}^* \Rightarrow \hat{A} + 2\hat{B}^* = 2\hat{C}^* & (۱) \\ \hat{D} + \hat{B}^* = \hat{C}^* & (۲) \end{cases}$$

از جای‌گذاری رابطه (۲) در رابطه (۱) داریم:

$$\begin{aligned} \hat{A} + 2\hat{B}^* &= 2\hat{C}^* \Rightarrow \hat{A} + 2\hat{B}^* = 2(\hat{D} + \hat{B}^*) \\ \Rightarrow \hat{A} &= 2\hat{D} \Rightarrow \hat{D} = \frac{\hat{A}}{2} & (۳) \end{aligned}$$

مثال ۱. در مثلث PQR با زاویه داخلی $Q = 40^\circ$ و زاویه خارجی $R = 130^\circ$ ، اندازه زاویه بین نیم‌سازهای زاویه داخلی Q و زاویه خارجی R را تعیین کنید.

استفاده از مفهوم‌های ساده «هندسه» و ترکیب این مفهوم‌ها با یکدیگر، قضیه‌ها و رابطه‌های جدید هندسی را پدیدار می‌کند. در این مقاله قصد داریم با استفاده از مفهوم‌های «نیم‌ساز زاویه» و «مثلث»، و پیوند آن‌ها با یکدیگر، به ایجاد چند رابطه پیرامون این دو مفهوم بپردازیم. پرداختن به این گونه رابطه‌ها از دو لحاظ اهمیت دارد: یکی اینکه رویکردی نوین را به منظور خلق و «اثبات» قضیه‌ها و رابطه‌های جدید، پیش روی هندسه‌آموزان قرار می‌دهد، و دیگر اینکه این دست از رابطه‌ها، به‌عنوان ابزاری کارا در آزمون‌ها و مسابقه‌های ریاضی که پاس‌دهی به پرسش‌های آن‌ها مستلزم صرف کمترین زمان ممکن است، جایگاه خود را هویدا می‌سازند.

زاویه‌های مثلث به دو دسته «زاویه‌های داخلی» و «زاویه‌های خارجی»^۱ گروه‌بندی می‌شوند. بنابراین، برای رسم زاویه بین نیم‌سازهای مثلث سه حالت زیر را لحاظ می‌کنیم:

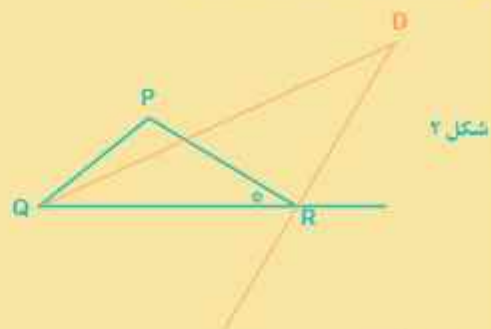
الف. زاویه بین نیم‌ساز یک زاویه داخلی و یک زاویه خارجی مثلث؛ به زاویه بین نیم‌ساز دو زاویه خارجی مثلث؛ به زاویه بین نیم‌ساز دو زاویه داخلی مثلث.

در ادامه با رسم شکل برای هر حالت، به ارائه رابطه‌ای همراه با اثبات متناظر با آن می‌پردازیم. امیدواریم که هندسه‌آموزان با الگو قراردادن این گونه موضوع‌های هندسه، در آینده بسیار نزدیک قضیه‌ها و رابطه‌های مفید و کاربردی بیشتری خلق کنند.

الف. زاویه بین نیم‌ساز یک زاویه داخلی و یک زاویه خارجی مثلث

مطابق شکل ۱، در مثلث ABC، نیم‌ساز زاویه داخلی B و نیم‌ساز زاویه خارجی C را رسم می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در نقطه D قطع کنند.

حل. بنابر شکل ۱، شکل ۲ را داریم:



در ضمن داریم:

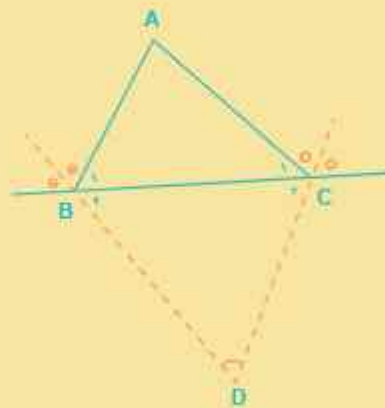
$$\begin{cases} \hat{Q} = 40^\circ \\ \hat{R} = 130^\circ \Rightarrow \hat{R}^* = 180^\circ - 130^\circ \Rightarrow \hat{R}^* = 50^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{P} = 90^\circ$$

بنابر رابطه (۳) داریم:

$$\hat{D} = \frac{\hat{P}}{2} \Rightarrow \hat{D} = 45^\circ$$

ب. زاویه بین نیمساز دو زاویه خارجی مثلث

مطابق شکل ۳، در مثلث ABC، نیمساز زاویه‌های خارجی B و C را رسم می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در نقطه D قطع کنند.



شکل ۳

با استفاده از مفهوم نیمساز و با توجه به شکل ۳، اندازه زاویه خارجی B برابر است با:

$$\hat{B} = \hat{B}^* + \hat{B}^* = 2\hat{B}^*$$

و اندازه زاویه خارجی C برابر است با:

$$\hat{C} = \hat{C}^* + \hat{C}^* = 2\hat{C}^*$$

بنابر قضیه زاویه خارجی مثلث در شکل ۳ داریم:

$$\begin{cases} \hat{A} + \hat{B}_1 = 2\hat{C}^\circ \Rightarrow \hat{C}^\circ = \frac{\hat{A} + \hat{B}_1}{2} \quad (۴) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{A} + \hat{C}_1 = 2\hat{B}^\circ \Rightarrow \hat{B}^\circ = \frac{\hat{A} + \hat{C}_1}{2} \quad (۵) \end{cases}$$

بنابر قضیه مجموع زاویه‌های داخلی مثلث در شکل ۳ داریم:

$$\begin{cases} \hat{D} + \hat{B}_1 = 180^\circ - \hat{C}^\circ \quad (۶) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{D} + \hat{C}_1 = 180^\circ - \hat{B}^\circ \quad (۷) \end{cases}$$

از جمع طرفین رابطه‌های (۶) و (۷) داریم:

$$2\hat{D} + \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 360^\circ - \hat{C}^\circ - \hat{B}^\circ \xrightarrow{\hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 180^\circ - \hat{D}} \rightarrow$$

$$2\hat{D} + 180^\circ - \hat{D} = 360^\circ - (\hat{C}^\circ + \hat{B}^\circ) \xrightarrow{(*)/(2)} \rightarrow$$

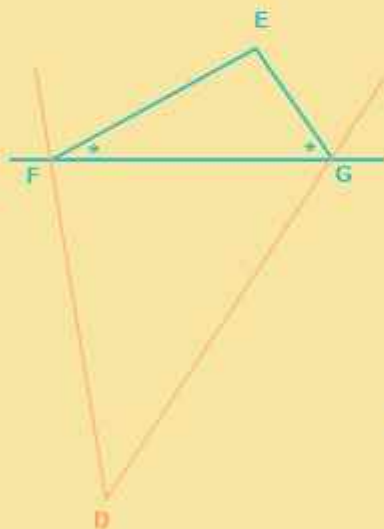
$$\hat{D} + 180^\circ = 360^\circ - \left(\frac{\hat{A} + \hat{B}_1}{2} + \frac{\hat{A} + \hat{C}_1}{2} \right) \rightarrow$$

$$\hat{D} = 180^\circ - \hat{A} - \left(\frac{\hat{B}_1 + \hat{C}_1}{2} \right) \xrightarrow{\hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 180^\circ - \hat{A}} \rightarrow$$

$$\hat{D} = 180^\circ - \hat{A} - \left(\frac{180^\circ - \hat{A}}{2} \right) \rightarrow \hat{D} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2} \quad (۸)$$

مثال ۲. در مثلث EFG، اندازه زاویه‌های خارجی F و G برابر با 110° و 135° است. اندازه زاویه بین نیمسازهای این دو زاویه خارجی را تعیین کنید.

حل. بنابر شکل ۴، شکل ۴ را داریم.



شکل ۴

در ضمن داریم:

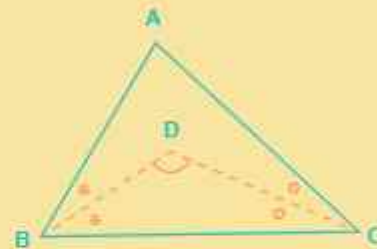
$$\begin{cases} \hat{F} = 135^\circ \Rightarrow \hat{F}^* = 180^\circ - 135^\circ \Rightarrow \hat{F}^* = 45^\circ \\ \hat{G} = 110^\circ \Rightarrow \hat{G}^* = 180^\circ - 110^\circ \Rightarrow \hat{G}^* = 70^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{E} = 65^\circ$$

بنابر رابطه (۸) داریم:

$$\hat{D} = 90^\circ - \frac{\hat{E}}{2} \Rightarrow \hat{D} = 90^\circ - \frac{65^\circ}{2} \Rightarrow \hat{D} = 57.5^\circ$$

ج. زاویه بین نیمساز دو زاویه داخلی مثلث

مطابق شکل ۵، در مثلث ABC، نیمساز زاویه‌های داخلی B و C را رسم می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در نقطه D قطع کنند.



شکل ۵

با استفاده از مفهوم نیمساز و با توجه به شکل ۵، اندازه زاویه داخلی برابر است با:

$$\hat{B} = \hat{B}^* + \hat{B}^* = 2\hat{B}^*$$

و اندازه زاویه خارجی C برابر است با:

$$\hat{C} = \hat{C}^* + \hat{C}^* = 2\hat{C}^*$$

بنابر قضیه مجموع زاویه‌های داخلی مثلث در شکل ۵ داریم:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} + 2\hat{B}^* + 2\hat{C}^* = 180^\circ \quad (9)$$

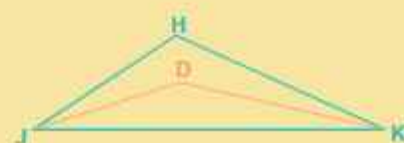
$$\hat{B}^* + \hat{D} + \hat{C}^* = 180^\circ \quad (10)$$

از مقایسه رابطه‌های (۹) و (۱۰) داریم:

$$\begin{aligned} \hat{A} + 2\hat{B}^* + 2\hat{C}^* - \hat{B}^* - \hat{D} + \hat{C}^* &\Rightarrow \hat{D} = \hat{A} + \hat{B}^* + \hat{C}^* \\ \hat{D} - \hat{A} + 180^\circ - \hat{D} &\Rightarrow 2\hat{D} - \hat{A} + 180^\circ = \\ \hat{D} - \frac{180^\circ + \hat{A}}{2} &\Rightarrow \hat{D} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2} \quad (11) \end{aligned}$$

مثال ۳. در مثلث HJK، اندازه زاویه‌های داخلی K و J برابر با 40° و 65° است. اندازه زاویه بین نیمسازهای این دو زاویه داخلی را تعیین کنید.

حل. بنابر شکل ۶، داریم:



شکل ۶

در ضمن داریم:

$$\begin{cases} \hat{K} = 40^\circ \\ \hat{J} = 65^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{H} = 75^\circ$$

بنابر رابطه (۱۱) داریم:

$$\hat{D} = 90^\circ + \frac{\hat{H}}{2} \Rightarrow \hat{D} = 90^\circ + \frac{75^\circ}{2} \Rightarrow \hat{D} = 127.5^\circ$$

تمرین‌ها

در هر یک از مسئله‌های زیر، با توجه به رویکرد این مقاله، به روش تشریحی هر یک از آن‌ها را پاسخ دهید. سپس درستی یا نادرستی جواب به دست آمده را با استفاده از رابطه‌های ۳، ۷ و ۱۰ آزمایش کنید.

۱. در مثلث OMN، اندازه زاویه‌های خارجی M و N برابر با 125° و 105° است. اندازه زاویه بین نیمسازهای این دو زاویه خارجی را تعیین کنید.

۲. در مثلث قائم‌الزاویه‌ای با زاویه‌های $\hat{A} = 20^\circ$ و $\hat{C} = 90^\circ$ ، اندازه زاویه بین نیمسازهای زاویه‌های داخلی A و B را تعیین کنید.

۳. در مثلث XYZ، اندازه زاویه داخلی $\hat{X} = 50^\circ$ و زاویه خارجی $\hat{Z} = 120^\circ$ است. اندازه زاویه بین نیمسازهای زاویه داخلی X و زاویه خارجی Z را تعیین کنید.

۴. در مثلث ABC با زاویه‌های داخلی $\hat{B} = 50^\circ$ و $\hat{C} = 20^\circ$ ، اندازه زاویه بین نیمسازهای زاویه‌های خارجی B و C را تعیین کنید.

۵. در مثلثی زاویه‌های A، B و C به نسبت ۱، ۴ و ۷ تقسیم شده‌اند. اندازه زاویه‌ای را که نیمساز زاویه داخلی A با نیمساز زاویه خارجی B می‌سازد، تعیین کنید.

پی‌نوشت‌ها

1. Geometry
2. Angle Bisector
3. Triangle
4. Proof
5. Internal Angles
6. External Angles

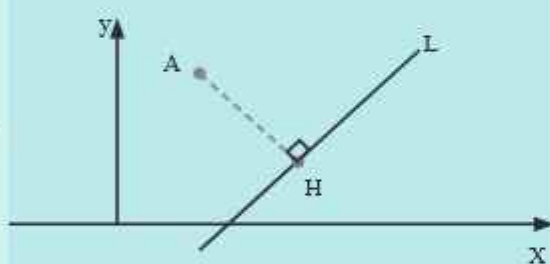
منابع

۱. بیزن‌زاده، محمدحسن و همکاران (۱۴۰۰)، هندسه ۲، شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران، تهران.
۲. حیدری قزلباش، رضا و همکاران (۱۴۰۰)، ریاضی ۲، شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران، تهران.
۳. جوهری، زهرا و همکاران (۱۳۹۴)، هندسه ۱، شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران، تهران.

مختصات تصویر قائم بر روی یک نقطه

رحیم خیرالله زاده

شکل ۱



$$y - y_1 = m_{AH}(x - x_1) \quad (1)$$

ضریب زاویه خط AH که بر L عمود است، عکس و قرینه ضریب زاویه خط L است، پس می توان نوشت:

$$AH \perp L \Rightarrow m_{AH} \times m_L = -1 \Rightarrow m_{AH} = \frac{-1}{m_L}$$

اما: $m_L = -\frac{a}{b}$ و بنابراین $m_{AH} = \frac{b}{a}$ که با قرار دادن در معادله (۱) خواهیم داشت:

$$y - y_1 = m_{AH}(x - x_1) = \frac{b}{a}(x - x_1) \Rightarrow \quad (2)$$

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = t$$

نسبت دو کسر مساوی را t فرض می کنیم و در واقع بین هر نقطه روی خط و یک مقدار حقیقی t تناظر یک به یک

این دستور و فرمول یکی از کاربردی ترین فرمول های بحث هندسه تحلیلی در صفحه است که در کتاب های درسی مطرح نشده است. دو نکته مهم در مورد این فرمول می توان بیان کرد:

۱. این فرمول در واقع فرمولی زایشی است. یعنی حداقل همان طور که در ادامه مقاله آمده است، هشت فرمول به طور مستقیم و غیرمستقیم از آن به دست می آیند، به همین سبب استفاده از این فرمول در قرائت آموزش و یادگیری بسیار مؤثر است و می تواند پایه ای قوی برای یادگیری مفهومی و مؤثر حداقل این هشت مورد باشد.

۲. تمام مطالب بالا را به طور کاملاً مشابه می توان در مورد تصویر قائم روی یک صفحه در فضا بیان کرد. که ان شاء الله در مقاله های بعدی آن را نیز شرح می دهیم.

مطابق شکل ۱ فرض می کنیم نقطه $A(x_1, y_1)$ و خط L به معادله $ax + by + c = 0$ در صفحه مختصات قرار دارند. اگر از نقطه $A(x_1, y_1)$ عمودی بر خط L رسم کنیم و پای عمود را H بنامیم، طبق تعریف نقطه H را تصویر قائم و یا به اختصار تصویر نقطه A روی خط L می نامند. در اینجا هدف ما به دست آوردن دستوری است که مختصات نقطه H را بتوان بر حسب مختصات نقطه A و معادله خط L محاسبه کرد.

برای محاسبه مختصات H مرحله های زیر را طی می کنیم: نخست: معادله خط AH را می نویسیم:

در این شماره به چند مثال و سؤال به عنوان کاربرد فرمول تصویر می‌پردازیم و آن‌شعاع‌ها در شماره‌های بعد به اثبات هشت مورد ذکر شده به همراه مثال‌ها و آزمون‌های مربوطه می‌پردازیم.

مثال ۱. تصویر قائم نقطه $A(1, 2)$ روی خط $2x + 4y + 14 = 0$ را به دست آورید.

حل: ابتدا مقدار λ را محاسبه می‌کنیم:

$$\lambda = \frac{ax_1 + by_1 + c}{a^2 + b^2} = \frac{2(1) + 4(2) + 14}{2^2 + 4^2} = 1$$

حال با استفاده از فرمول‌های به دست آمده، یعنی:

$$y_H = y_1 - b\lambda, \quad x_H = x_1 - a\lambda$$

مختصات تصویر قائم را محاسبه می‌کنیم:

$$x_H = x_1 - a\lambda = 1 - 2(1) = -1$$

$$y_H = y_1 - b\lambda = 2 - 4(1) = -2$$

و بنابراین مختصات تصویر قائم $H(-1, -2)$ خواهد بود.

مثال ۲. نشان دهید تصویر قائم نقطه $A\left(\frac{x_1}{2}, \frac{y_1}{2}\right)$ روی نیم‌ساز ربع اول و سوم به صورت زیر است:

$$H\left(\frac{x_1 + y_1}{2}, \frac{x_1 - y_1}{2}\right)$$

حل: می‌دانیم معادله نیم‌ساز ربع اول و سوم به صورت $x - y = 0$ است.

ابتدا مقدار λ را محاسبه می‌کنیم:

$$\lambda = \frac{ax_1 + by_1 + c}{a^2 + b^2} = \frac{1(x_1) + (-1)(y_1)}{1^2 + (-1)^2} = \frac{x_1 - y_1}{2}$$

حال با استفاده از فرمول‌های به دست آمده، یعنی:

$$y_H = y_1 - b\lambda, \quad x_H = x_1 - a\lambda$$

مختصات تصویر قائم را محاسبه می‌کنیم:

$$x_H = x_1 - a\lambda = x_1 - 1\left(\frac{x_1 - y_1}{2}\right) = \frac{x_1 + y_1}{2}$$

$$y_H = y_1 - b\lambda = y_1 - (-1)\left(\frac{x_1 - y_1}{2}\right) = \frac{x_1 + y_1}{2}$$

وجود دارد، به عبارت دیگر، هر نقطه روی خط AH یک t مخصوص به خود دارد و برعکس، هر مقدار t یک و فقط یک نقطه از خط AH را مشخص می‌کند. بنابراین کافی است t متناظر با نقطه H را محاسبه کنیم.

از رابطه (۲) نتیجه می‌شود: $x - x_1 = at$, $y - y_1 = bt$ یا مختصات H به صورت زیر به دست می‌آید:

$$H \begin{cases} x_H = x_1 + at \\ y_H = y_1 + bt \end{cases} \quad (3)$$

و چون نقطه H روی خط L نیز قرار دارد، پس مختصات H در معادله خط L هم صدق می‌کند؛ یعنی:

$$ax_H + by_H + c = 0$$

و بنابراین می‌توان نوشت:

$$a(x_1 + at) + b(y_1 + bt) + c = 0 \Rightarrow$$

$$ax_1 + by_1 + c + (a^2 + b^2)t = 0 \Rightarrow$$

$$t = -\frac{ax_1 + by_1 + c}{a^2 + b^2} = -\lambda \Rightarrow t = -\lambda$$

که در آن:

$$\lambda = \frac{ax_1 + by_1 + c}{a^2 + b^2}$$

و بنابراین با قرار دادن مقدار t بر حسب λ به فرمول نهایی و مهم زیر می‌رسیم:

$$y_H = y_1 - b\lambda, \quad x_H = x_1 - a\lambda$$

تذکر مهم: از فرمول به دست آمده می‌توان فرمول‌ها و دستورهای مهم زیر را مستقیم یا به طور غیرمستقیم استخراج کرد:

- فرمول فاصله یک نقطه از یک خط؛
- فرمول قرینه یک نقطه نسبت به یک خط؛
- شرط اینکه نقطه‌ای در زاویه حاده یا منفرجه زاویه بین دو خط قرار داشته باشد؛
- شرط اینکه دو نقطه در یک طرف و یا در دو طرف یک خط قرار داشته باشند و فرمول‌هایی که به طور غیرمستقیم از دستور فوق به دست می‌آیند؛
- معادله‌های نیم‌سازهای داخلی و خارجی زاویه‌های بین دو خط و طرز تشخیص آن‌ها از یکدیگر؛
- فاصله دو خط موازی از هم؛
- مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحه که از یک خط مفروض به فاصله ثابتی واقع شده باشند.
- مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحه که از دو خط موازی به یک فاصله باشند.

سؤال ۱. مختصات تصویر قائم نقطه $A(۳, ۵)$ روی نیم‌ساز ربع اول و سوم کدام است؟

۱. $(۱, ۱)$
۲. $(۲, ۴)$
۳. $(۳, ۳)$
۴. $(۴, ۴)$

حل: طبق دستور به‌دست آمده از مثال ۲ مختصات مورد نظر، هم طول و هم عرض آن میانگین طول و عرض نقطه مقروض داده شده یعنی $A(۳, ۵)$ خواهد بود؛ پس:

$$x_H = \frac{x_1 + y_1}{2}, y_H = \frac{x_1 + y_1}{2}$$

$$\Rightarrow x_H = \frac{3+5}{2}, y_H = \frac{3+5}{2}$$

یعنی $H(۴, ۴)$ و گزینه ۴ پاسخ صحیح خواهد بود.

مثال ۳. نشان دهید تصویر قائم نقطه $A \left| \begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \end{smallmatrix} \right.$ روی نیم‌ساز ربع دوم و چهارم به‌صورت زیر است:

$$H\left(\frac{x_1 - y_1}{2}, \frac{y_1 - x_1}{2}\right)$$

حل: می‌دانیم معادله نیم‌ساز ربع دوم و چهارم به‌صورت $x + y = 0$ است.

ابتدا مقدار λ را محاسبه می‌کنیم:

$$\lambda = \frac{ax_1 + by_1 + c}{a^2 + b^2} = \frac{1(x_1) + (1)(y_1)}{1^2 + (1)^2} = \frac{x_1 + y_1}{2}$$

حال با استفاده از فرمول‌های به‌دست آمده، یعنی:

$$y_H = y_1 - b\lambda, x_H = x_1 - a\lambda$$

مختصات تصویر قائم را محاسبه می‌کنیم:

$$x_H = x_1 - a\lambda = x_1 - 1\left(\frac{x_1 + y_1}{2}\right) = \frac{x_1 - y_1}{2}$$

$$y_H = y_1 - b\lambda = y_1 - (1)\left(\frac{x_1 + y_1}{2}\right) = \frac{y_1 - x_1}{2}$$

سؤال ۲. مختصات تصویر قائم نقطه $A(۳, ۵)$ روی نیم‌ساز ربع دوم و چهارم کدام است؟

۱. $(۱, -۱)$
۲. $(-۱, ۱)$
۳. $(-۲, ۲)$
۴. $(۲, -۲)$

حل: طبق دستور به‌دست آمده از مثال ۳، مختصات مورد نظر به‌صورت زیر خواهد بود.

$$x_H = \frac{x_1 - y_1}{2}, y_H = -\frac{x_1 - y_1}{2} \Rightarrow$$

$$x_H = \frac{3-5}{2}, y_H = -\frac{3-5}{2}$$

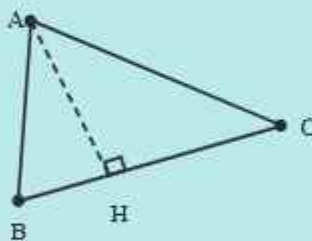
یعنی $H(-۱, ۱)$ و گزینه ۲ پاسخ صحیح خواهد بود.

سؤال ۳. نقاط $A(۳, ۷)$ ، $B(۲, ۱)$ ، $C(۶, ۳)$ سه رأس مثلث ABC هستند، طول نقطه H (پای ارتفاع AH) کدام است؟

۱. $\frac{۲۶}{۵}$
۲. $\frac{۱۳}{۴}$
۳. $\frac{۱۳}{۵}$
۴. $\frac{۱۳}{۸}$

حل: ابتدا معادله ضلع BC را پیدا می‌کنیم، که به سادگی به‌دست می‌آید (شکل ۲):

$$x - 2y = 0$$



H تصویر قائم رأس A روی ضلع BC است، بنابراین با استفاده از فرمول تصویر قائم می‌توان نوشت:

$$\lambda = \frac{ax_1 + by_1 + c}{a^2 + b^2} = \frac{1(3) - (2)(7)}{1^2 + (-2)^2} = \frac{-11}{5}$$

$$x_H = x_1 - a\lambda = 3 - 1\left(\frac{-11}{5}\right) = \frac{۲۶}{۵}$$

یعنی گزینه ۱ صحیح است.

تذکر: روش معمول حل این سؤال، نوشتن معادله‌های ارتفاع AH و ضلع BC و حل دستگاه دو معادله دو مجهولی است.

سرگرمی‌های عددی

عباس قلعه پور اقدم

ذهن خوانی

اولین بار که با یک سرگرمی عددی آشنا شدم، زمانی بود که در کلاس اول راهنمایی (همان هفتم) درس می‌خواندم. سرگرمی ضرب کردن عدد هشت‌رقمی ۱۲۳۴۵۶۷۹ (رقم‌های ۱ تا ۹ به جز ۸) در عدد ۹ بود که حاصل ضرب، عدد ۱۱۱۱۱۱۱۱ (۹ تا ۱) است. بسیار برایم جالب و هیجان‌انگیز بود. این سرگرمی را با دوستانم در کلاس، مهمانی‌ها و دوره‌های در میان می‌گذاشتم و به آنان نیز یاد می‌دادم. راستش را بخواهید نوعی به‌رخ کشیدن و پز دادن هم در میان بود.

از دیگر سرگرمی‌های عددی که بعدها یاد گرفتم، ضرب کردن عددها در ۱۱ بود. برای مثال، حاصل ضرب ۱۱×۳۲ را که ۳۵۲ می‌شود، به جای ضرب کردن معمولی، می‌توان از جمع رقم‌های ۳۲ که ۵ می‌شود و قراردادن آن بین ۳ و ۲ به دست آورد.

سرگرمی دیگری که به احتمال زیاد شما هم نوعی از آن را تجربه کرده‌اید، به این صورت است که یک بازی دو نفره ترتیب داده می‌شود. نفر اول که از قبل همه چیز را آماده کرده است، از نفر دوم می‌خواهد که عددی را در ذهن خود در نظر بگیرد (ترجیحاً کوچک و صحیح). سپس از او می‌خواهد یک سلسله عملیات جبری را روی آن عدد انجام دهد و در پایان نتیجه را

به او بگوید. سپس نفر اول، عددی را که نفر دوم در نظر گرفته بود، به سرعت پیدا می‌کند و به او می‌گوید. یعنی به اصطلاح ذهن او را می‌خواند. به نمونه ساده زیر که بیشتر مناسب دانش‌آموزان دوره اول متوسطه است که تازه با معادله‌های درجه اول آشنا شده‌اند، توجه کنید:

نفر اول: عددی را در نظر بگیر.

نفر دوم: گرفتم (مثلاً ۵).

نفر اول: آن را با ۳ جمع کن (حاصل ۸). نتیجه را منهای ۴ کن (حاصل ۴). ۶ تا به آن اضافه کن (حاصل ۱۰). حالا حاصل را دو برابر کن ($۱۰ \times ۲ = ۲۰$). از حاصل ضرب، ۵ تا کم کن (حاصل ۱۵) و نتیجه را به من بگو.

نفر دوم: حاصل ۱۵ شد.

نفر اول قبل از بازی عدد مورد نظر را x گرفته و یک معادله درجه اول به صورت زیر طراحی کرده است: نتیجه نهایی $۵ - (۴ + ۳x) = ۲$

که ساده شده آن می‌شود:

نتیجه نهایی $۲x + ۵$

چون نفر دوم نتیجه نهایی را ۱۵ اعلام کرده است، نفر اول سریع به صورت ذهنی معادله $۲x + ۵ = ۱۵$ را حل می‌کند و می‌گوید: «عددی که تو در نظر گرفته‌ای ۵ بوده است.»

حال دو مورد از این گونه را برای شما عزیزان مطرح می‌کنم تا یاد بگیرید و آن را با دوستانتان در میان بگذارید.

مورد اول

عددی را در نظر بگیرید. آن را در ۵ ضرب کنید. ۶ واحد به حاصل ضرب اضافه کنید. این حاصل جمع را ۴ برابر کنید. ۹ تا به حاصل ضرب اضافه کنید. مجموع را ۵ برابر کنید. نتیجه نهایی این محاسبه‌های عددی سه‌رقمی یا بیشتر خواهد بود. دو رقم آخر آن (دو رقم سمت راست) را حذف کنید. اگر یک واحد از عدد باقی‌مانده کم کنید، حاصل همان عددی خواهد بود که در آغاز در نظر گرفته بودید.

مثال: عدد ۱۲ را در نظر می‌گیریم:

$60 - 12 \times 5 = 60 - 66 + 6 = 6$ و $264 - 66 \times 4 = 264 - 264 + 9 = 9$ و $273 \times 5 - 1365 = 273$ اگر دو رقم آخر ۱۳۶۵ را حذف کنیم، عدد ۱۳ می‌ماند که با کسر یک واحد از آن، عدد ۱۲ حاصل می‌شود؛ یعنی همان عددی که در نظر گرفته بودیم. این سرگرمی را می‌توان به صورت یک بازی دو نفره اجرا کرد.

مورد دوم

از دوستان بخواهید که دو عدد از ۱ تا ۹ انتخاب کند. برای یافتن این دو عدد از او بخواهید تا مرحله‌های زیر را به انجام برساند:

۱. یکی از عددها را در ۵ ضرب کند.
 ۲. به حاصل ضرب ۷ واحد بیفزاید.
 ۳. حاصل جمع را دو برابر کند.
 ۴. عدد دیگر را که در ابتدا انتخاب کرده بود، به نتیجه اضافه کند و حاصل را به شما بگوید.
- اگر شما از نتیجه ۱۴ واحد کم کنید، یک عدد دورقمی به دست می‌آید که رقم‌های آن همان دو عدد انتخابی دوست شماست.

مثال: فرض کنیم دو عدد انتخابی

۸ و ۳ باشند. یکی از دو عدد، مثلاً ۸ را پنج برابر می‌کنیم. حاصل ۴۰ می‌شود. ۷ واحد اضافه کنیم، ۴۷ می‌شود. دو برابر کنیم، ۹۴ به دست می‌آید. عدد دیگر، یعنی ۳ را با ۹۴ جمع می‌کنیم که ۹۷ به دست می‌آید. حال اگر ۱۴ تا از ۹۷ کم کنیم، ۸۳ می‌شود که رقم‌های آن همان دو عدد انتخابی هستند.

رازگشایی: دو عدد اولیه را

a و b می‌گیریم. اگر a را انتخاب و

پس از اعمال مرحله‌های ۱ تا ۳ روی آن،

نتیجه را با b جمع کنیم، عبارت $b + ((a+7) \times 2) \times 5$ یا

$b + 14a + 10$ به دست می‌آید. اگر از آن ۱۴ تا کم کنیم،

$b + 10a$ می‌ماند که بسط یک عدد دو رقمی با یکان b و دهگان a است؛ یعنی همان دو عدد اولیه.

نوبت شما

این سرگرمی مربوط به تاس است. دو تاس بردارید. یکی را سمت راست خود و دیگری را سمت چپ خود پرتاب کنید. حالا مرحله‌های زیر را اجرا کنید:

۱. عددهای بالایی (به اصطلاح عددهای رو شده) دو تاس را در هم ضرب کنید.

شما می‌توانید این سرگرمی‌ها را در کلاس، مهمانی‌ها و دورهمی‌ها با دوستان و آشنایان خود در میان بگذارید و به آنان نیز یاد بدهید؛ و لحظات خوش و هیجان‌انگیزی را رقم بزنید.

رازگشایی: عدد اولیه را x فرض می‌کنیم. اگر

پنج مرحله عملیات جبری را که اشاره شد روی x اعمال کنیم، به عبارت $5 \times [9 + (4 \times (6 + 5x))] \times 5$ یا به طور خلاصه $165x + 10$ می‌رسیم که می‌توان آن را به شکل $165(x+1) + 10$ نیز نوشت. اگر x کوچک‌تر یا مساوی ۹ باشد، $165(x+1) + 10$ بسط یک عدد سه‌رقمی است و اگر x از ۹ بزرگ‌تر باشد، چهار رقم یا بیشتر خواهد داشت. در هر صورت حذف دو رقم آخر این عدد، حذف ۶ و ۵ است و آنچه می‌ماند $x+1$ است. حالا اگر یک واحد از آن کم شود، x یعنی همان عدد اولیه ظاهر می‌شود.

۲. عددهای پایینی دو تاس را در هم ضرب کنید.
 ۳. عدد بالایی تاس سمت راست را در عدد پایینی تاس سمت چپ ضرب کنید. منظور از عدد پایینی عددی است که روی وجهی از مکعب که به زمین چسبیده است، قرار دارد.
 ۴. عدد بالایی تاس سمت چپ را در عدد پایینی تاس سمت راست ضرب کنید.
 حالا حاصل این چهار ضرب را با هم جمع کنید.

به چه عددی رسیدید؟ بار دیگر تاس‌ها را پرتاب و دوباره مراحل را اجرا کنید تا ببینید که نتیجه یکسانی به دست خواهد آمد.
 جالب است، ولی جالب‌تر زمانی است که شما پرده از راز این سرگرمی بردارید.
 پس تا شماره بعدی مجله و قسمت دیگری از سرگرمی‌های عددی که پاسخ را خواهیم آورد، تلاش خود را بکنید.



به شوت دقیق می تونه لار رو تمام کنه!

شووت وکل کل کل کل!

فوتبال ریاضی

طیبه خاکی نژاد
مجید حکمت

مقدمه

فوتبال همیشه جذابیت‌های خاص خودش را داشته است و همه اقشار به آن علاقه دارند. این خاصیت جادویی مستطیل سبز است. سایر مسابقه‌های ورزشی نیز تا حدودی این ویژگی را دارند. المپیک را در نظر بگیرید. همه کشورها در آن با هم رقابت جدی دارند. حالا ترکیب فوتبال و ریاضی و یا المپیک ریاضی باید هم دیدنی و هم شنیدنی باشد.

«فوتبال ریاضی» یکی از رشته‌های رقابت‌های «المپیک ریاضی» است که با نام «مثبت ریاضی» (math+) شناخته می‌شود؛ رقابت‌هایی که بر اساس سرعت، دقت، هيجان و حل مسئله شکل گرفته‌اند. در این شماره در خدمت جناب آقای محسن روايتی، طراح و مجری طرح المپیک ریاضی خواهیم بود تا با موضوع‌های ریاضی- ورزشی بهتر آشنا شویم.

خود را با توانایی دیگران محک بزنند و نقاط قوت و ضعف خود را بشناسند، در المپیک ریاضی هم رشته‌های متفاوتی برای تمامی دانش‌آموزان با انواع توانایی ریاضی ایجاد شده است تا همه وارد بازی، هیجان، آموزش و محک‌زدن خود شوند.

«پیش از آنکه وارد مبحث اصلی بشویم، یک سؤال در ذهنم ایجاد شد. گفتید شهر تاریخی و کویری بشرویه، حتماً ناگفته‌هایی دارد که شاید برای دانش‌آموزان جالب باشد. لطفاً در مورد این شهر کمی توضیح بدهید.

«بله. «بشرویه» یکی از شهرستان‌های خراسان جنوبی و دهمین شهر خشت و گلی ایران

به‌عنوان مادر علوم و رشته پایه برای بسیاری از رشته‌هایی که تاکنون در اذهان سخت و خشک تلقی شده‌اند، یک سرگرمی طراحی کنم. هدفم این بود که دانش‌آموزان در کنار بازی، انگیزه لازم را برای یادگیری بیشتر و عمیق‌تر مطالب داشته باشند، این جرقه شروع مجموعه مسابقه‌های المپیک ریاضی شد.

این مسابقه‌ها ابتدا با بازی فوتبال ریاضی شروع شد و به سایر رشته‌ها و سرگرمی‌ها گسترش یافت. همانند بازی‌های المپیک ورزشی که برای همه نوع استعداد ورزشی رقابت‌هایی طراحی شده‌اند تا فرد بتواند توانایی

«سلام، لطفاً خودتان را به مخاطبان مجله معرفی کنید و در مورد ایده المپیک ریاضی توضیح بدهید.

«سلام و روز بخیر. محسن روايتی هستم. دبیر ریاضی از شهر تاریخی و کویری «بشرویه» ۱۵ سال سابقه تدریس ریاضی دارم و چند سالی است که روی طرح مجموعه بازی‌های المپیک ریاضی کار می‌کنم. بعد از چند سال تدریس در دوره‌های ابتدایی و متوسطه و در سطوح مقدماتی و پیشرفته، به دنبال روشی بودم تا بتوانم به کمک آن از ریاضی





فوتبال ریاضی بود که تمامی مراحل آزمایشی را با موفقیت طی کرد.

« واکنش خانواده‌ها و دانش‌آموزان بعد از مسابقه‌ها چه بود؟ »

○ بازخوردهایی که دانش‌آموزان و خانواده‌ها به ما دادند، این بود که طرحی موفق در ایجاد انگیزه و تغییر دید نسبت به ریاضی است. برای مثال، مادری با خوش‌حالی از به‌ثمررساندن دو گل توسط فرزندش می‌گفت و دانش‌آموزی با هیجان بیان کرد باورم نمی‌شد که روزی ریاضی این‌قدر باعث شادی و سرگرمی شود. دانش‌آموز دیگری در مورد تأثیر فوتبال ریاضی گفت: «سرعت عملم بیشتر شده است و از خواندن ریاضی لذت می‌برم.» یکی دیگر بیان می‌کرد که مسابقه‌های فوتبال ریاضی باعث شده‌اند که به دنبال مطالعاتی فراتر از کتاب درسی ریاضی باشم.

« چه شباهت و تفاوتی بین ورزش فوتبال و فوتبال ریاضی وجود دارد؟ »

○ چیزی که فوتبال را به ورزشی جذاب تبدیل کرده، شور و هیجانی است که در نتیجه کار تیمی و نیل به پیروزی به‌وجود می‌آید. همراه‌شدن بازیکن‌ها در کمک به هم، طرح و برنامه‌ریزی برای بازی بهتر، و وجود نوعی هم‌افزایی در جریان بازی موجب جذب مخاطبان بسیاری به فوتبال ریاضی نیز قوانین‌طوری نوشته شده‌اند که این شور و هیجان و هم‌افزایی وجود داشته باشد. زمین

دوری دانش‌آموزان از محیط مدرسه بیشتر و عمیق‌تر هم شده است.

نتایج تحقیقات اخیر نشانگر افت شدید دانش‌آموزان در درس ریاضی و کاهش استقبال از انتخاب رشته ریاضی- فیزیک در دوره دوم متوسطه و رشته‌های علوم پایه در دانشگاه است. شما ببینید که رهبر معظم انقلاب هم به این قضیه ورود کرده‌اند و با استناد به بحث‌های کارشناسی می‌فرمایند: «این وضعیت برای آینده کشور خطرناک است. ما این رشته‌های مهم علوم پایه را، به‌خصوص مثل ریاضی یا فیزیک را، برای آینده لازم داریم. اگر علوم پایه نباشد، علوم کاربردی هم به‌جایی نخواهند رسید.»

لذا با توجه به فرمایشات ایشان باید نگاه ویژه‌ای در آموزش و پرورش به رشته ریاضی شکل بگیرد.

« خب پرویم سراغ فوتبال ریاضی. لطفاً کمی در مورد طرح فوتبال ریاضی و دلیل طراحی آن توضیح بدهید. »

○ همان‌طور که عرض کردم، ضرورت اجرای طرح‌هایی که برای دانش‌آموزان شور و هیجان نسبت به ریاضی به‌وجود آورند، بسیار احساس می‌شود. با ایجاد سرگرمی و روابط تیمی می‌توان زیبایی‌های ریاضی را نمایان کرد. ما به دنبال این موضوع هستیم که ریاضی را طوری جذاب کنیم که دانش‌آموز از آموزش خشک جزوه‌محور به سمت احساس نیاز، خودآموزی و اعتمادبه‌نفس پیش برود. طرح‌های زیادی امتحان شدند که تعدادی از آن‌ها نتیجه مطلوبی در همراه‌کردن دانش‌آموز با ریاضی داشتند. تعدادی هم کنار گذاشته شدند. طرحی که استقبال فوق‌العاده دانش‌آموزان را به همراه داشت، طرح

محسوب می‌شود که پذیرای گردشگران از اقصا نقاط ایران و جهان است. قدمت این دیار به قبل از اسلام برمی‌گردد. نگینی بر پهنه کویر با مجموعه زیبایی از آثار تاریخی و فرهنگی در مجاورت تپه‌های ماسه‌بادی و آسمانی زیبا با ستاره‌هایی درخشان که هر بیننده و ستاره‌شناسی را به خود جلب می‌کند. افتخار آن به تلاش و سخت‌کوشی و پرورش ادیبان و دانشمندانی است که چراغ راهی برای مردمان کشور بوده‌اند.

« متشکرم. وضعیت ریاضی امروز را در کشورمان چطور ارزیابی می‌کنید؟ »

○ امروزه بسیاری از دانش‌آموزان در درک مفاهیم ریاضی مشکل دارند و نمی‌توانند با آن ارتباط برقرار کنند. بنابراین به ریاضیات و یادگیری آن علاقه چندانی ندارد. تلاشگران عرصه آموزش و ریاضیات لازم است ارتباط صمیمانه‌تری با دانش‌آموزان داشته باشند. شیرینی ذاتی ریاضی هنوز بر شمار زیادی از دانش‌آموزان پوشیده است. متأسفانه مشکلات آموزش ریاضی دانش‌آموزان با همه‌گیرشدن ویروس کرونا، مجازی‌شدن کلاس‌ها و

« کمی در مورد شیوه

اجرای مسابقه توضیح دهید.

○ فوتبال ریاضی یک زمین مستطیل شکل دارد که دو تیم در آن بازی می کنند. هر تیم دارای چهار بازیکن اصلی و دو یار ذخیره و یک مربی است. بازی = ۲ قانون ساده دارد. شروع کننده و زمین بازی در ابتدا با پرتاب سکه بین سرگروه ها تعیین می شود.

« شما گفتید که توپ این

بازی، سؤال هایی است که پرسیده می شوند. لطفاً بیشتر توضیح بدهید.

○ در هر لحظه از بازی رقابت بین دو یا سه نفر از بازیکنان از دو تیم جریان دارد. سؤال توسط داور مطرح می شود و هر نفر زودتر پاسخ را اعلام کند، برنده می شود و تیم او یک مرحله به سمت جلو و دروازه تیم مقابل حرکت می کند. دوباره همان روال قبل پی گرفته می شود تا اینکه بین بازیکن حمله و دروازه بان تیم مقابل سؤال مطرح می شود. اگر دروازه بان نتواند پاسخ سؤال را زودتر اعلام کند، گل ثبت می شود.

« مدت زمان برگزاری

مسابقه و پاسخ گویی به سؤال ها به چه صورت در نظر گرفته می شود؟

○ قوانین و جریان بازی طوری طراحی شده که شکل فوتبالی آن رعایت شود. بازی دارای دو تیم ۲۵ دقیقه ای است. این ۲۵ دقیقه زمان پیوسته است و زمان نگه داشته نمی شود. استراحت بین دو نیمه پنج دقیقه است. برای پاسخ به سؤال ها نیز تا یک دقیقه زمان در نظر گرفته شده است.

« فوتبال ریاضی تاکنون چه

مرحله هایی را طی کرده است؟

○ ما تا به حال این مرحله ها را گذرانده ایم:

● مرحله مقدماتی و طرح ریزی قوانین و اجرای آزمایشی؛

● مرحله آزمون (تست) در رقابت های درون مدرسه ای؛

● آموزش

و تمرین در مدرسه های متفاوت؛

● مرحله انتخابی تیم های مدرسه ای؛

● تمرین های

دوره ای تیم های

شرکت کننده در مرحله شهرستان؛

● مرحله نهایی با حضور

تیم های منتخب و تشکیل تیم شهرستان؛

● طرح ریزی مسابقه های قطبی، استانی و لیگ کشوری.

« فوتبال ریاضی در چه

دوره های تحصیلی ای قابل

اجراست؟

○ طرح و ایده فوتبال ریاضی و مجموعه قوانین و سبک آن طوری نوشته شده اند که در تمامی درس ها و رشته های تحصیلی می توان آن را اجرا کرد. یکی از ویژگی های مهم این مسابقه سبک فوتبالی بودن و شور و هیجان حاکم بر بازی است که خود موجب جذابیت بیشتر بازی می شود. شاید کمتر مسابقه ای را بشود یافت که همه نکات مثبت بازی های گروهی را در خود داشته باشد. اما این مهم تا حد زیادی در فوتبال ریاضی وجود دارد.



مسابقه طرحی

فوتبالی دارد و شور و هیجان در طول آن موج می زند. اوج این هیجان در لحظه به ثمر رساندن گل نمایان می شود.

ما در هر دو طرف دروازه بان، دفاع و حمله داریم. وقت اضافه و پنالتی را هم برای هر دو طرف می گیریم. مربی می تواند وقت اضافه بگیرد یا بازیکنان را تعویض کند. آقای گل، بهترین خط دفاعی، بهترین دروازه بان و تیم منتخب هم در پایان دوره مسابقه مشخص می شود. مهم ترین تفاوت ورزش فوتبال با فوتبال ریاضی در توپ مسابقه است: «توپ فوتبال ریاضی سؤال هایی است که در هر مرحله طرح می شوند.»

بازی

۵۲

شماره ۱۳۳۳
مهر ماه ۱۳۹۳

کرده‌ام. امیدوارم این مسابقه‌ها به‌زودی
بفصورت کشوری برگزار شوند.

« در پایان از شما بابت
شرکت در این گفت‌وگو
صمیمانه تشکر می‌کنم.
امیدوارم اشتیاق دانش‌آموزان
به ریاضی و تفکر ریاضی
روز به روز بیشتر و وسیع‌تر شود
و بین دانش‌آموزان و ریاضی،
دوستی عمیقی به وجود آید.

ریاضی دنبال می‌شوند؛ از جمله:

- آشنی با ریاضی؛
- تقویت راهبرد حل مسئله؛
- افزایش سرعت محاسبه و تسلط بر عملکرد ریاضی؛
- هیجان و مسابقه؛
- کار تیمی و هم‌افزایی بین بازیکنان و مربی؛
- ایجاد انگیزه برای مطالعه عمیق‌تر مطالب درسی.

« چه برنامه‌هایی برای
آینده دارید؟

- برای آینده برنامه‌های زیادی در مرحله تدوین داریم؛ از جمله:
- آموزش و تمرین تیم‌های متقاضی در سراسر کشور؛
- تشکیل تیم‌های تخصصی در رشته‌های متفاوت المپیک ریاضی؛
- تشکیل لیگ برتر فوتبال ریاضی در شهرها و مناطق گوناگون کشور؛
- تشکیل کارگاه‌های آموزش فوتبال ریاضی؛
- تشکیل کارگروهی برای بین‌المللی کردن مسابقه‌های المپیک ریاضی.

« آیا دانش‌آموزان
سراسر کشور می‌توانند امیدوار
باشند که روزی فوتبال ریاضی
برای آنان هم برگزار شود؟

• من علاقه زیادی به ریاضی و دانش‌آموزان دارم. برای سال آینده چند استان از بنده برای برگزاری این مسابقه‌ها و المپیک ریاضی درخواست همکاری کرده‌اند. من هم اعلام آمادگی

« بازیکنان ذخیره در بازی
چه نقشی دارند؟

• هر تیم حداکثر دو یار ذخیره دارد که در جریان بازی می‌توانند تعویض داشته باشند. در مسابقه فوتبال ریاضی همچون فوتبال، لحظه‌هایی پیش می‌آیند که بازیکنان به استراحت نیاز پیدا می‌کنند یا بازیکنی در زمینه خاصی مهارت دارد و جابه‌جایی در زمین مسابقه لازم می‌شود. در این لحظه است که تیم‌ها می‌توانند بازی را نگه دارند و تقاضا کنند بازیکن تعویض شود.

« در لحظه‌های حساس و
پراشتاب، و درگیری و خطا در
مسابقه، چه پیش‌بینی‌هایی
برای پایش (کنترل) جریان
مسابقه صورت گرفته است؟

• در جریان فوتبال گاهی به دلایلی خطاهایی رخ می‌دهند که برای تنظیم جریان بازی داور از کارت زرد برای اخطار و کارت قرمز برای اخراج بازیکن یا مربی استفاده می‌کند. در فوتبال ریاضی هم در لحظه‌های حساس، داور مسابقه از این اهرم برای هدایت مسابقه و برگرداندن جریان مسابقه به روال عادی بهره می‌گیرد.

« شما از پنالتی و وقت
اضافه صحبت کردید. در مورد
آنها هم توضیح بدهید.

• گاهی در جریان مسابقه فوتبال ریاضی همه‌چیز مساوی پیگیری می‌شود. دو نیمه وقت اضافه برای مسابقه تعیین شده است و چنانچه باز هم کار به تساوی کشیده شود، ضربه‌های پنالتی مشخص‌کننده تیم برتر خواهند بود.

« در طراحی فوتبال ریاضی
چه هدف‌هایی پیگیری شده‌اند؟
• هدف‌های زیادی در فوتبال



چهارمین

۵۳

شماره ۱۳۳۰ | پاییز ۱۴۰۳

درمانگاه ریاضی

افشین خاصه خان

مرکز دایره را محاسبه کرده بود و ایدهای برای ادامه راهبرد نداشت.

درمان

از تاج‌الدینی خواستم دایره‌ای رسم کند و نقطه دل‌خواهی بیرون دایره در نظر بگیرد. پرسیدم: «به نظر شما فاصله این نقطه از دایره چه می‌تواند باشد؟»

جواب داد: «استاد دایره بی‌شمار نقطه دارد. من نمی‌دانم فاصله نقطه از دایره چیست؟»

گفتم: «به نظر شما کمترین فاصله این نقطه با کدام نقطه از دایره است؟»

تاج‌الدینی با تردید و به‌طور شهودی نقطه‌ای تقریبی در امتداد مرکز دایره مشخص کرد (شکل ۱).



(شکل ۱)

پرسیدم: «از کجا مطمئن شویم که این نقطه، نزدیک‌ترین نقطه است؟»

گفت مطمئن نیست. از او خواستم که مرکز دایره را مشخص و به این سه نقطه دقت کند که تاج‌الدینی گفت: «استاد به نظر می‌رسد که تقریباً در یک امتداد هستند.»

او را تحسین کردم و گفتم: «خیلی به جواب نزدیک شده‌ای. حالا چطور می‌توانیم به کمک نقطه بیرونی و مرکز دایره، نقطه میانی را پیدا کنیم؟»

بلافاصله گفت: «استاد نقطه را به مرکز دایره وصل می‌کنیم. نقطه تقاطع پاره خط با دایره همان نقطه مطلوب ما خواهد بود؟» و ادامه داد: «منطقی به نظر می‌رسد، اما دلیلش را نمی‌دانم.»

گفتم: «از نقطه مذکور خط عماسی بر دایره رسم کن. حال یک نقطه دلخواه به غیر از A روی دایره در نظر بگیر و فاصله آن نقطه را تا M با پاره خط AM مقایسه کن. برای درک بهتر می‌توانی از خط مماس کمک بگیری.»

سلام بچه‌ها، وقت بخیر. به «درمانگاه ریاضی» خوش آمدید. اصلاً تمرکز درمانگاه ریاضی بر کتاب‌های درسی است. این کتاب‌ها بر پایه تخصص و تحقیقات متخصصان آموزش ریاضی نوشته شده‌اند و در مجموع کتاب‌هایی هستند که در نوع خود مشابهی ندارند. توصیه می‌کنم برای مطالعه یک موضوع درسی حتماً با این کتاب‌ها آغاز کنید، چون در این کتاب‌ها سعی شده است اصول علمی آموزش فعال ریاضیات (طراحی فعالیت در راستای کشف موضوع درسی توسط خود دانش‌آموز) تا حد امکان رعایت شود. توصیه همیشگی درمانگاه ریاضی به دانش‌آموزانی که قصد تقویت تفکر و توان ریاضی خود را دارند، آن است که: «مطالعه کتاب‌های درسی ریاضی به‌شدت لازم است، اما کافی نیست.»

مراجعه‌کننده این هفته دانش‌آموز پایه یازدهم رشته تجربی، **فائزه تاج‌الدینی** است. پدر تاج‌الدینی در کار تولید محصولات کشاورزی و صادرات آن و مادرش خانه‌دار است. این دانش‌آموز کوشا هر هفته یک جلسه به درمانگاه می‌آید. بعد از سلام و احوال‌پرسی تاج‌الدینی را به اتاق درمانی دعوت می‌کنم. طبق معمول، ابتدا نوبت رفع اشکال‌های هفتگی است. برای پی‌بردن به مشکل تفکر ریاضی تاج‌الدینی در اشکال‌های مطرح‌شده، «گفت‌وگویی (دیالوگ) سقراطی» معمول را با او آغاز کردم.

تشخیص بیماری

یکی از اشکال‌های تاج‌الدینی در درس اول فصل ۱ کتاب ریاضی (۲) بود:

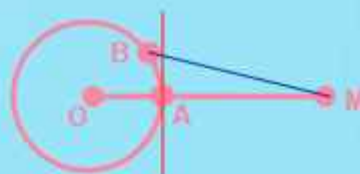
فرض کنید خط‌های $x+y=1$ و $x-y=3$ قطرهای یک دایره باشند و خط $4x+3y+5=0$ مماس بر آن دایره باشد. نزدیک‌ترین فاصله نقطه $M(4,-2)$ از دایره کدام است؟ (آزمون سراسری ریاضی ۱۴۰۰)

$$\begin{array}{ll} ۱. \sqrt{3}-1 & ۲. \sqrt{3}-\sqrt{2} \\ ۳. \frac{\sqrt{2}}{2} & ۴. \sqrt{5}-2 \end{array}$$

او چند راهبرد برای حل این مسئله آزمایش کرده بود، اما به نتیجه‌ای نرسیده بود. مشکل اصلی او جمله آخر مسئله بود. نزدیک‌ترین نقطه به دایره برایش نامفهوم بود. یعنی اصلاً نمی‌دانست مجهول مسئله چیست. به همین خاطر بدون هدف فقط مختصات

تاج‌الدینی که رضایت در چهره‌اش کاملاً مشخص بود گفت: «استاد مرحله به مرحله جلو رفتن خیلی لذت‌بخش است و مسیر راهبرد را تا حد زیادی مشخص می‌کند»

(شکل ۳)



تاج‌الدینی بعد از رسم مرحله‌های گفته‌شده، با دقت به شکل ۳ نگاه کرد و گفت: «درست است. BM از وتر مثلث قائم‌الزاویه ایجاد شده بزرگ‌تر است. پس حتماً از ضلع قائم AM نیز بزرگ‌تر خواهد بود.» پرسیدم: «چرا مثلث قائم‌الزاویه؟»

جواب داد: «چون می‌دانیم شعاع در نقطه تماس بر خط مماس عمود است.»

او را تحسین کردم و گفتم: «حال دوباره مسئله را بخوان و راهبرد خود را تصحیح کن.»

تاج‌الدینی جواب داد: «من مختصات مرکز دایره، یعنی O را، با تقاطع دو خط داده شده و حل دستگاه به دست آورده بودم. حال می‌توانم طول پاره خط OM را هم محاسبه کنم، چون مختصات هر دو نقطه را دارم.»

از او پرسیدم: «مجهول اصلی مسئله چیست و چگونه حساب می‌شود؟»

تاج‌الدینی جواب داد: «حالا می‌دانم که مجهول مسئله AM است، اما برای پیدا کردن آن باید شعاع دایره را از OM کم کنیم. پس شعاع را هم لازم داریم.»

گفتم: «برای پیدا کردن شعاع چه معلوماتی در مسئله وجود دارد؟» با کمی مکث گفت: «استاد فکر می‌کنم خط مماس برای همین داده شده است. فاصله مرکز دایره از خط مماس داده‌شده، همان شعاع دایره است. از این قسمت، مسئله مشابهی در کتاب درسی وجود دارد.»

گفتم: «پس راهبرد خودت را اجرا کن.»

بلافاصله شروع به نوشتن کرد:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases} \quad O(2, -1)$$

$$OM = \sqrt{(4-2)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{5}$$

$$r = \frac{|4(2) + 3(-1) + 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

$$AM = \sqrt{5} - 2$$

تجویز دستورالعمل‌های درمانی

بعد از تشخیص بیماری تفکر ریاضی تاج‌الدینی، حال نوبت تجویز دستورالعمل‌های درمانی لازم بود:

۱. به او توصیه کردم، حتماً چهار مرحله حل مسئله و همچنین انواع راهبردهای حل مسئله را از فصل اول کتاب ریاضی سال هفتم دوباره با دقت بخواند.

۲. درس اول از فصل ۱ کتاب ریاضی ۲ را با دقت مطالعه کند و فعالیت‌ها، مثال‌ها و کار در کلاس‌ها را انجام دهد. در پایان هم تمرین‌های آخر درس را حل کند.

۳. تمرین‌های مشابهی را که حل آن‌ها راهبردهای متفاوتی را می‌طلبد، تعیین و سفارش کردم برای حلشان آزمون و خطا انجام دهد و تا حد امکان از نگاه کردن به پاسخ مسئله اجتناب کند.

۴. برای مسئله‌هایی که نتوانسته است حل کند، در طول هفته دوباره چالشی انجام دهد. حل یک مسئله بعد از چندین بار تلاش بسیار لذت‌بخش خواهد بود.

۵. اگر امکان داشته باشد، یک مسئله را با راهبردهای متفاوت حل کند و از این کار لذت ببرد.

۶. اگر علاقه‌مند باشد، چند مسئله در همین زمینه طراحی کند و با دوستانش به حل و بحث بگذارد تا نقاط قوت و ضعفش بیشتر آشکار شوند. همچنین، بتواند از منظر یک طراح به موضوع نگاه کند.



یارگیری ریاضی به نگ پروژه‌های برنامه‌نویسی

(قسمت ۲)

بهنام آیتی‌پور

BLOCK 01

در این شماره از مجله می‌خواهیم از کلی‌گویی خارج شویم و به صورت کاملاً عملی به سر وقت برنامه‌نویسی برویم. اول باید بدانیم «الگوریتم» چیست. الگوریتم مجموعه دستورالعمل‌هایی است که فرایند انجام یک کار معین را برای مخاطبی مشخص شرح می‌دهد؛ با این سه شرط:

۱. ترتیب مرحله‌های انجام کار درست نوشته شوند.
 ۲. دستورها برای مخاطب کاملاً مشخص باشند.
 ۳. شرط خاتمه عملیات ذکر شده باشد.
- چند مثال ساده می‌زنیم. شما می‌خواهید نحوه رسیدن یک دانش‌آموز را به مدرسه برایش به صورت یک الگوریتم بنویسید:
- آیا درست است که اول به او بگویید برو مدرسه، بعد که به مدرسه رسید، به او بگوید خودرو بگیر؟!
 - آیا درست است که به او بگوید با ترم‌افزار مسیر یاب راه مدرسه را پیدا کن، در حالی که اصلاً مدرسه اجازه نمی‌دهد دانش‌آموز تلفن همراه داشته باشد؟!
 - آیا این درست است که شما به او بگویید اول برو به چپ بعد برو به راست؟ دقیقاً چقدر از مسیر را باید برود به چپ و چقدر را باید برود به راست؟
- راستی قرار نیست تا ابد دانش‌آموز عزیز در مسیر مدرسه حیران و سرگردان باشد. اگر بعد از مدت زمانی معین نتوانست مدرسه را پیدا کند، در الگوریتم قید کنید که پیدا کردن مدرسه را رها کند و به خانه برگردد.
- و یک سؤال دیگر: برای دانش‌آموز سال اول که روز اولی است که به مدرسه می‌رود، همان الگوریتمی را می‌نویسید که برای

در مقاله شماره یک این سلسله مقاله‌ها، دلیل‌های نیاز به نگارش مجموعه حاضر را شرح دادیم. آمادگی برای شرکت در مسابقه‌های آزمایشگاهی پژوهش‌سراها در رشته کدنویسی یکی از این دلیل‌هاست. همچنین، شرکت در «مسابقه‌های خوارزمی» که از مسابقه‌های معتبر کشوری است و نتایج آن می‌تواند به ورود مستقیم دانش‌آموزان به دانشگاه کمک کند و خوش‌بختانه در قسمت ریاضی هم فعال شده است، یکی دیگر از این دلیل‌هاست. شما می‌توانید برنامه‌ای بنویسید که یک مسئله را با روش ریاضی پیشرفته‌ای با دقت بهتر و سریع‌تر حل کند. مثلاً پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر برای رسیدن به مقصد که اتفاقاً به درد تاکسی‌های اینترنتی هم می‌خورد. قضایایی از ریاضیات هستند که به حل کردن این مسئله کمک می‌کنند. واقعاً اینجاست که مشخص می‌شود ریاضیات چه ابزار بالارزشی است. این نکته را هم متذکر می‌شوم که ما قرار نیست برنامه‌نویسی درس بدهیم. چون کتاب‌های خیلی خوبی در این زمینه نوشته شده‌اند. ما دو هدف عمده داریم:

- اول اینکه با استفاده از یک محیط ساده برنامه‌نویسی درک و فهم بهتری از یک سلسله مفهوم‌های ریاضی در ذهن دانش‌آموزان ایجاد کنیم.
 - دوم اینکه نشان بدهیم که ریاضی‌دان برنامه‌نویس چقدر می‌تواند در برنامه‌نویسی موفق‌تر از کسی عمل کند که ریاضیات کافی برای برنامه‌نویسی را بلد نیست.
- خب حالا دوستان خودشان می‌توانند در محیط‌های پیشرفته‌تر این دو مورد را پیگیری کنند.

۱۳۹۷

۵۶

شماره ۱۳۹۷

۲. علامت اتصال

برای اتصال بخش‌های متفاوت یک فلوچارت از فلش استفاده می‌شود.

شروع

۳. علامت انتساب و محاسبه‌ها

برای نمایش دستورهای انتسابی و محاسباتی، از شکل مستطیل استفاده می‌شود.

$$K \leftarrow 1$$

$$N = P + 2$$

۴. علامت‌های ورودی و خروجی

برای نمایش دستورهای ورودی و خروجی از یک متوازی‌الاضلاع استفاده می‌شود.

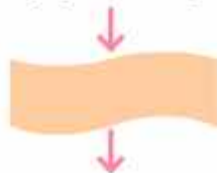
A را بخوان

CD را چاپ کن

۵. علامت‌های شرطی



گاهی از مؤلفه تصویری زیر هم برای ارائه جواب برنامه یا به اصطلاح چاپ جواب برنامه استفاده می‌شود.



مثال ۲. فلوچارتی رسم کنید که دو عدد دلخواه را بخواند و مجموع آن‌ها را ارائه بدهد.

دانش‌آموز سال ششمی می‌نویسد که دارد در آن مدرسه تحصیل می‌کند؟

درست می‌گویید: به دانش‌آموز سال ششم فقط کافی است بگویید برو مدرسه. ولی به دانش‌آموز سال اولی نمی‌شود فقط گفت برو به مدرسه. باید متناسب با سطح هر کدام جداگانه الگوریتم نوشت.

خب، حالا باید بررسییم: مخاطب ما کیست و چه اطلاعاتی دارد؟ مخاطب ما محیط برنامه‌نویسی «کیوبیسک» است و این دسته از اطلاعات به آن معرفی شده‌اند:

۱. حرف‌های کوچک انگلیسی از a تا z
۲. حرف‌های بزرگ انگلیسی از A تا Z
۳. رقم‌های ۰ تا ۹
۴. چهار عمل اصلی؛

۵. «انتساب»، یعنی اینکه ما می‌توانیم یک محاسبه را که شامل چهار عمل اصلی، پرانتزها و ... است، محاسبه کنیم و بعد نتیجه را به یک خانه مشخص از حافظه نشانی‌دهی کنیم؛

۶. مقایسه کردن دو مقدار یا دو عبارت؛

۷. چند تابع کتابخانه‌ای که در کتابخانه «کیوبیسک» قرار دارند. یعنی برای کیوبیسک تعریف شده‌اند و ما برای استفاده از آن‌ها فقط کافی است اسمشان را فراخوانی کنیم.

و چند امکان جزئی دیگر که به موقع آن‌ها را شرح می‌دهیم. توجه دارید که ما می‌خواهیم به صورت کاملاً عملی درس را ارائه کنیم. بنابراین برخلاف کتاب‌های مرجع که روش کارشان ذکر یکباره همه اطلاعات در جدول‌های گسترده است، ما سعی می‌کنیم آموزش مطالب را مرحله به مرحله از طریق مثال‌های عملی به شما یاد بدهیم. بنابراین عجله نکنید و مطمئن باشید که اگر این درس را پی بگیرید، با مثال‌های متعدد خیلی از آنچه را که احتیاج دارید، در زبان کیو بیسک یاد می‌گیرید.

مثال ۱. الگوریتمی بنویسید که دو عدد را بخواند و حاصل جمع آن‌ها را نمایش بدهد.

• شروع کن.

۱. دو عدد را بخوان (یعنی دو مکان از حافظه را به نام‌های A و B ذخیره (رزرو) کن. چون بعداً می‌خواهم دو عدد به تو معرفی کنم که آن‌ها را در این دو مکان حافظه نگهداری کنی).

۲. $S = A + B$ (یعنی دو عدد داده‌شده را با هم جمع کن و نتیجه را بگذار در خانه‌ای از حافظه به نام S).

۳. محتوای خانه S را نمایش بده.

۴. تمام.

تذکر: هر وقت الگوریتمی را با مؤلفه‌های تصویری زیر بازنویسی کنیم، می‌گوییم «فلوچارت» یا «نمودار گردشی» کشیده‌ایم.

۱. شروع و پایان

شروع

پایان



دو نکته

۱. کاربردهای ریاضیات در برنامه‌نویسی خیلی زیاد هستند. یکی از آن‌ها استفاده از دستورالعمل‌های اولویت‌های انجام عملیات جبری است. توجه کنید در خط سوم، اگر ما به اشتباه از عبارت زیر استفاده می‌کردیم،

LET S=A+B/2

A	B	S	S
۲	۶		
		$(2+6)/2$	$2+6/2$
		$8/2$	$2+3$
		4	5
		نتیجه	نتیجه

آن وقت در محاسبه‌هایمان دچار چه اشتباه‌هایی می‌شدیم.

۲. بعضی از فرمول‌های ریاضیات را می‌توانیم در کتاب‌های فرمول پیدا کنیم و از آن‌ها در برنامه‌نویسی بهره بگیریم؛ مثلاً فرمول‌های میانگین حسابی و میانگین هندسی.

فرمول میانگین هندسی در یکی از تابع‌های کتابخانه‌ای کیوبیسیک استفاده شده است. تابع‌های کتابخانه‌ای یعنی تابع‌هایی که آن‌ها را برای کیوبیسیک تعریف کرده و کنار گذاشته‌اند و ما برای استفاده از آن‌ها به کدنویسی هیچ نیازی نداریم و فقط کافی است آن‌ها را صدا کنیم.

خب، چون کیو بیسیک زبانی آموزشی است، تعداد این‌گونه تابع‌های آن خیلی محدود است، در صورتی که در زبان‌های برنامه‌نویسی پیشرفته، تعداد این تابع‌ها خیلی بیشتر است. این همان تفاوتی است که گفتیم یک دانش‌آموز کلاس اولی با یک دانش‌آموز کلاس ششمی دارد. یعنی مثلاً تعداد تابع‌های زبان برنامه‌نویسی «سی‌شارپ» بسیار بیشتر از زبان برنامه‌نویسی کیوبیسیک است. اما توجه کنید که ما ترجیح دادیم در ابتدای کار زبان برنامه‌نویسی کیوبیسیک را به شما آموزش بدهیم و این کار باعث می‌شود که در اول کار شما فراری نشوید. بعد از اینکه علاقه‌مند شدید و منطق برنامه را فهمیدید، آن وقت می‌توانید از محیط‌های برنامه‌نویسی پیشرفته‌تری استفاده کنید.

start

A,B

S=A+B

S

END

هرگاه با کلمه‌های از پیش تعریف‌شده‌ای، یک فلوچارت یا الگوریتم را برای یک محیط برنامه‌نویسی تشریح می‌کنیم، در این صورت می‌گوییم کد نوشتیم. به کل فرایندی که آخرین مرحله‌اش «کدنویسی» است، «برنامه‌نویسی» می‌گویند. مثال ۳. برنامه‌ای بنویسید که دو عدد A و B را بخواند و سپس مجموع آن‌ها را ارائه دهد.

```
CLS
INPUT A,B
LET S=A+B
PRINT S
END
```

ببینید چطور ما خط‌های برنامه‌نویسی را با استفاده از ترجمه یک فلوچارت می‌نویسیم. کلیپ این برنامه را از طریق پویش «رمزینه‌های سریع پاسخ» (کیو آر کدها) ببینید تا بیشتر متوجه شوید چه اتفاقی دارد می‌افتد.

مثال ۴. برنامه‌ای بنویسید که دو عدد A و B را بخواند و سپس میانگین حسابی و هندسی آن‌ها را محاسبه کند و نمایش دهد.

start

A,B

$S=(A+B)/2$
 $K=SQR(A*B)$

S,K

END

CLS

INPUT A,B

LET S=(A+B)/2
LET K=SQR(A*B)

PRINT S,K

END

گزارشی از برگزاری مسابقه کُتَر

(کتاب خوانی تبیی ریاضی)

در سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰

انجمن شورای خانه‌های ریاضیات ایران

صدرا اسدی



و خلاصه از کتابی که خواننده بودند، گرفته شد. در هر مرحله هر گروه خلاصه برداشت خود را از کتابی که مطالعه کرده بود، ظرف ۲۰ دقیقه ارائه می‌داد سپس ۱۰ دقیقه نیز به پاسخ‌گویی به سؤال‌های داوران اختصاص داشت. نمره مرحله اول فقط بر اساس نحوه ارائه بود، ولی نمره مرحله دوم بر اساس نحوه نگارش چکیده و ارائه شفاهی آن منظور می‌شد. در پایان، بر اساس امتیازات کسب‌شده، به همه شرکت‌کنندگان تقدیرنامه و نشان موفقیت در سه سطح ۱، ۲ و ۳ داده شد.

شورای خانه‌های ریاضیات، گسترش این مسابقه را که در شرایط فعلی به‌شدت مورد نیاز جامعه علمی است، با همکاری مجله‌های برهان در برنامه خود دارد و در این راستا می‌کوشد به تدریج نوشته‌های منتخب دانش‌آموزان شرکت‌کننده در این مسابقه در مجله‌های برهان به چاپ برسند.

شورای خانه‌های ریاضیات ایران در انتظار جلب دانش‌آموزان برای شرکت در این مسابقه توسط همکاران معلم ریاضی و آموزگاران محترم است.

نام شرکت‌کننده که نشان موفقیت سطح ۱ این مسابقه را کسب کردند، در جدول زیر آورده شده است:

توضیح: دلیل وجود گروه‌های یک نفره آن است که متأسفانه به مرور زمان، برخی از اعضای گروه‌ها از شرکت در مسابقه انصراف دادند.

با توجه به اهداف اصلی خانه‌های ریاضیات، برای رفع کمبودها و مشکلات آموزش، از طریق ارائه برنامه‌ها و آموزش‌های غیررسمی و به دلیل شناسایی مشکل مطالعه نکردن دانش‌آموزان و بی‌توجهی اقشار جامعه به کتاب‌ها (مخصوصاً به کتاب‌های علمی معتبر)، شورای خانه‌های ریاضیات ایران «پیشنهاد برگزاری مسابقه «کتاب‌خوانی تبیی ریاضی» (کُتَر) را مورد بررسی و موافقت قرار داد و برنامه‌ریزی برگزاری این مسابقه از تاریخ ۱۶ دی ۱۳۹۹ در کمیته علمی مسابقه شروع شد. پس از ساعت‌ها بحث در چندین جلسه، کمیته علمی آیین‌نامه این مسابقه را آماده کرد. در تاریخ ۵ شهریور ۱۴۰۰، آیین‌نامه در هیئت مدیره شورای خانه‌های ریاضیات به تصویب رسید و همراه با پوستر مسابقه، فهرست کتاب‌های پیشنهادی و برگه داوری، برای اجرا به خانه‌های ریاضیات ارسال شد. خانه‌های ریاضیات اصفهان، اهواز، ایلام، بروجن، خمین، سمنان، کرمان و مرودشت برای شرکت در اولین دوره این مسابقه، اعلام آمادگی کردند و فرایند مسابقه در هر خانه، با ثبت‌نام دانش‌آموزان پایه‌های هفتم تا یازدهم، از آذرماه ۱۴۰۰ آغاز شد.

طبق آیین‌نامه، مسابقه کُتَر شامل دو مرحله بود که مرحله اول آن اسفند ماه ۱۴۰۰ در خانه‌های ریاضیات و مرحله دوم آن بین برگزیدگان مرحله اول به مدت ۵ روز، از روز شنبه ۲۲ مرداد تا روز چهارشنبه ۲۶ مرداد ۱۴۰۱، به صورت مجازی و با گروه داوران واحد برای هر پایه به صورت سراسری برگزار شد. قبل از برگزاری مرحله دوم مسابقه، از هر گروه یک چکیده

اعضای گروه	پایه	خانه ریاضیات	اعضای گروه	پایه	خانه ریاضیات
ساینا خداحمی - نگار زمانی	هفتم	بروجن	آرتین آزادی - سروش جلیلی - مهدی آقازاده	دهم	بابل
یاسمن آرزوم جو	هشتم	اصفهان	امیرحسین عمران پور - مهدی چراتیان - معین خاکستریان	یازدهم	بابل
هلیا محمدشغیعی	نهم	اصفهان	سجاد سرلک - محمدحسین حاتمی	یازدهم	خمین
سیده مهدیس عبدالهی - دلرام فروتن	دهم	ایلام			

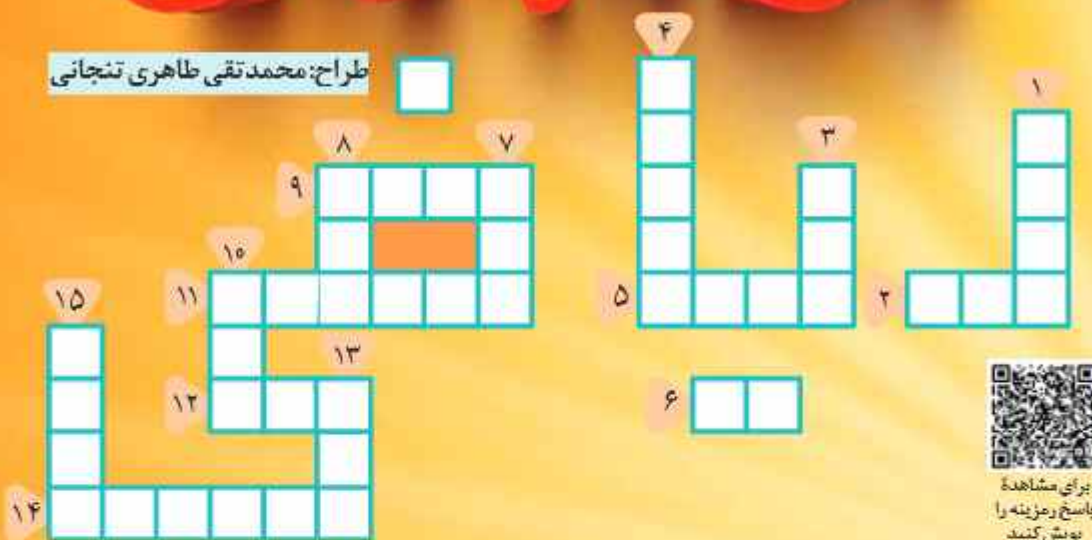
برگرفته از

۵۹

شماره ۱۳۳ | پاییز ۱۴۰۰

جدول رقم - ریاضی

طراح: محمد تقی طاهری تنجانی



مجموع عددهای واقع در چهار گوشه این مربع چقدر است؟



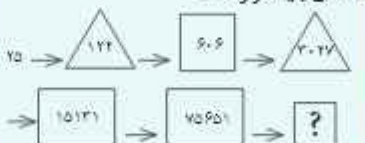
۱۴. دانش آموزی یک مداد و یک خودکار را به مبلغ ۲۰ هزار تومان خرید. در صورتی که قیمت خودکار ۱۸ هزار تومان بیشتر از قیمت مداد باشد، قیمت ۲۳ خودکار چند تومان است؟

۱۵. مقدار عددی عبارت $(256)^{5/16}$ است. راهنمایی: مجموع همه رقم‌های جدول ۱۲۶ است.

۸. در هر لیتر آب یک دریاچه ۵ درصد کیلوگرم نمک وجود دارد. در چند لیتر از آب این دریاچه ۱۲/۹ کیلوگرم نمک وجود دارد؟

۹. حاصل $\frac{7^4 + 7^2 + \dots + 7^2}{7}$ است. ۱۰. مقدار عددی $\frac{6(20\frac{1}{3} - 125 - 4 \times 0/3)}{13}$ است.

۱۱. در الگوی منطقی زیر به جای ؟ چه عددی باید قرار داد؟



۱۲. در ۲۶ متر مربع چند موزاییک مربع شکل به ضلع ۲۵ سانتی متر جا می‌شود؟

۱۳. در این جدول ۳×۳، عددهای ۲ و ۴ و ۶ و ۸ و ... را طوری قرار می‌دهیم که حاصل جمع هر ستون، هر سطر و هر قطر با هم برابر شوند. در این صورت، ۱۶ برابر

۱. اگر بین ۱۸ و ۲۰۲۲ سه واسطه حسابی درج کنیم، مجموع این سه واسطه است.

۲. اگر $a=30$ و $p = \frac{a+b+c}{2}$ و $b=40$ و $c=50$ باشد، مقدار عددی $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ است.

۳. با توجه به دستگاه $\begin{cases} x+2y=7 \\ y+2z=8 \\ z+2x=6 \end{cases}$ حاصل $(x+y+z)^2$ است.

۴. اگر $2^x=5$ باشد، مقدار عددی $4^{3x+1}+1$ است.

۵. جواب معادله زیر است: $1-(2-(3-(\dots-(1385-(1386-x))\dots)))=620$

۶. فاصله نقطه $A(30, 40)$ از خط $4x+3y=20$ است.

۷. مجموع دو عدد اول ۱۰۳ است. عدد بزرگ‌تر کدام است؟

مقاله اول:

« بیان لطیفه اول به زبان ساده تر:

$$(\gamma R + L) \div \gamma \begin{cases} \Delta, \Delta & R \\ \Delta & L \end{cases}$$

۲. خیابان جمع خیلی مسألی است مربوط به معلوم کردن یکی از دو دوست که چیزی در آن مخفی شده است.
۳. مسألی است درباره یافتن عددی که کسی در ذهن اختیار کرده یا رابطه‌ای که عددی بر معنای آن تقسیم شده است.
۴. گاهی خواستن
۵. گوناگون
۶. بسته سوم یک عدد متناظر به سوم عدد ۳۷ می‌شود.
۷. توان به عدد
۸. مجموع مقسوم‌علیه‌های آن عدد به‌جز خود عدد از آن عدد بزرگ تر است مانند دو عدد
۹. مجموع مقسوم‌علیه‌های آن عدد به‌جز خود عدد از آن عدد کمتر باشد مانند هشت.
۱۰. مجموع مقسوم‌علیه‌های آن عدد به‌جز خود عدد یا عدد مساوی باشد مانند عدد شش.
۱۱. عدد گنگ به عددی که نمی‌توان آن را به صورت یک کسر تحول ناپذیر نوشت.
۱۲. عدد گویا

لطیفه اول در نسخه اصل

« لطیفه اول در خیایا:

در میان آنکه چیزی در دست پنهان کرده باشند، دانستن که در دست راست است یا در دست چپ.
فایده آن است که بگویند آن کسی که در دست خود چیزی پنهان کرده که بهت و وحشی که غالی است، سر عدد و دل گیرود بهت و وحشی که در روی چیزی پنهان است، چله و دل گیرود پس در اصل عدد دست (راست را بگیرد و عدد دست چپ را بر روی انفرید و آنچه حاصل شود، وی را نیکو کند پس از روی پیرنگ که پنج کسری مذهبانی، اگر گویند که مذهب، نجبی در دست راست بود، و الا در دست چپ.

«قطب الدين لا هيجي»

تألیفات

لطایف الحساب، در سرگرمی های ریاضی
قطب الدین لاهیجی در زمینه های
گونگون فکری آثاری از خود به جا
گذاشته است و تنها اثر ریاضی موجود
او لطایف الحساب است که به زبان
فارسی نوشته شده است. نسخه خطی
این کتاب به شماره ۵۶۹ در «کتابخانه
آستان رضوی» موجود و دارای مقدمه،
دو مقاله و خاتمه است. در ادامه به
شرح مطالب این کتاب می پردازیم:

مقدمه در «تذکار»^۱ بعضی از اعمال
حسابی، مقاله اول در بیان «خبایا»^۲
و «مضمضرات»^۳، مقاله دوم در بیان
«استعلام»^۴ انواع مجهولات عددی
از معلومات عددی، و خاتمه در ذکر
اعمال «مثنوعه»^۵ است. در ادامه به شرح
مطالب این کتاب می پردازیم:

مقدمه <<

مقدمه شامل یادآوری برخی اعمال، دستورها و مفهومی حساب است؛ از قبیل تناسب، نسبت تألیقی بین سه عدد، چگونگی یافتن عدد سوم با داشتن دو عدد از سه عدد متناسب؛ جذر و مجذور، کمب^۱ و مکعب^۲ و توان‌های بالاتر، عددهای گویا و گنگ، عددهای مسطح به‌صورت: (axb) و مجسم به‌صورت: $(axbxc)$ ، مربع به‌صورت: (a^2) ، «زاید»^۳ و «تقص»^۴، «عدد مساوی»^۵ (تام یا کامل)، «عدد اصم»^۶ یا مسدوده، «عدد منطبق»^۷ یا مفتوح یا گشاده (عدد غبراول).

۳۰ سال قبل؛ برهان

معمولاً یاد گذشته‌ها (نوستالژی) همیشه حس و حال خاصی را ایجاد می‌کند. از شماره نخست مجله برهان کمی بیش از ۳۰ سال می‌گذرد. این یعنی برهان مخاطبانی داشته که ۳۰ سال قبل نوجوانانی بوده‌اند و اکنون چه بسا دانش‌آموزانی دارند در سلسله جدید برهان قصد داریم به پاس تلاش دست‌اندرکاران قبلی و یادآوری خاطرات برای مخاطبان قدیم، نمونه‌ای از مطالب مجله در ۳۰ سال قبل را ارائه بدهیم که امیدواریم برای مخاطبان جدید هم جذابیت خاص خودش را داشته باشد.



این تصویر مربوط به روی جلد اولین شماره برهان در زمستان ۱۳۷۰ است. زمانی که واقعاً امکانات تصویرگری و چاپ به وفور و تنوع امروز وجود نداشت؛ زمانی که رایانه‌های قدیمی به تعداد خیلی اندک وجود داشتند و جای خالی یک مجله ریاضی برای دانش‌آموزان و دبیران ریاضی دبیرستان‌ها احساس می‌شد. با سختی‌های فراوان و تلاش‌های سردبیر محترم وقت، جناب آقای حمیدرضا امیری و بزرگانی چون استاد شادروان پرویز شهریار، چاپ مجله برهان به صورت سیاه و سفید کلید خورد. تصویر جلد ترکیبی از نمادهای ریاضی سیگما، رادیکال، دلتا و... اثر خانم سوسن نصیری است.



در شماره ۳، کتاب «ورزیدگی در ریاضیات» نوشته کاروش، شامل ۱۴۰ مسئله ریاضی، ترجمه مرحوم عبدالحسین مصحفی و کتاب «فطریه اعداد» نوشته جکسون، ترجمه اکبر حسینی معرفی شده‌اند.



این تصویر جلد شماره ۴ برهان در پاییز ۱۳۷۱ است. در این تصویر یکی از اثبات‌های قضیه فیثاغورس توسط فضل میریزی، ریاضی‌دان بزرگ ایرانی قرن چهارم هجری قمری، ارائه شده است.

در شماره ۲، احمد قندهاری در مطلبی به آموزش «دنباله‌های حسابی» و ارائه نکته‌های مربوط به آزمون سراسری (کنکور) آن پرداخته است.

مسئله‌های مسابقه‌ای

سید محمد رضا هاشمی موسوی

مسئله‌های مسابقه‌ای

می‌دانیم هر عدد طبیعی که برابر مجموع مقسوم‌علیه‌های مثبت و کوچک‌تر از خودش باشد، عدد «تام» (کامل) است؛ مانند:

۶ و ۲۸ و ۴۹۶ و ۸۱۲۸ و ...
اگر عددهای تام را به مبنای ۲ تغییر مینا دهیم، ثابت کنید:

الف) تعداد صفرها یک واحد کمتر از یک‌هاست.

ب) تعداد یک‌ها دنباله عددهای اول است؛ و نشان دهید:

$$2^{p-1}(2^p - 1) = \underbrace{111\dots 1}_{p-1 \text{ مرتبه}} \underbrace{000\dots 0}_p$$

ج) آیا تمامی عددهای تام به ترتیب به این روش قابل تولید هستند؟ (حدس) (ارجاع شماره ۱۱۷ ص ۳ جلد)

د) برای این ایده در صورت نادرستی حدس چند مثال نقض می‌تواند وجود داشته باشد؟

۲. ثابت کنید معادله زیر که در واقع تعمیمی از قضیه بزرگ فرما است، همیشه جواب دارد و یک سری جواب عمومی را تعیین کنید.

$$x^m + y^m = z^m \text{ و } (m, n) = 1$$

اشاره

از آنجا که مسئله‌های مسابقه‌ای و جایزه‌دار همیشه چالش برانگیزند و موجب کنکاش و پژوهش می‌شوند، مقرر شد از شماره ۱۲۳ به صورت پی‌درپی این گونه مسئله‌ها تکرار شوند تا بین دانش‌آموزان و معلمان عزیز برای پژوهش انگیزه‌هایی ایجاد کنند و در آینده شاهد مدال‌آوران المپیادهای ریاضی جهانی و پژوهشگران در عرصه علم و دانش ریاضیات باشیم.

لازم به ذکر است، ارسال این گونه مسائل و حل کامل آن‌ها از طرف شما می‌تواند راه‌گشای این طریق چنجالی، و کنکاشی باشد.

در خاتمه متذکر می‌شوم، زمان پاسخ‌گویی به این مسائل (مسائل مسابقه‌ای و مسائل جایزه‌دار) تا شماره آتی است که حل و پاسخ کامل آن‌ها ارائه خواهد شد. سردبیر محترم و هیئت تحریریه، به آنان که حل و پاسخ کامل را ارائه کنند، گواهی افتخاری اعطا خواهند کرد.

دانش‌آموزان گرامی پاسخ‌های خود را به رایانامه مجله بفرستید:

borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir

مسئله جایزه‌دار

جایزه نقدی

ثابت کنید برای $n > 2$ معادله مربوط به قضیه بزرگ فرما:

$$x^n + y^n = z^n \quad (1)$$

حالت خاصی از یک خم بیضوی (Elliptic Curve) به صورت عمومی زیر است:

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (2)$$

توجه ۱. اثبات این مسئله، یعنی تحویل معادله (۱) به معادله (۲)، در واقع معادل است با اثبات قضیه بزرگ فرما به روش تحویل.

توجه ۲. معادله (۱) (معادله

مربوط به قضیه بزرگ فرما) در رمزنگاری به کار گرفته شده است و از راه حل اثبات قضیه فرما توسط خم‌های بیضوی در تولید رمزارزها، مانند بیت‌کوین (BTC)، اتریوم و...

استفاده شده است (معادله خاص $b=c=0$ ، $a=1$ به ازای $y^2 = x^3 + 7$ مشهور به رمزارز بیت‌کوین و اتریوم است). در واقع خم بیضوی و الگوریتم‌ها و امضای دیجیتال از کاربردی‌ترین فرایندهای رمزنگاری به‌روز است.

(امروزه «خم بیضوی» که در تولید رمزارزها نقش اساسی دارد به «پول نو» شهرت دارد.)

برای آشنایی

۶۴

شماره ۱۲۳ | تابستان ۱۴۰۲



مجله

رشد برهان متوسطه دوم
برای رشد و تعالی دانش ریاضی

فراخوان مجله رشد برهان متوسطه دوم

۱۴۰۱-۱۴۰۲
(متوسطه دوم)

دانش آموزان متوسطه دوم
به صورت فصلنامه منتشر
می شود. بدین وسیله از همه
دبیران محترم و دانش آموزان
عزیز و علاقه مندان گرامی دعوت
می شود به منظور نشر دانش
ریاضی و تحقق اهداف عالی
آموزش، مطالب خود را در هر یک از موضوعات و
قالب های زیر، از طریق پیوند یا رمزینه داده شده، به
صندوق پستی مجله برهان ریاضی متوسطه دوم
بفرستید. لازم به ذکر است، برای مقالات
پذیرش شده گواهی چاپ صادر
خواهد شد.

به مقالات برتر
جوایز ارزشمند تعلق
خواهد گرفت.

موضوعات

- کاربرد ریاضیات
- آموزش آسان مفاهیم ریاضی
- ریاضیات در ایران و جهان
- نکات ناب ریاضی
- ریاضیات در طبیعت و هستی
- شگفتی های ریاضیات
- خلق بازی به کمک ریاضی
- روش های ابتکاری در حل مسئله
- سایر موضوع های مرتبط با ریاضی و کتاب های درسی ریاضی

قالب ها

- مقالات علمی
- تجربیات و خاطرات
- داستان، شعر و طنز
- سرگرمی
- معرفی کتاب، نرم افزار و وبگاه های ریاضی
- معرفی تلاشگران عرصه علم ریاضی



برای توضیحات بیشتر رمزینه را بپوش
یا به نشانی اینترنتی زیر مراجعه کنید:
<https://www.roshdmag.ir/u/3ao>
برای اشتراک: <https://www.roshdmag.ir/u/2sg>
رایانامه: borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir





برگ‌ها از بس به رغبت
دست‌افشانی‌کنند
سرو نزدیک است گردد
پایکوبان از خزان
صائب تبریزی

$$r = \left(\frac{100}{100 + \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right)^4} \right) - \left(2 \sin(v\theta) - \frac{1}{2} \cos(r + \theta) \right)$$

معادله طبیعی برگ | $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{2}$